张永德／主编

物理学大题典

力学 1

上册

A Grand Dictionary of Physics Problems And Solutions

强元棨　程稼夫／编著



科学出版社
www.sciencep.com
中国科学技术大学出版社

《物理学大题典》编委会

前　　言

物理学，由于它在自然科学中所具有的主导作用，在人类文明史中，特别是在人类物质文明史中，占据着极其重要的地位.经典物理学的诞生和发展曾经直接推动了欧洲物质文明的长期飞跃.20世纪初诞生并蓬勃发展起来的近代物理学，又造就了上个世纪物质文明的辉煌.自20世纪末到21世纪初的当前时代，物理学正在以空前的活力，广阔深入地开创着向化学、生物学、生命科学、材料科学、信息科学和能源科学渗透和应用的新局面.在本世纪里，物理学再一次直接推动新一轮物质文明飞跃的伟大进程已经开始.

但是，发展到目前的物理学宽广深厚，累积的知识浩瀚无垠.教授和学习物理学都是一个相当艰苦而漫长的过程.在这个漫长过程的许多环节中，做习题是其中必要而又重要的环节.做习题是巩固所学知识的必要手段、是深化拓展所学知识的重要练习，是锻炼科学思维的体操.习题对于教师和学生双方都是重要的.

然而，和习题有关的事都是很不起眼的事.在有些人眼光中，求解和编纂练习题是全部教学活动中相当次要的环节.习题集也确实是所有著作中"最低层"的，大约只有"傻子"们才肯做的事."聪明人"常会找诸如习题集不应当出之类的理由，光明正大地规避掉.

但是，在教授和学习过程中，只要是需要的，都是合理的，也总得有人去做才行.于是我们编委会的这些人，本着甘为孺子牛的精神，平时在科研和教学中一道题一道题地积累，现在又一道题一道题地编审，花费了大量时间做着这种不起眼的事.大家觉得，这件事终究是教与学双方共同需要的，也就是有益的.正如一个城市基础建设中，不能都去做地面上的摩天大楼和纪念碑等"抢眼球"的事，也还需要做诸如修建马路、下水道等基础设施的事.

这套《物理学大题典》的前身是中国科学技术大学出版社出版的《美国物理试题与解答》丛书(7卷).那套丛书于20世纪80年代后期由张永德发起并组织完成，内容包括普通物理的力、热、光、电、近代物理到四大力学的全部基础物理学.出版时他选择了"中国科学技术大学物理辅导班主编"的署名方式.自那套丛书出版之后，虽历经10余年，仍然有不断的需求，于是就有了现在的这套丛书——《物理学大题典》.

现在这套《物理学大题典》丛书的内容，除继续涵盖力、热、光、电、近代物理到四大力学全部基础物理学内容之外，还包括了原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学和量子信息物理等内容.就是说，追踪不断发展的科学轨迹，现在这套丛书仍旧大体涵盖了综合性大学全部本科物理课程的内容.

这次重新编审中，大部分教师仍为原来的，但也增加了一些新的成员.这次出版经大家着力重订和大量扩充，又耗时近两年而成.总计起来，这套丛书前后历时近20年，耗费了30余位富有科研和教学经验的教授、近150位20世纪80年代和现在的研究生及高年级本科生的巨大辛劳.丛书确实是大家长期共同劳动的结晶.

《物理学大题典》中包括了大量的美国物理试题. 一般说来,美国物理试题涉及的数学并不繁难,但却或多或少具有以下特色:内容新颖,富于"当代感";思路灵活,涉及面宽广;方法和结论简单而实用,试题往往涉及新兴和边沿交叉学科;不少试题本身似乎显得粗糙但却抓住了物理本质,显得"物理味"很足. 纵观这些,我们深切感到,这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及思维方式的特色. 惟鉴于此,我们不惮繁重,集众多人力而不怯,耗漫长岁月而不辍,还是值得的.

至于这次扩充修订所增添的大量题目,也是本着这种精神,摘自大家各自的科研工作成果,或是来自各人的教学心得,实是点滴聚成.

这里要强调指出,对于学生,确实有一个如何正确使用习题集的问题. 有的同学,有习题集也不参考,咬牙硬顶,一个晚上自习时间只做了两道题. 这种精神诚应嘉勉,但效率不高,也容易挫伤学习积极性,不利于培养学习兴趣;也有的同学,逮到合适解答提笔就抄,这样做是浮躁的、不踏实的. 这两种学习方法都不可取. 我们认为,正确使用习题集是一个"三步曲"过程:遇到一道题,先自己想一想,想出来了自己做最好;如果认真想了一些时间还想不出来,就不要老想了,不妨翻开习题集找答案,看懂之后,合上书自己把题目做出来;最后一步,要是参考习题集做出来的,就用一两分钟时间分析解剖一下,找找自己存在的不足,今后注意. 如此"三步曲"下来,就既有效率又踏实了. 本来,效率和踏实是一对矛盾,在这类"治学小道"之下,它俩就统一起来了. 总之,正确使用之下的习题集肯定能够成为学生们有用的"爬山"工具.

丛书这次重订扩充工作是在科学出版社胡升华博士的倡议和支持下进行的. 没有他的推动,这套丛书面世是不可能的. 同时,在这次重订扩充工作里,我们得到了中国科学技术大学的部分教学资助,以及编委会中郭光灿和周又元两位院士和刘万东教授的支持. 对于这些宝贵的支持,谨表示深切感谢.

丛书的力学卷共计 12 章,题目总数由原来 413 道增扩为 1070 道. 原《美国物理试题与解答 · 力学》由强元棨、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田编,参加解题的人有马千乘、邓悠平、杨仲侠、季澍、杜英磊、杨德田、王平、李晓平、王琛、强元棨、陈伟、斯其苗、陈兵、李泽华、肖旭东、任勇、董志华、伍昌鸿、杨永安、何小东、黄剑辉、程稼夫、郭志椿. 原力学卷题目来自美国几所著名大学(包括普林斯顿大学、麻省理工学院、哥伦比亚大学、加州大学伯克利分校、威斯康星大学、芝加哥大学、纽约州立大学布法罗分校)的试题和 CUSPEA 试题. 本卷对原力学卷作了大幅度的改写. 增加的题目来自强元棨《经典力学》(科学出版社,2003)上、下册全部习题(其中不少选自 E. A. Desloge《Classical Mechanics》、周衍柏《理论力学教程》等,部分是自拟的). 此外,还选自 D. A. Wells《Theory and Problems of Lagrangian Dynamics》、B. B. 巴蒂金、И. И. 托普蒂金《电动力学习题集》、E. Г. 维克斯坦《电动力学习题汇编》和 R. 高特里奥、W. 萨文《近代物理学理论和习题》等.

编审者谨识

2005 年 5 月

目　　录

下　册

第一章　质点运动学

1.1　速度、加速度、运动学方程和轨道

1.1.1　一物体做直线运动，它的运动学方程为

$$x = at + bt^2 + ct^3$$

其中 a、b、c 均为常量. 求：

(1) $t=1\sim2$ 期间的位移，平均速度和平均加速度；

(2) $t=2$ 时的速度和加速度.

解　(1) $\Delta x = x(2)-x(1)$

$$=(2a+4b+8c)-(a+b+c)$$

$$=a+3b+7c$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a + 3b + 7c$$

$$\bar{a} = \frac{v(2)-v(1)}{\Delta t} = \frac{(a+4b+12c)-(a+2b+3c)}{1} = 2b + 9c$$

(2) $v(2)=(a+2bt+3ct^2)|_{t=2}=a+4b+12c$

$a(2)=(2b+6ct)|_{t=2}=2b+12c$

1.1.2　一质点沿 x 方向做直线运动，t 时刻的坐标为 $x=5t^2-t^3$，式中 x 以米计，t 以秒计. 求：

(1) 第 4 秒内的位移和平均速度；

(2) 第 4 秒内质点所走过的路程.

解　(1) $\Delta x=x(4)-x(3)=(80-64)-(45-27)=-2\text{m}$

$$\bar{v} = \frac{x(4)-x(3)}{4-3} = -2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2) 先求出速度变号的时刻.

$$v = 10t - 3t^2$$

速度变号的时刻 $v=0$，此时 $t=\dfrac{10}{3}\text{s}$.

第 4 秒内走过的路程

$$s= \left|x\left(\frac{10}{3}\right) - x(3)\right| + \left|x(4) - x\left(\frac{10}{3}\right)\right|$$

$$= |18.52 - 18| + |16 - 18.52| = 3.04\text{m}$$

1.1.3　一质点 $t=0$ 时从原点出发，以恒定速率向 x 正方向沿轨道 $x^2+(y-r)^2=r^2$ 运动，其中 r 为常量. T 时又回到原点. 求：

(1) $t=\frac{1}{3}T$ 时的位矢、速度和加速度；

(2) 在 $t=0$ 至 $t=\frac{1}{3}T$ 期间，质点的位移、平均速度和平均加速度.

解 (1) 由轨道方程可知，质点做圆周运动. 再由 $t=0$ 时从原点出发，以恒定速率向 x 正方向运动. 可直接写出质点的运动学方程为

$$x = r\sin\omega t$$
$$y = r(1-\cos\omega t)$$

其中 ω 为常量.

运动学方程也可用解微分方程得到，方法如下：

$$y = r - \sqrt{r^2-x^2}$$

(考虑到 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，开方时取负号)

$$\dot{y} = +\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\dot{x}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{x}^2+\frac{x^2\dot{x}^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2\dot{x}^2}{r^2-x^2} = v^2$$

这里 v 为速率，是常量.

由于 $t=0$ 时 $x=0$，且$\dot{x}>0$，所以

$$r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\sqrt{r^2-x^2}$$

(开方时取正号)

$$\int_0^x \frac{r\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$x = r\sin\left(\frac{v}{r}t\right)$$

$$y = r - r\cos\left(\frac{v}{r}t\right) = r\left[1-\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right]$$

由 $t=T$ 时 $x=0$、$y=0$，可得

$$x = r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y = r\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$$

$t=\frac{1}{3}T$ 时，

$$x = r\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$y = r\left[1-\cos\frac{2\pi}{3}\right] = \frac{3}{2}r$$

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{T}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}r\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}r\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i}+r\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{2\pi r}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i}+\frac{2\pi r}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=-\frac{4\pi^2 r}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i}+\frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{T}{3}\right)=-\frac{\pi r}{T}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}\pi r}{T}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}\left(\frac{T}{3}\right)=-\frac{2\pi^2 r}{T^2}(\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

(2)

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{3}T\right)-\boldsymbol{r}(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}r\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}r\boldsymbol{j}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\frac{1}{3}T-0}=\frac{3r}{T}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{v}(0)=\frac{2\pi r}{T}\boldsymbol{i}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{3}T\right)-\boldsymbol{v}(0)}{\frac{1}{3}T-0}=-\frac{3\pi r}{T^2}(3\boldsymbol{i}-\sqrt{3}\boldsymbol{j})$$

1.1.4　一质点从位矢为 $\boldsymbol{r}(0)=4\boldsymbol{j}$ 的位置以初速度 $\boldsymbol{v}(0)=4\boldsymbol{i}$ 开始运动，其加速度与时间的关系为 $\boldsymbol{a}=3t\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$. 所有的长度以米计，时间以秒计. 求：

(1) 经过多长时间质点到达 x 轴；

(2) 到达 x 轴时的位置.

解

$$\boldsymbol{v}(t)=\int_0^t \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{v}(0)=\left(4+\frac{3}{2}t^2\right)\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(0)+\int_0^t \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t=\left(4t+\frac{1}{2}t^3\right)\boldsymbol{i}+(4-t^2)\boldsymbol{j}$$

(1) 当 $4-t^2=0$，即 $t=2\mathrm{s}$ 时，到达 x 轴.

(2) $t=2\mathrm{s}$ 到达 x 轴时，位矢为

$$\boldsymbol{r}(2)=12\boldsymbol{i}$$

即质点到达 x 轴时的位置为 $x=12\mathrm{m}$，$y=0$.

1.1.5　质点沿直线从静止开始运动，其加速度与时间的关系如图 1.1 所示，作出速度与时间的关系及位置与时间关系图.

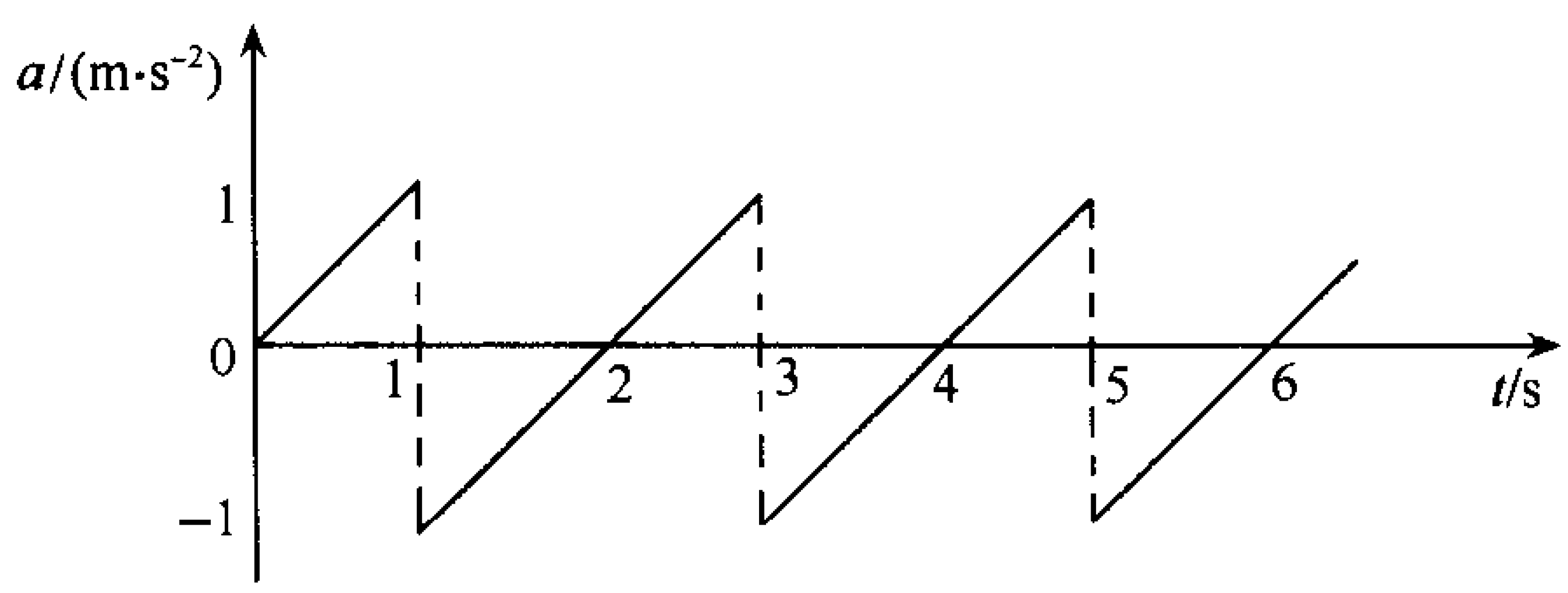


图 1.1

解

$$a(t)=\begin{cases} t & 0\leqslant t<1 \\ -2+t & 1<t<3 \\ -4+t & 3<t<5 \\ -6+t & 5<t<7 \\ \cdots \end{cases}$$

$a(t)$可以是不连续的曲线，$v(t)$、$x(t)$的曲线一定是连续的，由此可定出积分常数. 其结果如下：

$$v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 2-2t+\frac{1}{2}t^2 & 1\leqslant t\leqslant 3 \\ 8-4t+\frac{1}{2}t^2 & 3\leqslant t\leqslant 5 \\ 18-6t+\frac{1}{2}t^2 & 5\leqslant t\leqslant 7 \\ \cdots \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} \frac{1}{6}t^3 & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ -1+2t-t^2+\frac{1}{6}t^3 & 1\leqslant t\leqslant 3 \\ -10+8t-2t^2+\frac{1}{6}t^3 & 3\leqslant t\leqslant 5 \\ -35+18t-3t^2+\frac{1}{6}t^3 & 5\leqslant t\leqslant 7 \\ \cdots \end{cases}$$

v-t 和 x-t 曲线可由上述 $v(t)$、$x(t)$的表达式逐点画出（略）.

1.1.6　一质点以恒定的径向速度分量$\dot{r}=4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$、横向速度分量与矢径成正比，比例系数为 3rad/s，在一平面内运动. 当质点离出发点 4m 时，它的速度及加速度的大小为何值？

解　$\dot{r}=4, r\dot{\varphi}=3r$

取 $t=0$ 时 $r=0$、$\varphi=0$，积得

$$r=4t,\qquad \varphi=3t$$

$$x=r\cos\varphi=4t\cos 3t$$

$$y=r\sin\varphi=4t\sin 3t$$

$$\dot{x}=4\cos 3t-12t\sin 3t$$

$$\dot{y}=4\sin 3t+12t\cos 3t$$

$$\ddot{x}=-24\sin 3t-36t\cos 3t$$

$$\ddot{y}=24\cos 3t-36t\sin 3t$$

当质点离出发点直线距离为 4m 时，

$$x^2+y^2=4^2=16$$

而由 $x(t)$、$y(t)$得

$$x^2+y^2=16t^2$$

两式相比得 $t=1\text{s}$.

$$v(1)=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\Big|_{t=1}=\sqrt{16+144t^2}\,|_{t=1}=4\sqrt{10}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a(1)=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\Big|_{t=1}=\sqrt{(24)^2+(36t)^2}\,|_{t=1}=12\sqrt{13}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

如 4m 是指沿轨道的距离，则需由

$$s=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t \text{ 或}\int_0^t\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\mathrm{d}t$$

求出 $s(t)$. 再由 $s(t_1)=4$ 求出 t_1，然后再求 $v(t_1)$、$a(t_1)$.

1.1.7 质点的运动学方程为：(1) $\boldsymbol{r}=(4t+5t^2)\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$；(2) $\boldsymbol{r}=(2+3t)\boldsymbol{i}-(2t-3t^2)\boldsymbol{j}$. 求两运动的轨迹.

解 (1) $x=4t+5t^2$，$y=-5$

运动轨迹为 $y=-5$

(2) $x=2+3t$，$y=-(2t-3t^2)$

两式消去 t，即得轨迹方程为

$$(x-2)^2-2(x-2)-3y=0.$$

1.1.8 一质点沿直线运动，其速度为 $v=At-Bx$，其中 A、B 均为常数. 当 $t=0$ 时，$x=0$. 试求位置坐标与 t 的函数关系式及 $t=0$ 时的加速度 a_0.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=At-Bx$

先解齐次线性方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-Bx$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-B\mathrm{d}t$$

$$x=Ce^{-Bt}$$

用常数变易法解原非齐次线性方程

$$x=C(t)\mathrm{e}^{-Bt}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-Bt}-BC\mathrm{e}^{-Bt}$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-Bt}-BC\mathrm{e}^{-Bt}=At-BC\mathrm{e}^{-Bt}$$

$$\mathrm{d}C=Ate^{Bt}\mathrm{d}t$$

积分得

$$C(t)=\frac{A}{B}\left(t-\frac{1}{B}\right)\mathrm{e}^{Bt}+D$$

$$x=\left[\frac{A}{B}\left(t-\frac{1}{B}\right)\mathrm{e}^{Bt}+D\right]\mathrm{e}^{-Bt}=\frac{A}{B}\left(t-\frac{1}{B}\right)+D\mathrm{e}^{-Bt}$$

由 $t=0$ 时 $x=0$ 定 D，得 $D=\dfrac{A}{B^2}$.

$$x=\frac{A}{B^2}(e^{-Bt}-1)+\frac{A}{B}t$$

$$v=-\frac{A}{B}e^{-Bt}+\frac{A}{B}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=Ae^{-Bt}$$

$t=0$ 时,$a=a_0=A$.

也可直接从 $v=At-Bx$ 对 t 求导,代入 $t=0$ 时的值得

$$a_0=\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=A-B\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$$
$$=A-B(At-Bx)|_{t=0,x=0}=A$$

1.1.9 某固体燃料火箭的垂直加速度为

$$a=ke^{-bt}-cv-g$$

式中 b、c、k 均为常数,v 是获得的垂直速度,g 是重力加速度.在大气中运行时,g 被视为常量.试求火箭发射后 t 秒时的垂直速度.

解 先解齐次线性常微分方程

$$\ddot{x}+c\dot{x}=0$$

即
$$\dot{v}+cv=0$$

得
$$v=Ae^{-ct}$$

用常数变易法解

$$\dot{v}+cv=ke^{-bt}-g$$

$$\dot{v}=\dot{A}e^{-ct}-cAe^{-ct}$$

$$\dot{A}e^{-ct}-cAe^{-ct}+cAe^{-ct}=ke^{-bt}-g$$

$$dA=[ke^{(c-b)t}-ge^{ct}]dt$$

$$A=\frac{k}{c-b}e^{(c-b)t}-\frac{g}{c}e^{ct}+B$$

$$v=\frac{k}{c-b}e^{-bt}-\frac{g}{c}+Be^{-ct}$$

由 $t=0$ 时 $v=0$ 定出

$$B=\frac{g}{c}-\frac{k}{c-b}$$

$$v=\frac{g}{c}(e^{-ct}-1)+\frac{k}{c-b}(e^{-bt}-e^{-ct})$$

解此非齐次线性微分方程也可用积分因子法,也可用相应的齐次线性微分方程的通解加非齐次方程的特解的方法,可以直接写出非齐次方程的特解为

$$v=Ae^{-bt}-\frac{g}{c}$$

代入方程定出

$$A=\frac{k}{c-b}$$

1.1.10　图 1.2 中机构包括一根固定的弯成曲线的杆和一根用轴钉可绕 O 点转动的动杆 OC. 弯杆曲线的方程为 $r=20\sin 2\varphi$. 木块 A 和 B 钉在一起，A、B 分别沿弯杆和直杆 OC 滑动. 若 OC 以恒定角速度 5rad/s 做逆时针转动. 求木块 A、B 在 $r=10\text{cm}$ 处时的速度和加速度.

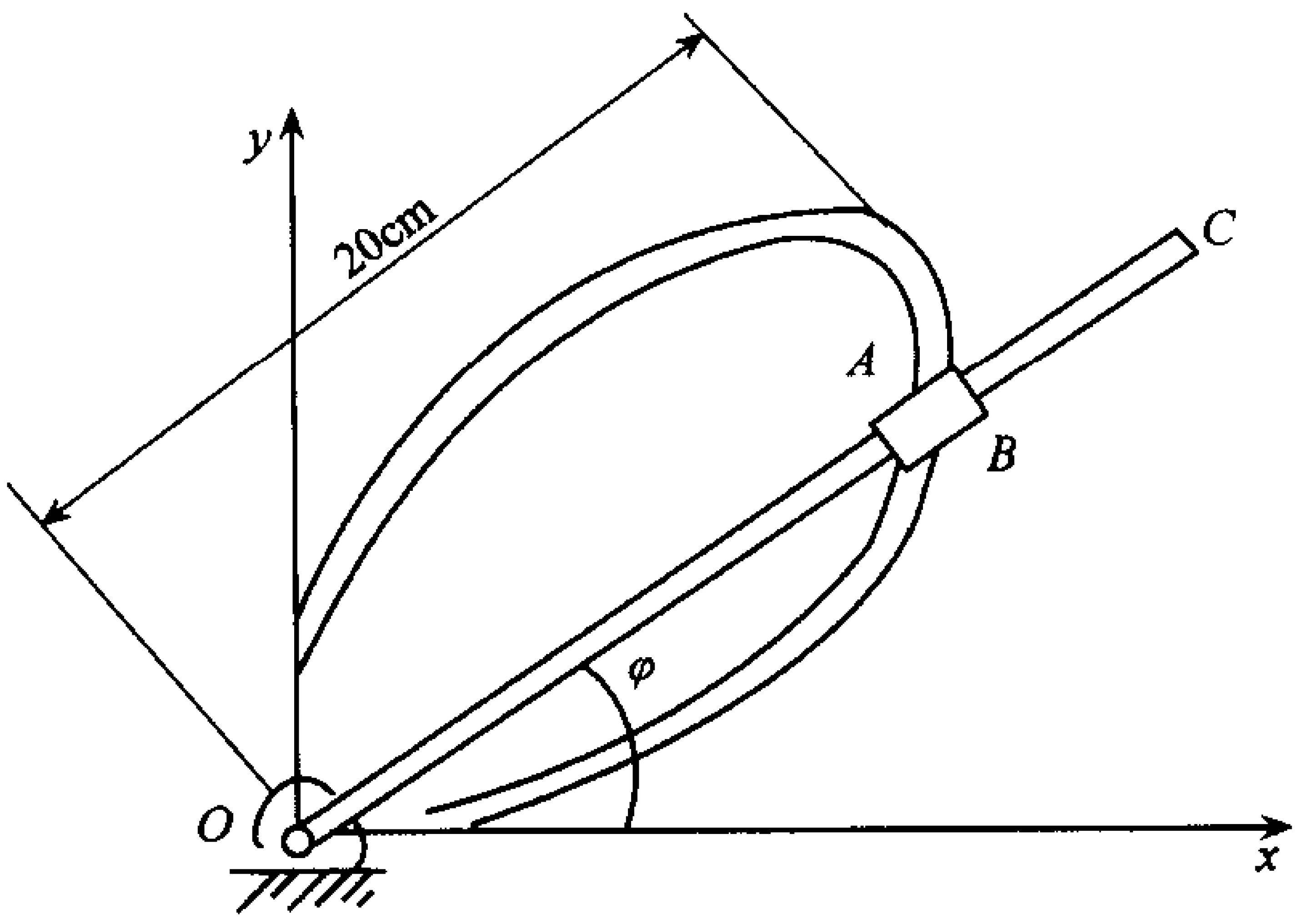


图 1.2

解　轨道方程为

$$r = 20\sin 2\varphi$$

$r=10\text{cm}$ 时，$2\varphi=\arcsin\dfrac{10}{20}=\dfrac{\pi}{6}$ 及 $\dfrac{5\pi}{6}$

$$\dot{\varphi}= 5\text{rad/s}, \ddot{\varphi} = 0$$

$$\dot{r}= 40\cos 2\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\ddot{r} =- 80\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 + 40\cos 2\varphi\ddot{\varphi} =- 80\sin 2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$$

在 $r=10\text{cm}$、$2\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 处时，木块 A、B 的速度和加速度分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \\ &= 40\cos\frac{\pi}{6}\times 5\boldsymbol{e}_r + 10\times 5\boldsymbol{e}_\varphi = 100\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_r + 50\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi \\ &= \left(- 80\sin\frac{\pi}{6}\times 5^2 - 10\times 5^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(10\times 0 + 2\times 40\cos\frac{\pi}{6}\cdot 5\times 5\right)\boldsymbol{e}_\varphi \\ &=- 1250\boldsymbol{e}_r + 1000\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

在 $r=10\text{cm}$、$2\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$ 处时，木块 A、B 的速度、加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = 40\cos\frac{5\pi}{6}\times 5\boldsymbol{e}_r + 10\times 5\boldsymbol{e}_\varphi =- 100\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_r + 50\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \left(- 80\sin\frac{5\pi}{6}\times 5^2 - 10\times 5^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(10\times 0 + 2\times 40\cos\frac{5\pi}{6}5\times 5\right)\boldsymbol{e}_\varphi \\ &=- 1250\boldsymbol{e}_r - 1000\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

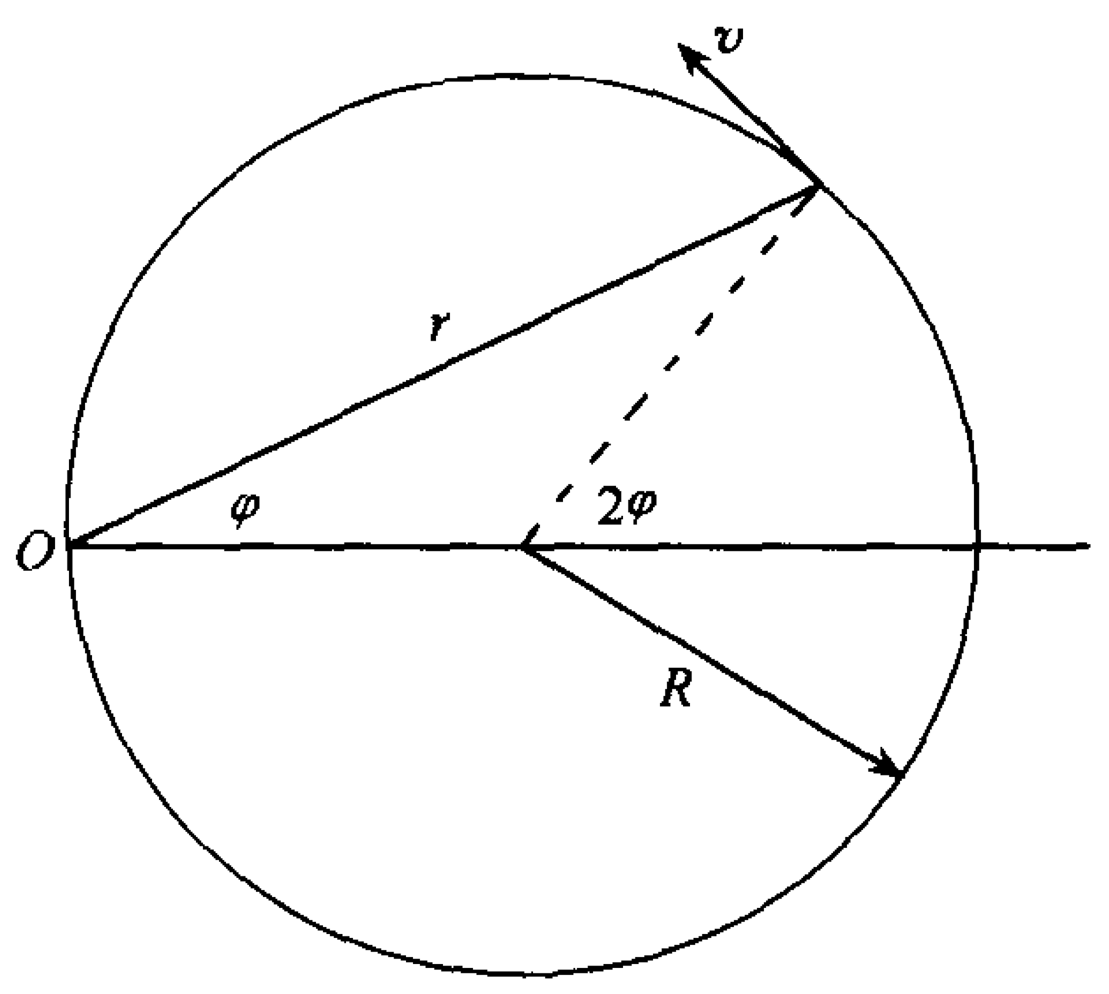


图 1.3

1.1.11 质点以恒定速率 v 沿图示的半径为 R 的圆形轨道运动，用图 1.3 示的极坐标写出质点在 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 的各个位置时的速度和加速度.

解 由图 1.3 示的轨道可写出轨道方程为

$$r = 2R|\cos\varphi|$$

即

$$r=\begin{cases}2R\cos\varphi & 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ -2R\cos\varphi & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\\ 2R\cos\varphi & \dfrac{3\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\end{cases}$$

$$\dot{r}=\begin{cases}-2R\sin\varphi\dot{\varphi} & 0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\\ 2R\sin\varphi\dot{\varphi} & \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}\\ -2R\sin\varphi\dot{\varphi} & \dfrac{3\pi}{2}<\varphi\leqslant 2\pi\end{cases}$$

由恒定速率 v，可写出

$$\frac{v}{R}=2\dot{\varphi}\qquad 即\qquad \dot{\varphi}=\frac{v}{2R}$$

$$2\ddot{\varphi}=0,\qquad 故\qquad \ddot{\varphi}=0$$

$$\ddot{r}=\begin{cases}-2R\cos\varphi\dot{\varphi}^2 & 0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\\ 2R\cos\varphi\dot{\varphi}^2 & \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}\\ -2R\cos\varphi\dot{\varphi}^2 & \dfrac{3\pi}{2}<\varphi\leqslant 2\pi\end{cases}$$

注意：在 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$，$\dot{r}$、$\ddot{r}$ 无定义，这里的速度、加速度不能用其极坐标表达式，但这里 $\dot{r}^2$ 是有定义的，速率仍是连续的. 用自然坐标描述加速度，在这两处，$a_\tau=0$，$a_n=\infty$.

在 $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}<\varphi\leqslant 2\pi$ 的 $\boldsymbol{v}$ 、$\boldsymbol{a}$ 的极坐标表达式的计算略.

显然，此题借助于速度、加速度的自然坐标表达式来写它们的极坐标表达式更简便.

1.1.12 一质点沿心脏线 $r=2(1+\cos\varphi)$ 运动，在 $0<\varphi<180°$ 期间，$\dot{r}=-2$. 求在此期间质点的速度和加速度.

解
$$r=2(1+\cos\varphi),\qquad \dot{r}=-2,\qquad \ddot{r}=0$$

$$\dot{r}=-2\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}=-2,\qquad \dot{\varphi}=\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\ddot{\varphi}=-\frac{1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}=-\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

$$v = \dot{r}\,e_r + r\dot{\varphi}\,e_\varphi = -2e_r + \frac{2(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}e_\varphi$$

$$\begin{aligned} a &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})e_\varphi \\ &= \left[0 - 2(1+\cos\varphi)\frac{1}{\sin^2\varphi}\right]e_r \\ &\quad + \left[2(1+\cos\varphi)\left(-\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right) + 2\cdot(-2)\frac{1}{\sin\varphi}\right]e_\varphi \\ &= -\frac{2}{1-\cos\varphi}e_r - \frac{2(2-\cos\varphi)}{(1-\cos\varphi)\sin\varphi}e_\varphi \end{aligned}$$

1.1.13 对于上题所述的质点运动,求速度平行于 x 轴时的 φ 值及在此位置时的速度、加速度的大小.

解 速度平行于 x 轴时,$\dot{y}=0$,

$$y = r\sin\varphi = 2(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2(1+\cos\varphi)\cos\varphi\,\dot{\varphi} - 2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi} \\ &= 2(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1)\,\dot{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

因为 $\dot{\varphi} = -2 \neq 0$,$\therefore 2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$

得 $\varphi = 60°$ 及 $180°$.

180°不在所述运动范围内,应舍去.

在 $\varphi=60°$,用上题结果得

$$v = -2e_r + \frac{2(1+\cos 60°)}{\sin 60°}e_\varphi = -2e_r + 2\sqrt{3}\,e_\varphi$$

$$v = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$a = -\frac{2}{1-\cos 60°}e_r - \frac{2(2-\cos 60°)}{(1-\cos 60°)\sin 60°}e_\varphi = -4e_r - 4\sqrt{3}\,e_\varphi$$

$$a = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$$

1.1.14 离水面高度为 h 的岸上用绳索拉船靠岸,人以恒定的速率 v_0 拉绳,将船的速度、加速度表示成船离岸的水平距离 L 的函数.

解 方法一:直线运动即已知轨道,又知道速度的一些信息的解法.

$$r^2 = h^2 + L^2$$

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

今知 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v_0$,所以

$$v = -\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L}v_0 \qquad (\text{向左为正})$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L^2}v_0\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + \frac{v_0}{L}\frac{2L}{2\sqrt{h^2+L^2}}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{h^2}{L^2\sqrt{h^2+L^2}}v_0\left(-\frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L}v_0\right) = \frac{h^2v_0^2}{L^3} \end{aligned}$$

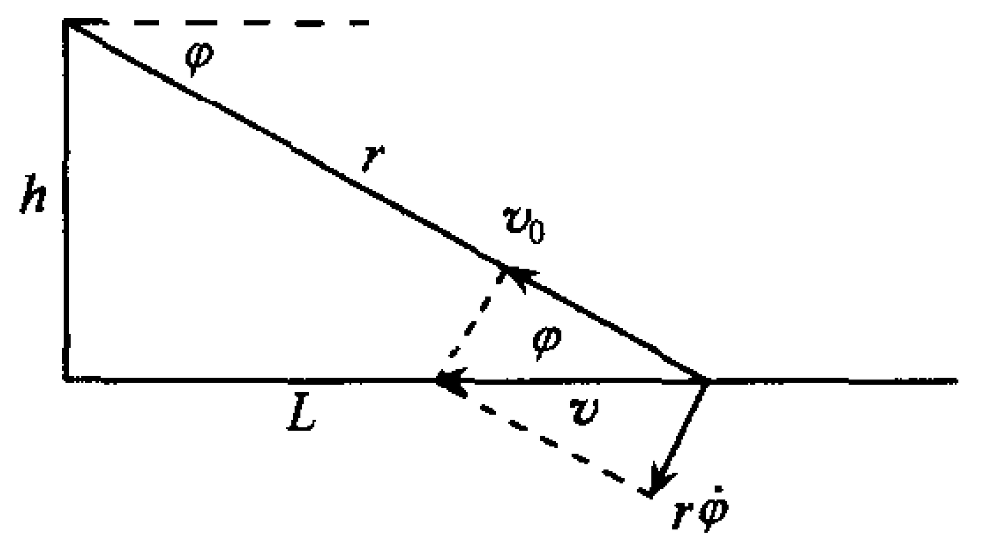


图 1.4

方法二：作为平面运动，已知轨道和速度的一个分量的解法.

由图 1.4 可知，$r\dot{\varphi}=v_0\tan\varphi$，已知$\dot{r}=-v_0$，所以

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2}=v_0\sec\varphi=\frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L}v_0$$

$$\ddot{r}=0$$

$$\dot{\varphi}=\frac{v_0}{r}\tan\varphi$$

$$\ddot{\varphi}=-\frac{v_0}{r^2}\dot{r}\tan\varphi+\frac{v_0}{r}\sec^2\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

代入$\dot{\varphi}$，经计算可得

$$\ddot{\varphi}=\frac{v_0^2}{r^2}\tan\varphi(2+\tan^2\varphi)$$

$$a=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)^2+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$$

代入$\ddot{r}$、$\dot{\varphi}$、$\dot{r}$、$r=\sqrt{h^2+L^2}$，$\tan\varphi=\dfrac{h}{L}$，可得

$$a=\frac{v_0^2h^2}{L^3}$$

1.1.15 杆以匀角速 ω_0 绕过其固定端 O 且垂直于杆的轴转动，在 $t=0$ 时，位于 O 点的小珠从相对于杆静止开始沿杆做相对于杆的加速度为 a_0 的匀加速运动. 求小珠相对于静系的速度、加速度与时间的关系.

解

$$r=\frac{1}{2}a_0t^2,\quad \dot{\varphi}=\omega_0$$

$$\dot{r}=a_0t,\qquad \ddot{r}=a_0,\qquad \ddot{\varphi}=0$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi=a_0t\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(\ddot{r}-r\,\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\,\dot{r}\,\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi\\&=\left(a_0-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2t^2\right)\boldsymbol{e}_r+2a_0\omega_0t\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

1.1.16 在同一竖直面内的同一水平线上的 A、B 两点分别以 30°、60°为发射角同时抛出两小球，欲使两小球相遇时都在自己轨道的最高点，已知在 A 点发射的小球发射速率 $v_{AO}=9.8\text{m/s}$，求 A、B 两点之间的距离 L.

解 $v_{AO}\sin30°-gt=0$

$v_{BO}\sin60°-gt=0$

其中 t 为相遇时间，$v_{AO}=9.8\text{m/s}$，$g=9.8\text{m/s}^2$

$$L=(v_{AO}\cos30°-v_{BO}\cos60°)t$$

解出

$$v_{BO}=\frac{v_{AO}\sin30°}{\sin60°}=5.7\text{m/s}$$

$$t=\frac{v_{AO}\sin30°}{g}=0.5\text{s}$$

$$L=(v_{AO}\cos30°-v_{BO}\cos60°)t=2.8\text{m}$$

1.1.17　在小丘上置一靶子，在炮位所在处看靶子的仰角为 α，炮与靶子间的水平距离为 L，向目标射击时炮身的仰角为 β，炮弹以什么初速度发射才能击中目标？

解　设靶离炮位的高度为 h，射中靶子所经历的时间为 t，

$$h=(v_0\sin\beta)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$L=(v_0\cos\beta)t$$

$$h=L\tan\alpha$$

可能得

$$v_0=\sqrt{\frac{gL\cos\alpha}{2\cos\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}}$$

1.1.18　一质点以恒定速率 $v=c$ 沿悬链线

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

(其中 a 为正值常数)运动，$t=0$ 时 $x=0$，且沿 x 轴负向运动. 求位矢、速度、加速度随时间变化的关系.

解

$$\dot{y}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\dot{x}=\dot{x}\text{sh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$c^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{x}^2\left\{1+\left[\text{sh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2\right\}=\dot{x}^2\left[\text{ch}\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2$$

$$\dot{x}=\pm c\,\text{sech}\left(\frac{x}{a}\right)$$

由 $t=0$ 时 $x=0$，$\dot{x}<0$，上式取负号，

$$\dot{x}=-c\,\text{sech}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\text{sech}\left(\frac{x}{a}\right)}=-\int_0^t c\mathrm{d}t$$

$$a\text{sh}\left(\frac{x}{a}\right)=-ct$$

$$x=a\text{arcsh}\left(-\frac{c}{a}t\right)=-a\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)$$

$$y=a\text{ch}\left(\frac{x}{a}\right)=a\text{ch}\left[-\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]=a\text{ch}\left[\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]$$

$$\boldsymbol{r}(t)=-a\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\boldsymbol{i}+a\text{ch}\left[\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]\boldsymbol{j}$$

令

$$p=\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right),\text{sh}p=\frac{c}{a}t,\text{ch}p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]=\frac{c}{a}\frac{1}{\text{ch}p}=\frac{c}{a}\frac{1}{\text{ch}\left[\text{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\mathrm{ch}\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]\right\}=\mathrm{sh}\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]$$

$$=\frac{c}{a}t\cdot\frac{c}{a}\frac{1}{\mathrm{ch}\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}=\frac{c^2t}{a^2\mathrm{ch}\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{1}{\mathrm{ch}\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}\left(-c\boldsymbol{i}+\frac{c^2}{a}t\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{c^3t}{a^2\mathrm{ch}^3\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}\boldsymbol{i}+\frac{c^2\left\{1-\mathrm{th}^2\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]\right\}}{a\mathrm{ch}\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}$$

在上述 $\boldsymbol{a}(t)$的计算中用了

$$\mathrm{th}^2\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]=\frac{\mathrm{sh}^2\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}=\frac{\frac{c^2}{a^2}t^2}{\mathrm{ch}^2\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{c}{a}t\right)\right]}$$

1.1.19 某质点做平面运动,其径向速度分量 $\dot{r}=c_1$,横向速度分量 $r\dot{\varphi}=c_2$,c_1、c_2 均为正值常量. $t=0$ 时加速度的横向分量 $a_\varphi=\frac{c_1c_2}{b}$,$b$ 为正值常量,$\varphi=0$. 求运动学方程和 $t=0$ 时加速度的径向分量.

解

$$\dot{r}=c_1,\qquad r=c_1t+c$$

$$r\dot{\varphi}=c_2,\qquad (c_1t+c)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=c_2$$

$$\varphi=\int\mathrm{d}\varphi=\int\frac{c_2}{c_1t+c}\mathrm{d}t=\frac{c_2}{c_1}\ln(c_1t+c)+c'$$

由 $t=0$ 时 $\varphi=0$,定出 $c'=-\frac{c_2}{c_1}\ln c$,

$$\varphi=\frac{c_2}{c_1}\ln\left(\frac{c_1t+c}{c}\right)$$

$r\dot{\varphi}=c_2$ 两边对 t 求导,

$$r\ddot{\varphi}+\dot{r}\dot{\varphi}=0$$

$$\dot{r}\dot{\varphi}=c_1\frac{c_2}{r}=\frac{c_1c_2}{c_1t+c}$$

$$a_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}=r\ddot{\varphi}+\dot{r}\dot{\varphi}+\dot{r}\dot{\varphi}=\frac{c_1c_2}{c_1t+c}$$

由 $t=0$ 时 $a_\varphi=\frac{c_1c_2}{b}$定出 $c=b$,运动学方程为

$$r=c_1t+b,\qquad \varphi=\frac{c_2}{c_1}\ln\left(\frac{c_1t+b}{b}\right)$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=0-(c_1t+b)\left(\frac{c_2}{c_1}\frac{c_1}{c_1t+b}\right)^2=-\frac{c_2^2}{c_1t+b}$$

$t=0$ 时,$a_r=-\frac{c_2^2}{b}$.

1.1.20　在 $t=0$ 时，从一点同时以同样大的速率 v_0 向各个方向抛出小球．证明：在任一时刻 t，这些小球都位于一个球面上，球的中心以自由落体的加速度下落，球的半径等于 v_0t．

证明　设小球自原点以 $\boldsymbol{v}_0$ 的速度抛出，$\boldsymbol{v}_0$ 与 z 轴的夹角为 α，$\boldsymbol{v}_0$ 在 xy 平面上的投影与 x 轴的夹角为 β．z 轴竖直向上，考虑到抛体运动的加速度为 $\boldsymbol{a}=-g\boldsymbol{k}$．小球的运动学方程为

$$x=(v_0\sin\alpha\cos\beta)t$$

$$y=(v_0\sin\alpha\sin\beta)t$$

$$z=(v_0\cos\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$x^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}gt^2\right)^2=(v_0t)^2$$

这是一个半径为 v_0t、球心位于 $\left(0,0,-\frac{1}{2}gt^2\right)$ 的球面的方程，球心自抛出点做自由落体运动．

1.1.21　已知一质点做平面运动，其速率为常量 c，矢径的角速度的大小为常数 ω．求该质点的运动学方程及其轨道．设 $t=0$ 时，$r=0$，$\varphi=0$．

解

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2=c^2,\qquad \dot{\varphi}^2=\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{c^2-\omega^2r^2}$$

$$\int_0^r\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{c^2-\omega^2r^2}}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

$$r=\frac{c}{\omega}|\sin\omega t|$$

这里取绝对值是考虑到 $\dot{\varphi}=\omega>0$，$r>0$．

运动学方程为

$$r=\frac{c}{\omega}|\sin\omega t|,\qquad \varphi=\omega t$$

轨道方程为

$$r=\frac{c}{\omega}|\sin\varphi|$$

1.1.22　如图 1.5，一个动靶以恒定速率 v 在 xy 平面内沿 $y=h$ 的直线飞行，$t=0$ 时在 $x=0$、$y=h$ 点．导弹在 $t=0$ 时自原点出发，以恒定的速率 $2v$ 运动，速度方向始终指向动靶．求导弹的运动轨道及导弹击中飞靶的时间．

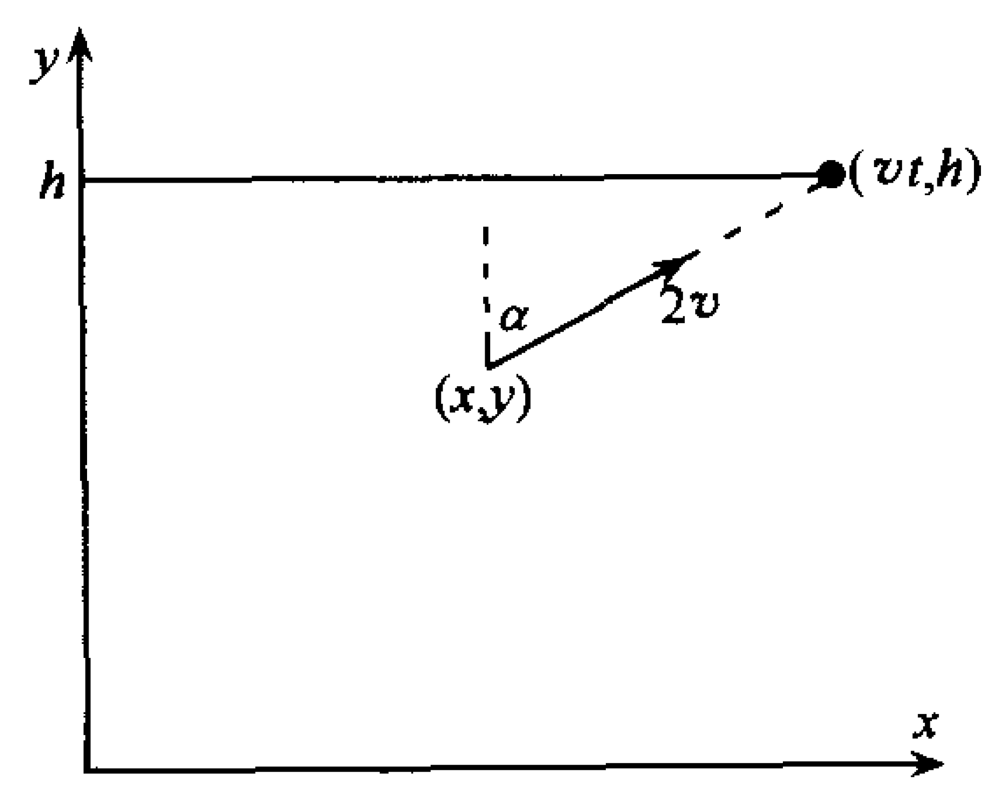


图 1.5

解　设 t 时刻导弹位于 (x,y)，此时飞靶位于 (vt,h)，导弹轨道曲线 $x=x(y)$ 与 y 轴夹角 α 的正切

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{vt - x}{h - y}$$

由导弹的速率为 $2v$，

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (2v)^2 = 4v^2$$

由$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\dot{y}$，并令 $q=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，上述两式可改写为

$$vt - x = q(h - y) \tag{1}$$

$$(1 + q^2)\dot{y}^2 = 4v^2 \tag{2}$$

(1)式两边对 y 求导，简化后得

$$v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = (h - y)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} \tag{3}$$

由(2)式消去(3)式中的$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$，得

$$(h - y)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}(1 + q^2)^{1/2} \tag{4}$$

考虑到$\dot{y}>0$，(2)式开方时只取正号.

对(4)式分离变量积分时，下限取 $t=0$ 时的 y 和 q 值，$y=0$，$\dot{x}=0$，$\dot{y}=2v$，故 $q=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=0$，

$$\int_0^q \frac{2\mathrm{d}q}{(1 + q^2)^{1/2}} = \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{h - y}$$

积分得

$$2\ln(q + \sqrt{1 + q^2}) = -\ln\frac{h - y}{h}$$

$$\sqrt{1 + q^2} = \sqrt{\frac{h}{h - y}} - q$$

两边平方可得

$$2\sqrt{h}\,q = \frac{y}{\sqrt{h - y}}$$

$$\int_0^x 2\sqrt{h}\,\mathrm{d}x = \int_0^y \frac{y}{\sqrt{h - y}}\mathrm{d}y = \int_0^y \frac{-h + y}{\sqrt{h - y}}\mathrm{d}y + \int_0^y \frac{h}{\sqrt{h - y}}\mathrm{d}y$$

积得轨道方程为

$$x = \frac{1}{3\sqrt{h}}[(h - y)^{3/2} - h^{3/2}] + \sqrt{h}(\sqrt{h} - \sqrt{h - y})$$

导弹射中靶子时，$x=vt$，$y=h$，代入上式得

$$t = \frac{2h}{3v}$$

1.1.23　火车能达到的最大加速度为 α，最大减速度为 β. 求从静止出发到最后静止通过的距离 a 和所需的最短时间.

解　画 v-t 图，曲线下的面积为通过的距离 a. 显然，当以最大的加速度 α，在 $t=0$ 至 t_1 期间，速度从零达到最大速度 $v_{\max}$，再在随后的 $t_1 \sim t_1+t_2$ 期间，以最大减速度 β 将速度从 $v_{\max}$ 降为零，如图 1.6 所示，所需的时间最短.

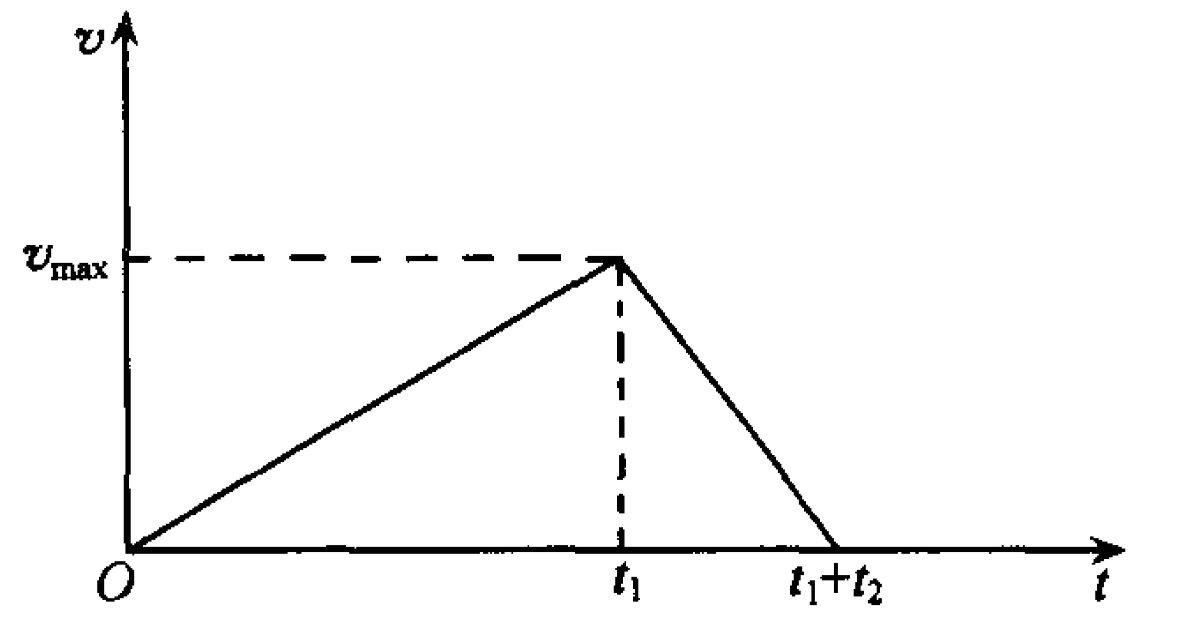


图 1.6

$$v_{\max} - 0 = \alpha t_1$$

$$v_{\max} - 0 = \beta[(t_1 + t_2) - t_1]$$

$$\frac{1}{2} v_{\max}(t_1 + t_2) = a$$

解出

$$t_{\min} = t_1 + t_2 = \left[\frac{2a(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}$$

1.1.24　直线 LM 在一给定的半径为 R 的圆平面内以等角速 ω 绕圆周上一点 A 转动. 求此直线与圆的另一交点 B 的速度和加速度的大小见图 1.7.

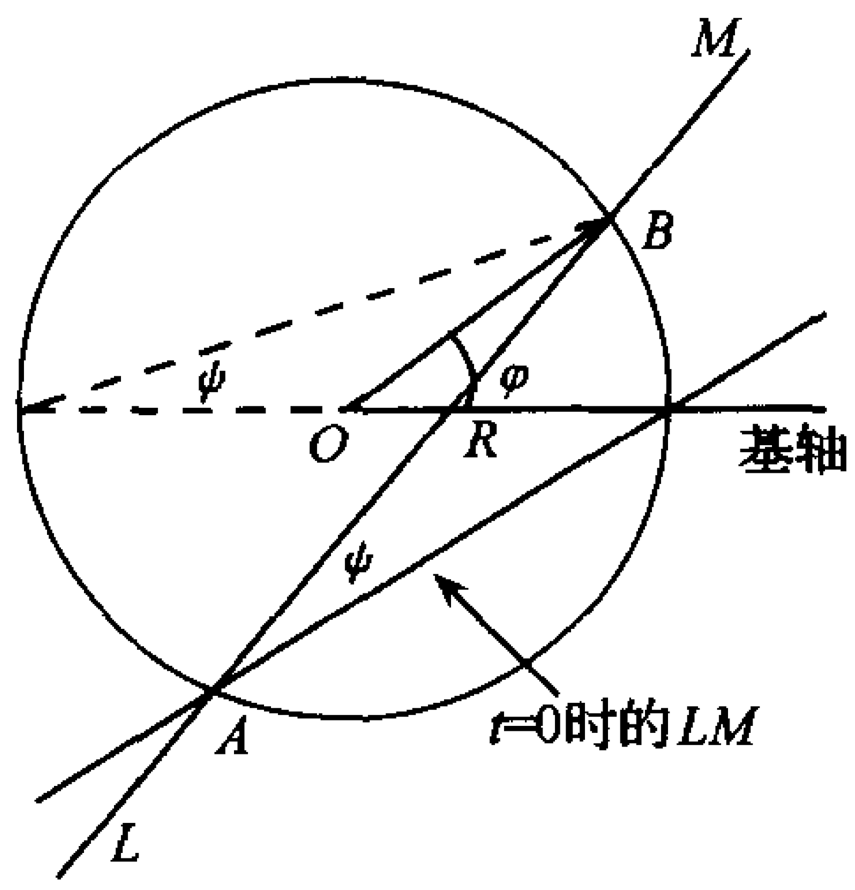


图 1.7

解　以 $t=0$ 时直线 LM 与圆的另一交点与圆心 O 的连线为基轴，图中画了 LM 在 t 时刻的位置，

$$\psi = \omega t, \qquad \varphi = 2\psi$$

B 点的速度的径向、横向分量分别为

$$v_r = \dot{r} = 0, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi} = R \cdot 2\dot{\psi} = 2R\omega$$

所以　$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 2R\omega$$

B 点的加速度的径向、横向分量分别为

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 - R \cdot 4\dot{\psi}^2 = -4R\omega^2$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

所以　$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = 4R\omega^2$$

1.1.25　质点沿一平面做曲线运动，其加速度矢量的作用线在任何时刻都通过一固定点 O. 试证明：质点加速度的大小为 $a = \pm v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$，其中 v 为质点的速率，r 为质点到 O 点的距离，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}>0$ 时取正号，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}<0$ 时取负号.

证明　取 O 点为极坐标原点，$a_\varphi=0$，

所以　$$a_\varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$r^2\dot{\varphi} = c,\quad c\text{ 为常量.}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{(r^2\dot{\varphi})^2}{r^2} = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}$$

上式两边对 r 求导，

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 2\dot{r}\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} - \frac{2c^2}{r^3} = 2(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 2a_r$$

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\varphi^2}=|a_r|=v\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|=\pm v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

当$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}>0$时取正号,$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}<0$时取负号.

1.2 自然坐标、切向加速度和法向加速度

1.2.1 一质点静止在半径为 R 的半球面上的最高点.要使质点脱离半球,一开始就不沿半球滑下,必须给予质点的最小水平速度多大?

解 要一开始脱离半球,必须一开始不受半球的支持力,质点只受重力作用,故质点的加速度为向下的重力加速度 g,质点的速度是水平的,要脱离半球,质点运动轨道在该点的曲率半径 ρ 必须满足关系 $\rho\geqslant R$.

质点在半球最高点获得水平速度开始运动时只受到重力,速度方向未受外力,故切向加速度为零,重力加速度是法向加速度

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=g$$

$$v_{\min}^2=\rho_{\min}g=Rg,\quad v_{\min}=\sqrt{Rg}$$

1.2.2 一质点的运动学方程为

$$x=R\sin\omega t+\omega Rt,$$

$$y=R\cos\omega t+R,$$

式中 ω、R 均为常量.求质点在 y 的最大值、最小值时的切向加速度、法向加速度和轨道的曲率半径.

解

$$x=R\sin\omega t+R\omega t$$

$$y=R\cos\omega t+R$$

当 $t=\frac{2n\pi}{\omega}(n=0,1,2,\cdots)$时 $y=2R$ 为最大值,当 $t=\frac{(2n+1)\pi}{\omega}(n=0,1,2,\cdots)$时 $y=0$ 为最小值.

$$\dot{x}=R\omega\cos\omega t+R\omega$$

$$\dot{y}=-R\omega\sin\omega t$$

$$\ddot{x}=-R\omega^2\sin\omega t$$

$$\ddot{y}=-R\omega^2\cos\omega t$$

$$v=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}=R\omega(2+2\cos\omega t)^{1/2}$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-R\omega^2\sin\omega t(2+2\cos\omega t)^{-1/2}$$

$$a^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2=(R\omega^2)^2$$

$$a_n=(a^2-a_\tau^2)^{1/2}=R\omega^2\left[1-\frac{\sin^2\omega t}{2(1+\cos\omega t)}\right]^{1/2}$$

$$=R\omega^2\left[1-\frac{4\sin^2\frac{1}{2}\omega t\cos^2\frac{1}{2}\omega t}{2\times 2\cos^2\frac{1}{2}\omega t}\right]^{1/2}=R\omega^2\left|\cos\frac{1}{2}\omega t\right|$$

因 a_n 总大于零，上述开方取正值.

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{R^2\omega^2(2+2\cos\omega t)}{R\omega^2\left|\cos\frac{1}{2}\omega t\right|}=4R\left|\cos\frac{1}{2}\omega t\right|$$

在 y 的最大值，$\omega t=2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$

$$a_\tau=0,\quad a_n=R\omega^2,\quad \rho=4R$$

在 y 的最小值，$\omega t=(2n+1)\pi(n=0,1,2,\cdots)$

$$a_n=0,\qquad \rho=0$$

$$a_\tau=-R\omega^2\frac{\sin\omega t}{(2+2\cos\omega t)^{1/2}}\bigg|_{\omega t=(2n+1)\pi}$$

$$=-R\omega^2\frac{2\sin\frac{1}{2}\omega t\cos\frac{1}{2}\omega t}{\pm 2\left(\cos^2\frac{1}{2}\omega t\right)^{1/2}}\Bigg|_{\omega t=(2n+1)\pi}$$

$$=\pm R\omega^2$$

从轨道曲线可以判断，$t=\frac{(2n+1)\pi}{\omega}$时，$v=0$，而在这个时刻的近邻，均有 $v>0$，故

$$a_\tau=\begin{cases}-R\omega^2 & t=\dfrac{(2n+1)\pi}{\omega}-\varepsilon\\ R\omega^2 & t=\dfrac{(2n+1)\pi}{\omega}+\varepsilon\end{cases}\qquad \varepsilon>0\text{ 为无穷小量.}$$

不考虑轨道曲线、v 的变化，从数字上作变量代换，令 $t=\frac{(2n+1)\pi}{\omega}+x$，然后对 a_τ 式的分子、分母在 $x=0$ 处做泰勒展开，也可得到上述结果.

1.2.3　一质点沿抛物线 $y=\frac{1}{2}Ax^2$ 运动，设路程从抛物线顶点开始计算，质点运动的路程与时间的关系为 $s=bt^2+ct$，A、b、c 均是正值常量，试求在顶点时质点的切向加速度和法向加速度.

解　方法一：$s=bt^2+ct$，

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2bt+c$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2b$$

$$y=\frac{1}{2}Ax^2,\qquad \dot{y}=Ax\,\dot{x}$$

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{x}^2+(Ax\,\dot{x})^2=\dot{x}^2(1+A^2x^2)$$

设 $t=0$ 时，$\dot{x}>0$，

$$v=\dot{x}\sqrt{1+A^2x^2}=2bt+c$$

$$\dot{x}=\frac{2bt+c}{\sqrt{1+Ax^2}} \tag{1}$$

$$\ddot{x}=\frac{2b}{\sqrt{1+Ax^2}}-\frac{2bt+c}{(1+Ax^2)^{3/2}}Ax\,\dot{x}$$

$$=\frac{2b}{\sqrt{1+Ax^2}}-\frac{Ax(2bt+c)^2}{(1+Ax^2)^2} \tag{2}$$

$$\ddot{y}=A\,\dot{x}^2+Ax\,\ddot{x} \tag{3}$$

在顶点时,$t=0$,$x=0$,由(1)、(2)、(3)式得

$$\ddot{x}=2b,\qquad \ddot{y}=Ac^2$$

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2-a_\tau^2}=Ac^2$$

方法二:用曲率半径和轨道方程的关系.

对于用直角坐标表达的轨道方程 $y=y(x)$,可以证明有下列曲率半径的公式(见1.2.8题).

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

其中

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\qquad y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

在顶点,$x=0$,$t=0$,

$$y'=Ax|_{x=0}=0$$

$$y''=A$$

$$\rho=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{A}=\frac{1}{A}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\left.\frac{(2bt+c)^2}{\frac{1}{A}}\right|_{t=0}=Ac^2$$

1.2.4 曲柄 $OA=r$,绕定轴 O 以匀角速 ω 转动,连杆 AB 用铰链与曲柄端点 A 连接,并可在具有铰链的滑套 N 内滑动.当 $\varphi=0$ 时,A 端位于滑套 N 处.已知 $AB=l>2r$,求当 $\varphi=0$ 时,连杆上 B 点的速度、加速度的大小,切向加速度、法向加速度和轨道的曲率半径(见图1.8).

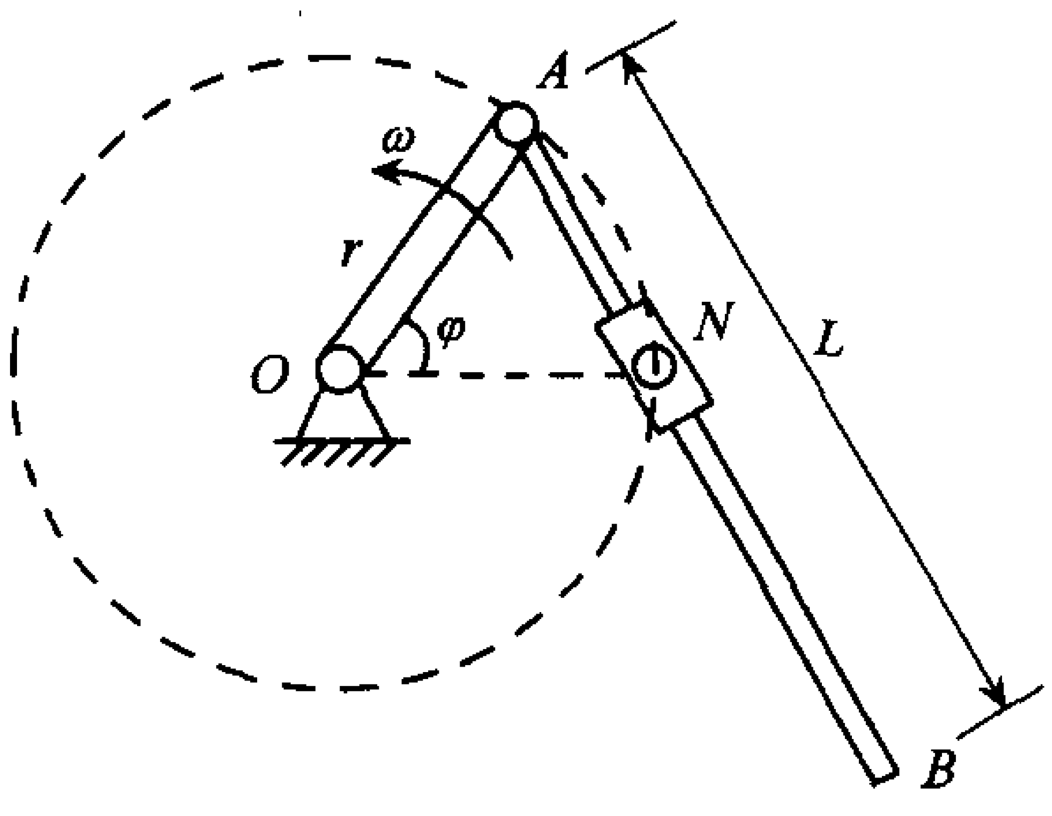


图 1.8

解 取直角坐标 Oxy,x 轴沿 ON 方向,y 轴竖直向上.B 点的坐标

$$x=r\cos\varphi+l\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=r\cos\varphi+l\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$y=r\sin\varphi-l\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=r\sin\varphi-l\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\dot{x}=-r\sin\varphi\,\dot{\varphi}-l\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\dot{\varphi}}{2}=-r\omega\sin\varphi+\frac{1}{2}l\omega\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\dot{y} = r\omega\cos\varphi + \frac{1}{2}l\omega\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \left[(r\omega)^2 + \left(\frac{1}{2}l\omega\right)^2 - rl\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}\right]^{1/2}$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\varphi - \frac{1}{4}l\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\ddot{y} = -r\omega^2\sin\varphi + \frac{1}{4}l\omega^2\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \left[(r\omega^2)^2 + \left(\frac{1}{4}l\omega^2\right)^2 - \frac{1}{2}rl\omega^4\sin\frac{\varphi}{2}\right]^{1/2}$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2v}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4v}rl\omega^3\cos\frac{\varphi}{2}$$

$\varphi=0$ 时，

$$v = \omega\left(r^2 + \frac{1}{4}l^2\right)^{1/2}$$

$$a = \omega^2\left(r^2 + \frac{1}{16}l^2\right)^{1/2} = \frac{1}{4}\omega^2(16r^2 + l^2)^{1/2}$$

$$a_\tau = -\frac{1}{4\omega\left(r^2 + \frac{1}{4}l^2\right)^{1/2}}rl\omega^3 = -\frac{rl\omega^2}{2(4r^2 + l^2)^{1/2}}$$

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{1/2} = \frac{8r^2 + l^2}{4(4r^2 + l^2)^{1/2}}\omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4r^2 + l^2)^{3/2}}{8r^2 + l^2}$$

1.2.5 质点 P 沿一平面曲线运动，其加速度矢量的作用线与曲率圆交于 A 点，PA 间距离为 l. 试证：质点的加速度大小为 $a=\frac{2v^2}{l}$，其中 v 是质点的速率.

证明 图 1.9 画出了质点位于 P 点时的 $\boldsymbol{a}_\tau$、$\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}$，画了质点轨道在 P 点的曲率圆，$PA=l$，$PB=2R$，α 为 $\boldsymbol{a}_n$ 与 $\boldsymbol{a}$ 间的夹角，R 为曲率圆的半径.

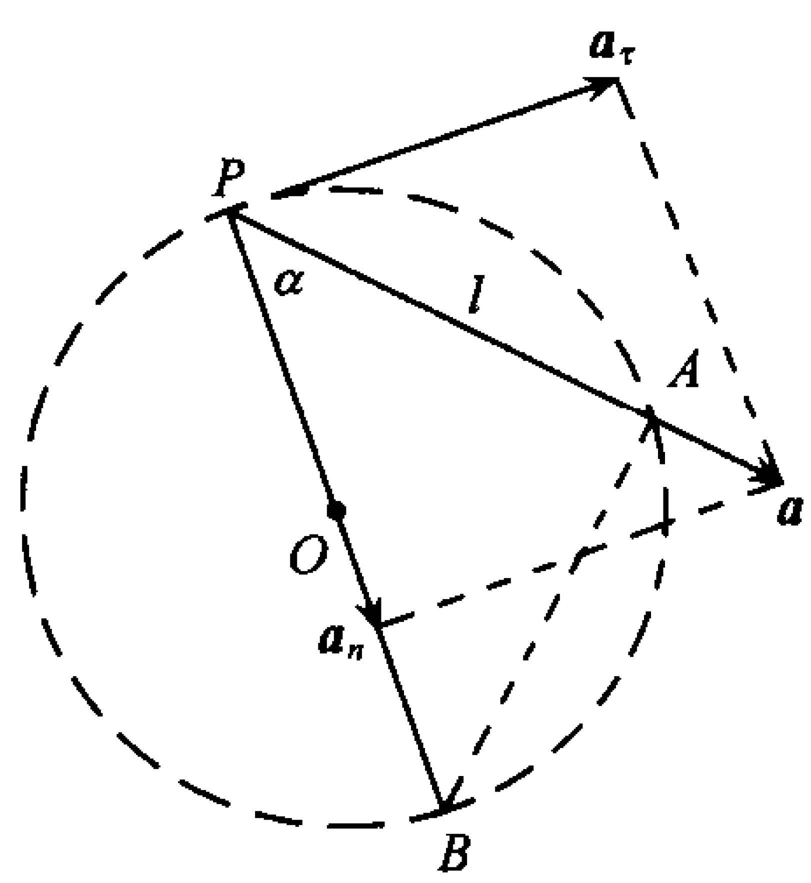


图 1.9

$$a_n = a\cos\alpha = a\cdot\frac{l}{2R}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

所以
$$a\frac{l}{2R} = \frac{v^2}{R}, \qquad a = \frac{2v^2}{l}$$

1.2.6 某个在平面上运动的质点，其速度的 y 分量 $\dot{y}=c$ 为常量. 试证其加速度值 $a=\frac{v^3}{c\rho}$，式中 v 为速率，ρ 为曲率半径.

证明 $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$a^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2$$

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}$$

今$\dot{y}=c$，$\ddot{y}=0$，$a=|\ddot{x}|$，代入上式

$$\rho=\frac{v^3}{|-c\ddot{x}|}=\frac{v^3}{ca}$$

$$a=\frac{v^3}{c\rho}$$

1.2.7　一质点的运动轨道为对数螺旋线$r=be^{k\varphi}$，其中b、k均为正值常量，$\dot{r}=c$（c为正值常量），$t=0$时，位于$r=b$、$\varphi=0$处．求质点的速度和加速度的大小以及曲率半径随时间的变化规律．

解

$$r=be^{k\varphi},\dot{r}=kbe^{k\varphi}\dot{\varphi},$$

$$\dot{r}=c,\quad r=b+ct\quad \dot{\varphi}=\frac{c}{kb}e^{-k\varphi}$$

$$\int_0^t\frac{c}{kb}\mathrm{d}t=\int_0^\varphi e^{k\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\varphi=\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{c}{b}t\right)$$

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}=\sqrt{c^2+\left(\frac{c}{k}\right)^2}=\frac{c}{k}\sqrt{1+k^2}$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\ddot{r}=0$$

$$\ddot{\varphi}=-\frac{c}{b}e^{-k\varphi}\dot{\varphi}=-\frac{c^2}{kb^2}e^{-2k\varphi}$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=-be^{k\varphi}\left(\frac{c}{kb}e^{-k\varphi}\right)^2=-\frac{c^2}{k^2b}e^{-k\varphi}$$

$$=-\frac{c^2}{k^2b\left(1+\frac{c}{b}t\right)}=-\frac{c^2}{k^2(b+ct)}$$

$$a_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$=be^{k\varphi}\left(-\frac{c^2}{kb^2}e^{-2k\varphi}\right)+2c\cdot\frac{c}{kb}e^{-k\varphi}$$

$$= \frac{c^2}{kb}e^{-k\varphi} = \frac{c^2}{k(b+ct)}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \frac{c^2}{k(b+ct)}\sqrt{\frac{1}{k^2}+1} = \frac{c^2\sqrt{1+k^2}}{k^2(b+ct)}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = |a| = \frac{c^2\sqrt{1+k^2}}{k^2(b+ct)}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\dfrac{c^2}{k^2}(1+k^2)}{\dfrac{c^2\sqrt{1+k^4}}{k^2(b+ct)}} = \sqrt{1+k^2}(b+ct)$$

1.2.8 质点做平面运动，轨道方程为 $y=y(x)$，试证：

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

式中 ρ 为曲率半径，$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

证明 $y=y(x)$, $\dot{y}=y'\dot{x}$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+y'^2)$$

$$\ddot{y} = y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x}$$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \ddot{x}^2 + (y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x})^2$$

$$v^2a^2 = \dot{x}^2(1+y'^2)[\ddot{x}^2 + (y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x})^2]$$

$$= \dot{x}^2(1+y'^2)[\ddot{x}^2(1+y'^2) + y''^2\dot{x}^4 + 2\dot{x}^2\ddot{x}y'y'']$$

对 v^2 的式子两边对 t 求导，

$$2va_\tau = 2\dot{x}\ddot{x}(1+y'^2) + 2\dot{x}^2y'y''\dot{x}$$

$$va_\tau = \dot{x}\ddot{x}(1+y'^2) + \dot{x}^3y'y''$$

$$v^2a_\tau^2 = \dot{x}^2\ddot{x}^2(1+y'^2)^2 + \dot{x}^6y'^2y''^2 + 2\dot{x}^4\ddot{x}y'y''(1+y'^2)$$

$$v^2a_n^2 = v^2a^2 - v^2a_\tau^2 = \dot{x}^6y''^2$$

$$a_n^2 = \frac{\dot{x}^6y''^2}{\dot{x}^2(1+y'^2)} = \frac{\dot{x}^4y''^2}{1+y'^2}$$

$$a_n = \frac{\dot{x}^2|y''|}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \dot{x}^2(1+y'^2)\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\dot{x}^2|y''|} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

1.2.9 已知质点的运动轨道为 $r=r(\varphi)$，(r、φ 为极坐标)，求轨道上各点的曲率半径.

解 $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = r'\dot{\varphi}$,

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = |\dot{\varphi}|\sqrt{r'^2+r^2}, v^2 = r'^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{r} = r''\dot{\varphi}^2 + r'\ddot{\varphi},$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = r''\dot{\varphi}^2 + r'\ddot{\varphi} - r\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = r\ddot{\varphi} + 2r'\dot{\varphi}^2$$

$$2v\frac{dv}{dt} = \frac{dv^2}{dt} = 2r'r''\dot{\varphi}^3 + 2r'^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2rr'\dot{\varphi}^3 + 2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2}}(r'r''\dot{\varphi}^2 + r'^2\ddot{\varphi} + rr'\dot{\varphi}^2 + r^2\ddot{\varphi})$$

当$\dot{\varphi}>0$时,上式取+号,$\dot{\varphi}<0$时,取一号.

$$a_n^2 = a_r^2 + a_\varphi^2 - a_\tau^2 = \frac{\dot{\varphi}^4}{r'^2 + r^2}(r^2 + 2r'^2 - rr'')^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$$

1.2.10　求 1.1.10 题所述轨道在 $r=10\text{cm}$ 处的曲率半径.

解　方法一:$r=20\sin 2\varphi$

$$r = 10\text{cm 时}, \qquad 2\varphi = \frac{\pi}{6}\text{ 及}\frac{5\pi}{6}$$

曲率半径只与轨道有关,与质点运动的快慢无关,为利用 1.1.10 题的结果,用$\dot{\varphi}=5\text{rad/s}$.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = (1600\cos^2 2\varphi + 400\sin^2 2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

$$a_\tau = \frac{1}{2v}\frac{dv^2}{dt} = -\frac{1200}{v}\sin 4\varphi\cdot\dot{\varphi}^3$$

$$a_\tau^2 = \frac{(1200)^2}{v^2}\sin^2 4\varphi\cdot\dot{\varphi}^6$$

在 $2\varphi=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$,均有 $v^2=(\pm 100\sqrt{3})^2+(50)^2=32500\text{cm}^2/\text{s}^2$,$\sin^2 4\varphi=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$,$a_\tau^2=519230.76\text{cm}^2/\text{s}^4$.

从 1.1.10 题的解可见,在 $2\varphi=\frac{\pi}{6}$、$\frac{5\pi}{6}$,也有相同的 a 值,故也有相同的 a_n 值,v^2 又相同,故 ρ 也相同.

$$a^2 = (-1250)^2 + (\pm 1000\sqrt{3})^3 = 4562500\text{cm}^2/\text{s}^4$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 2010.788\ \text{cm/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = 16.16\text{cm}$$

方法二:用上题给出的曲率半径公式,

$$r' = 40\cos 2\varphi, \qquad r'' = -80\sin 2\varphi$$

$$\rho = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 + rr''|}$$

$$= \frac{(1600\cos^2 2\varphi + 400\sin^2 2\varphi)^{3/2}}{|400\sin^2 2\varphi + 2\times 1600\cos^2 2\varphi + 1600\sin^2 2\varphi|}$$

$$= \frac{\left[1600\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 400\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{3/2}}{2000\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3200\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 16.16\text{cm}$$

式中出现的±对应于 2φ 的不同取值，$2\varphi=\frac{\pi}{6}$时取＋号，$2\varphi=\frac{5\pi}{6}$时取－号，可以看出，两个 2φ 值处，ρ 相同，与方法一的结果完全相同.

1.3　质点的相对运动

1.3.1　一直升飞机在离地面 4.9m 的高度以 4.9m/s 的恒定水平速度飞行，一包裹从直升飞机上沿水平方向丢出时相对于直升飞机的初速度为 12m/s，方向与飞行方向相反. 求：

(1) 当包裹落到地面时，它与直升飞机的水平距离；

(2) 包裹刚要着地时其速度矢量与地面的夹角.

解　由于飞机相对于地面在竖直方向无相对速度，无论以飞机为参考系还是以地面为参考系，包裹在竖直方向均做自由落体运动. 设飞行高度为 h，落地时间为 t.

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4.9}{9.8}} = 1\text{s}$$

(1) 以飞机为参考系，包裹刚落地时，它离直升飞机的水平距离为

$$l = 12 \times 1 = 12\text{m}$$

(2) 以地面为参考系，水平方向取飞机飞行相反的方向为正，竖直方向取向下为正.

水平方向做匀速运动.

$$v_{/\!/} = 12 - 4.9 = 7.1\text{m/s}$$

刚要落地时，包裹竖直方向的速度

$$v_{\perp} = gt = 9.8 \times 1 = 9.8\text{m/s}$$

刚要落地时其速度矢量与地面之间的夹角

$$\varphi = \arctan\frac{v_{\perp}}{v_{/\!/}} = 54^\circ$$

1.3.2　一列火车在刮着北风的雨中以 30m/s 的速率(相对于地面)向正南方行驶. 一在地面上静止的观察者测得雨滴的路径与竖直线成 25°角，火车中的观察者看到雨水在车窗玻璃上的径迹是竖直向下的. 求雨滴相对于地面的速率.

解　火车中的观察者看到雨滴竖直向下运动，可见雨滴相对于火车的水平速度分量为零，雨滴对地面的水平速度分量等于火车相对于地面的速度，

$$v_{/\!/} = 30\text{m/s}$$

设雨滴相对于地面的速率为 v，$v_{/\!/}=v\sin 25^\circ$，

$$v = \frac{v_{/\!/}}{\sin 25^\circ} = 71\text{m/s}$$

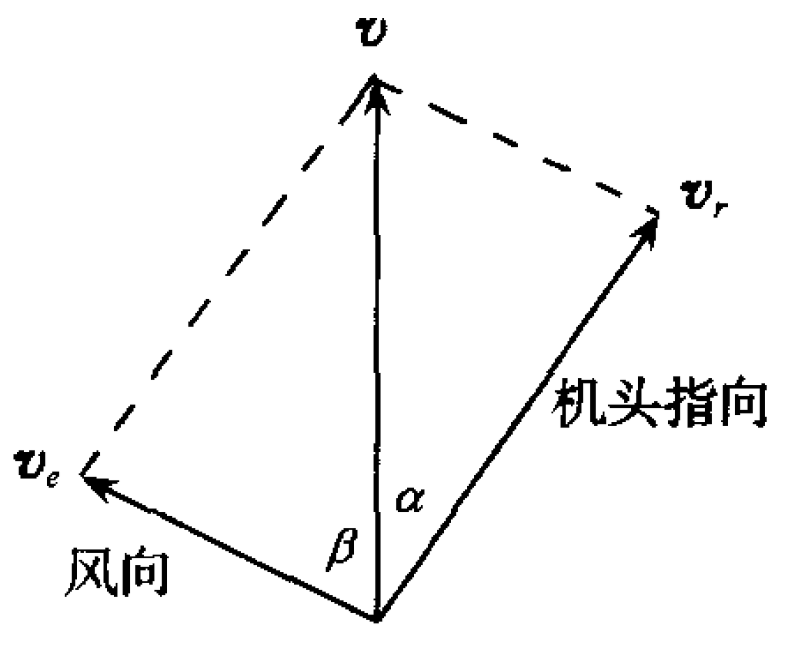


图 1.10

1.3.3 一架飞机在静止空气中的速率为 60m/s,风的速率为 30m/s,飞机仍能向北以 60m/s 的速率飞行.求:(1)风向;(2)机头的指向.

解 设风向偏离正南西偏的角度为 β,机头指向偏离正北东偏的角度为 α(向东北方向——相对于地面),如图 1.10 所示,图中以地面为静止参考系、风为动参考系,$\boldsymbol{v}_e$ 是风的绝对速度,$\boldsymbol{v}_r$ 是飞机的相对速度,$\boldsymbol{v}$是飞机的绝对速度.

$$v = v_r = 60\text{m/s}, \quad v_e = 30\text{m/s}$$

$$v_e\cos\alpha + v_r\cos\beta = v$$

$$v_e\sin\alpha - v_r\sin\beta = 0$$

即

$$60\cos\alpha + 30\cos\beta = 60 \qquad (1)$$

$$60\sin\alpha - 30\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

由(2)式,

$$\sin\beta = 2\sin\alpha$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}$$

代入(1)式,得

$$2\cos\alpha + \sqrt{1 - 4\sin^2\alpha} = 2$$

$$1 - 4\sin^2\alpha = (2 - 2\cos\alpha)^2 = 4 - 8\cos\alpha + 4\cos^2\alpha$$

解出

$$\alpha = \arccos\frac{7}{8} = \pm 29°$$

$$\beta = \arcsin(2\sin\alpha) = \pm 76°$$

第一种情况:$\alpha = 29°$、$\beta = 76°$,如图 1.10 所示那样.

第二种情况:$\alpha = -29°$、$\beta = -76°$,风向东偏 76°,更接近西风的西南风,机头指向正北偏西 29°,在图中以$\boldsymbol{v}$的正北方向为基轴,顺时针转动,α 为正值,逆时针转动,β 为正值.

1.3.4 一飞机带的燃料,在无风的情况下,以 v 的速率飞行,可飞行来回的总路程为 R.今在有风的情况下,要向北偏东 φ角的方向去执行任务,并飞回基地.若风向为北偏东 $\alpha°$,风速为 $\boldsymbol{u}$.问该机能飞离基地多大距离?

解 以风为动参考系,$\boldsymbol{u}$ 为牵连速度,$\boldsymbol{v}_1'$、$\boldsymbol{v}_2'$ 分别为飞出和飞回时的相对速度,$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 分别为飞出、飞回时的绝对速度.$|\boldsymbol{v}_1'| = |\boldsymbol{v}_2'| = v$.

取直角坐标系,x 正向向东,y 正向向北.将上述各速度用此坐标系表达:

$$\boldsymbol{u} = -u\sin\alpha\boldsymbol{i} - u\cos\alpha\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = v_1\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + v_1\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u} = (v_1\sin\varphi + u\sin\alpha)\boldsymbol{i} + (v_1\cos\varphi + u\cos\alpha)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = -v_2\sin\varphi\,\boldsymbol{i} - v_2\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{u} = (-v_2\sin\varphi + u\sin\alpha)\boldsymbol{i} + (-v_2\cos\varphi + u\cos\alpha)\boldsymbol{j}$$

由 $|\boldsymbol{v}_1'| = |\boldsymbol{v}_2'| = v$,

$$(v_1\sin\varphi + u\sin\alpha)^2 + (v_1\cos\varphi + u\cos\alpha)^2 = v^2$$

$$(-v_2\sin\varphi + u\sin\alpha)^2 + (-v_2\cos\varphi + u\cos\alpha)^2 = v^2$$

化简后得

$$v_1^2 + u^2 - 2uv_1\cos(\varphi - \alpha) = v^2$$

$$v_2^2 + u^2 - 2uv_2\cos(\varphi - \alpha) = v^2$$

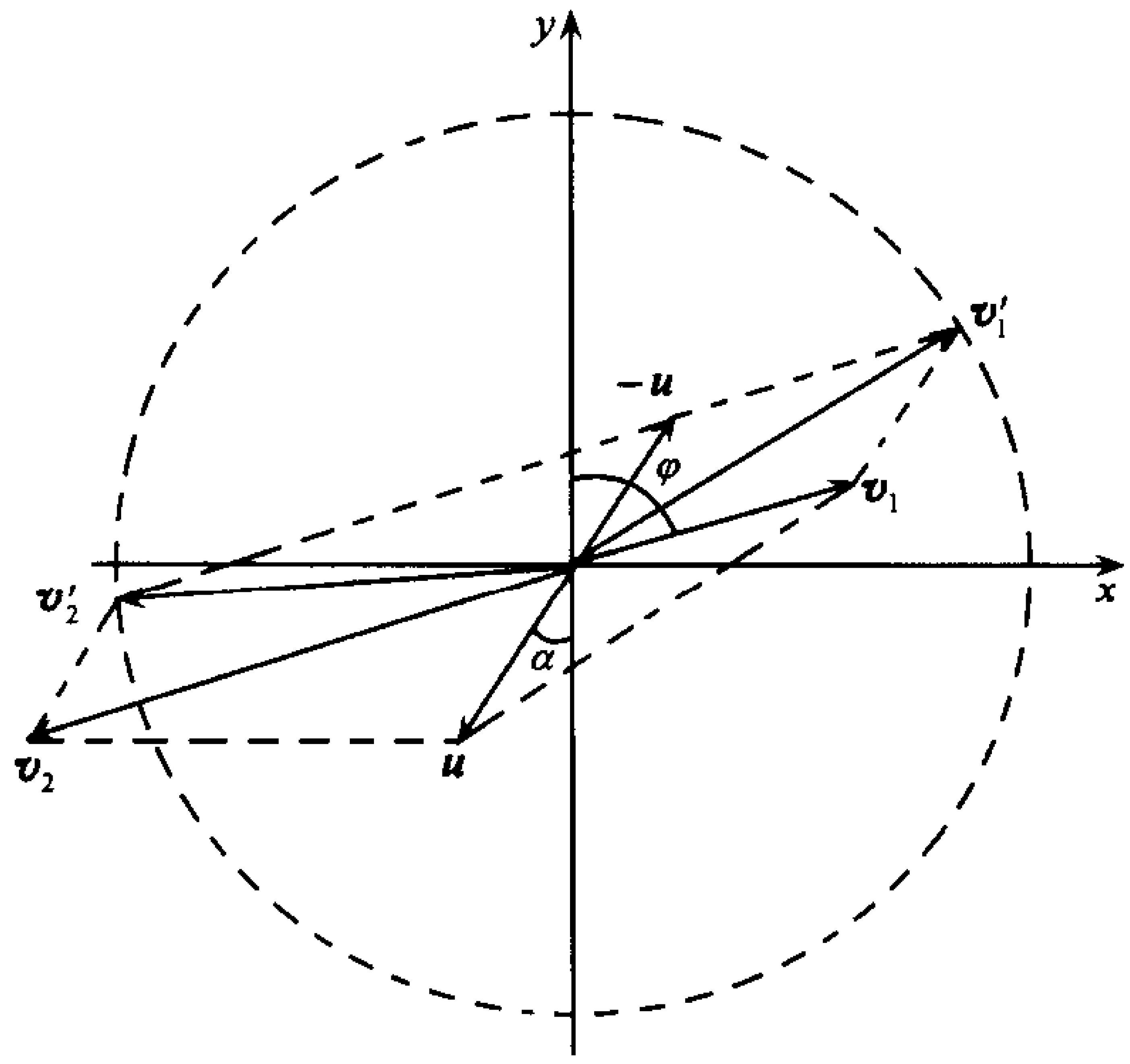


图 1.11

解出

$$v_1 = - u\cos(\varphi - \alpha) + \sqrt{v^2 - u^2\sin^2(\varphi - \alpha)}$$

$$v_2 = u\cos(\varphi - \alpha) + \sqrt{v^2 - u^2\sin^2(\varphi - \alpha)}$$

设 t_1、t_2 分别为飞出和飞回所用的时间，

$$v_1 t_1 = v_2 t_2$$

$$t_1 + t_2 = \frac{R}{v}$$

解出

$$t_1 = \frac{Rv_2}{v(v_1 + v_2)}$$

能飞离基地的最大距离

$$s = v_1 t_1 = \frac{Rv_1 v_2}{v(v_1 + v_2)} = \frac{R(v^2 - u^2)}{2v\sqrt{v^2 - u^2\sin^2(\varphi - \alpha)}}$$

1.3.5　蒸汽轮船以 v_1 的速度向南航行，船上的人看到烟囱中冒出的烟向东方向，若船速增至 v_2，船上的人看到烟向东北，若烟从烟囱冒出后立即按风速运动，求风速.

解　取船为动参考系，$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 为两种情况的牵连速度，船上的人看到的烟的走向是烟的相对速度的方向.

画各速度矢量的关系图，如图 1.12 所示. 竖直向下为向南方向，$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 均向南，有共同矢尾，从 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 的矢端分别向东和向东北方向作直线，交于 A 点，从 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 的共同矢尾 O 到 A 点的矢量即为烟的绝对速度矢量，即风的速度矢量 $\boldsymbol{v}$，图中画的 $\boldsymbol{v}_{r1}$、$\boldsymbol{v}_{r2}$ 分别是两种情况下风的相对速度. 由图可得

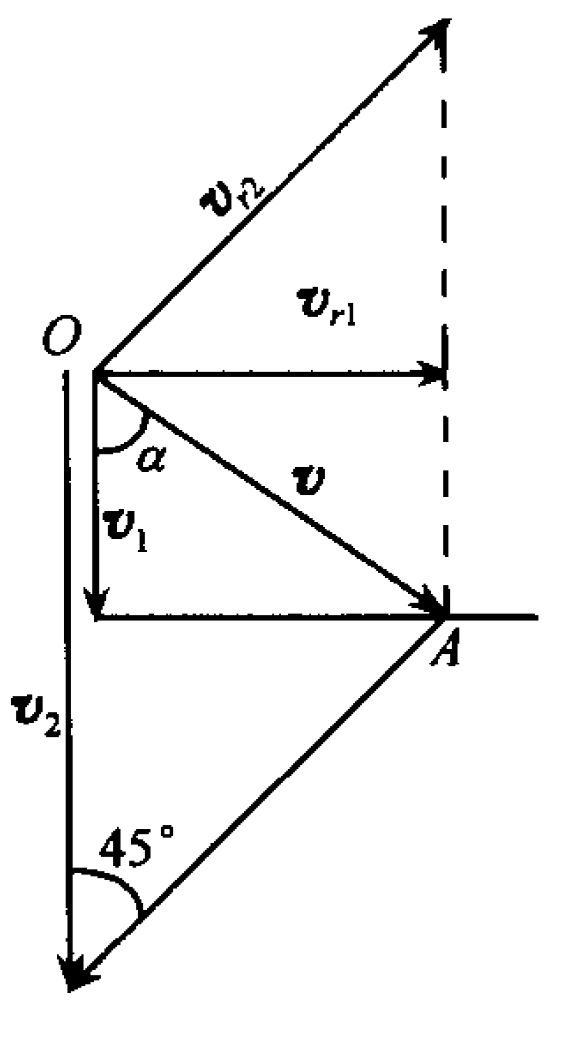


图 1.12

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_{r1}^2} = \sqrt{v_1^2 + (v_2 - v_1)\tan 45^\circ}$$

$$= \sqrt{v_1^2 + (v_2 - v_1)^2}$$

$\boldsymbol{v}$的方向为向南偏东 α 角，

$$\alpha = \arccos\frac{v_1}{v} = \arccos\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + (v_2 - v_1)^2}}$$

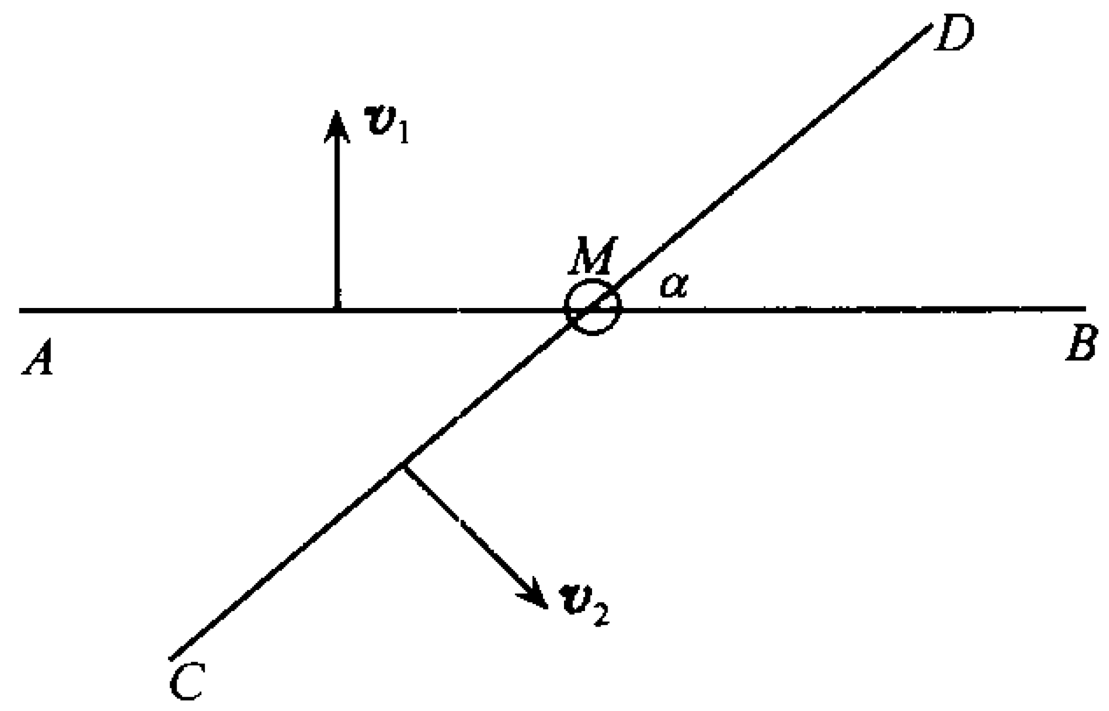


图 1.13

1.3.6　一个小环 M 同时套在两根细棒上，棒 AB 以速度$\boldsymbol{v}_1$ 沿垂直于 AB 的方向移动，棒 CD 以速度$\boldsymbol{v}_2$ 沿垂直于 CD 的方向移动，两棒始终处在同一平面上，两棒夹角为 α，如图 1.13 所示. 求小环 M 的速度.

解　取 AB 棒为动参考系，单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 沿 AB 方向，$\boldsymbol{j}$ 沿$\boldsymbol{v}_1$ 方向.

$$\boldsymbol{v}_M = v_1\boldsymbol{j} + v_{r,AB}\boldsymbol{i}$$

再取 CD 棒为动参考系，

$$\boldsymbol{v}_M = v_2\sin\alpha\boldsymbol{i} - v_2\cos\alpha\boldsymbol{j} + v_{r,CD}\cos\alpha\boldsymbol{i} + v_{r,CD}\sin\alpha\boldsymbol{j}$$

$$v_1\boldsymbol{j} + v_{r,AB}\boldsymbol{i} = (v_2\sin\alpha + v_{r,CD}\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (-v_2\cos\alpha + v_{r,CD}\sin\alpha)\boldsymbol{j}$$

$$v_1 = -v_2\cos\alpha + v_{r,CD}\sin\alpha \tag{1}$$

$$v_{r,AB} = v_2\sin\alpha + v_{r,CD}\cos\alpha \tag{2}$$

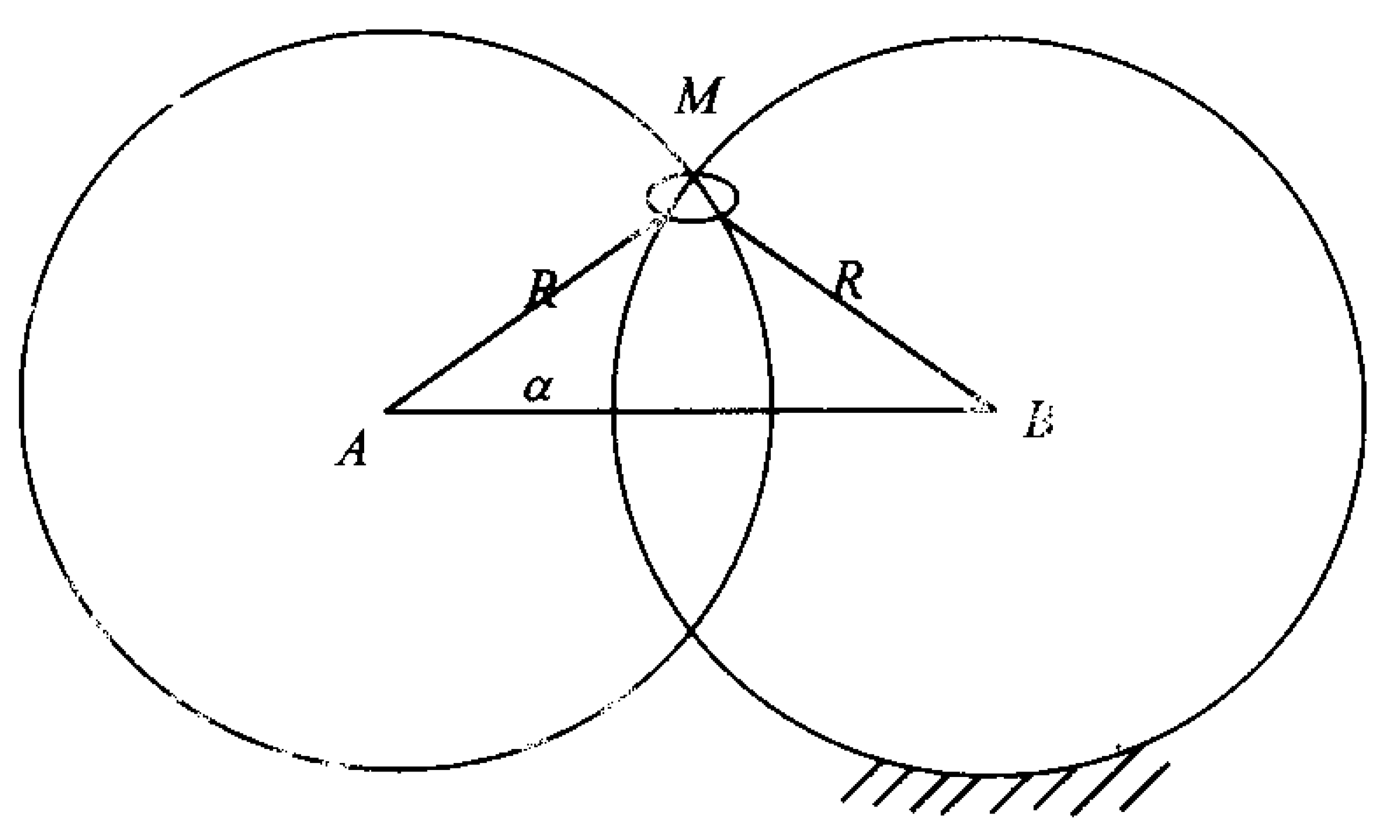


图 1.14

式(2)×sinα－式(1)×cosα，解出

$$v_{r,AB} = v_1\cot\alpha + v_2\csc\alpha$$

$$\boldsymbol{v}_M = (v_1\cot\alpha + v_2\csc\alpha)\boldsymbol{i} + v_1\boldsymbol{j}$$

1.3.7　圆心为 A、B，半径均为 R＝5cm 的两个大圆环处在同一平面上. B 环固定，A 环沿着 AB 连线向 B 环运动. 另有一小环 M 同时套在两个大圆环上. 当 A 环运动到 α＝30°时，A 点的速度 v_A＝5cm·s^{-1}，加速度 a_A＝0. 求此时小环 M 的速度和加速度的大小.

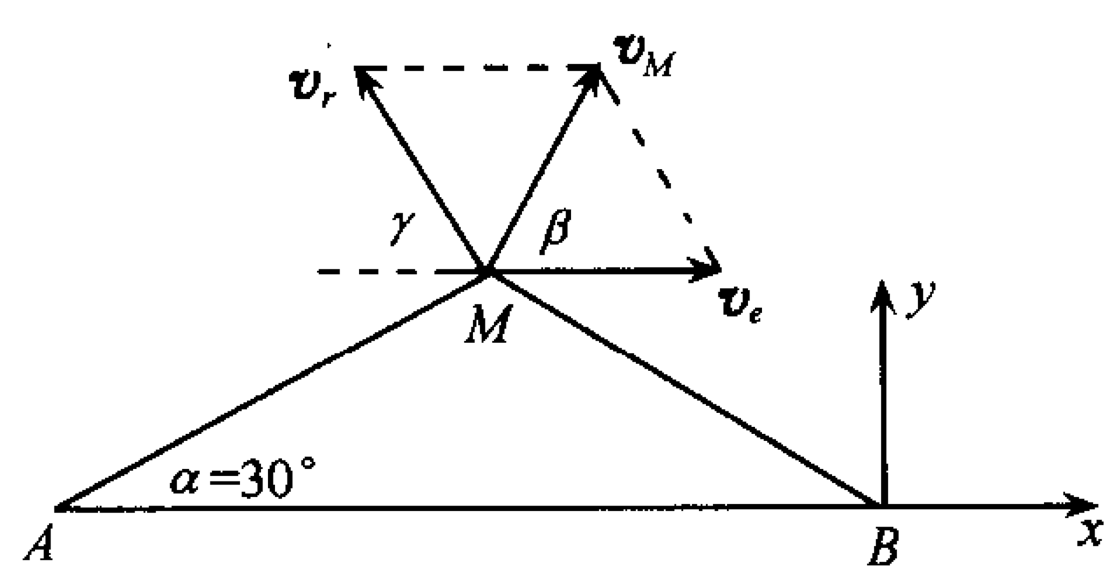


图 1.15

解　方法一：在所求位置时，M 点的牵连速度$\boldsymbol{v}_e$、相对速度$\boldsymbol{v}_r$ 和绝对速度$\boldsymbol{v}_M$ 如图 1.15 所示. $\boldsymbol{v}_r$ 沿 A 环的切线方向，$\boldsymbol{v}_r$ 与 AM 垂直，$\boldsymbol{v}_M$ 沿 B 环的切线

方向，v_M 与 MB 垂直. v_e 与 AB 平行. 在图示位置，$\alpha=30°$，可得 $\beta=\gamma=60°$.

$$v_M = v_r = v_e = 5\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

取 x 轴，B 为原点，AB 方向为正方向

$$x_A = -2R\cos\alpha$$

$$v_A = \frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = 2R\sin\alpha\,\dot{\alpha}$$

$$a_A = \frac{\mathrm{d}^2x_A}{\mathrm{d}t^2} = 2R\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}^2 + 2R\sin\alpha\,\ddot{\alpha}$$

在 $\alpha=30°$，$v_A=5\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$，$a_A=0$，从上述两式得

$$\dot{\alpha}=1\text{s}^{-1},\qquad \ddot{\alpha}=-\sqrt{3}\,\text{s}^{-2}$$

M 点的相对运动是以 A 为圆心、半径为 R 的圆周运动，

切向相对加速度 $a_{\tau,r}=R\,\ddot{\alpha}=-5\sqrt{3}\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$

法向相对加速度 $a_{n,r}=R\,\dot{\alpha}^2=5\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$

M 点的牵连加速度，此时为零，$\boldsymbol{a}_e=0$.

$$a_M = a_r = \sqrt{a_{\tau,r}^2 + a_{n,r}^2} = 10\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$$

方法二：此题也可不做相对运动问题，直接对 M 点的 x、y 坐标（原点在 B 点，如图所示）求导，$a_{Mx}=\ddot{x}$，$a_{My}=\ddot{y}$，它们是$\dot{x}_A$、$\ddot{x}_A$ 与 α 的函数.

1.3.8　有一与 x 轴夹角为 45°的直线，以速率 u 垂直于直线的方向向 x 轴负向、y 轴正向运动．设在 $t=0$ 时，它与悬链线

$$y=\frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$$

（其中 a 为正值常数）交于 $x=0$ 处，求此交点的速度作为时间的函数. 另一个交点移动的速度又如何随时间变化？

解　以直线为动参考系.

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}u\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}u\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}w\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}w\boldsymbol{j}$$

若 φ 为$\boldsymbol{v}$与 x 轴的夹角，

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left[a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)\right]}{\mathrm{d}x} = \mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}} = -\mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\sin\varphi = \tan\varphi\cdot\cos\varphi = \mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right)\left[-\mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = -\mathrm{th}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boldsymbol{v} = v\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + v\sin\varphi\boldsymbol{j} = -v\mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right)\boldsymbol{i} - v\mathrm{th}\left(\frac{x}{a}\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r = \frac{\sqrt{2}}{2}(w-u)\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(w+u)\boldsymbol{j}$$

所以

$$-v\mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(w-u) \tag{1}$$

$$-v\mathrm{th}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(w+u) \tag{2}$$

式(2)－式(1),可得

$$v = \frac{\sqrt{2}u}{\mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right) - \mathrm{th}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\dot{x} = -v\mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sqrt{2}u\mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{a}\right) - \mathrm{sech}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\dot{y} = -v\mathrm{th}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sqrt{2}u\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right) - 1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2}u}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right) - 1}$$

$$\int_0^x \left[\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right]\mathrm{d}x = \int_0^\tau \sqrt{2}u\mathrm{d}t$$

$$a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) - x = \sqrt{2}ut$$

对于另一交点,也像上述那样写$\boldsymbol{v}_e$、$\boldsymbol{v}_r$ 等. 从图 1.16 可见,$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{w}$ 的式子仍适用,$\tan\varphi$的式子也一样,$\cos\varphi$、$\sin\varphi$的式子负号改成正号,因而与(1)、(2)两式相应的式子以及由它们解出的 v 均差一负号,但最后得到的$\dot{x}$、$\dot{y}$的式子也是适用的.

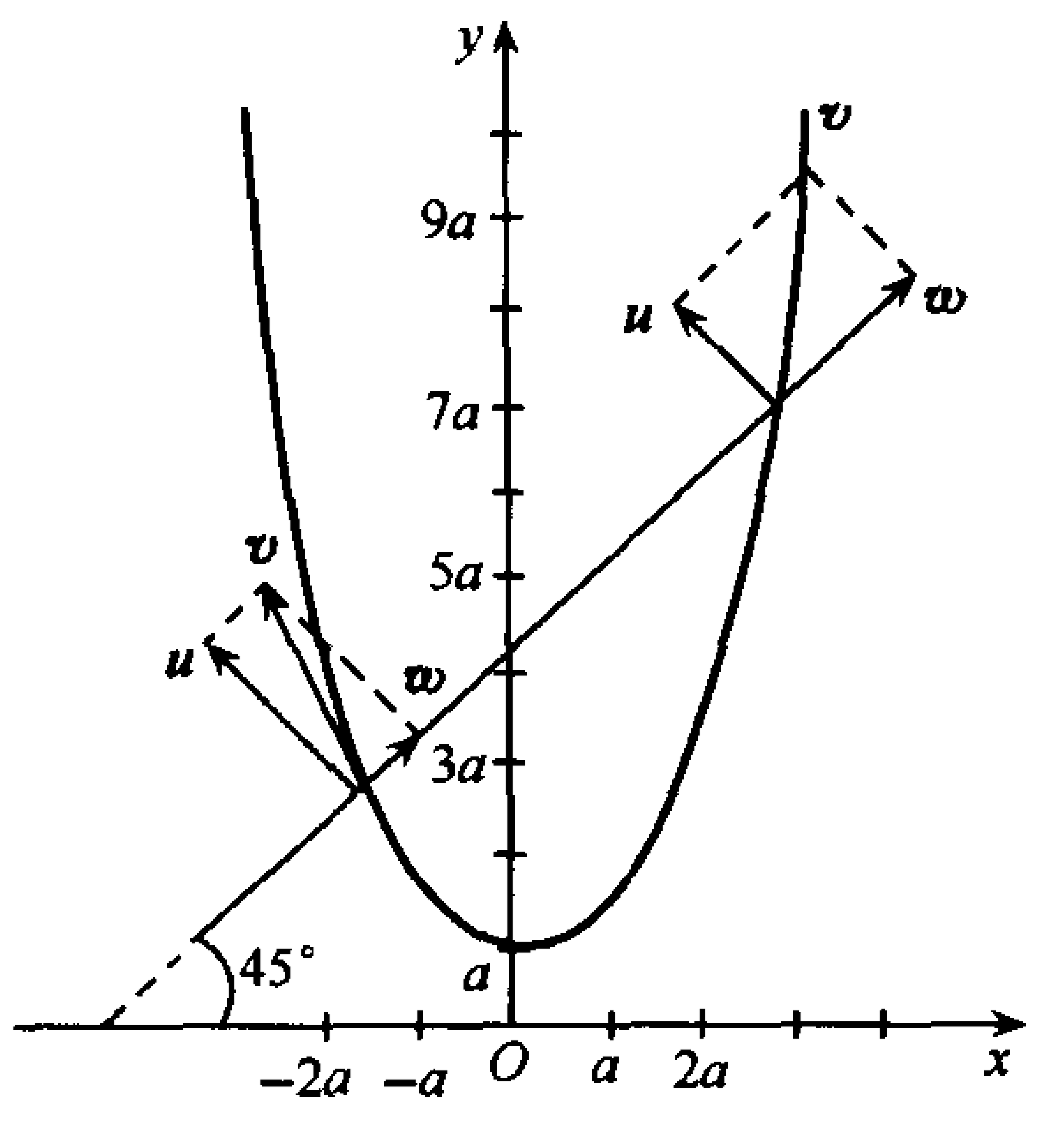


图 1.16

对于另一交点,对$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2}u}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right) - 1}$积分,

$$a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) - x = \sqrt{2}ut + c \tag{3}$$

$t=0$ 时,另一交点的 x、y 坐标满足

$$y = \frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}) = a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y = x + a$$

即 x 满足

$$a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) = x + a \tag{4}$$

式(3)令 $t=0$,再与式(4)比较,可定出 $c=a$,可见

$$a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) - x = \sqrt{2}\,ut$$

对另一交点也同样适用.

1.3.9 用相对运动理论求 1.1.24 题中 B 点相对于直线 LM 的速度和加速度.

解 取 LM 为动参考系,它是一个转动参考系,要求 B 的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 和相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$,今用图 1.17 中的 α 为参量及 x、y 坐标的单位矢量表示它们.

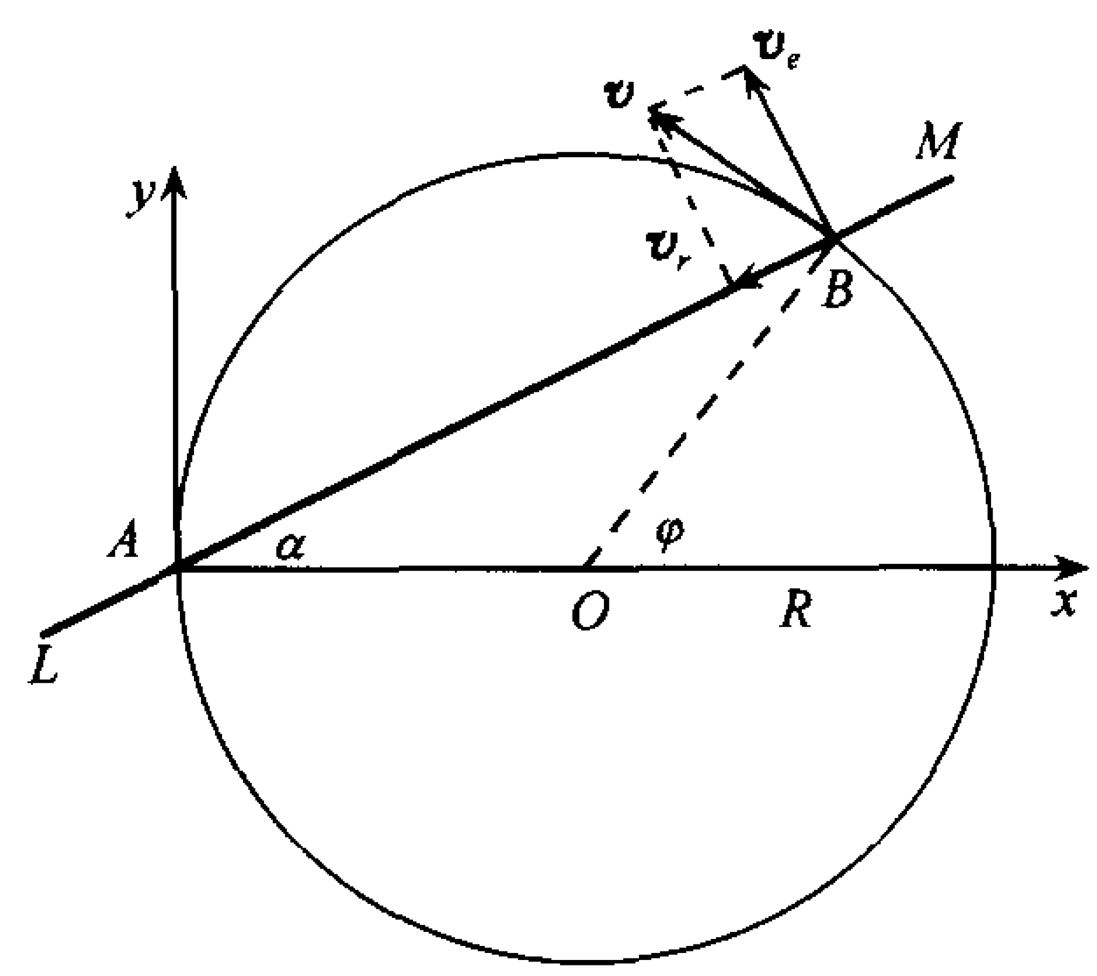


图 1.17

$$v = R\dot{\varphi} = R\cdot 2\dot{\alpha} = 2R\omega$$

$$v_r = v\sin\alpha = 2R\omega\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{v}_r = -v_r(\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j})$$
$$= -2R\omega\sin\alpha(\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + 2\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$\boldsymbol{a}$ 沿 MO 方向,指向 O 点,

$$a = R\dot{\varphi}^2 = 4R\dot{\alpha}^2 = 4R\omega^2$$

$\boldsymbol{a}_r$ 沿 BA 方向,规定指向 A 的方向为正.

$\boldsymbol{a}_e$ 有两部分,一部分沿 $\boldsymbol{a}_r$ 方向,为 $\boldsymbol{a}_{ne}$,一部分沿 $\boldsymbol{v}_e$ 方向,为 $\boldsymbol{a}_{\tau e}$. 今 $a_{\tau e}=0$.

$$a_{ne} = 2R\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}^2 = 2R\omega^2\cos\alpha$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$,$2\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 在 $\boldsymbol{a}_r$ 方向无分量.

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{a}_r$ 方向的分量为 $4R\omega^2\cos\alpha$,

所以
$$a_r = 4R\omega^2\cos\alpha - a_{ne} = 2R\omega^2\cos\alpha$$

$$\boldsymbol{a}_r = -2R\omega^2\cos\alpha(\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j})$$

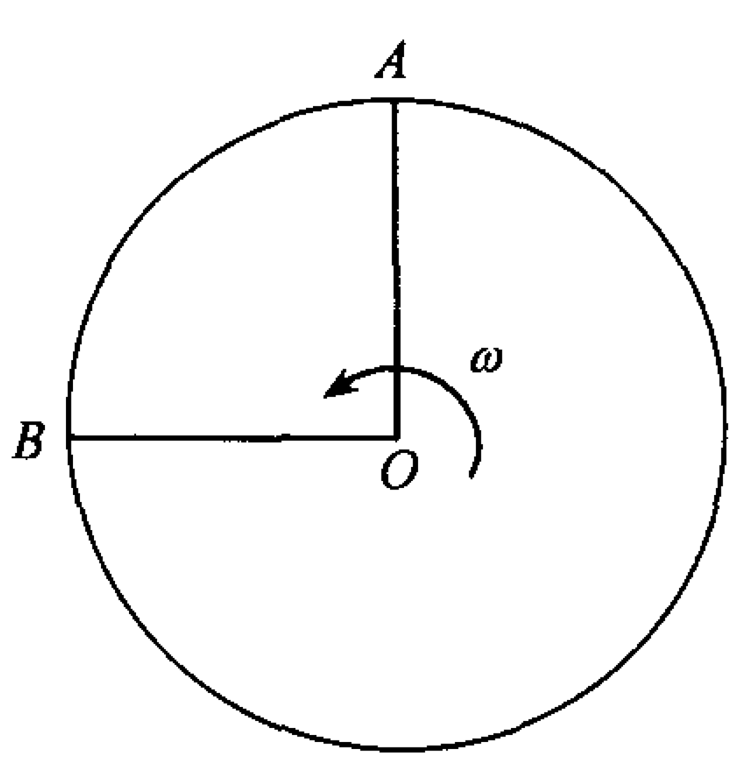


图 1.18

1.3.10 一个半径为 R 的转盘绕通过盘心的垂直盘面的轴以恒定角速度 ω 转动. 两个小孩 A 和 B 相对于圆盘静止于盘的边缘,$\angle AOB=90°$,用图画出在图 1.18 所示位置,A 看到的 B 的速度和加速度,标明大小和方向,分别选用以 A 为原点的平动参考系和转动参考系.

解 对静参考系,A 点的速度此时沿切线方向向左,加速度指向圆心,大小分别为 ωR 和 $\omega^2 R$. B 点的速度此时沿切线方向向下,加速度指向圆心,大小分别为 ωR 和 $\omega^2 R$.

用 A 点平动参考系,B 点的速度为 $\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$,加速度为 $\boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A$,$\boldsymbol{v}_B$、$\boldsymbol{v}_A$、$\boldsymbol{a}_B$、$\boldsymbol{a}_A$ 均为对静参考系的. 相对速度大小为 $\sqrt{2}\,\omega R$,方向与 AB 垂直向右下方,相对加速度大小为 $\sqrt{2}\,\omega^2 R$,沿 BA 方向,如图 1.19 所示.

$$\boldsymbol{a}_r=\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r=\frac{1}{4}l\omega^2\left(-\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}+\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e=\omega^2\left(-\frac{1}{4}l\sin\frac{\varphi}{2}-r\cos\varphi\right)\boldsymbol{i}+\omega^2\left(\frac{1}{4}l\cos\frac{\varphi}{2}-r\sin\varphi\right)\boldsymbol{j}$$

当 $\varphi=0$ 时，

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}l\omega\boldsymbol{i}+r\omega\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=-r\omega^2\boldsymbol{i}+\frac{1}{4}l\omega^2\boldsymbol{j}$$

取固连于 OA 以 O 为原点的转动参考系，为了与 1.2.4 题的结果比较，取固定的 x、y 坐标，x、y 轴均与平动参考系所取的 x、y 轴分别平行，如图 1.21 所示.

$$\boldsymbol{v}_e=OB\,\dot{\varphi}(\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}_{r1}+\boldsymbol{v}_{r2}=\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}t}(\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j})+OB(\dot{\varphi}+\dot{\theta})(-\sin\theta\boldsymbol{i}-\cos\theta\boldsymbol{j})$$

$$OB\sin\theta=\left(l-2r\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{1}{2}(\pi-\varphi)=l\cos\frac{\varphi}{2}-r\sin\varphi$$

$$OB\cos\theta=r+\left(l-2r\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{1}{2}(\pi-\varphi)=l\sin\frac{\varphi}{2}+r\cos\varphi$$

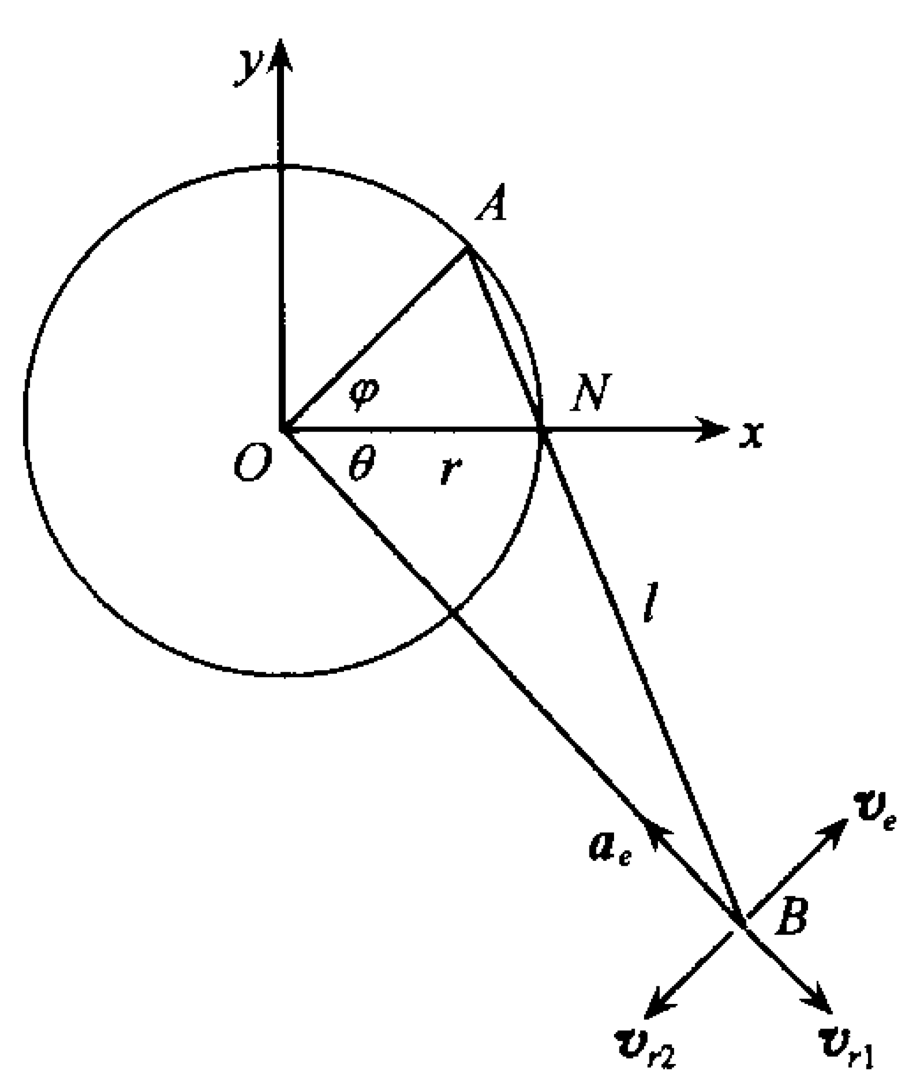


图 1.21

上述两式两边分别对 t 求导，

$$OB\cos\theta\,\dot{\theta}+\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}t}\sin\theta=-\frac{1}{2}l\sin\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}-r\cos\varphi\dot{\varphi}\tag{1}$$

$$-OB\sin\theta\,\dot{\theta}+\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}t}\cos\theta=\frac{1}{2}l\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}-r\sin\varphi\dot{\varphi}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r\\&=\left(-OB\sin\theta\,\dot{\theta}+\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}t}\cos\theta\right)\boldsymbol{i}+\left(-OB\cos\theta\,\dot{\theta}-\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}t}\sin\theta\right)\boldsymbol{j}\\&=\left(\frac{1}{2}l\omega\cos\frac{\varphi}{2}-r\omega\sin\varphi\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}l\omega\sin\frac{\varphi}{2}+r\omega\cos\varphi\right)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

求 $\boldsymbol{a}$ 也可先写出 $\boldsymbol{a}_e$、$\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_c$，再用 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_c$，其中涉及的量可从对(1)、(2)两式两边

分别对 t 求导获得，这种方法比较繁琐，我们用 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 的办法.

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{1}{4}l\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}-r\omega^2\cos\varphi\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{4}l\omega^2\cos\frac{\varphi}{2}-r\omega^2\sin\varphi\right)\boldsymbol{j}$$

$\varphi=0$ 时，$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 均有 1.2.4 题解得的结果.

取以 A 为原点有平动又有转动、转动角速度为 $\dot{\varphi}=\omega$ 的动参考系，表达的坐标系只作平动，如图 1.22 所示.

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{e1}+\boldsymbol{v}_{e2}=r\omega(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})+l\omega\left[\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{v}_r=l\,\dot{\beta}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}-\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)=-\frac{1}{2}l\omega\left(\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

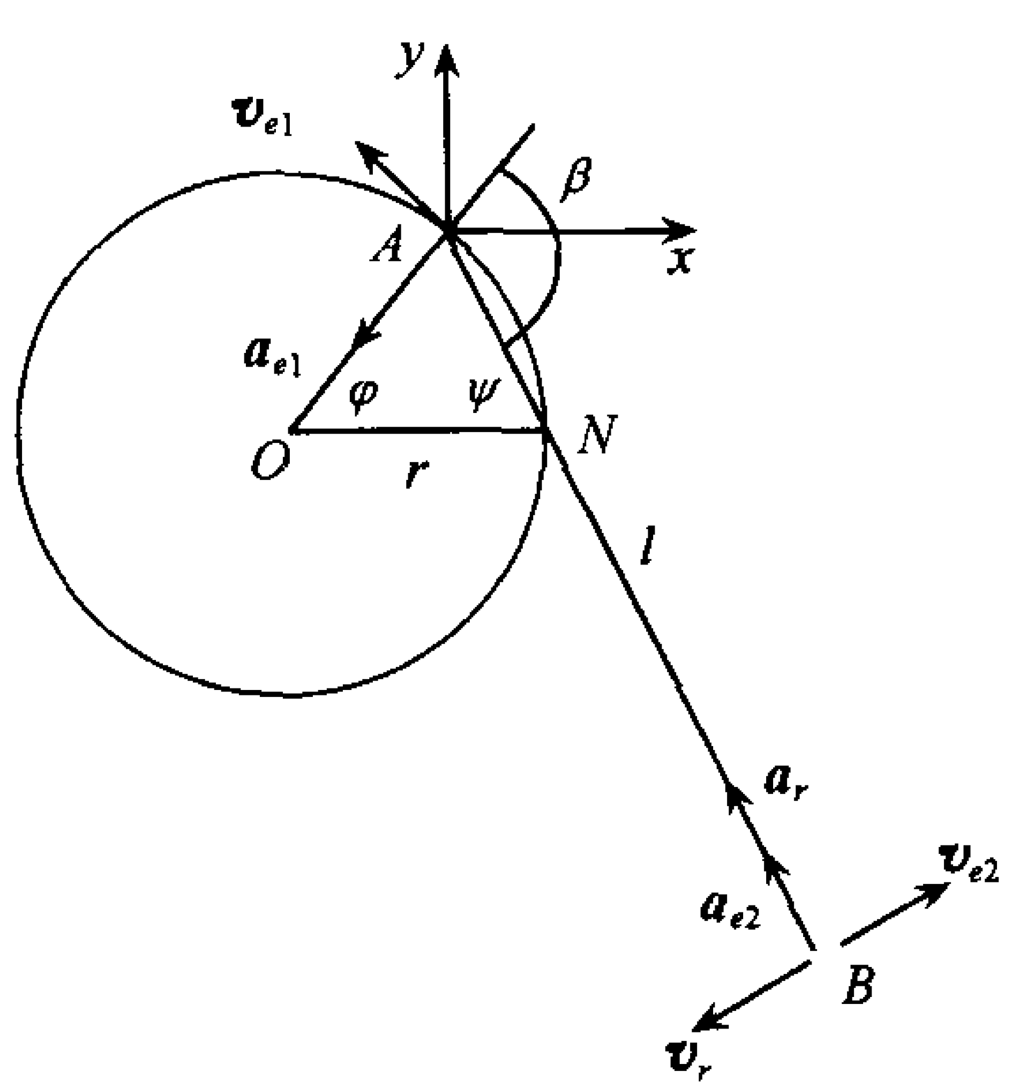


图 1.22

其中用了 $\beta=\varphi+\psi=\varphi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r=\left(-r\omega\sin\varphi+\frac{1}{2}l\omega\cos\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{i}+\left(r\omega\cos\varphi+\frac{1}{2}l\omega\sin\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_{e1}+\boldsymbol{a}_{e2}=r\omega^2(-\cos\varphi\,\boldsymbol{i}-\sin\varphi\boldsymbol{j})+l\omega^2\left(-\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}+\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_r=l\,\dot{\beta}^2\left(-\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}+\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)=\frac{1}{4}l\omega^2\left(-\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}+\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_c=2\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}_r=l\omega^2\left(\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{i}-\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_c\\&=\left(-r\omega^2\cos\varphi-\frac{1}{4}l\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{i}+\left(-r\omega^2\sin\varphi+\frac{1}{4}l\omega^2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

当然，用 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 可以更简便得到结果.

1.3.12　平面Ⅰ可绕通过固定点 O_1（在平面Ⅰ上）的垂直轴转动，平面Ⅱ可绕通过 O_2（固连于平面Ⅰ）的垂直于两平面的轴转动. 若 $\omega_1=\omega_2$，如图 1.23 所示. 证明在静参考系中平面Ⅱ作平动.

提示：只要证明平面Ⅱ上任一点 A 的绝对速度与 A 的位置无关即可.

证明　取平面Ⅱ上任一点 A，此时 A 与 O_1、O_2 的距离分别为 r_1、r_2，O_1A、O_2A 与 O_1O_2 连线的夹角分别为 α、β，如图 1.24 所示.

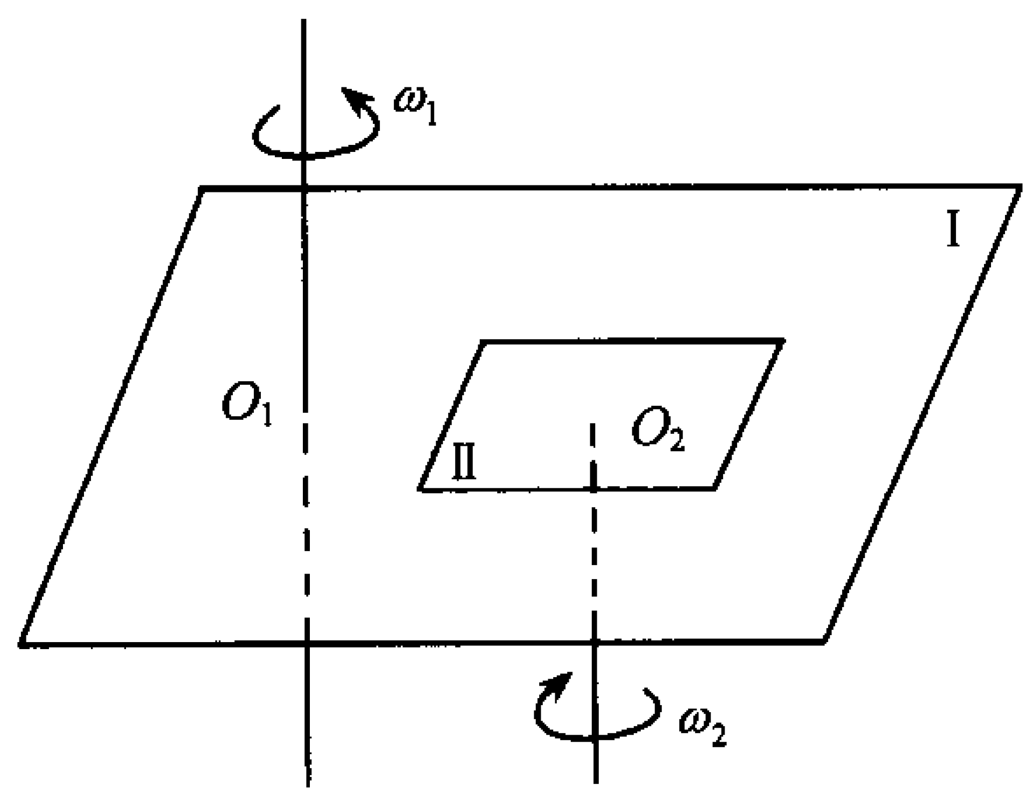


图 1.23

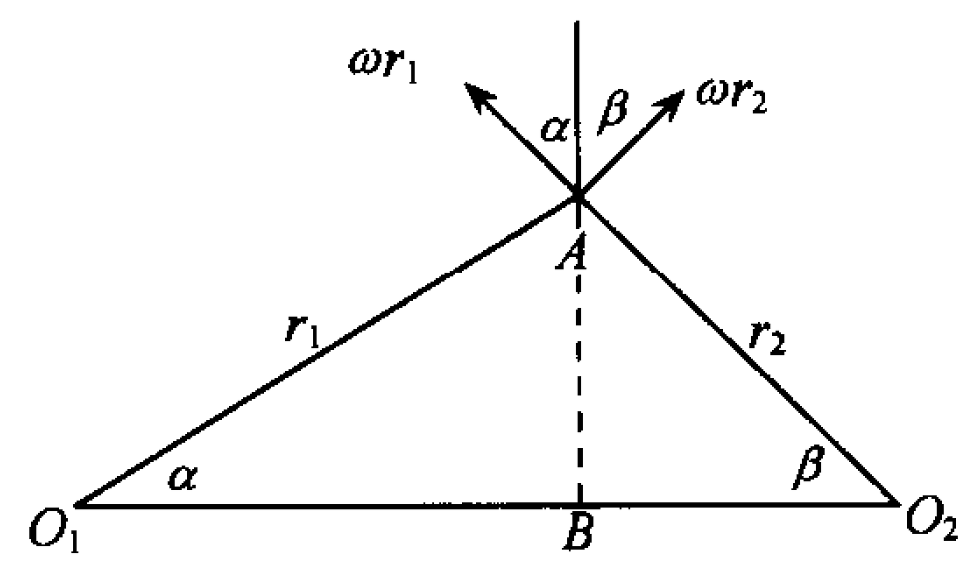


图 1.24

取平面Ⅰ动参考系，A 点的牵连速度为 ωr_1，相对速度为 ωr_2，如图 1.24 所示. A 点的绝对速度是上述两个速度的矢量和(令 $\omega_1=\omega_2=\omega$).

绝对速度沿 O_1O_2 方向的分量为

$$\omega r_2\sin\beta-\omega r_1\sin\alpha=(AB-AB)\omega=0$$

绝对速度沿与 O_1O_2 垂直方向的分量为

$$\omega r_1\cos\alpha+\omega r_2\cos\beta=\omega(O_1B+BO_2)=\omega\cdot O_1O_2$$

均与 A 点的位置无关，说明此刻平面Ⅱ上各点均有同样的速度，平面Ⅱ跟随 O_2 点作平动，O_2 点绕 O_1 点以角速度 ω 转动. ω 可以是时间的函数.

1.3.13　一个质点在 xy 平面内的运动学方程为 $x=f(t)$，$y=g(t)$，此平面以等角速 ω 绕过原点在 xz 平面上与 x、z 轴的夹角均为 45°的固定轴转动. 求质点对静参考系的速度和加速度(用动坐标系表达).

解

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}&=\dot{f}\,\boldsymbol{i}+f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}+\dot{g}\,\boldsymbol{j}+g\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}\\&=\dot{f}\boldsymbol{i}+f\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}+\dot{g}\,\boldsymbol{j}+g\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}\\&=\left(\dot{f}-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega g\right)\boldsymbol{i}+\left(\dot{g}+\frac{\sqrt{2}}{2}\omega f\right)\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\omega g\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

$$= \left(\ddot{f} - \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \dot{g}\right)\boldsymbol{i} + \left(\ddot{g} + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \dot{f}\right)\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \dot{g}\,\boldsymbol{k}$$

$$+ \boldsymbol{\omega} \times \left[\left(\dot{f} - \frac{\sqrt{2}}{2}\omega g\right)\boldsymbol{i} + \left(\dot{g} + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega f\right)\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega g\boldsymbol{k}\right]$$

$$= \left(\ddot{f} - \sqrt{2}\,\omega \dot{g} - \frac{1}{2}\omega^2 f\right)\boldsymbol{i} + (\ddot{g} + \sqrt{2}\,\omega \dot{f} - \omega^2 g)\boldsymbol{j}$$

$$+ \left(\sqrt{2}\,\omega \dot{g} + \frac{1}{2}\omega^2 f\right)\boldsymbol{k}$$

1.3.14　一个质点在 xy 平面内的运动学方程为 $r=\mathrm{e}^{ct}$，$\varphi=bt$（c、b 为常量），r、φ 为极坐标. 此平面以等角速 ω 绕固定的 x 轴转动. 求质点的绝对速度和绝对加速度（见图 1.25）.

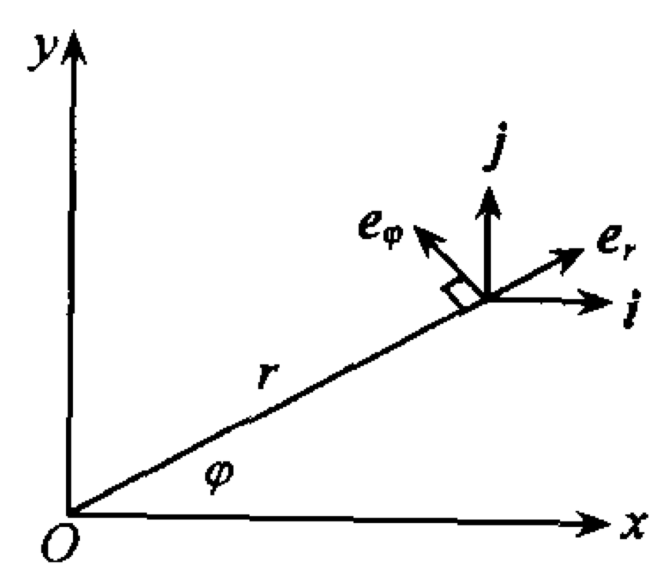


图 1.25

解　$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{i}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \omega\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e}_r = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_r + \omega\sin\varphi\,\boldsymbol{k} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \omega\sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} + \omega\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e}_\varphi = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_\varphi + \omega\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\boldsymbol{k}$$

$$= -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r + \omega\cos\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \omega\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\omega\boldsymbol{j} = -\omega(\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_r + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$\varphi = bt,\qquad \dot{\varphi} = b$$

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{e}^{ct}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = c\mathrm{e}^{ct}\boldsymbol{e}_r + \mathrm{e}^{ct}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = c\mathrm{e}^{ct}\boldsymbol{e}_r + b\mathrm{e}^{ct}\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{e}^{ct}\omega\sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = c^2\mathrm{e}^{ct}\boldsymbol{e}_r + c\mathrm{e}^{ct}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + bc\mathrm{e}^{ct}\boldsymbol{e}_\varphi + b\mathrm{e}^{ct}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$+ (c\mathrm{e}^{ct}\omega\sin\varphi + b\mathrm{e}^{ct}\omega\cos\varphi)\boldsymbol{k} + \mathbf{e}^{ct}\boldsymbol{\omega}\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \mathrm{e}^{ct}[(c^2 - b^2 - \omega^2\sin^2\varphi)\boldsymbol{e}_r + (2bc - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$+ 2\omega(b\cos\varphi + c\sin\varphi)\boldsymbol{k}]$$

其中 $\varphi=bt$.

1.3.15　图 1.26 中机构在图示位置时，杆 OA 绕 O 点的角速度为 2rad/s，求此时 C 的角速度 ω 及 B 点的速度 v_B.

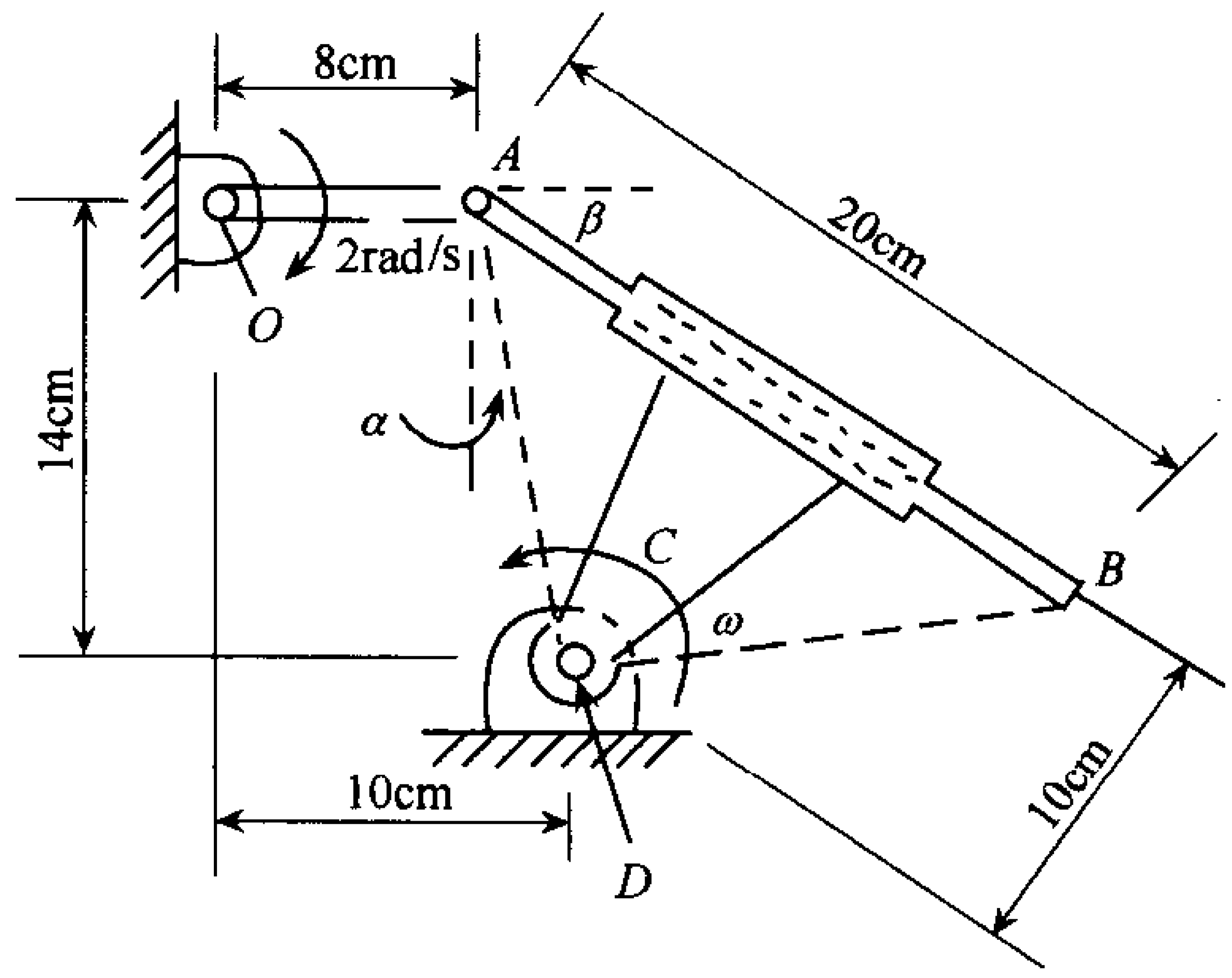


图 1.26

解　方法一：$v_A=8\times2=16\text{cm/s}$，方向向下，

$$\tan\alpha=\frac{10-8}{14}=\frac{1}{7},\quad \alpha=\arctan\frac{1}{7}=8.13°$$

$$\beta=90°-45°-\alpha=36.87°$$

取 C 绕 D 转动的参考系为动系，A 点的绝对速度可视为在动系中 A 点的牵连速度 $v_{Ae}=AD\cdot\omega$（沿垂直于 AD 的向左下方向）与 AB 杆的相对速度 v_{Ar}（沿 AB 方向）的矢量和

$$AD=10\sqrt{2}\,\text{cm}$$

$$\omega\cdot10\sqrt{2}\cos\alpha=v_{Ar}\cos\beta\tag{1}$$

$$\omega\cdot10\sqrt{2}\sin\alpha+v_{Ar}\sin\beta=v_A=16\tag{2}$$

式(1)$\times\sin\beta+$式(2)$\times\cos\beta$，

$$10\sqrt{2}\,\omega\sin(\alpha+\beta)=16\cos\beta$$

$$\omega=\frac{16\cos36.87°}{10\sqrt{2}\cdot\sin45°}=1.28\text{rad/s}$$

此时，AB 杆围绕 A 点的角速度（说得详细一点在 A 点平动参考系中 AB 杆围绕 A 点的角速度）即 C 围绕 D 点的角速度 ω，$\boldsymbol{v}_B$ 是牵连速度 $\boldsymbol{v}_A$ 与相对速度 $\boldsymbol{v}_{BA}$ 的矢量和.

$$\begin{aligned}v_B&=\sqrt{(v_A-AB\omega\cos\beta)^2+(AB\omega\sin\beta)^2}\\&=\sqrt{v_A^2+(AB\omega)^2-2v_AAB\omega\cos\beta}\\&=\sqrt{16^2+(20\times1.28)^2-2\times16\times20\times1.28\cos36.87°}=16\text{cm/s}\end{aligned}$$

方法二：取 C 绕 D 转动的参考系为动系，B 点的相对速度就是 A 点的相对速度，由式(1)、(2)解出

$$v_{Br}=v_{Ar}=\frac{10\sqrt{2}\,\omega\cos\alpha}{\cos\beta}=22.40\text{cm/s}$$

B 点的牵连速度垂直于 DB 指向左上，

$$v_{Be}=DB\cdot\omega$$

$$v_B = \sqrt{(v_{Be}\cos45° - v_{Br})^2 + (v_{Be}\sin45°)^2} = 16\text{cm/s}$$

1.3.16 若上题除所给条件以外再加上在图示位置 OA 杆绕 O 点的角加速度为零，求此时 C 的角加速度 $\dot{\omega}$ 及 B 点的加速度 a_B.

解 取 C 转动参考系为动系，

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{Ar} + \boldsymbol{a}_{Ae} + \boldsymbol{a}_{Ac} \tag{1}$$

绝对加速度

$$a_A = OA \cdot 2^2 = 8 \times 2^2 = 32\text{cm/s}^2$$

沿 AO 方向.

牵连加速度有切向和法向两部分，分别标以 $a_{Ae\tau}$、a_{Aen}，

$$a_{Ae\tau} = AD \cdot \dot{\omega} = 10\sqrt{2}\,\dot{\omega} = 14.14\,\dot{\omega}$$

$$a_{Aen} = AD \cdot \omega^2 = 10\sqrt{2} \times (1.28)^2 = 23.17\text{cm/s}^2$$

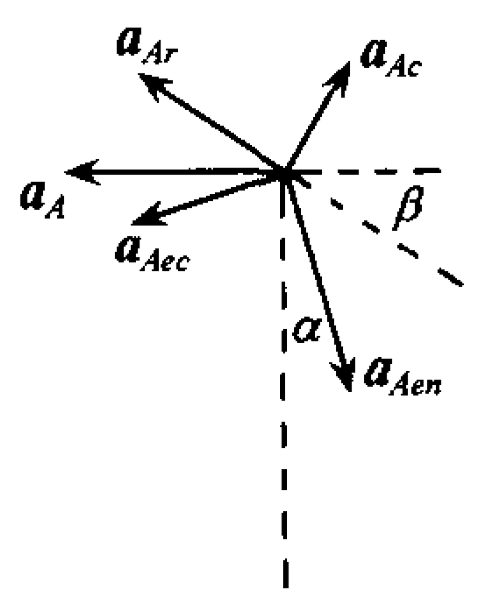


图 1.27

相对加速度 a_{Ar}，设沿 BA 方向，

科氏加速度 $\boldsymbol{a}_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{Ar}$，$\boldsymbol{v}_{Ar}$ 沿 AB 方向，$\boldsymbol{a}_c$ 方向垂直于 AB 指向右上方.

$$a_c = 2 \times 1.28 \times 22.40 = 57.34\text{cm/s}^2$$

$\boldsymbol{a}_A$、$\boldsymbol{a}_{Ar}$、$\boldsymbol{a}_{Ae\tau}$、$\boldsymbol{a}_{Aen}$、$\boldsymbol{a}_{Ac}$ 的正方向规定如图 1.27 所示.

(1) 式的分量方程为

$$a_{Ar}\cos\beta + a_{Ae\tau}\cos\alpha - a_{Aen}\sin\alpha - a_{Ac}\sin\beta = a_A$$

$$a_{Ar}\sin\beta - a_{Ae\tau}\sin\alpha - a_{Aen}\cos\alpha + a_{Ac}\cos\beta = 0$$

即

$$a_{Ar}\cos36.87° + 14.14\,\dot{\omega}\cos8.13° - 23.17\sin8.13° - 57.34\sin36.87° = 32$$

$$a_{Ar}\sin36.87° - 14.14\,\dot{\omega}\sin8.13° - 23.17\cos8.13° + 57.34\cos36.87° = 0$$

解得

$$a_{Ar} = -18.2\text{cm/s}^2$$

$$\dot{\omega} = 6.02\text{rad/s}^2$$

仍用上述动参考系，

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{Br} + \boldsymbol{a}_{Be} + \boldsymbol{a}_{Bc} = \boldsymbol{a}_{Ar} + \boldsymbol{a}_{Be\tau} + \boldsymbol{a}_{Ben} + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{Ar}$$

$\boldsymbol{a}_{Ar}$、$\boldsymbol{a}_{Be\tau}$、$\boldsymbol{a}_{Ben}$、$\boldsymbol{a}_{Bc}$ 的正方向规定如图 1.28 所示.

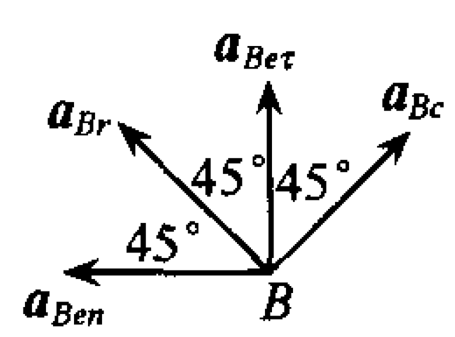


图 1.28

$$a_{Ar} = -18.2\text{cm/s}^2$$

$$a_{Be\tau} = DB \cdot \dot{\omega} = 10\sqrt{2} \times 6.02 = 85.1\text{cm/s}^2$$

$$a_{Ben} = OB \cdot \omega^2 = 23.17\text{cm/s}^2$$

$$a_{Bc} = 2\omega v_A = 2 \times 1.28 \times 22.40 = 57.34\text{cm/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{[a_{Ar} + (a_{Be\tau} + a_{Ben})\cos45°]^2 + [a_{Bc} + (a_{Be\tau} - a_{Ben})\cos45°]^2}$$
$$= 116.7\text{cm/s}^2$$

第二章　质点动力学

2.1　牛顿运动定律

2.1.1　质量为 M 的人通过质量可以不计、不可伸长的绳子和摩擦可忽略的定滑轮，将质量为 m 的重物提起，如图 2.1 所示. 分两种情况：(1)物体匀速上升；(2)物体以加速度 a 上升. 求人对地面的压力.

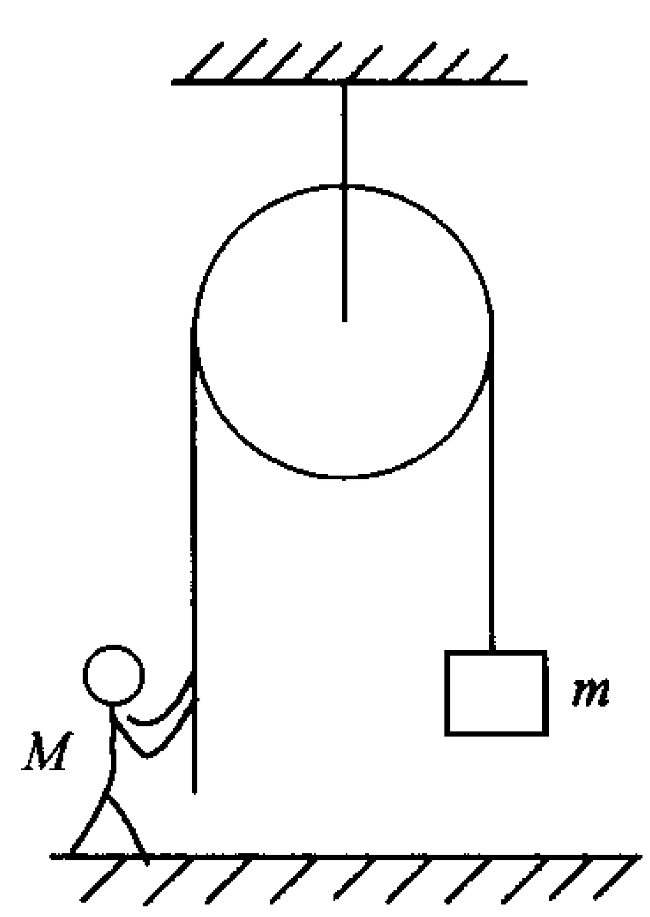


图 2.1

解　(1)设绳子张力为 T，人对地面的压力为 N.

$$T = mg$$

$$N + T - Mg = 0$$

式中的 N 是地面对人的支持力(向上)，它是人对地面的压力(向下)的反作用力，数值相等.

$$N = Mg - T = (M - m)g$$

(2)

$$T - mg = ma$$

$$N + T - Mg = 0$$

$$N = Mg - T = (M - m)g + ma$$

2.1.2　图 2.2 中人的质量 $m_1 = 60\text{kg}$，人所站着的底板质量 $m_2 = 20\text{kg}$，绳子和滑轮质量均可忽略不计. 人要用多大的力拉住绳子，才能保持自己和底板静止不动.

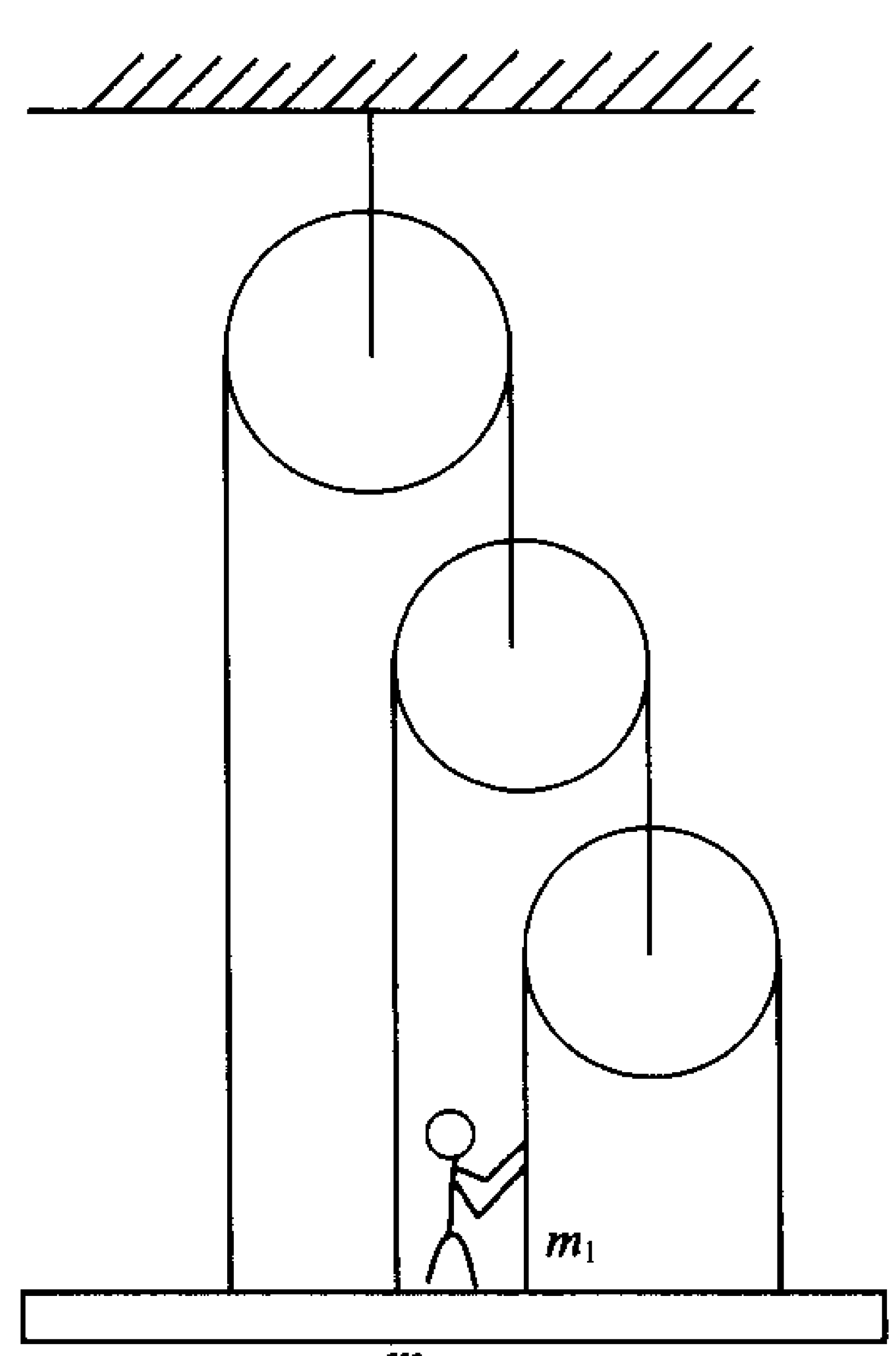


图 2.2

解　设绕过最下面的滑轮的绳子张力为 T，则以该滑轮为系统，列平衡方程可得，绕

过中间滑轮的绳子张力为 $2T$，再分别以中间滑轮和最上面的滑轮为系统列平衡方程可得：绕过最上面的滑轮的绳子张力为 $4T$，系在天花板上的绳子张力为 $8T$.

以三个滑轮、人、底板和连结它们的绳子为系统，列平衡方程

$$8T - m_1 g - m_2 g = 0$$

$$T = \frac{1}{8}(m_1 + m_2)g = \frac{1}{8} \times (60 + 20) \times 9.8 = 98(\text{N})$$

人的拉力等于那段绳子的张力，故人的拉力为 98N，方向向下.

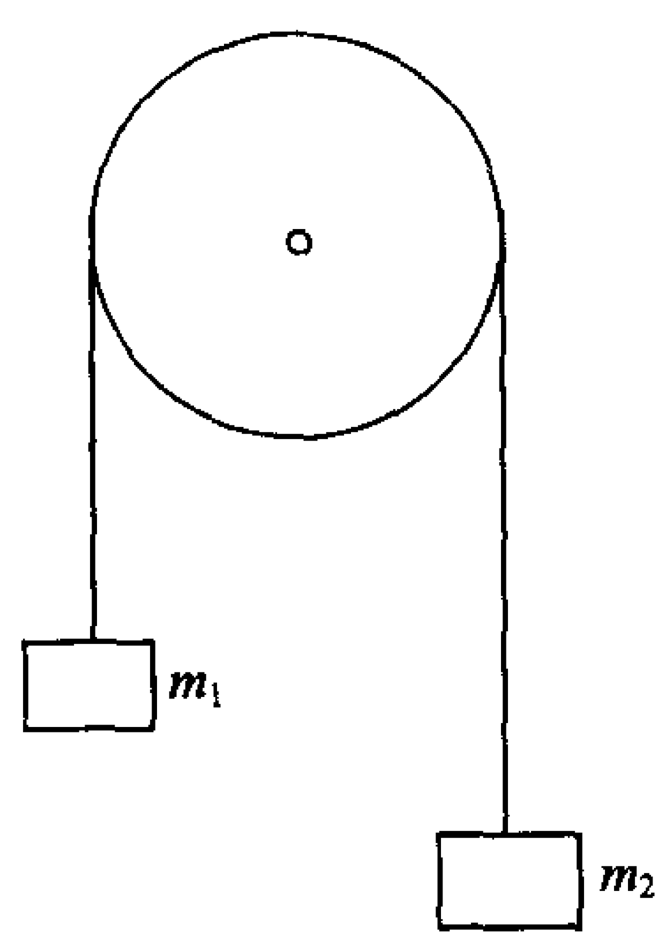


图 2.3

2.1.3 跨过一个无摩擦定滑轮的一根绳子，一端挂有 9kg 质量，另一端挂有 7kg 质量，如图 2.3 所示. 求加速度和绳中的张力.

解 设绳中张力为 T，$m_1 = 9\text{kg}$，$m_2 = 7\text{kg}$，m_1 获得向下的加速度为 a，m_2 有向上的加速度 a，

$$m_1 a = m_1 g - T$$

$$m_2 a = T - m_2 g$$

解得

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = 1.225\text{m/s}^2$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 77.2\text{N}$$

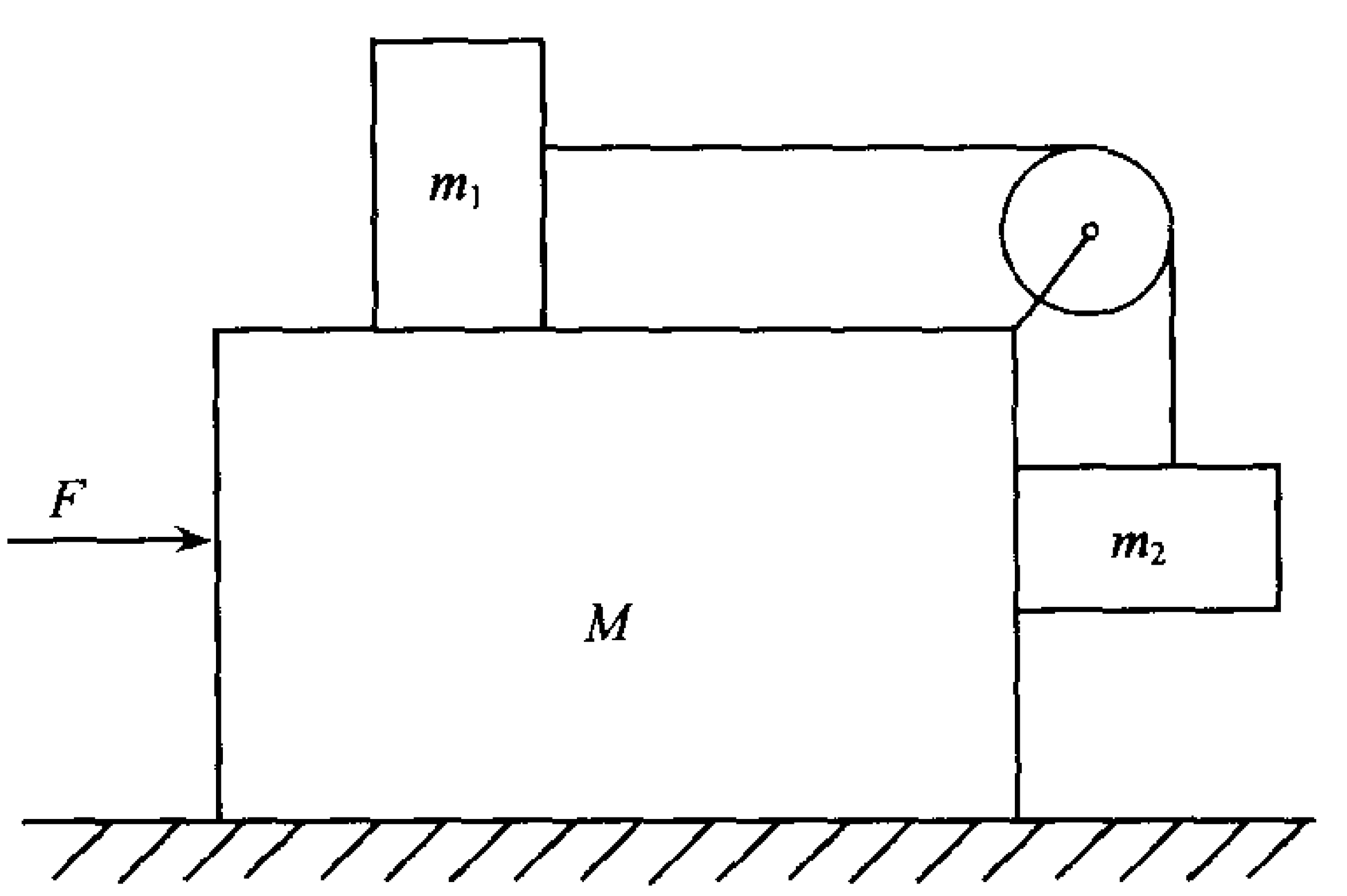


图 2.4

2.1.4 图 2.4 中滑轮及绳子质量均可忽略不计，所有的接触均是光滑的. 分两种情况：(1)要使 m_1、m_2、M 之间无相对运动；(2) 要使 M 保持静止，必须施以 M 的水平力 F 多大？M 对水平面的压力 N 多大？

解 设绳子张力为 T.

(1) m_2 在竖直方向无运动，$T = m_2 g$. m_1 只有水平方向有运动，设加速度为 a，

$$m_1 a = T = m_2 g$$

所以

$$a = \frac{m_2 g}{m_1}$$

m_1、m_2、M 间无相对运动，故上述 a 也是 m_1、m_2、M 组成的系统的加速度，

$$F = (m_1 + m_2 + M)a = \frac{m_2(m_1 + m_2 + M)g}{m_1}$$

这个系统在竖直方向无运动，

$$N = (m_1 + m_2 + M)g$$

（2）因 M 保持静止，m_1 向右的加速度和 m_2 向下的加速度大小相同，均为 a，

$$m_1 a = T, \qquad m_2 a = m_2 g - T$$

解得

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}, \qquad T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

m_2 在水平方向无运动，故 M、m_2 间无相互作用力，以 M 和滑轮为系统，水平方向只受到两个力，一个是向右的力 F，另一个是向左的绳子张力 T，M 保持静止，故

$$F = T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

对 m_1、m_2 和 M（包括滑轮）列竖直方向的牛顿运动第二定律方程再相加得

$$m_2 a = (M + m_1 + m_2)g - N$$

$$N = (M + m_1 + m_2)g - \frac{m_2^2 g}{m_1 + m_2}$$

$$= \left(M + m_1 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

注意：m_2 受到绳子向上的拉力，而滑轮也受到绳子向下的拉力 T.

2.1.5　图 2.5 中小车质量 M、重物质量 m 以及固定斜面的倾角 α 都是已知的，绳子不可伸长，绳子和滑轮的质量以及整个装置中的摩擦力均可略去不计，求小车和重物的加速度.

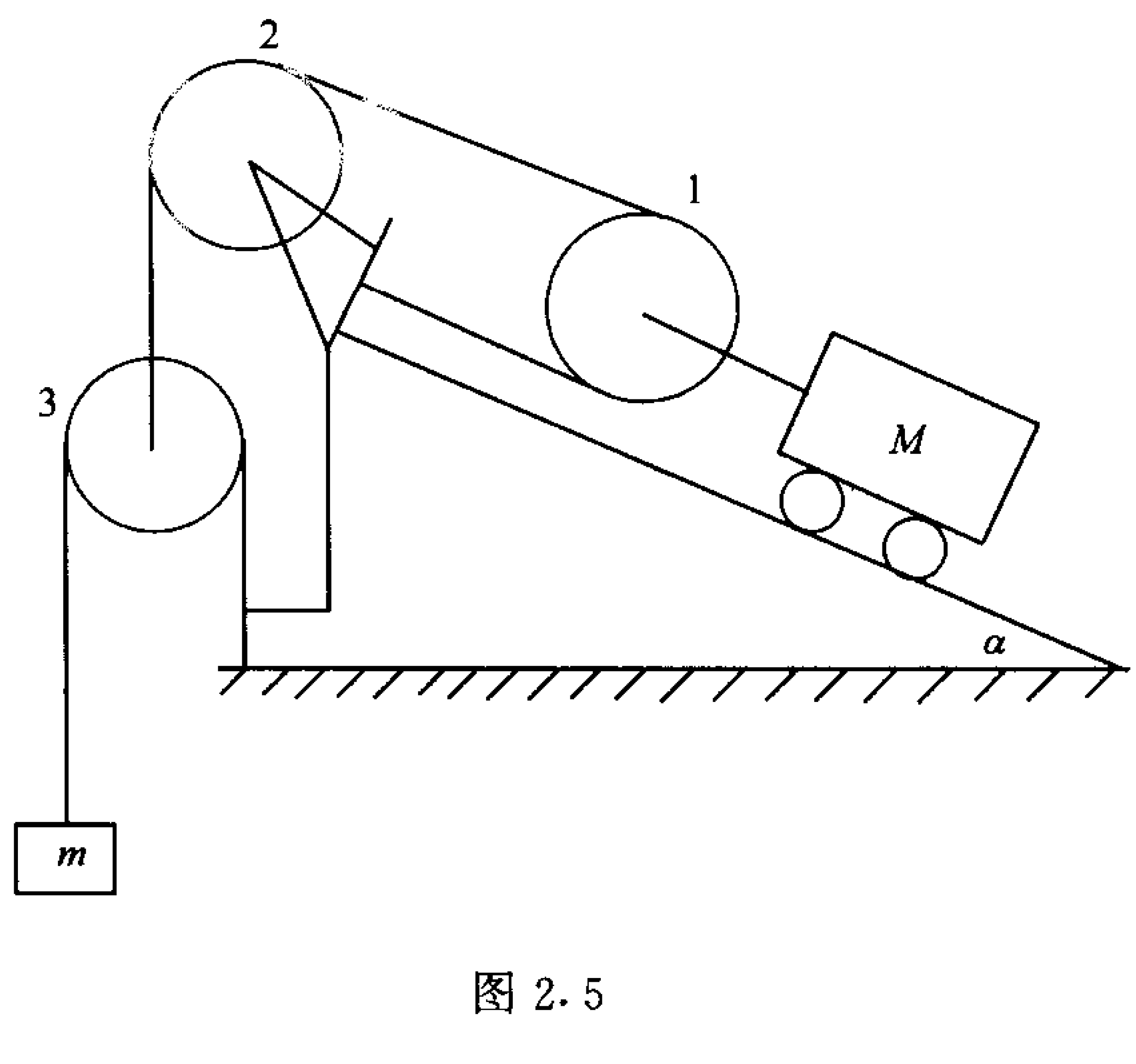


图 2.5

解　滑轮 1 的轮心沿斜面向上移动的距离也就是 M 沿斜面向上移动的距离，设此距离为 x，则滑轮 3 的轮心向下移动的距离为 $2x$，m 向下移动的距离为 $4x$. 由此可得 m 向下的速度 v_m、加速度 a_m 与 M 沿斜面向上的速度 v_M、加速度 a_M 有下列关系：

$$v_m = 4v_M, \qquad a_M = 4a_M \tag{1}$$

分别对滑轮 3 和滑轮 1 用牛顿运动第二定律可得：若连结 m 的绳子张力为 T，则连结 M 的绳子张力为 $4T$.

$$ma_m = mg - T \tag{2}$$

$$Ma_M = 4T - Mg\sin\alpha \tag{3}$$

解出

$$a_M = \frac{4m - M\sin\alpha}{M + 16m}g$$

$$a_m = \frac{4(4m - M\sin\alpha)}{M + 16m}g$$

2.1.6　三块质量均为 m 的相同物块叠放在水平面上，如图 2.6 所示．各接触面间的摩擦因数均为 μ，有一从零不断加大的水平力 F 作用在最下面的物块上. 问 F 达多大时，最下面的物块才能有对上面两物块的相对运动.

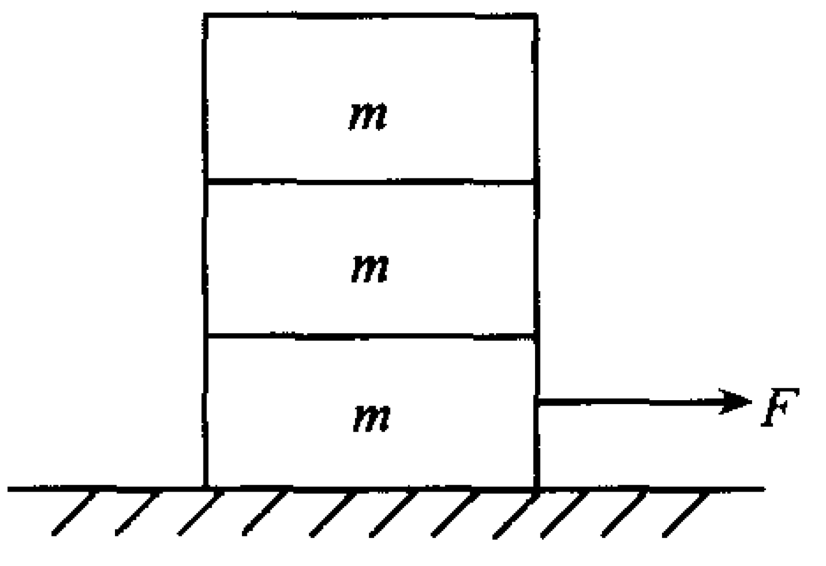


图 2.6

解　设最下面物块与上面两物块将发生而尚未发生相对运动的临界状态时，它们的加速度均为 a，

$$3ma = F - 3\mu mg$$

$$ma = F - 3\mu mg - 2\mu mg$$

消去 a 即得

$$F = 6\mu mg$$

因为原来无相对运动，F 从零增大到 $6\mu mg$ 时仍无相对运动，F 需略大于 $6\mu mg$ 时才能发生相对运动.

2.1.7　质量为 M 的木板静置于水平桌面上(如图 2.7 所示)，一端 A 与桌边对齐，木板上放着一质量为 m 的小物体，它离板的 A 端距离 l，桌面长 L. 现在板的另一端 B 有一恒定的水平力 F 作用，要将木板从小物体下抽出，又不至于使小物体从桌边落到地上. 若各接触面的摩擦因数均为 μ，F 至少多大?

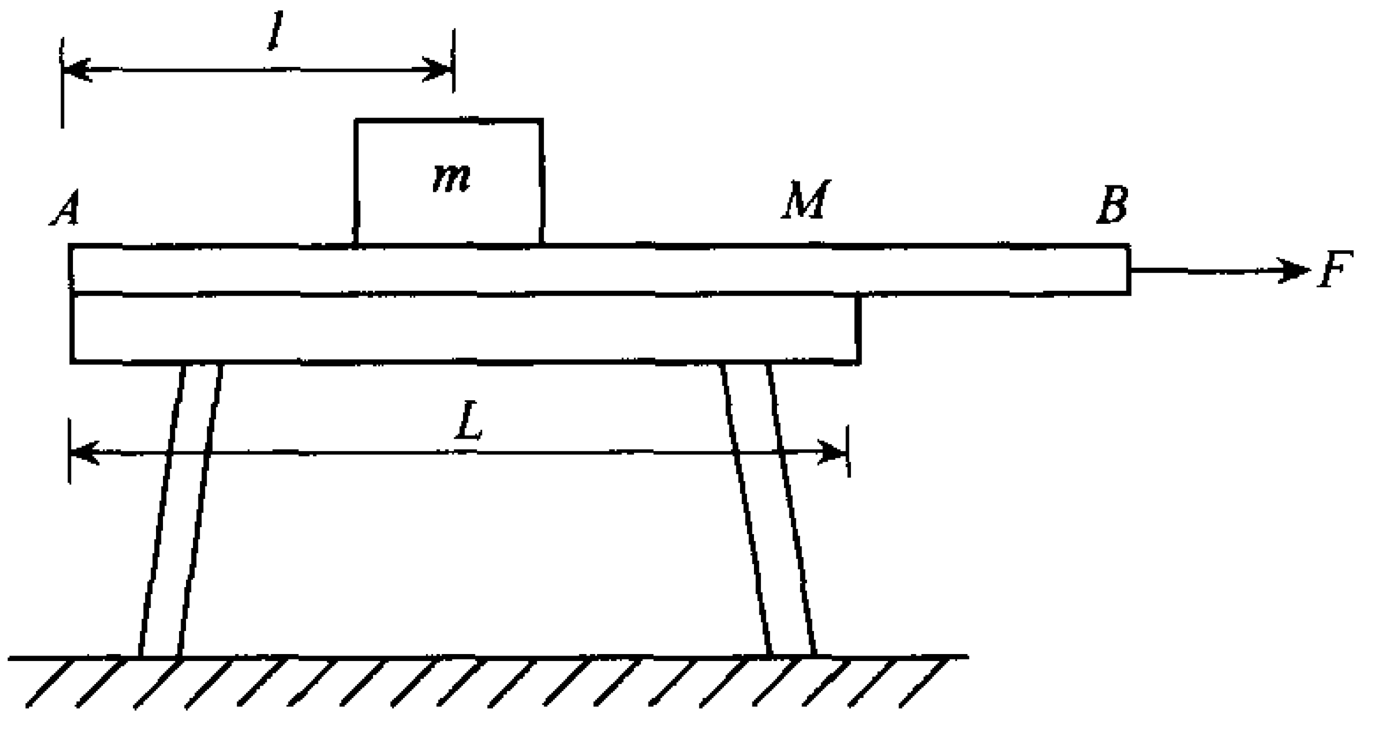


图 2.7

解　小物体未脱离木板时受到木板施给的向前的摩擦力 μmg，脱离木板后，受到桌面施给的向后的摩擦力 $-\mu mg$，产生的加速度，一个为 μg，一个为 $-\mu g$. 开始小物体静止，最后到桌边时也要刚好静止. 因此，小物体脱离木板时应走了全程的一半距离. 设历时为 t，

$$\frac{1}{2}(L - l) = \frac{1}{2}\mu g t^2 \tag{1}$$

至 t 时，木板走的距离为 $l + \frac{1}{2}(L - l)$，木板也在恒力作用下做匀加速运动，设加速度为 a，

$$l + \frac{1}{2}(L - l) = \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

此 a 是水平作用力 $F_{\min}$、小物体施给的摩擦力 $-\mu mg$ 和桌面施给的摩擦力 $-\mu(M+m)g$ 的合力产生的，

$$Ma = F_{\min} - \mu mg - \mu(M+m)g \tag{3}$$

式(1)、(2)、(3)中有三个未知量 t、a 和 $F_{\min}$，可解出

$$F_{\min} = 2\mu g \frac{(M+m)L - ml}{L-l}$$

2.1.8　一块砖以初速度 1.5m/s 在一与水平面成 30°角的斜面上向上运动，摩擦因数 $\mu=\frac{\sqrt{3}}{12}$. 问经 0.5s 后，此砖离它的初始位置有多远？

解　因为沿斜面向上运动还是向下运动摩擦力的方向不同，因此加速度不同，向上运动和向下运动不能用统一的运动学方程表达，必须判明 $t=0\sim t=0.5$s 期间，是否都是向上运动.

设砖块质量为 m，沿斜面向上的加速度为 a_1，

$$ma_1 = -mg\sin30° - \mu mg\cos30°$$

$$a_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g = -\frac{5}{8}g$$

设达到最高点的时刻为 t_1

$$0 - v_0 = a_1 t_1$$

$$t_1 = -\frac{v_0}{a_1} = \frac{1.5}{\frac{5}{8}\times 9.8} = 0.245\text{s}$$

$t_1<0.5$s，故 $t=0.245$s～0.5s 期间，砖块从最高点沿斜面从静止开始下滑，下滑时加速度设为 a_2，

$$ma_2 = mg\sin30° - \mu mg\cos30°$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g = \frac{3}{8}g$$

砖块在 0.5s 时离初始位置沿斜面向上运动的距离

$$s = s_1 - s_2 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}a_1 t_1^2 - \frac{1}{2}a_2(0.5-t_1)^2$$

$$= 1.5\times0.245 + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{8}\times9.8\right)(0.245)^2 - \frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\times9.8(0.5-0.245)^2$$

$$= 0.064\text{m}$$

2.1.9　两个无质量的小环在一个处于铅垂面内的光滑圆环上滑动，一穿过两环的光滑弦线上带有三个重物，两个在两端，一个在两环之间. 如果当小环 A、B 在离开圆环最高点 H 对环心 O 的张角 30°时处于平衡，如图 2.8 所示．求系在弦线上的三重物 D、E、G 的质量之间的关系.

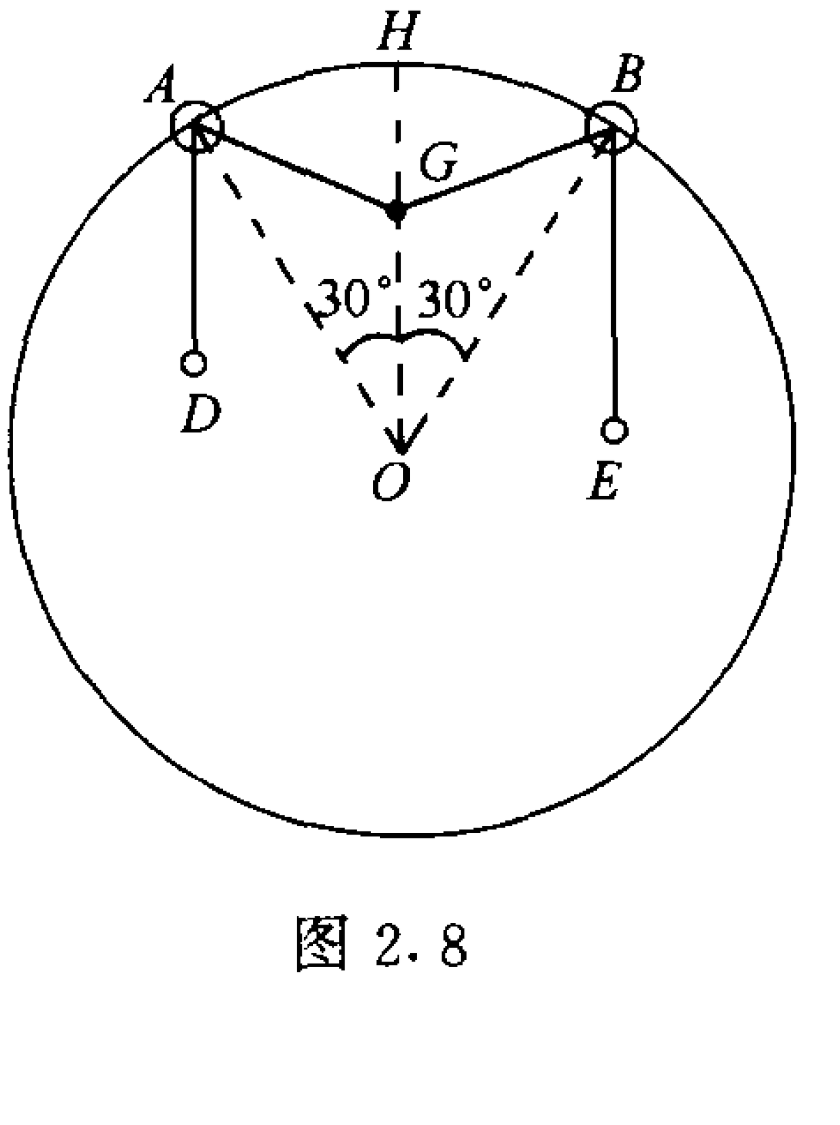


图 2.8

解　由于小环与大环间无摩擦，大环对小环的作用力必沿 OA、OB 方向，平衡时，AD、BE 都是铅垂的，都平行于 HO，故

$$\angle OBE = \angle OAD = 30°$$

分别隔离小环 A 和 B，考虑到弦线是光滑的，G 两

边各处张力分别相等，

$$\angle OAG = \angle OBG = 30°$$

且 G 点必在 HO 连线上.

重物 G 除受两边弦线的张力外，还受到竖直向下的重力，考虑重物 G 处于平衡，G 两边的张力也必须相等，由此可见，重物 D、E 必须质量相等，再对重物 G 列平衡方程，三个力的夹角均为 120°，因此三个力必须大小相等，由此可得出结论：D、E、G 三个重物的质量都相等.

2.1.10　质量为 m 的小环套在绳上，绳子跨过定滑轮并在另一端系一质量为 M 的物体. 若绳子不可伸长、不计质量，绳子与滑轮间的摩擦力可忽略，小环相对于绳子以加速度 a 下落，求小环与绳子间的摩擦力.

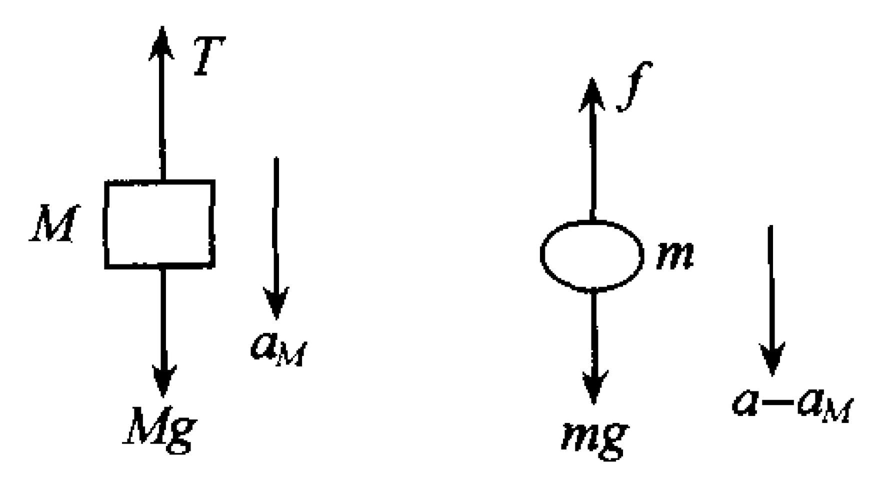


图 2.9

解　图 2.9 画出了物体和小环的受力情况及对静参考系的加速度，其中 T 是绳子张力，f 是绳子作用于小环的摩擦力，a 是小环相对于与之接触的那段绳子的加速度，绳子不可伸长，小环有向上的牵连加速度 a_M，故小环向下的绝对加速度为 $a-a_M$，

$$Ma_M = Mg - T \tag{1}$$

$$m(a - a_M) = mg - f \tag{2}$$

对一段绳子(处于套有小环、在滑轮一边的任意长度的一段)，受到两个力：上端受到向上的张力 T；与小环接触处受到小环给的向下的摩擦力 f. 绳段无质量，

$$T = f \tag{3}$$

解出

$$f = \frac{mM}{m+M}(2g - a)$$

2.1.11　一个质量为 m 的物体通过一根质量可以不计的绳子绕水平棒 $1\frac{1}{4}$ 周后于另一端加一水平力 F，如图 2.10 所示. 若绳子和棒之间的摩擦因数为 μ，要使物体保持静止状态，应施加多大的水平拉力？

解　有两种临界情况：一种是 $F<mg$ 的情况；另一种是 $F>mg$ 的情况. 两种情况下，摩擦力均为最大静摩擦，但方向相反.

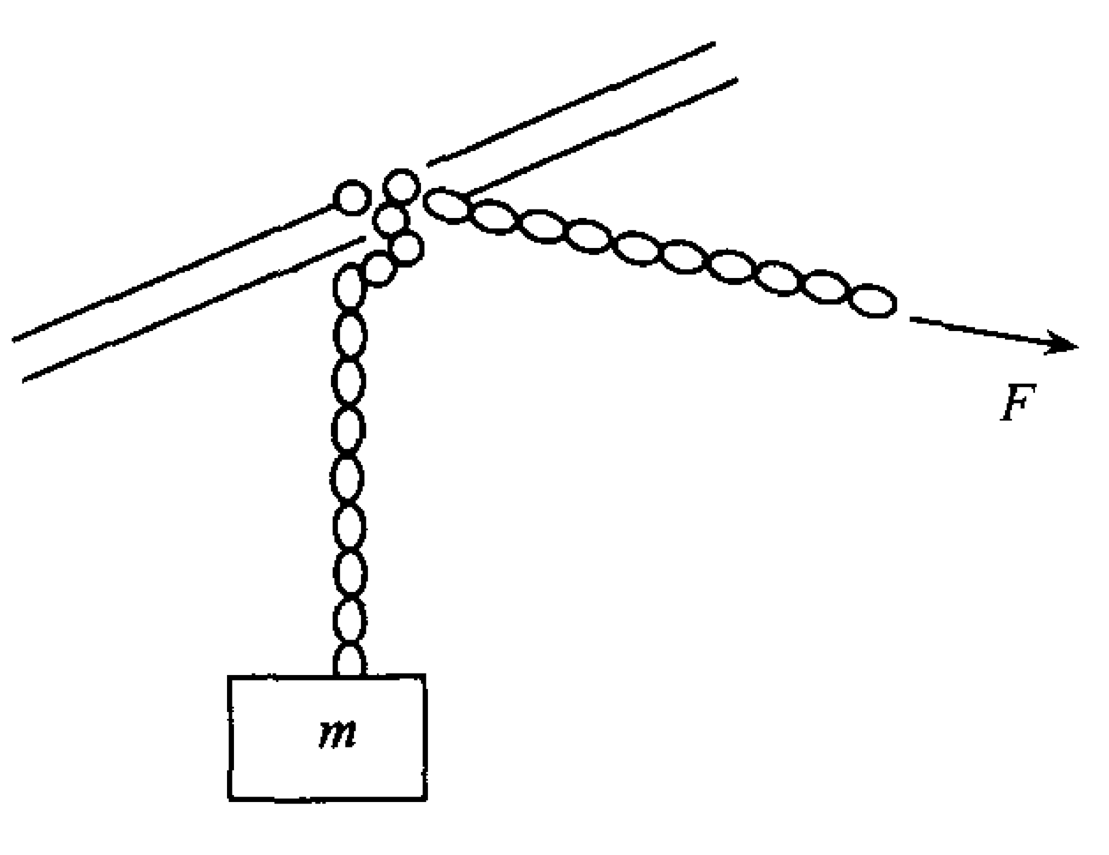


图 2.10

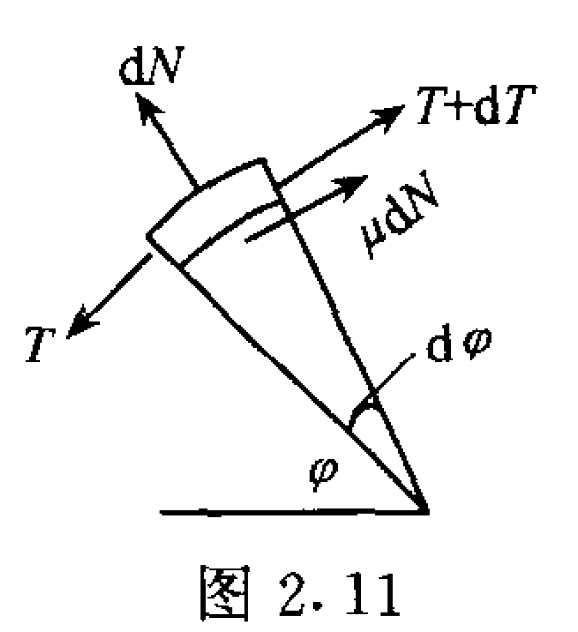


图 2.11

第一种情况：考虑绕在棒上的绳子微元，受力情况如图 2.11 所示，

$$T + \mathrm{d}T + \mu \mathrm{d}N = T$$

$$\mathrm{d}N = 2T\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = T\mathrm{d}\varphi$$

可得

$$\mathrm{d}T = -\mu T\mathrm{d}\varphi$$

当 $\varphi=0$ 时，$T=mg$，$\varphi=\frac{5}{2}\pi$ 时，$T=F_{\min}$，

$$\int_{mg}^{F_{\min}} \frac{1}{T}\mathrm{d}T = -\int_0^{\frac{5}{2}\pi} \mu \mathrm{d}\varphi$$

$$F_{\min} = mg\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\mu\pi}$$

第二种情况：微元受力情况如图 2.12 所示，

$$T + \mathrm{d}T + \mu \mathrm{d}N = T$$

$$\mathrm{d}N = 2T\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = T\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}T = -\mu T\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_{F_{\max}}^{mg} \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\int_0^{\frac{5}{2}\pi} \mu \mathrm{d}\varphi$$

$$F_{\max} = mg\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\mu\pi}$$

施加的水平力 F 在这两个临界情况之间，物体都能保持静止.

$$mg\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\mu\pi} < F < mg\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\mu\pi}$$

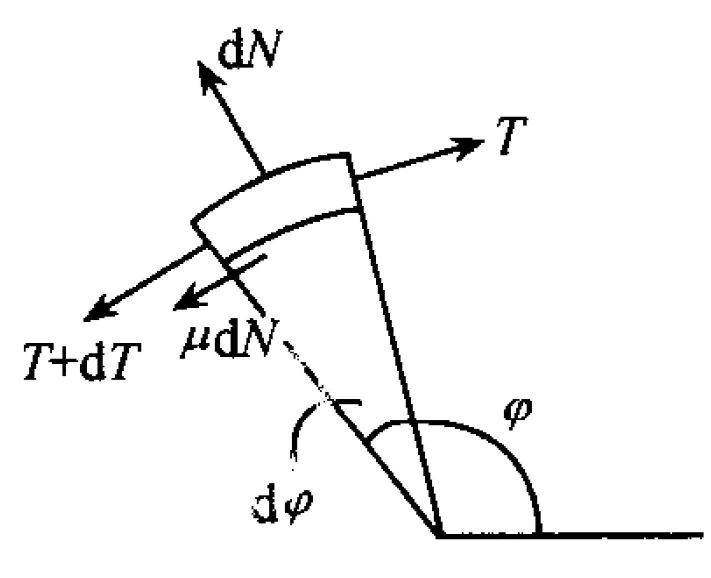


图 2.12

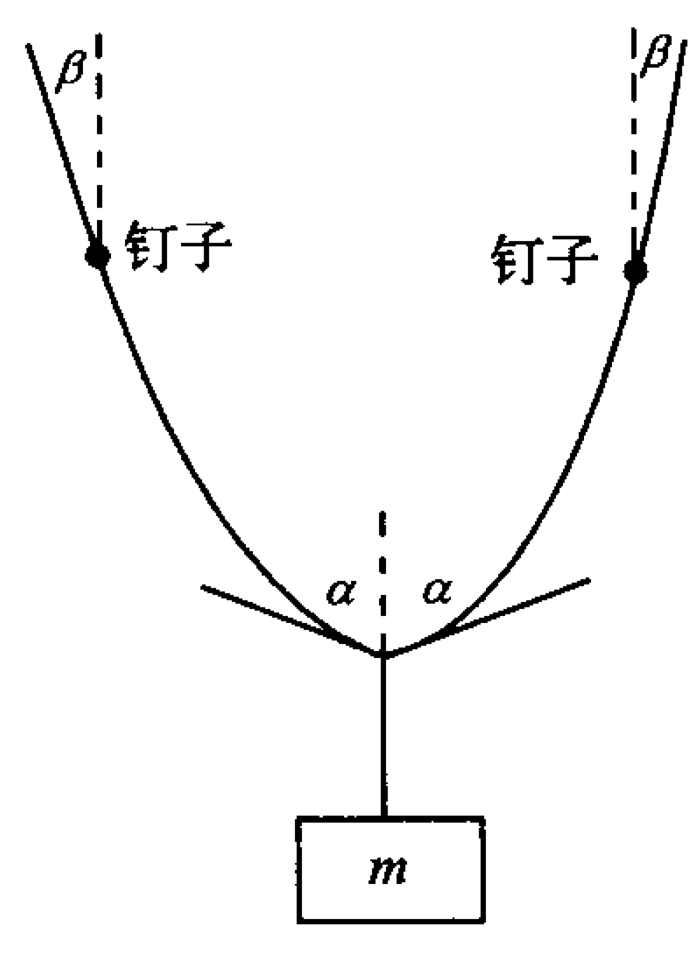


图 2.13

2.1.12　一根质量为 M 的均质绳子，两端固定在同一高度的两个钉子上，在其中点挂一质量为 m 的物体. 设 α、β 分别为在绳子中点和端点处绳子的切线方向与竖直方向的夹角，如图 2.13 所示. 证明：

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{M+m}{m}$$

证明　设绳子中点处张力为 T_1，钉子处绳子张力为 T_2. 连结物体的那段不计质量的绳子张力 $T=mg$.

对绳子中点和对绳子、物体作为系统列平衡方程,

$$2T_1\cos\alpha = mg \tag{1}$$

$$2T_2\cos\beta = (M+m)g \tag{2}$$

再对钉子至中点半条绳子列水平方向的平衡方程,

$$T_2\sin\beta = T_1\sin\alpha \tag{3}$$

由式(1)、(2)得
$$\frac{T_2\cos\beta}{T_1\cos\alpha}=\frac{M+m}{m}$$

由(3)式得
$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

代入上式即得
$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{M+m}{m}$$

2.1.13 一质量为 M 的均质链条套在一表面光滑、顶角为 α、底面处于水平的正圆锥上保持静止,若链条平面平行于水平面,求链条中的张力.

解 取对正圆锥对称轴上处于链条平面上的点的张角为 $d\varphi$ 的一段链条,正圆锥的支持力 dN 的水平分量、竖直分量分别为 $dN\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $dN\sin\frac{\alpha}{2}$. 链条各处张力均为 T,

$$dN\cos\frac{\alpha}{2} = 2T\sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = Td\varphi$$

$$dN\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Mg}{2\pi}d\varphi$$

两式相除消去 dN、$d\varphi$,可得

$$T = \frac{Mg}{2\pi}\cot\frac{\alpha}{2}$$

2.1.14 真空中有缺陷的、质量为 950kg 的卫星,被飞船用一根 50m 长、线密度为 1kg/m 的均质绳牵着以 5m/s^2 的加速度做匀加速直线运动:

(1) 飞船作用在绳上的力多大?

(2) 计算绳的张力;

(3) 飞船上的人精疲力竭睡着了,飞船助推器的控制电路之一发生短路,使加速度变为 1m/s^2 的减速度. 这个事故会发生什么后果?

解 (1) $F = (m_{绳}+m_{星})a$

$= (1\times 50+950)\times 5 = 5\times 10^3(\text{N})$

(2) 由于绳子具有质量且有不为零的加速度,绳上各点的张力不相等. 取绳与飞船的连接点为 x 轴的零点,飞船指向卫星的方向为 x 轴正方向,则绳子张力

$$T(x) = [m_{星} + m_{绳}(x)]a$$
$$= [950 + 1\times(50 - x)]\times 5 = 5\times 10^3 - 5x(\text{N})$$
$$0\leqslant x\leqslant 50$$

(3) 事故发生后,卫星仍以原来已获得的速度(设为 v_0)运动,绳子处于弯曲状态,两端的张力的水平分量将使卫星加速,飞船有更大的减速度. 若不计绳子张力的作用,事故发生后 t 时刻,卫星与飞船将发生碰撞.

$$v_0t - \left(v_0t - \frac{1}{2}\times 1\times t^2\right) = 50$$

解出 $t=10\text{s}$.

考虑到绳子张力的作用，不到 10s 就发生碰撞.

2.1.15　某人观察到一空间站始终停留在地球同一点的垂直上空.问观察者位于地球的什么地方？尽可能详细地描述一下此空间站的轨道.

解　空间站始终停留在地球同一点的垂直上空，说明它好像和地球固连在一起以地球自转的角速度随地球一起运动，它做恒定角速度的圆周运动，只有法向加速度，切向加速度为零.而它又只受地球的引力作用，这个引力是指向地球中心的，因此相对地球不动的空间站在地心平动参考系中的轨道只能位于赤道平面上，不能位于纬度不为零的平面上.因此，看到空间站在垂直上空不动的观察者必在地球赤道上的某个地方.

根据该空间站在地球引力作用下在赤道平面以地球的自转角速度跟地球一起做圆轨道运动这一点，可以算出它位于赤道地面垂直上空的高度.设此高度为 h、地球半径为 R.对地心平动参考系，做半径为 $R+h$ 的圆周运动，角速度为地球自转角速度 ω，设空间站质量为 m，地球质量为 M，

$$m(R+h)\omega^2=\frac{GmM}{(R+h)^2}$$

$$h=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}-R$$

$$\frac{GmM}{R^2}=mg$$

可得

$$h=\sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}}-R=\sqrt[3]{\frac{9.8\times(6.371\times10^6)^2}{(7.27\times10^{-5})^2}}-6.371\times10^6$$

$$=3.59\times10^7\text{m}$$

2.1.16　公园里有一种转动水平圆盘，孩子可以坐在盘面上任何地方.当盘开始加快转速时，如果摩擦力不够大，孩子就可能滑出去.设孩子的质量为 50kg，摩擦因数为 0.4，盘的角速度为 2rad/s，问孩子坐在盘上不被滑开的最大半径多大？

解　在临界情况下，摩擦力为没有相对运动的最大静摩擦.设不被滑开的最大半径为 R，

$$mR\omega^2=\mu mg$$

$$R=\frac{\mu g}{\omega^2}=\frac{0.4\times9.8}{2^2}=0.98\text{m}$$

2.1.17　一小物体放在一半径为 R 的水平圆盘上，小物体与圆盘间的静摩擦因数为 μ.若圆盘绕其轴的角速度逐渐增大到一个值时，小物体滑出圆盘并最终落到比盘面低 h 的地面上.问从它离开圆盘的那一点算起，小物体越过的水平距离多大？

解　设小物体质量为 m，落下时越过的水平距离为 l，下落时间为 t，

$$\frac{mv^2}{R}=\mu mg$$

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

$$l=vt$$

可得

$$l=\sqrt{2\mu Rh}$$

2.1.18　太阳离银河系中心大约相距 2.5×10^4 光年，近似地以 1.7×10^8 年的周期

绕此中心做圆周运动. 地球离太阳的距离为 8 光分. 用以上数据,求出以太阳质量作为单位的银河系的近似质量. 假定作用在太阳上的引力近似为银河系的质量集中在其中心时对太阳的引力.

解　设 M、m_s、m_e 分别为银河系、太阳和地球的质量,r、R 分别是日地间和太阳至银河系中心的距离,v、V 分别是地球的公转速度(以太阳为参考系)和太阳绕银河系公转的速度(以银河系为参考系).

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Gm_e m_s}{r^2}$$

$$\frac{m_s V^2}{R} = \frac{Gm_s M}{R^2}$$

设 T_e、T_s 分别为地球和太阳做圆周运动的周期,

$$T_e = \frac{2\pi r}{v}, \qquad T_s = \frac{2\pi R}{V}$$

由以上各式可解出

$$\frac{M}{m_s} = \left(\frac{R}{r}\right)^3\left(\frac{T_e}{T_s}\right)^2 = \left(\frac{2.5\times 10^4\times 365\times 24\times 60}{8}\right)^3\left(\frac{1}{1.7\times 10^8}\right)^2$$

$$= 1.53\times 10^{11}$$

2.1.19　用以下近似数据计算地球和太阳的平均密度之比:

θ 从地球上看太阳的角直径,$\theta = 0.5°$;

l 为地球表面上纬度为 1°的长度,$l = 100\text{km}$;

t 为地球公转周期,$t = 1$ 年 $= 3\times 10^7\text{s}$;

g 为重力加速度,$g = 10\text{ms}^{-2}$.

解　设 r 为地球绕太阳做圆周运动的半径 m_e、m_s 分别表示地球和太阳的质量,R_e、R_s 分别表示地球和太阳的半径;ω 为地球公转的角速度,

$$\frac{Gm_e m_s}{r^2} = m_e r\omega^2, \qquad \omega = \frac{2\pi}{t}$$

$$\frac{Gm_s}{r^3} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^2, \qquad r\theta = 2R_s$$

$$\frac{2R_s}{r} = 0.5\times\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{360}, \qquad r = \frac{720}{\pi}R_s$$

$$\frac{Gm_s}{R_s^3} = \frac{Gm_s}{r^3}\left(\frac{r}{R_s}\right)^3 = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^3\left(\frac{720}{\pi}\right)^3$$

$$\frac{Gmm_e}{R_e^2} = mg, \qquad \frac{Gm_e}{R_e^3} = \frac{g}{R_e}$$

$$l = \frac{\pi R_e}{180}, \quad R_e = \frac{180l}{\pi}, \quad \frac{Gm_e}{R_e^3} = \frac{g\pi}{180l}$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_s} = \frac{\dfrac{m_e}{\frac{4}{3}\pi R_e^3}}{\dfrac{m_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3}} = \frac{\dfrac{m_e}{R_e^3}}{\dfrac{m_s}{R_s^3}}$$

$$= \frac{\frac{g\pi}{180l}}{\left(\frac{2\pi}{t}\right)^2\left(\frac{720}{\pi}\right)^3} = \frac{g\pi^2 t^2}{(720)^4 l} = \frac{10\pi^2(3\times10^7)^2}{(720)^4\times100\times10^3}$$

$$= 3.3$$

2.1.20　(1) 一个均质的球形物体以角速度 ω 绕对称轴转动，如果仅仅靠自身的万有引力阻碍球体的离心分解，该物体必须具有的最小密度多大？用这一点估计巨蟹座中转速为每秒 30 转的脉冲星的最小密度.（这是公元 1054 年在中国广泛地被观察到的一个超新星爆发的遗迹！）

(2) 如果脉冲星的质量与太阳的质量相当，约为 2×10^{30}kg，这个脉冲星的最大可能半径多大？

(3) 若脉冲星的密度与核物质的密度相当，它的半径多大？

解　(1) 不发生离心分解的条件是自身的万有引力的法向分量大于或等于质元做此圆周运动所需的向心力.

对于球体表面纬度为 λ 处的质元，不离心分离的条件是

$$\Delta m(R\cos\lambda)\omega^2 \leqslant \frac{G\Delta m m}{R^2}\cos\lambda$$

其中 Δm、m 分别为质元和物体质量，R 为球体的半径. G 为万有引力恒量，

$$\frac{Gm}{R^3} \geqslant \omega^2$$

上述条件与纬度 λ 无关.

对于球体内部的质元，例如在离球心 r 处，可以证明：自身的万有引力等于半径为 r 的球体对它的万有引力，也指向球心，现考虑赤道面的一个质元，条件为

$$\Delta m r\omega^2 \leqslant \frac{G\Delta m m(r)}{r^2} = \frac{G\Delta m \frac{m}{R^3}r^3}{r^2}$$

也得到

$$\frac{Gm}{R^3} \geqslant \omega^2$$

故对于密度的要求为

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \geqslant \frac{3\omega^2}{4\pi G},\quad 即\quad \rho_{\min} = \frac{3\omega^2}{4\pi G}$$

对于巨蟹座中的那颗脉冲星，

$$\omega = 2\pi\times30 = 60\pi \text{rad/s}$$

$$\rho_{\min} = \frac{3(60\pi)^2}{4\pi\times6.67\times10^{-11}} = 1.27\times10^{14}\text{kg/m}^3$$

(2) $\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{\min} = M$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho_{\min}}} = \sqrt[3]{\frac{3\times2\times10^{30}}{4\pi\times1.27\times10^{14}}} = 1.55\times10^5\text{m}$$

(3) $\rho_{核} \approx \dfrac{m_p}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$

其中 m_p 为质子质量，$m_p = 1.67\times10^{-27}$kg，R_0 为质子半径，$R_0 \approx 1.2\times10^{-15}$m，

$$\rho_{核} \approx \frac{1.67\times10^{-27}}{\frac{4}{3}\pi\times(1.2\times10^{-15})^3} = 2.3\times10^{17}\text{kg/m}^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho_{核}}} = \sqrt[3]{\frac{3\times2\times10^{30}}{4\pi\times2.3\times10^{17}}} = 1.3\times10^4\text{m}$$

注意：这个脉冲星的密度已超过(1)中算出的不离心分离所需的最小密度.

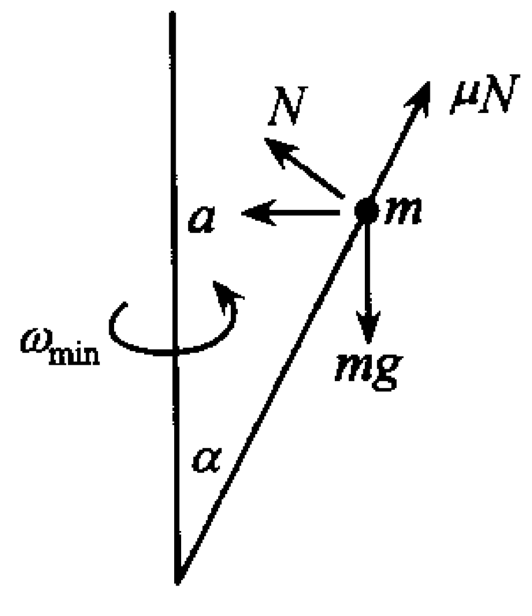


图 2.14

2.1.21 一顶角为 $2\alpha(\alpha>45°)$ 的倒立的圆锥面，以恒定角速度 ω 绕其对称轴旋转，在内表面上距轴为 r 处有一质点，若质点与锥面间的摩擦因数为 μ，要使质点相对锥面静止，ω 应处于什么范围内？

解 先求 ω_{min}.

设质点质量为 m，锥面的支持力为 N，此时锥面作用于质点的摩擦力为最大静摩擦 μN，方向沿锥面向上．质点受力和加速度如图 2.14 所示，其中加速度 $a = mr\omega_{min}^2$，

$$N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha - mg = 0$$

$$mr\omega_{min}^2 = N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha$$

可解出

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}}$$

上式只有在 $\cos\alpha-\mu\sin\alpha\geqslant0$，即 $\mu\leqslant\cot\alpha$ 时才有意义.

若 $\mu\geqslant\cot\alpha$，可证 $\omega_{min}=0$，证明如下：

假定能保持静止，摩擦力为 f，则

$$N\sin\alpha + f\cos\alpha - mg = 0$$

$$N\cos\alpha - f\sin\alpha = 0$$

解出

$$f = mg\cos\alpha$$

$$N = mg\sin\alpha$$

今

$$\mu N \geqslant N\cot\alpha = mg\cos\alpha = f$$

所需的摩擦力未超过最大静摩擦，说明确能保持静止.

再求 ω_{max}，摩擦力仍为最大静摩擦，但方向与求 ω_{min} 所画的图中的方向相反，N 和 ω_{max} 所满足的方程与 N 和 ω_{min} 所满足的方程相比，将 ω_{min} 改成 ω_{max}，μ 改成 $-\mu$ 即可，故

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}}$$

上式只有在 $\sin\alpha-\mu\cos\alpha>0$，即 $\mu<\tan\varphi$ 时才有意义．

若 $\mu>\tan\alpha$，可证 $\omega_{max}=\infty$，即对于任何大于等于 ω_{min} 的 ω，质点均能保持静止.

证明如下：假定能保持静止，

$$N\sin\alpha - f\cos\alpha - mg = 0$$

$$N\cos\alpha + f\sin\alpha = mr\omega^2$$

解得

$$N = mg\sin\alpha + mr\omega^2\cos\alpha$$

$$f = mr\omega^2\sin\alpha - mg\cos\alpha$$

今

$$\mu N > N\tan\alpha = mg\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + mr\omega^2\sin\alpha$$

$$\mu N - f > mg\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + mg\cos\alpha > 0$$

有 $\mu N > f$，说明假定成立，能保持静止.

今 $\alpha > 45°$，$\tan\alpha > \cot\alpha$，因为 $\mu < 1$，故 μ 的可能取值范围为 $\cot\alpha \leqslant \mu < \tan\alpha$，$\mu < \cot\alpha$.

当 $\mu < \cot\alpha$ 时，

$$\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \leqslant \omega \leqslant \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}}$$

当 $\mu \geqslant \cot\alpha$（必 $< \tan\alpha$，故可以不写）时，

$$0 \leqslant \omega \leqslant \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}}$$

质点相对锥面能保持静止.

2.1.22　一圆柱形刚性杆上套一质量为 m 的小环，杆绕通过一端的固定竖直轴以恒定角速度 ω 旋转，旋转时杆与竖直轴的夹角为 α. 若小环与杆间的摩擦因数为 μ，以小环距杆的固定端的距离 x 为坐标列出小环的运动微分方程.

解　取杆为参考系，它是个转动参考系. 质点的受力情况如图 2.15 所示，N_1、N_2 是杆对小环的支持力的两个分量，N_2 垂直纸面向里，可仿照电磁学中画 $\boldsymbol{B}$ 的方向用⊗表示，图中未画，杆对小环的摩擦力为 μN，$N=\sqrt{N_1^2+N_2^2}$，方向与 $\dot{x}$ 的正负值有关，$\dot{x}>0$ 时，沿杆向下，$\dot{x}<0$ 时，沿杆向上，因此图中也未标出. mg 是重力，$m\omega^2 x\sin\alpha$ 是惯性力. 还有一个科氏力也是惯性力，$2m\omega\dot{x}\sin\alpha$，垂直纸面向外为正，图上也未画出.

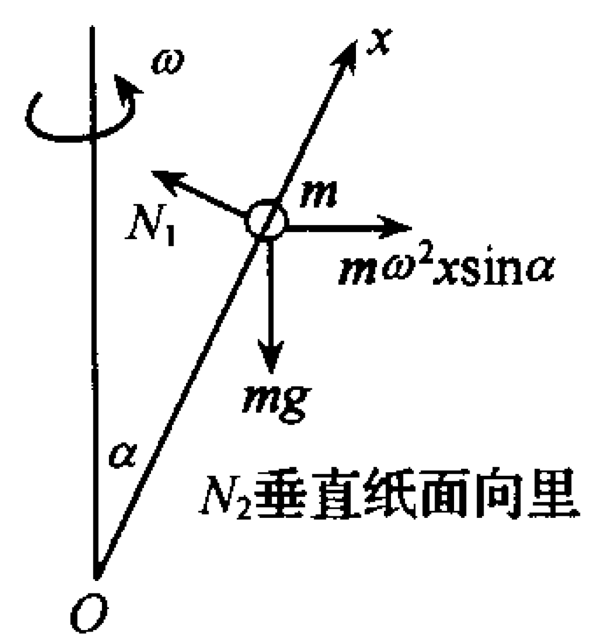


图 2.15

运动微分方程为

$$m\ddot{x} = \begin{cases} -mg\cos\alpha - \mu N + m\omega^2 x\sin^2\alpha & (\dot{x} > 0 \text{ 时}) \\ -mg\cos\alpha + \mu N + m\omega^2 x\sin^2\alpha & (\dot{x} < 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$$N_1 = mg\sin\alpha + m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$$

$$N_2 = 2m\omega\dot{x}\sin\alpha$$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

2.1.23　质量为 m 的小球通过一根原长为 l、劲度系数为 k 的弹性绳系在光滑的水平台面上的 P 点，水平台面绕离 P 点距离为 b 的固定竖直轴以恒定的角速度 ω 转动. 列出小球在弹性绳拉直状态下的运动微分方程.

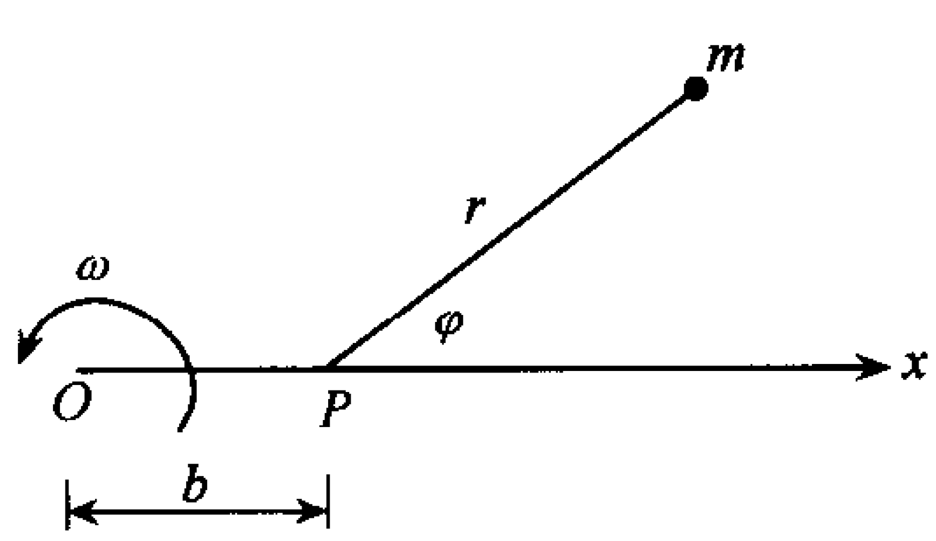


图 2.16

解 取水平台面为参考系，它是个转动参考系. 取台面的固定点 O 和 P 的连线为 x 轴，用 P 为原点的极坐标列出运动微分方程.

质点受到水平方向的力有弹性绳的拉力和两个惯性力：惯性离轴力和科里奥利力.

惯性离轴力为

$$m\omega^2(\overrightarrow{OP}+\boldsymbol{r})=m\omega^2(b\boldsymbol{i}+r\boldsymbol{e}_r)$$
$$=m\omega^2[(b\cos\varphi+r)\boldsymbol{e}_r-b\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi]$$

科里奥利力为

$$2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=2m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi)\times\omega\boldsymbol{k}$$
$$=2m\omega r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r-2m\omega\dot{r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

运动微分方程为

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-k(r-l)+m\omega^2(r+b\cos\varphi)+2m\omega r\dot{\varphi}$$
$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=-m\omega^2b\sin\varphi-2m\omega\dot{r}$$

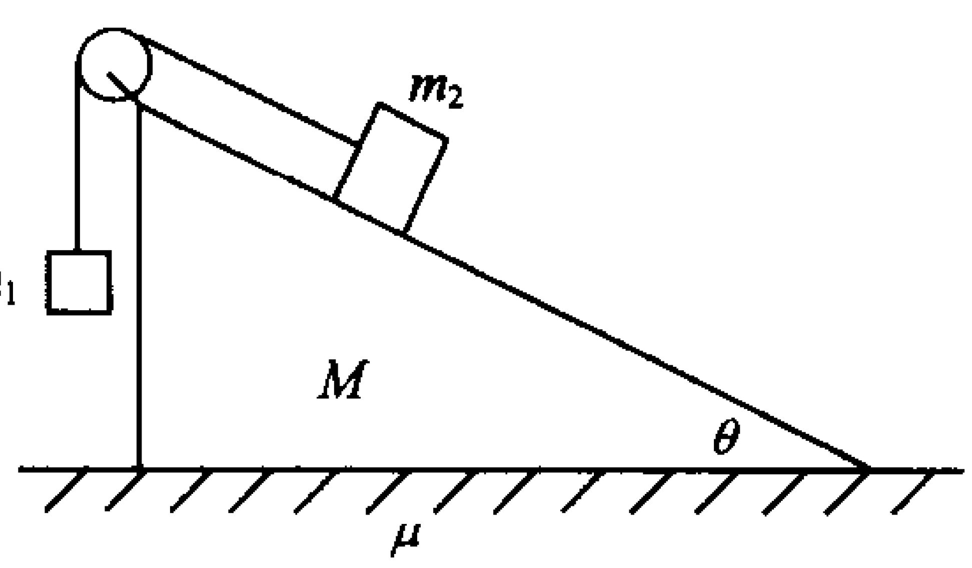


图 2.17

2.1.24 质量为 M 的斜劈放在摩擦因数为 μ 的粗糙水平面上，质量为 m_1 的物体用不计质量、不可伸长的弦线挂起并跨过固连于斜劈的光滑滑轮与在无摩擦的斜劈面上滑动的质量为 m_2 的物体相连，斜劈面的倾角为 θ. 如图 2.17 所示.

(1) 求当 μ 非常大时 m_1 和 m_2 的加速度以及弦线的张力；

(2) 求使斜劈能保持静止的最小摩擦因数；

(3) 若 μ 不够大，斜劈不能保持静止，有向左的加速度 a_M，求此 a_M，列出足够的方程即可，不必解出 a_M. 设滑轮很小，m_1、M 紧靠时，连结 m_1 的弦线仍可视为在竖直方向.

解 (1) μ 非常大，斜劈保持静止. 设弦线张力为 T，m_1 向下运动和 m_2 沿斜面向上运动的加速度值为 a，

$$m_1a=m_1g-T$$
$$m_2a=T-m_2g\sin\theta$$

解得

$$a=\frac{m_1-m_2\sin\theta}{m_1+m_2}g$$
$$T=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+\sin\theta)g$$

(2) 设 $m_2\sin\theta-m_1>0$，则 m_2 对 M 的压力 N_2 的水平分量 $N_2\sin\theta$ 即 $m_2g\cos\theta\sin\theta$(向左)，比弦线拉 M 向右的力的水平分量 $T\cos\theta=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+\sin\theta)g\cos\theta$ 大. 计算如下：

$$m_2g\cos\theta\sin\theta-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+\sin\theta)g\cos\theta$$
$$=\frac{m_2g\cos\theta}{m_1+m_2}[(m_1+m_2)\sin\theta-m_1(1+\sin\theta)]$$

$$= \frac{m_2 g\cos\theta}{m_1 + m_2}(m_2\sin\theta - m_1) > 0$$

故粗糙平面对斜劈的摩擦力向左.

M 受力情况如图 2.18 所示，

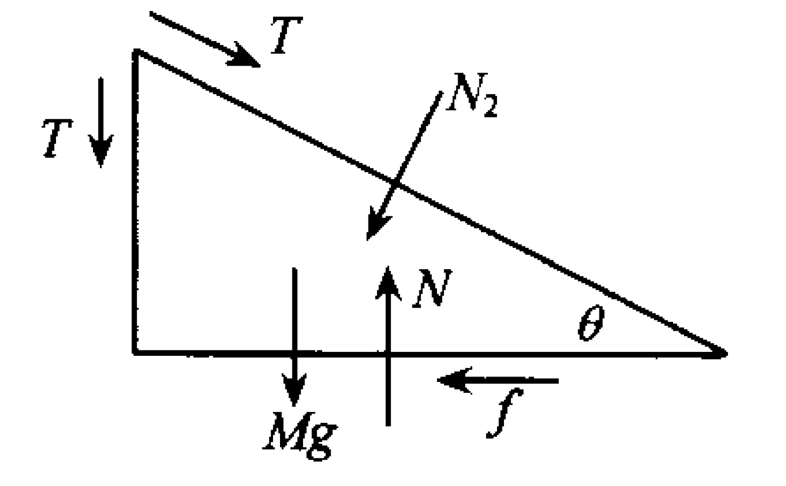


图 2.18

$$T\cos\theta - N_2\sin\theta + f = 0$$

$$T + T\sin\theta + N_2\cos\theta + Mg - N = 0$$

$$N_2 = m_2 g\cos\theta$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sin\theta)g$$

考虑能保持静止的最小摩擦因数，此时处于临界情况，f 为最大静摩擦，可解出

$$\mu_{\min} = \frac{m_2\cos\theta(m_2\sin\theta - m_1)}{M(m_1 + m_2) + 2m_1 m_2(1 + \sin\theta) + m_2^2\cos^2\theta}$$

考虑 $m_2\sin\theta - m_1 < 0$ 的情况，可得 $\mu_{\min}$ 为上式的负值. 因此，考虑这两种可能情况应取

$$\mu_{\min} = \frac{m_2\cos\theta\,|m_2\sin\theta - m_1|}{M(m_1 + m_2) + 2m_1 m_2(1 + \sin\theta) + m_2^2\cos^2\theta}$$

(3) 因 M 的加速度 a_M 向左，M 受到摩擦力 $f = \mu N$ 向右.

对 M 用静参考系，对 m_1、m_2 用 M 参考系，它们受力及加速度情况如图 2.19 所示. 其中所列的加速度都是相对于所用的参考系的，$m_1 a_M$、$m_2 a_M$ 都是惯性力，N_1 是 m_1、M 间的相互作用力.

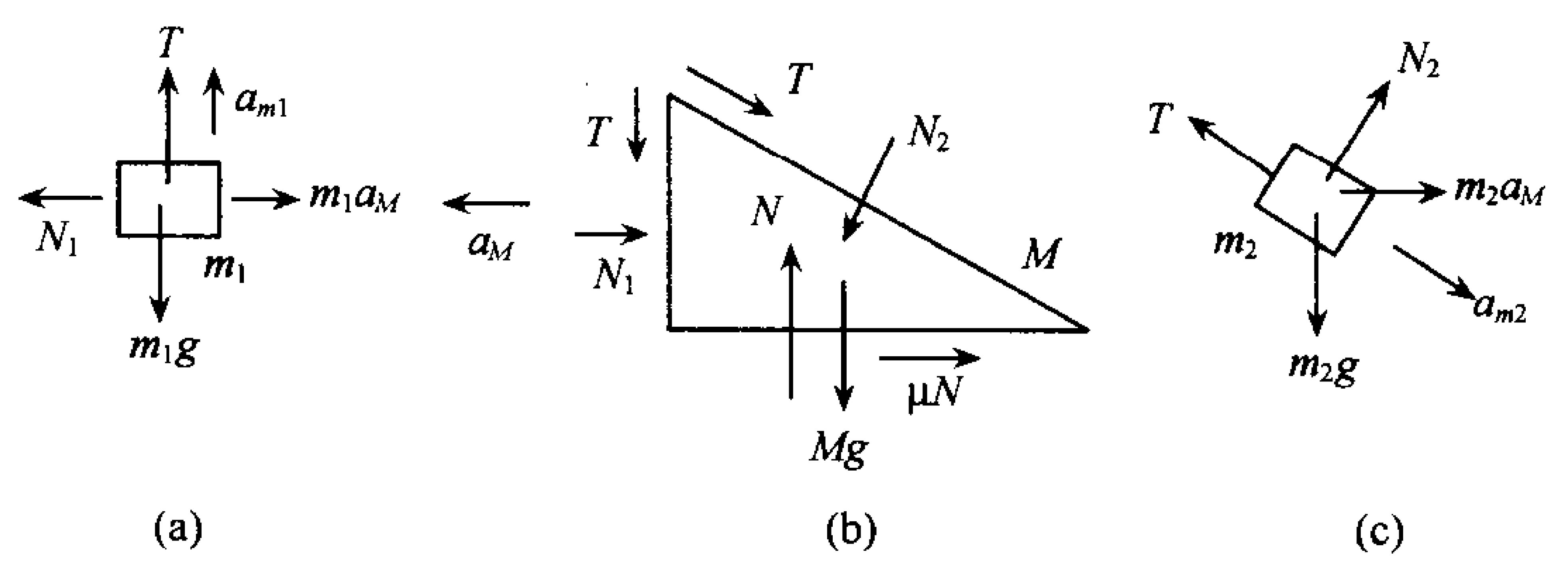


图 2.19

由图 2.19，可列出下列方程：

$$m_1 a_{m1} = T - m_1 g$$

$$N_1 - m_1 a_M = 0$$

$$Ma_M = N_2\sin\theta - N_1 - T\cos\theta - \mu N$$

$$N - Mg - T - T\sin\theta - N_2\cos\theta = 0$$

$$m_2 a_{m2} = m_2 a_M\cos\theta + m_2 g\sin\theta - T$$

$$N_2 + m_2 a_M\sin\theta - m_2 g\cos\theta = 0$$

$$a_{m1} = a_{m2}$$

今有七个方程，其中未知量 a_{m1}、a_M、a_{m2}、T、N_1、N_2、N 也是七个，可解出 a_M 等七个未知量.

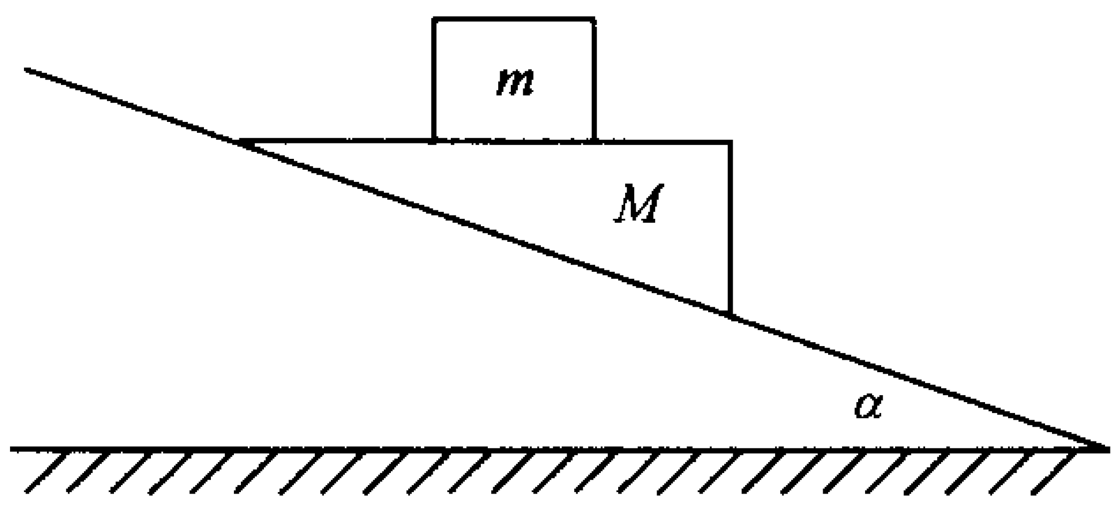


图 2.20

2.1.25　一质量为 M 的、上表面水平的楔形物体,在倾角为 α 的固定的光滑斜面上运动,楔形物体上放一质量为 m 的质点,如图 2.20 所示.若 m、M 间无摩擦,求:

(1) m 相对于 M 的加速度;

(2) M 对斜面的压力.

解　设 m、M 间的相互作用力大小为 R,M 受到斜面的支持力为 N,m 只受到竖直方向的作用力,其加速度 a_m 竖直向下,M 的加速度 a_M 沿斜面向下,

$$ma_m = mg - R$$

$$Ma_M = Mg\sin\alpha + R\sin\alpha$$

$$N - R\cos\alpha - Mg\cos\alpha = 0$$

有约束关系

$$a_m = a_M\sin\alpha$$

式中 a_m、a_M 都是相对于静参考系的加速度,解得

$$R = \frac{mMg\cos^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$a_M = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$a_m = \frac{(M+m)g\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$\boldsymbol{a}_m$、$\boldsymbol{a}_M$ 与 m 相对于 M 的加速度 $\boldsymbol{a}_{mM}$的矢量关系如图 2.21 所示,

$$\boldsymbol{a}_{mM} = \boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_M$$

$$a_{mM} = a_M\cos\alpha = \frac{(M+m)g\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

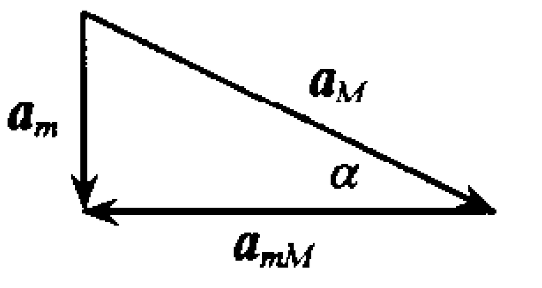


图 2.21

$\boldsymbol{a}_{mM}$的方向水平向左,

$$N = (R + Mg)\cos\alpha = \frac{M(M+m)g\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

2.1.26　图 2.22 中水平桌面上的滑块质量为 M,一条其两端分别系着质量为 m_1、m_2 的两个物体的不计质量、不可伸长的细绳套在滑块上,滑块、绳子与桌面相互间均无摩擦.试证明滑块的加速度为

$$a = \frac{4m_1m_2}{M(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g$$

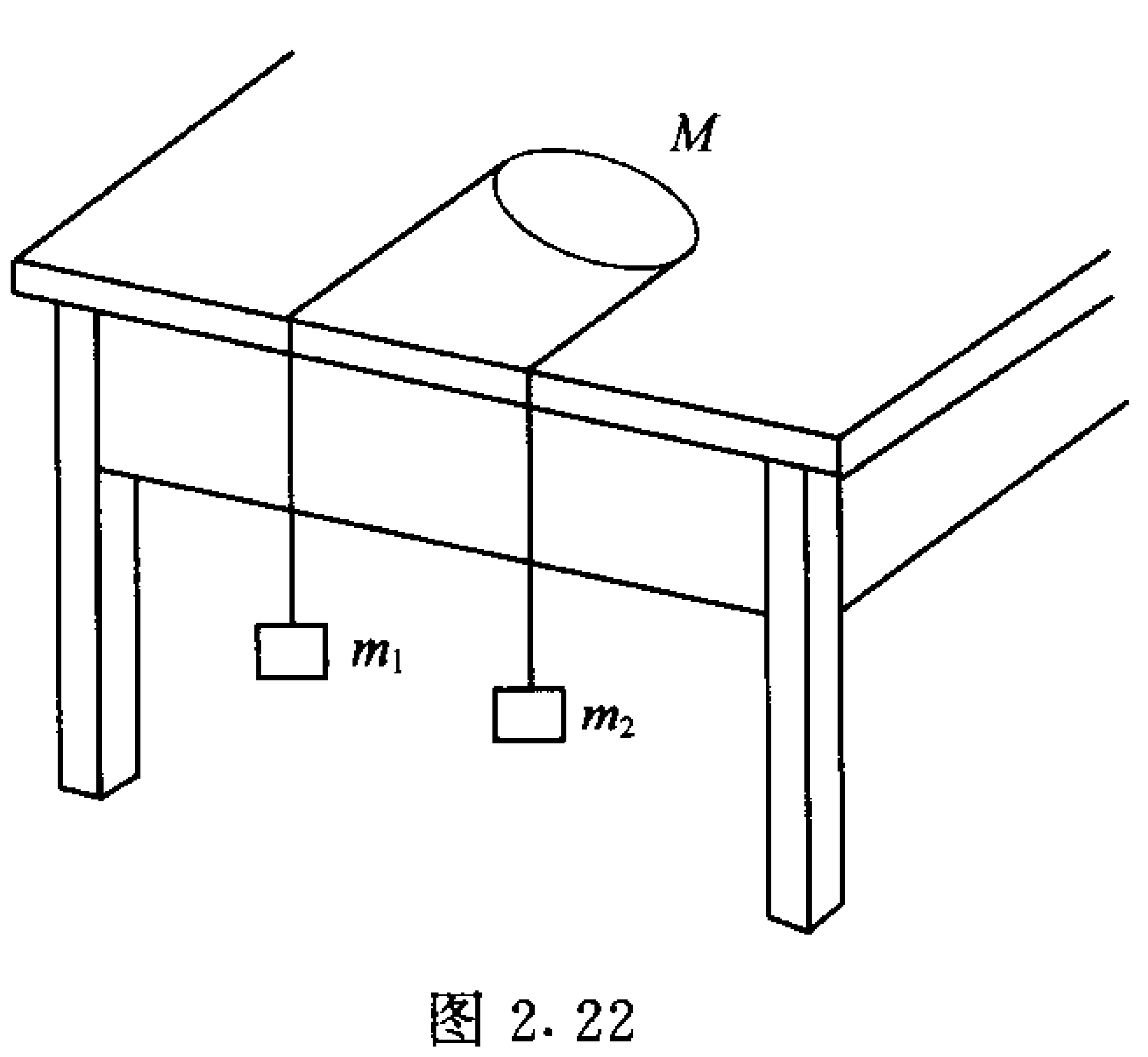


图 2.22

证明　设绳子张力为 T,m_1、m_2 的加速度为 a_1、a_2,均竖直向下,滑块的加速度为 a.

$$m_1a_1 = m_1g - T \tag{1}$$

$$m_2a_2 = m_2g - T \tag{2}$$

$$Ma = 2T \tag{3}$$

从桌的边缘向下取 x_1、x_2 表示 m_1、m_2 的坐标，沿桌面取 x 表示 M 的坐标，由于绳长一定，

$$x_1 + x_2 + 2x = \text{常量}$$

$$a_1 + a_2 - 2a = 0 \tag{4}$$

上述四式含 4 个未知量 T、a_1、a_2、a，可解出

$$a = \frac{4m_1m_2}{M(m_1+m_2)+4m_1m_2}g$$

2.1.27　q_1、q_2 轴在竖直的 xy 平面内，与 x 轴的夹角分别为 α 和 β. 一个抛射体在 xy 平面内运动，今取 q_1、q_2 为坐标，给出或导出抛射体的运动微分方程. 重力沿 y 轴的负方向.

解　方法一：用 x、y 为坐标，抛射体的运动微分方程为

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g$$

参看图 2.23，质点的 x、y 坐标与 q_1、q_2 坐标有下列坐标变换关系：

$$x = q_1\cos\alpha + q_2\cos\beta$$

$$y = q_1\sin\alpha + q_2\sin\beta$$

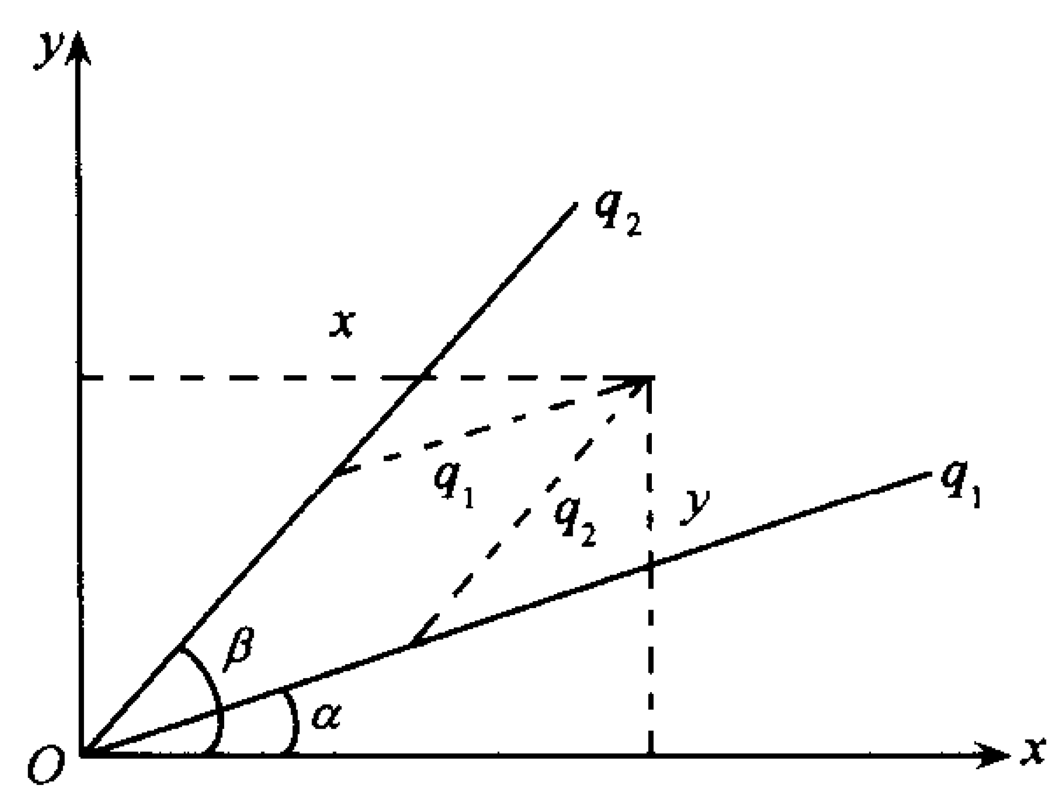


图 2.23

对上述两式分别对 t 求二阶导数，可得

$$\ddot{q}_1\cos\alpha + \ddot{q}_2\cos\beta = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{q}_1\sin\alpha + \ddot{q}_2\sin\beta = -g \tag{2}$$

从式(1)、(2)两式分别消去 $\ddot{q}_1$、$\ddot{q}_2$，可得

$$\ddot{q}_1(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = g\cos\beta$$

$$\ddot{q}_2(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = g\cos\alpha$$

即

$$\ddot{q}_1 = \frac{g\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \tag{3}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{g\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{4}$$

式(3)、(4)或式(1)、(2)均可为所求的微分方程.

方法二：将作用于质点的力(今只有重力)沿 q_1、q_2 轴进行分解，立即可得到式(3)、(4)的运动微分方程.

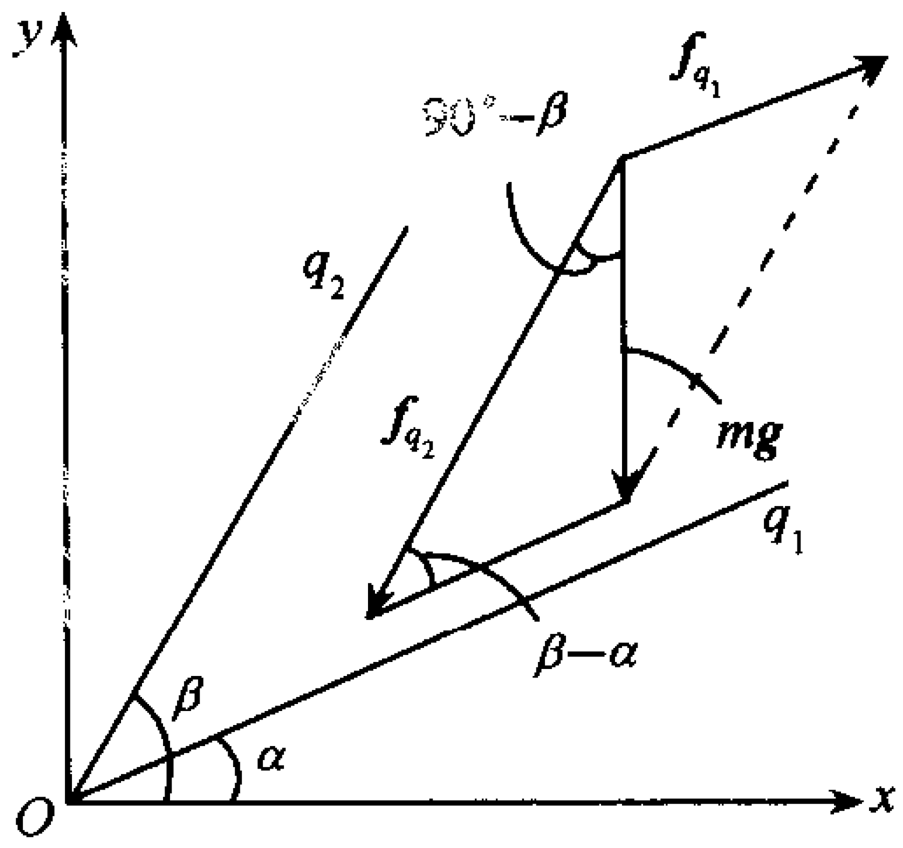


图 2.24

参看图 2.24，

$$\frac{f_{q_1}}{\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{mg}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{f_{q_2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{mg}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$f_{q_1} = mg\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$f_{q_2}=mg\frac{(-\cos\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$m\ddot{q}_1=f_{q_1}=mg\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$m\ddot{q}_2=f_{q_2}=-mg\frac{\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

与式(3)、(4)相同.

q_1、q_2 的坐标原点可以与 x、y 的坐标原点不重合，用 q_1、q_2 表达的运动微分方程不变，因为坐标变换关系中差个常数，对 t 求导后，仍有式(1)、(2).

2.1.28 质量分别为 M 和 $M+m$ 的两个人，分别拉住跨过定滑轮两边的绳子往上爬. 开始时两人与滑轮的距离都是 h，都从静止开始爬. 设绳子不可伸长，绳子质量与绳子、滑轮间的摩擦力均可不计. 证明：如质量较轻的人在 t 秒内爬到滑轮，这时质量较重的人与滑轮的距离为$\frac{m}{M+m}\left(h+\frac{1}{2}gt^2\right)$.

证明 设绳子张力为 T，a_1、a_2 分别是质量较轻和较重的人向上爬的加速度，不要求它们是常量.

$$Ma_1=T-Mg$$

$$(M+m)a_2=T-(M+m)g$$

两式相减，

$$Ma_1-(M+m)a_2=mg$$

两边对 t 积分两次：

$$M\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^{t'}a_1\mathrm{d}t'-(M+m)\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^{t'}a_2\mathrm{d}t'=\frac{1}{2}mgt^2$$

t 时刻，较轻的人爬到滑轮，较重的人离滑轮的距离设为 l. 对此时刻用上式：

$$Mh-(M+m)(h-l)=\frac{1}{2}mgt^2$$

解出

$$l=\frac{M}{M+m}\left(h+\frac{1}{2}gt^2\right)$$

2.1.29 一质量为 m 的跳水运动员，初速为零地从 10m 跳台上跳下.

(1) 求入水速度和从起跳到入水大致所用的时间；

(2) 假定作用在跳水者身上水的浮力和他所受的重力正好抵消，作用在他身上的水的黏滞力大小为 bv^2，试列出跳水员在水中垂直下沉的运动微分方程，以边界条件 $x=0$ 处 $v=v_0$，求解速度 v 作为水面下深度 x 的函数；

(3) 若$\frac{b}{m}=0.4\mathrm{m}^{-1}$，求当 $v=\frac{1}{10}v$ 时的深度；

(4) 求解跳水员在水下的垂直深度作为在水下的时间的函数.

解 (1)

$$h=\frac{1}{2}gt^2,t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times10}{9.8}}=1.43\mathrm{s}$$

$$v=gt=9.8\times1.43=14.0\mathrm{ms}^{-1}$$

(2)

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}^2,\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}$$

$$m\dot{x}\frac{\mathrm{d}\,\dot{x}}{\mathrm{d}x}=-\,b\,\dot{x}^2,\int_{v_0}^{v}\frac{1}{\dot{x}}\mathrm{d}\,\dot{x}=-\int_0^x\frac{b}{m}\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{b}{m}x,v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}x}$$

(3)
$$\frac{1}{10}v_0=v_0\mathrm{e}^{-0.4x},x=\frac{1}{0.4}\ln 10=5.76\mathrm{m}$$

(4)
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}x},\ \int_0^x\mathrm{e}^{\frac{b}{m}x}\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{d}t$$

$$\frac{m}{b}(\mathrm{e}^{\frac{b}{m}x}-1)=v_0t,x=\frac{m}{b}\ln\left(1+\frac{bv_0}{m}t\right)$$

2.1.30　一个质量为 m 的质点以初速 v 在 y 方向投射到沿 x 方向以不变速度 V 运动着的水平皮带上并留在上面运动. 若质点与皮带间的滑动摩擦因数为 μ,质点接触皮带的初位置取为固定的 xy 坐标系的原点,求质点在皮带上刚停止滑动时的 xy 坐标.

解　在皮带上取 XY 坐标与固定的 xy 坐标平行,且 $t=0$ 时即质点投射到皮带上时,XY 坐标与 xy 坐标完全重合. 因皮带以不变的速度 V 沿 x 方向运动,质点在皮带上的 XY 坐标与 xy 坐标的关系为

$$x=X+Vt,\qquad y=Y$$

取皮带为参考系(也是惯性参考系),质点投射到皮带上时,$t=0,X=0,Y=0,\dot{X}=-V,\dot{Y}=v$.

质点对皮带有相对运动时,摩擦力始终与初速度相反,故质点做直线运动,取质点运动方向为 s 坐标,如图2.25所示,

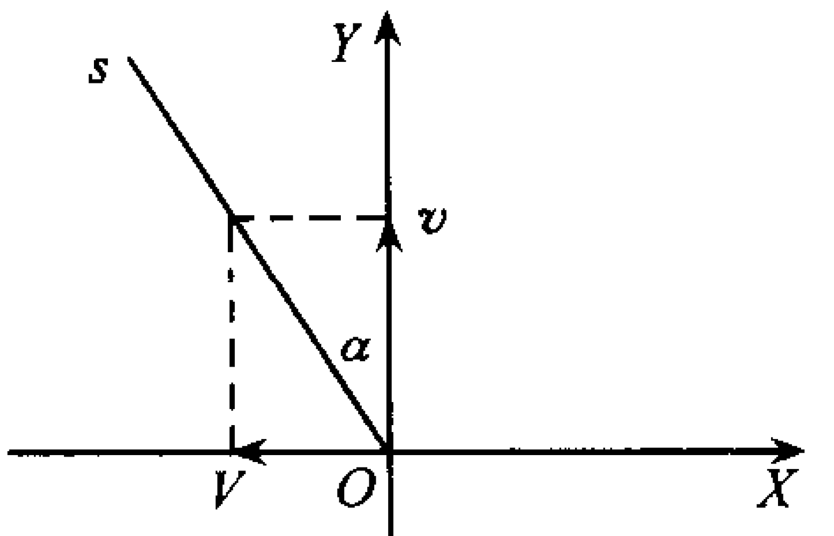


图 2.25

$$m\ddot{s}=-\,\mu mg$$

$t=0$ 时,$s=0,\dot{s}=\sqrt{v^2+V^2}$

t 时,
$$\dot{s}=\sqrt{v^2+V^2}-\mu gt$$

$$s=\sqrt{v^2+V^2}t-\frac{1}{2}\mu gt^2$$

质点在皮带上刚停止运动的时间设为 t_1,此时 $\dot{s}=0$,故

$$t_1=\frac{\sqrt{v^2+V^2}}{\mu g}$$

$$s(t_1)=\frac{(v^2+V^2)}{2\mu g}$$

$$X(t_1)=-\,s(t_1)\sin\alpha=-\frac{v^2+V^2}{2\mu g}\cdot\frac{V}{\sqrt{v^2+V^2}}=-\frac{\sqrt{v^2+V^2}}{2\mu g}V$$

$$Y(t_1)=s(t_1)\cos\alpha=\frac{v^2+V^2}{2\mu g}\cdot\frac{v}{\sqrt{v^2+V^2}}=\frac{\sqrt{v^2+V^2}}{2\mu g}v$$

$$x(t_1)=X(t_1)+Vt_1=\frac{\sqrt{v^2+V^2}}{2\mu g}V$$

$$y(t_1)=Y(t_1)=\frac{\sqrt{v^2+V^2}}{2\mu g}v$$

注意:不能列出下列运动微分方程:

$$m\ddot{X}=-\mu mg,\qquad m\ddot{Y}=-\mu mg$$

错误在于摩擦力及其分量不对,应改为

$$m\ddot{X}=\mu mg\sin\alpha=\mu mg\frac{V}{\sqrt{v^2+V^2}}$$

$$m\ddot{Y}=-\mu mg\cos\alpha=-\mu mg\frac{v}{\sqrt{v^2+V^2}}$$

用它们及前述的初始条件,也可得正确结果.

2.1.31 在水平的 xy 平面内有一留声机转盘,它以恒定的角速度 ω 绕过盘心的铅垂轴旋转.在转盘上滑动的物体在水平方向受到两个真实力作用:一个是大小为 kr(r 为质点至盘心的距离,k 为常量),方向指向盘心的弹性力;另一个是摩擦力,与相对速度成正比,比例系数为 c,c 是正值常量,物体可视为质点.

(1) 如物体待在盘上任何位置均能相对转盘保持静止,问 k 有多大?

(2) 假设 k 是(1)问所得之值,在一般的初始条件下,求物体的相对速度 $\dot{x}$、$\dot{y}$;

(3) 用(2)的结果进而求 $x(t)$ 和 $y(t)$.

解 (1) 设相对转盘保持静止的位置距盘心 r,取转盘为参考系

$$-kr+m\omega^2r=0$$

$$k=m\omega^2$$

对一切 r 值均成立,说明在任何位置保持静止.

(2) 方法一:取转盘为参考系,xy 轴固连于圆盘,原点在盘心.用(1)问所得之 k 值,弹性力与惯性离轴力的合力为零.质点受摩擦力和科里奥利力作用.

摩擦力为　　$-c(\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j})$

科里奥利力为

$$-2m\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j})=-2m\omega\boldsymbol{k}\times(\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j})=2m\omega(\dot{y}\boldsymbol{i}-\dot{x}\boldsymbol{j})$$

运动微分方程为

$$m\ddot{x}=-c\dot{x}+2m\omega\dot{y}\tag{1}$$

$$m\ddot{y}=-c\dot{y}-2m\omega\dot{x}\tag{2}$$

式(1)两边对 t 求导,

$$m\dddot{x}=-c\ddot{x}+2m\omega\ddot{y}\tag{3}$$

将式(2)代入式(3),得

$$m\dddot{x}=-c\ddot{x}-4m\omega^2\dot{x}-2c\omega\dot{y}\tag{4}$$

再用式(1)消去式(4)中的 $\dot{y}$,得

$$m\dddot{x}+2c\ddot{x}+\left(\frac{c^2}{m}+4m\omega^2\right)\dot{x}=0$$

这是关于 $\dot{x}$ 的常系数线性二阶齐次微分方程,其相应的特征方程为

$$mr^2+2cr+\frac{c^2}{m}+4m\omega^2=0$$

$$r=\frac{-2c\pm\sqrt{4c^2-4m\left(\frac{c^2}{m}+4m\omega^2\right)}}{2m}=-\frac{c}{m}\pm 2\omega i$$

$$\dot{x}=e^{-\frac{c}{m}t}(A\cos 2\omega t+B\sin 2\omega t)$$

$$\ddot{x}=-\frac{c}{m}e^{-\frac{c}{m}t}(A\cos 2\omega t+B\sin 2\omega t)$$

$$+e^{-\frac{c}{m}t}(-2A\omega\sin 2\omega t+2B\omega\cos 2\omega t)$$

用初始条件 $t=0$ 时 $\dot{x}=\dot{x}_0$，

$$\ddot{x}=-\frac{c}{m}\dot{x}_0+2m\omega\,\dot{y}_0$$

[后式来自(1)式]可定出 $A=\dot{x}_0, B=\dot{y}_0$，

$$\dot{x}=e^{-\frac{c}{m}t}(\dot{x}_0\cos 2\omega t+\dot{y}_0\sin 2\omega t)\tag{5}$$

将得到的代入 A、B 值的 $\dot{x}$、$\ddot{x}$ 代入式(1)，可得

$$\dot{y}=e^{-\frac{c}{m}t}(-\dot{x}_0\sin 2\omega t+\dot{y}_0\cos 2\omega t)\tag{6}$$

方法二：式(1)＋式(2)×i，并引入复变量 $z=x+iy$，

$$m\ddot{z}=-c\,\dot{z}-2m\omega i\,\dot{z}$$

$$m\ddot{z}+(c+2m\omega i)\,\dot{z}=0\tag{7}$$

相应的特征方程为

$$mr+(c+2m\omega i)=0$$

$$r=-\frac{c}{m}-2\omega i$$

$$\dot{z}=\dot{z}_0e^{-\frac{c}{m}t}e^{-2\omega it}$$

$$=(\dot{x}_0+i\,\dot{y}_0)e^{-\frac{c}{m}t}(\cos 2\omega t-i\sin 2\omega t)$$

$$=e^{-\frac{c}{m}t}(\dot{x}_0\cos 2\omega t+\dot{y}_0\sin 2\omega t)$$

$$+i\,e^{-\frac{c}{m}t}(\dot{y}_0\cos 2\omega t-\dot{x}_0\sin 2\omega t)$$

与 $\dot{z}=\dot{x}+i\,\dot{y}$ 相比较，即得式(5)、(6)的结果.

(3) 方法一：对式(5)、(6)直接对 t 积分，可得结果.(略)

方法二：$\dot{z}=\dot{z}_0e^{-\left(\frac{c}{m}+2\omega i\right)t}$

$$z=\dot{z}_0\int_0^t e^{-\left(\frac{c}{m}+2\omega i\right)t}dt+z_0=-\frac{\dot{z}_0}{\frac{c}{m}+2\omega i}\left[e^{-\left(\frac{c}{m}+2\omega i\right)t}-1\right]+z_0$$

$$=-\frac{m(\dot{x}_0+i\,\dot{y}_0)}{c^2+4m^2\omega^2}(c-2m\omega i)\left[e^{-\frac{c}{m}t}(\cos 2\omega t+i\sin 2\omega t)-1\right]+x_0+iy_0$$

与 $z=x+iy$ 相比较，可得

$$x=x_0+\frac{m(c\,\dot{x}_0+2m\omega\,\dot{y}_0)}{c^2+4m^2\omega^2}-\left[\frac{m(c\,\dot{x}_0+2m\omega\,\dot{y}_0)}{c^2+4m^2\omega^2}\cos 2\omega t\right.$$

$$-\frac{m(2m\omega\,\dot{x}_0 - c\,\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2}\sin 2\omega t\Big]e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$y = y_0 - \frac{m(2m\omega\,\dot{x}_0 - c\,\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2} + \Big[\frac{m(2m\omega\,\dot{x}_0 - c\,\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2}\cos 2\omega t$$

$$-\frac{m(\dot{x}_0 + 2m\omega\,\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2}\sin 2\omega t\Big]e^{-\frac{c}{m}t}$$

2.1.32 一个质点垂直上抛,初速为 v_0,如空气阻力与速率的平方成正比,证明:回到初始位置时的速率为$\frac{v_0 v_t}{(v_0^2+v_t^2)^{1/2}}$,其中 v_t 是极限速率.

证明 取竖直向上的 x 轴,抛出点为 $x=0$.

向上运动时,运动微分方程为

$$\ddot{x} = -g - k\dot{x}^2$$

$$v = \dot{x},\quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = v\frac{dv}{dx}$$

$$v\frac{dv}{dx} = -(g + kv^2)$$

$$\int\frac{dv^2}{g + kv^2} = -\int 2dx$$

达到最高点 $x = x_{max}$时,$v=0$,

$$\frac{1}{k}\ln(g + kv^2)\Big|_{v_0}^{0} = -2x_{max}$$

$$\frac{1}{k}\ln\left(\frac{g}{g + kv_0^2}\right) = -2x_{max} \tag{1}$$

向下运动时,运动微分方程为

$$\ddot{x} = -g + k\dot{x}^2$$

$$v\frac{dv}{dx} = -(g - kv^2)$$

$$-\int\frac{dv^2}{g - kv^2} = 2\int dx$$

回到初始位置 $x=0$ 时,速率为 v,

$$\frac{1}{k}\ln(g - kv^2)\Big|_{0}^{v} = 2x\Big|_{x_{max}}^{0}$$

$$\frac{1}{k}\ln\left(\frac{g - kv^2}{g}\right) = -2x_{max} \tag{2}$$

比较式(1)、(2)两式得

$$\frac{g - kv^2}{g} = \frac{g}{g + kv^2}$$

解出

$$v = \frac{v_0\sqrt{g}}{\sqrt{g + kv_0^2}}$$

向下运动时,当重力与阻力相抵时,$\ddot{x}=0$,速率不再变化,此速率即为极限速率 v_t.

$$-g+kv_t^2=0$$

所以
$$v_t=\sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v=\frac{v_0\sqrt{\frac{g}{k}}}{\sqrt{\frac{g}{k}+v_0^2}}=\frac{v_0v_t}{\sqrt{v_t^2+v_0^2}}$$

2.1.33　两个质量均为 m 的质点 A 和 B 连在一个劲度系数为 k 的弹簧的两端. 开始两质点静放在光滑的水平面上，弹簧处于原长，然后沿 AB 方向给 B 以恒力 ka. 求两质点的运动学方程.

解　用 x、y 分别表示质点 A、B 的位置，开始位置，$x=0$、$y=0$，

$$m\ddot{x}=k(y-x)\tag{1}$$

$$m\ddot{y}=ka-k(y-x)\tag{2}$$

式(2)－式(1)得

$$m(\ddot{y}-\ddot{x})=ka-2k(y-x)=-2k\left(y-x-\frac{1}{2}a\right)$$

令 $z=y-x-\frac{1}{2}a, \omega^2=\frac{2k}{m}$，

$$\ddot{z}+\omega^2z=0$$

所以
$$y-x-\frac{1}{2}a=z=c\cos(\omega t+\alpha)$$

初始条件 $t=0$ 时，$x=0, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=0$，故 $y-x=0, \dot{y}-\dot{x}=0$，故有

$$-\frac{1}{2}a=c\cos\alpha$$

$$0=-c\omega\sin\alpha$$

解出
$$\alpha=0,\quad c=-\frac{1}{2}a$$

$$y-x=\frac{1}{2}a(1-\cos\omega t)$$

代入式(1)，

$$m\ddot{x}=\frac{1}{2}ka(1-\cos\omega t)$$

或
$$\ddot{x}=\frac{1}{4}\omega^2a(1-\cos\omega t)$$

用初始条件 $t=0$ 时 $x=0$、$\dot{x}=0$，积分上式可得

$$\dot{x}=\frac{1}{4}a\omega^2t-\frac{1}{4}a\omega\sin\omega t$$

$$x=\frac{1}{8}a\omega^2t^2-\frac{1}{4}a(1-\cos\omega t)$$

$$y=x+\frac{1}{2}a(1-\cos\omega t)=\frac{1}{8}a\omega^2t^2+\frac{1}{4}a(1-\cos\omega t)$$

其中
$$\omega^2=\frac{2k}{m}.$$

2.1.34 质量为 m 的质点在阻力等于 $mk(v^3+a^2v)$ 的介质中运动，其中 k 和 a 均为常量，初速度为 v_0. 求其路程与时间的关系，并由此导出 $k\to 0$ 时的关系来检验所得结果的正确性.

解 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mk(v^3+a^2v)$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v(v^2+a^2)}=-k\mathrm{d}t \tag{1}$$

改写
$$\frac{1}{v(v^2+a^2)}=\frac{A}{v}+\frac{Bv+C}{v^2+a^2}$$
$$1=A(v^2+a^2)+v(Bv+C)$$

等号两边 v 的各次幂的系数分别相等，

$$A+B=0$$
$$C=0$$
$$Aa^2=1$$

解出 $A=\dfrac{1}{a^2}, B=-\dfrac{1}{a^2}, C=0$，

$$\frac{1}{v(v^2+a^2)}=\frac{1}{a^2v}-\frac{v}{a^2(v^2+a^2)} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{a^2v}\mathrm{d}v-\int_{v_0}^{v}\frac{v}{a^2(v^2+a^2)}\mathrm{d}v=-\int_0^t k\mathrm{d}t$$

可得
$$\ln\frac{v}{\sqrt{v^2+a^2}}=-ka^2t+\ln\frac{v_0}{\sqrt{v^2+a^2}}$$
$$\frac{v^2}{v^2+a^2}=\frac{v_0^2}{v_0^2+a^2}\mathrm{e}^{-2ka^2t}$$
$$v=\frac{av_0\mathrm{e}^{-ka^2t}}{\sqrt{a^2+v_0^2(1-\mathrm{e}^{-2ka^2t})}}$$
$$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=\frac{av_0\mathrm{e}^{-ka^2t}}{\sqrt{a^2+v_0^2(1-\mathrm{e}^{-2ka^2t})}}\mathrm{d}t$$

作变量代换，令 $p=\mathrm{e}^{-ka^2t}$，$\mathrm{d}p=-ka^2p\mathrm{d}t$，

$$\mathrm{d}t=-\frac{1}{ka^2p}\mathrm{d}p$$
$$x=\int_0^x\mathrm{d}x=-\frac{av_0}{ka^2}\int_{p(0)}^{p(t)}\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{a^2+v_0^2-v_0^2p^2}}$$
$$=-\frac{1}{ka}\arcsin\left(\frac{v_0p}{\sqrt{v_0^2+a^2}}\right)\Bigg|_{p(0)}^{p(t)}$$

$$= \frac{1}{ka}\left[\arcsin\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+a^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{v_0 e^{-ka^2 t}}{\sqrt{v_0^2+a^2}}\right)\right]$$

当 $k \to 0$ 时，

$$x = \lim_{k\to 0}\frac{1}{ka}\left[\arcsin\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+a^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{v_0 e^{-ka^2 t}}{\sqrt{v_0^2+a^2}}\right)\right]$$

$$= \frac{\lim\limits_{k\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\arcsin\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+a^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{v_0 e^{-ka^2 t}}{\sqrt{v_0^2+a^2}}\right)\right]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(ka)}$$

$$= \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2 e^{-2ka^2 t}}{v_0^2+a^2}}}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+a^2}}e^{-ka^2 t}(-a^2 t)\right]\Bigg|_{k\to 0} = v_0 t$$

这正是没有阻力时做匀速运动的结果.

2.1.35 质量为 m 的质点静止地连在一弹簧的端点，弹簧的劲度系数为 k，并悬挂在固定支点上. 当 $t=0$ 时，对质点施一向下的恒力 F，作用时间为 t_0. 证明：当外力去掉后，质点由其平衡位置 $x=x_0$ 所做的位移为

$$x - x_0 = \frac{F}{k}[\cos\omega(t-t_0) - \cos\omega t]$$

其中 $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

证明 $m\ddot{x} = -kx + mg + F \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0$

$t=0$ 时，$x = x_0 = \frac{mg}{k}$，$\dot{x} = 0$

$$x = \frac{F+mg}{k} + A\cos(\omega t + \alpha)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

由初始条件定出 $\alpha = 0$，$A = -\frac{F}{k}$，

$$x = x_0 + \frac{F}{k}(1 - \cos\omega t)$$

$$\dot{x} = \frac{F}{k}\omega\sin\omega t$$

撤去恒力 F 后的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -kx + mg \qquad t \geqslant t_0$$

初始条件：$t = t_0$ 时，$x = x_0 + \frac{F}{k}(1 - \cos\omega t_0)$，$\dot{x} = \frac{F}{k}\omega\sin\omega t_0$，

$$x=\frac{mg}{k}+B\cos\omega t+C\sin\omega t$$

$$\dot{x}=-B\omega\sin\omega t+C\omega\cos\omega t$$

由初始条件,并注意 $x_0=\frac{mg}{k}$,整理后可得

$$B\cos\omega t_0+C\sin\omega t_0=\frac{F}{k}-\frac{F}{k}\cos\omega t_0 \tag{1}$$

$$-B\sin\omega t_0+C\cos\omega t_0=\frac{F}{k}\sin\omega t_0 \tag{2}$$

注意:式(1)、(2)两式中的 t_0 是特定的值,不能任意给,故不能令式(1)、(2)两式两边的 $\sin\omega t_0$、$\cos\omega t_0$ 的系数分别相等.

式(1)$\times\sin\omega t_0+$式(2)$\times\cos\omega t_0$,得

$$C=\frac{F}{k}\sin\omega t_0$$

代入式(2)得

$$B=-\frac{F}{k}(1-\cos\omega t_0)$$

$$x=\frac{mg}{k}-\frac{F}{k}(1-\cos\omega t_0)\cos\omega t+\frac{F}{k}\sin\omega t_0\sin\omega t$$

即

$$x-x_0=\frac{F}{k}[\cos\omega(t-t_0)-\cos\omega t]$$

2.1.36 空间内有均匀的电场和磁场,$\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{B}=B(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j})$,$\alpha$ 为常量.具有质量为 m、电量为 q 的粒子在坐标系原点以初速$\boldsymbol{v}_0=\dot{x}_0\boldsymbol{i}+\dot{y}_0\boldsymbol{j}+\dot{z}_0\boldsymbol{k}$ 开始运动.若重力可忽略不计,求质点以后的运动.

解 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=q\boldsymbol{E}+q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$

将$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{B}=B(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j})$代入上式,写成分量方程,

$$m\ddot{x}=qE-qB\,\dot{z}\sin\alpha \tag{1}$$

$$m\ddot{y}=qB\,\dot{z}\cos\alpha \tag{2}$$

$$m\ddot{z}=qB(\dot{x}\sin\alpha-\dot{y}\cos\alpha) \tag{3}$$

$t=0$ 时,$x=y=z=0$,$\dot{x}=\dot{x}_0$,$\dot{y}=\dot{y}_0$,$\dot{z}=\dot{z}_0$.式(3)对 t 求导,用式(1)、(2)消去$\ddot{x}$、$\ddot{y}$,得

$$m^2\dddot{z}+q^2B^2\dot{z}=q^2BE\sin\alpha$$

上式对 t 积分,得

$$m^2\ddot{z}-m^2\ddot{z}_0+q^2B^2z=q^2BEt\sin\alpha \tag{4}$$

其中

$$m\ddot{z}_0=qB(\dot{x}_0\sin\alpha-\dot{y}_0\cos\alpha)$$

式(4)是关于 z 的常系数线性二阶非齐次微分方程,不难看出它有下列特解:

$$z^*=\frac{1}{q^2B^2}(m^2\ddot{z}_0+q^2BEt\sin\alpha)$$

通解为 $z=A\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)+C\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)+z^*$

$$\dot{z}=-A\frac{qB}{m}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)+C\frac{qB}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)+\frac{E}{B}\sin\alpha$$

由初始条件:$t=0$ 时,$z=0$,$\dot{z}=\dot{z}_0$ 定出

$$A=-\frac{m^2}{q^2B^2}\ddot{z}_0,\quad C=\frac{m}{qB}\left(\dot{z}_0-\frac{E}{B}\sin\alpha\right)$$

以下为写得简便些，令 $\omega=\dfrac{qB}{m}$，则

$$A=-\frac{1}{\omega^2}\ddot{z}_0,\quad C=\frac{1}{\omega}\left(\dot{z}_0-\frac{E}{B}\sin\alpha\right)\tag{5}$$

$$z=A\cos\omega t+C\sin\omega t-A+\frac{E}{B}t\sin\alpha\tag{6}$$

积分式(2)，并用初始条件，再代入式(6)得

$$m\dot{y}=m\dot{y}_0+qB\cos\alpha\left(A\cos\omega t+C\sin\omega t-A+\frac{E}{B}t\sin\alpha\right)$$

即 $\dot{y}=\dot{y}_0+\omega\cos\alpha\left(A\cos\omega t+C\sin\omega t-A+\dfrac{E}{B}t\sin\alpha\right)$

对上式积分，用初始条件，得

$$y=\dot{y}_0t+\cos\alpha\left(A\sin\omega t-C\cos\omega t+C-A\omega t+\frac{qE}{2m}t^2\sin\alpha\right)\tag{7}$$

对式(3)积分，用初始条件，得

$$m\dot{z}=m\dot{z}_0+qB(x\sin\alpha-y\cos\alpha)\tag{8}$$

从式(8)解出 x，代入式(6)、(7)，可得

$$x=-\sin\alpha(A\sin\omega t-C\cos\omega t)+\frac{E}{B\omega}-\frac{\dot{z}_0}{\omega}\csc\alpha$$
$$+\dot{y}_0t\cot\alpha+\csc\alpha\cos^2\alpha(C-A\omega t)+\frac{qE}{2m}t^2\cos^2\alpha$$

其中 A、C 如(5)式所示，$\omega=\dfrac{qB}{m}$.

2.1.37 具有质量 m 和电量 q 的质点，以速度 $\boldsymbol{V}_0$ 垂直于电场方向进入按 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\omega t$ 规律变化的均匀电场，若质点还受到一个跟速度一次幂成比例的阻力 $\boldsymbol{R}=-\gamma\boldsymbol{v}$，$\gamma$ 为正值常量. 求质点的运动(不计重力的作用).

解 取 x 轴沿 $\boldsymbol{V}_0$ 方向，y 轴沿 $\boldsymbol{E}_0$ 方向，进入点为坐标原点.

$$m\ddot{x}=-\gamma\dot{x}$$
$$m\ddot{y}=-\gamma\dot{y}+qE_0\cos\omega t$$

初始条件：$t=0$ 时，$x=y=0$，$\dot{x}=V_0$，$\dot{y}=0$，

$$m\dot{x}=-\gamma x+mV_0$$

$x=x^*=\dfrac{mV_0}{\gamma}$ 是上述非齐次微分方程的一个特解.

相应的齐次微分方程

$$m\dot{x}=-\gamma x$$
$$\frac{dx}{x}=-\frac{\gamma}{m}dt$$

通解为
$$x=ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

非齐次微分方程的通解为

$$x = \frac{mV_0}{\gamma} + c\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

用初始条件定 c 得

$$x = \frac{mV_0}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

$$m\ddot{y} = -\gamma\dot{y} + qE_0\cos\omega t$$

$$m\dot{y} = -\gamma y + \frac{qE_0}{\omega}\sin\omega t$$

设上述非齐次微分方程的特解为

$$y = y^* = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$$

$$\dot{y} = -c_1\omega\sin\omega t + c_2\omega\cos\omega t$$

$$-mc_1\omega\sin\omega t + mc_2\omega\cos\omega t = -\gamma c_1\cos\omega t - \gamma c_2\sin\omega t + \frac{qE_0}{\omega}\sin\omega t$$

两边 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$ 的系数分别相等,

$$-m\omega c_1 = -\gamma c_2 + \frac{qE_0}{\omega}$$

$$m\omega c_2 = -\gamma c_1$$

解出

$$c_1 = -\frac{mqE_0}{m^2\omega^2+\gamma^2}, \quad c_2 = \frac{\gamma qE_0}{\omega(m^2\omega^2+\gamma^2)}$$

$$y^* = -\frac{mqE_0}{m^2\omega^2+\gamma^2}\cos\omega t + \frac{\gamma qE_0}{\omega(m^2\omega^2+\gamma^2)}\sin\omega t$$

y 的非齐次微分方程的通解为

$$y = c'\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mqE_0}{m^2\omega^2+\gamma^2}\left(\cos\omega t - \frac{\gamma}{m\omega}\sin\omega t\right)$$

由 $t=0, y=0$,定出 $c' = \dfrac{mqE_0}{m^2\omega^2+\gamma^2}$,所以

$$y = \frac{mqE_0}{m^2\omega^2+\gamma^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t} - \cos\omega t + \frac{\gamma}{m\omega}\sin\omega t\right)$$

2.1.38 一长度为 L 的水平封闭圆管绕其一端的竖直轴以恒定的角速度 ω 旋转,管内装有密度为 ρ_0 的液体及一截面半径略小于管内径的长为 l、密度为 $\rho(\rho>\rho_0)$ 的小圆柱体.开始时,小圆柱体紧靠轴并相对于圆管静止.问经多长时间小圆柱体到达管的另一端.

解 取沿圆管的 x 轴,在轴处,$x=0$.先求由于转动圆管各处液体的压力,设 S 为圆管的截面积.

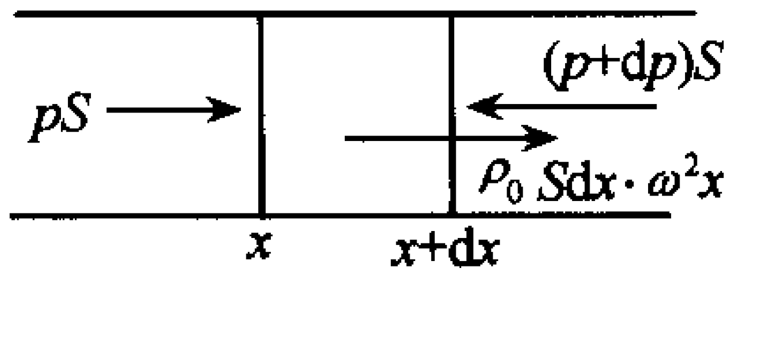


图 2.26

考虑 x 至 $x+\mathrm{d}x$ 一段液体质元,两边受到周围液体的压力和惯性离轴力相平衡,图 2.26 中 $\rho_0 S\mathrm{d}x\cdot\omega^2 x$ 为惯性离轴力.

$$pS + \rho_0 S\mathrm{d}x\cdot\omega^2 x - (p+\mathrm{d}p)S = 0$$

$$\int_0^p \mathrm{d}p = \int_0^x \rho_0\omega^2 x\mathrm{d}x$$

这里写积分下限考虑了 $x=0$ 处 $p=0$,

$$p(x)=\frac{1}{2}\rho_0\omega^2x^2$$

小圆柱体处于 x 到 $x+l$ 位置处受到的惯性离轴力的合力为

$$\int_x^{x+l}\rho\omega^2xS\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho\omega^2S(2xl+l^2)$$

小圆柱位于 x 到 $x+l$ 位置时，它的运动微分方程为

$$\begin{aligned}\rho lS\,\ddot{x}&=\frac{1}{2}\rho\omega^2S(2xl+l^2)+\frac{1}{2}\rho_0\omega^2Sx^2-\frac{1}{2}\rho_0\omega^2S(x+l)^2\\&=\frac{1}{2}(\rho-\rho_0)\omega^2Sl(2x+l)\end{aligned}$$

$$\ddot{x}=\dot{x}\frac{\mathrm{d}\,\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{\rho-\rho_0}{2\rho}\omega^2(2x+l)$$

积分上式，注意 $x=0$ 处 $\dot{x}=0$，可得

$$\dot{x}^2=\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\omega^2(x^2+lx)=\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\omega^2\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]$$

小圆柱到达圆管另一端时，$x=L-l$，时间 t 为

$$t=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\rho}{\rho-\rho_0}}\int_0^{L-l}\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$

用积分公式 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$，得

$$t=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\rho}{\rho-\rho_0}}\ln\left[\frac{2L}{l}-1+\frac{2}{l}\sqrt{L(L-l)}\right]$$

2.1.39　一个质点以初始速率 v_0、仰角 α 抛出，若空气阻力与速率的平方成正比，比例系数为 mk，m 为质点的质量. 证明：

(1) 运动微分方程可以写成

$$\ddot{x}=-k\,\dot{x}\,\dot{s},\quad \ddot{y}=-k\,\dot{y}\,\dot{s}-g$$

其中 x 轴沿水平方向，y 轴竖直向上，$\dot{s}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$；

(2) 轨道微分方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-g\mathrm{e}^{2ks}/(v_0\cos\alpha)^2$$

其中 s 是自抛射点沿轨道经过的路程；

(3) 忽略空气阻力时，积分上述轨道微分方程，可得抛物线形式的轨道.

证明　(1)

$$m\,\ddot{x}=-mkv^2\frac{\dot{x}}{v}=-mkv\,\dot{x}=-mk\,\dot{s}\,\dot{x}$$

$$\ddot{x}=-k\,\dot{s}\,\dot{x}$$

$$m\ddot{y}=-mkv^2\frac{\dot{y}}{v}-mg=-mk\,\dot{s}\,\dot{y}-mg$$

$$\ddot{y}=-k\,\dot{s}\,\dot{y}-g$$

(2)

$$\ddot{y}=\frac{\mathrm{d}\,\dot{y}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\ddot{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dot{x}^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\ddot{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dot{x}^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-k\,\dot{s}\,\dot{y}-g$$

将$\ddot{x}=-k\,\dot{s}\,\dot{x}$及$\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dot{x}$代入上式,得

$$\dot{x}^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-g \tag{1}$$

再将$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}$及$\dot{s}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\dot{x}$代入$\ddot{x}=-k\,\dot{s}\,\dot{x}$,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}=-k\dot{x}^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\dot{x}^2}=-2k\mathrm{d}s$$

用初始条件$t=0$时$s=0$,$\dot{x}=v_0\cos\alpha$,对上式积分,可得

$$\dot{x}^2=(v_0\cos\alpha)^2\mathrm{e}^{-2ks} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),即得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{g\mathrm{e}^{2ks}}{(v_0\cos\alpha)^2}$$

(3) 忽略空气阻力,$k=0$,轨道微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{g}{(v_0\cos\alpha)^2}$$

两边对x积分,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{g}{(v_0\cos\alpha)^2}x+c_1$$

初始条件:$x=0$时,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha$,定出$c_1=\tan\alpha$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{g}{(v_0\cos\alpha)^2}x+\tan\alpha$$

$$y=-\frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2+x\tan\alpha+c_2$$

初始条件:$x=0$时,$y=0$,定出$c_2=0$,

$$\begin{aligned}y&=-\frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2+x\tan\alpha\\&=-\frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}(x^2-2v_0^2\cos^2\alpha\cdot\tan\alpha\cdot x)\\&=-\frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}(x-v_0^2\sin\alpha\cos\alpha)^2+\frac{1}{2}v_0^2g\sin^2\alpha\end{aligned}$$

这是标准的抛物线方程.

2.1.40　有一光滑旋转抛物面,其方程为

$$z=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

z轴竖直向上.在其顶点有一质量为m的小物体,受到微小扰动后自静止开始下滑.求抛

物面对物体的作用力(取质点运动平面为 xz 平面.)

解　用自然坐标

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg\sin\theta \tag{1}$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=mg\cos\theta-N \tag{2}$$

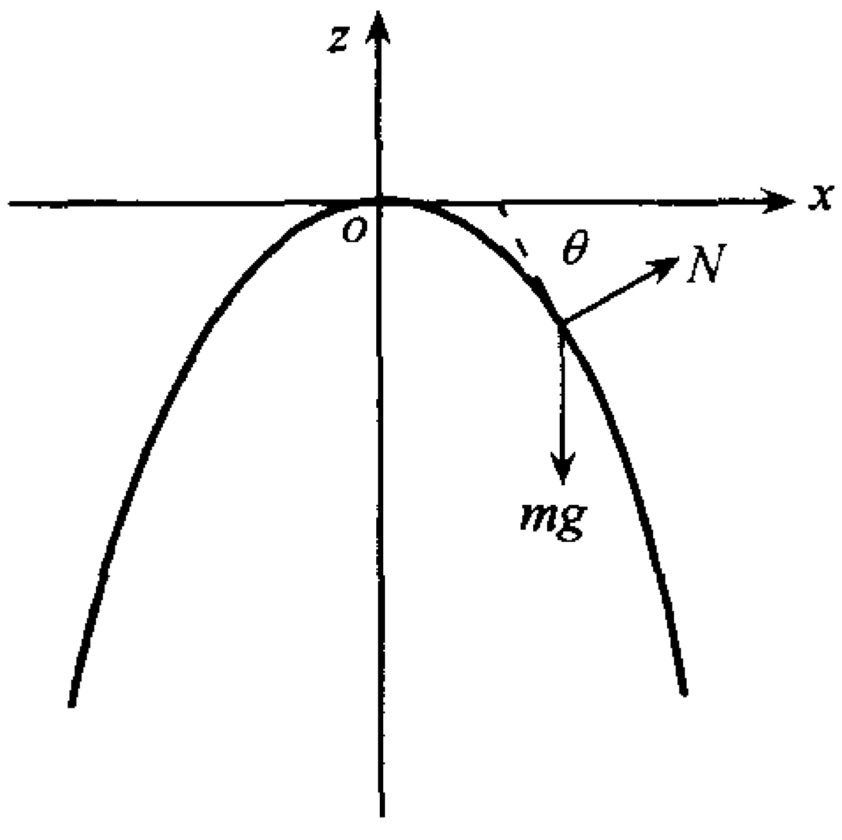


图 2.27

式中 θ 是速度与 x 轴的夹角,N 是抛物面对物体的作用力.如图 2.27 所示.

用$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$,$\sin\theta=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$式(1)可改写为

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=-mg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

$$v\mathrm{d}v=-g\mathrm{d}z$$

积分上式,用初始条件:$t=0$ 时,$z=0$,$v=0$,得

$$v=\sqrt{-2gz}=\sqrt{g}\,x \tag{3}$$

用 $\rho=\frac{(1+z'^2)^{3/2}}{|z''|}=\frac{[1+(-x)^2]^{3/2}}{|-1|}=(1+x^2)^{3/2}$,

$$\tan\theta=-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=x$$

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+x^2,\cos\theta=\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$$

及式(3)代入式(2),解得

$$N=mg\cos\theta-\frac{mv^2}{\rho}=\frac{mg}{(1+x^2)^{3/2}}$$

2.1.41　一个 3∶4∶5 的斜面固连在一转盘上,如图 2.28 所示,一木块静止在斜面上,斜面和木块之间的静摩擦因数 $\mu_s=\frac{1}{4}$.求此木块能保持在离转盘中心的水平距离为 40cm 处相对转盘不动的最小转动角速度 ω.

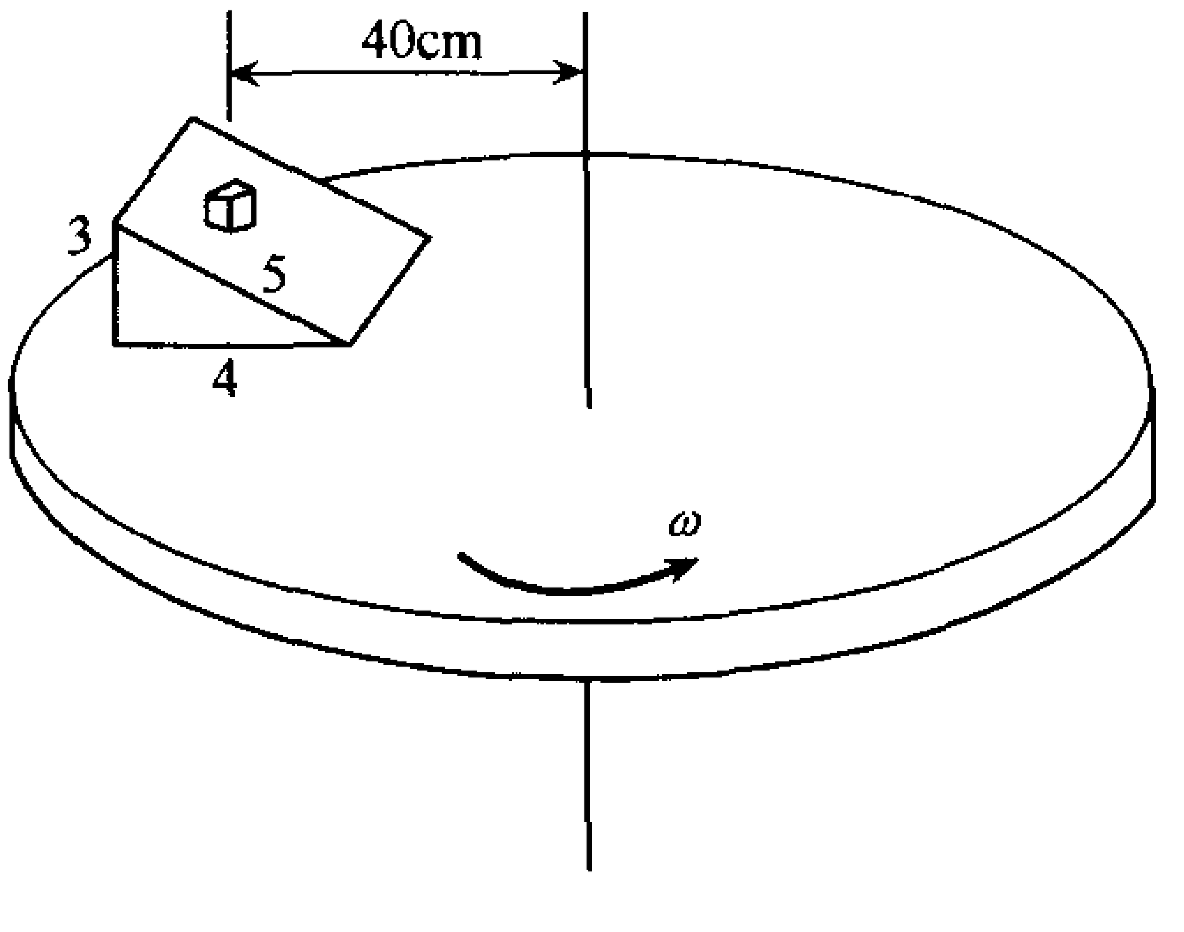


图 2.28

解　取转盘参考系,木块受到的作用力有重力 $m\boldsymbol{g}$,静摩擦力 $\boldsymbol{f}$、斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$ 和惯性离轴力 $\boldsymbol{F}$.考虑刚无相对运动的临界情况.$f=\mu_sN$,求最小的 ω,有下滑趋势,故 $\boldsymbol{f}$ 沿斜

面向上. $F=m\omega^2 r$, r 为木块离盘心的水平距离,今 $r=0.40\text{m}$.

沿斜面方向及垂直于斜面的方向列平衡方程:

$$mg\sin\theta - m\omega^2 r\cos\theta - \mu_s N = 0$$

$$N - mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin\theta = 0$$

可解出

$$\omega = \sqrt{\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}\cdot\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{0.6 - \frac{1}{4}\times 0.8}{0.8 + \frac{1}{4}\times 0.4}\times\frac{9.8}{0.4}} = 3.3\text{rad/s}$$

2.1.42 一水平转盘由静止开始启动,并以匀角加速度 $0.04\pi\text{rad/s}^2$ 加速. 一小孩坐在离转盘 6m 远的椅子上,手中握着一个 2kg 的球. 求转盘启动 5s 后那一瞬间,小孩为握住球必须施以的力的大小和方向.

解 取固连于转盘的直角坐标系,如图 2.29 所示. z 轴竖直向上,用转动参考系,

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + m\omega^2\boldsymbol{r} - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

今已知 $\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{v}=0$,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0.04\pi\boldsymbol{k}(\text{s}^{-2}), \boldsymbol{\omega} = 0.04\pi\times 5\boldsymbol{k} = 0.2\pi\boldsymbol{k}(\text{s}^{-1})$$

$$\boldsymbol{r} = b\boldsymbol{i}(\text{m}),\quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f} - 2\times 9.8\boldsymbol{k}(\text{N})$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 是小孩给球的作用力,

$$\boldsymbol{f} - 2\times 9.8\boldsymbol{k} + 2(0.2\pi)^2\times 6\boldsymbol{i} - 2\times 0.04\pi\boldsymbol{k}\times 6\boldsymbol{i} = 0$$

$$\boldsymbol{f} = -4.74\boldsymbol{i} + 1.51\boldsymbol{j} + 19.6\boldsymbol{k}(\text{N})$$

$$|\boldsymbol{f}| = 20.2\text{N}$$

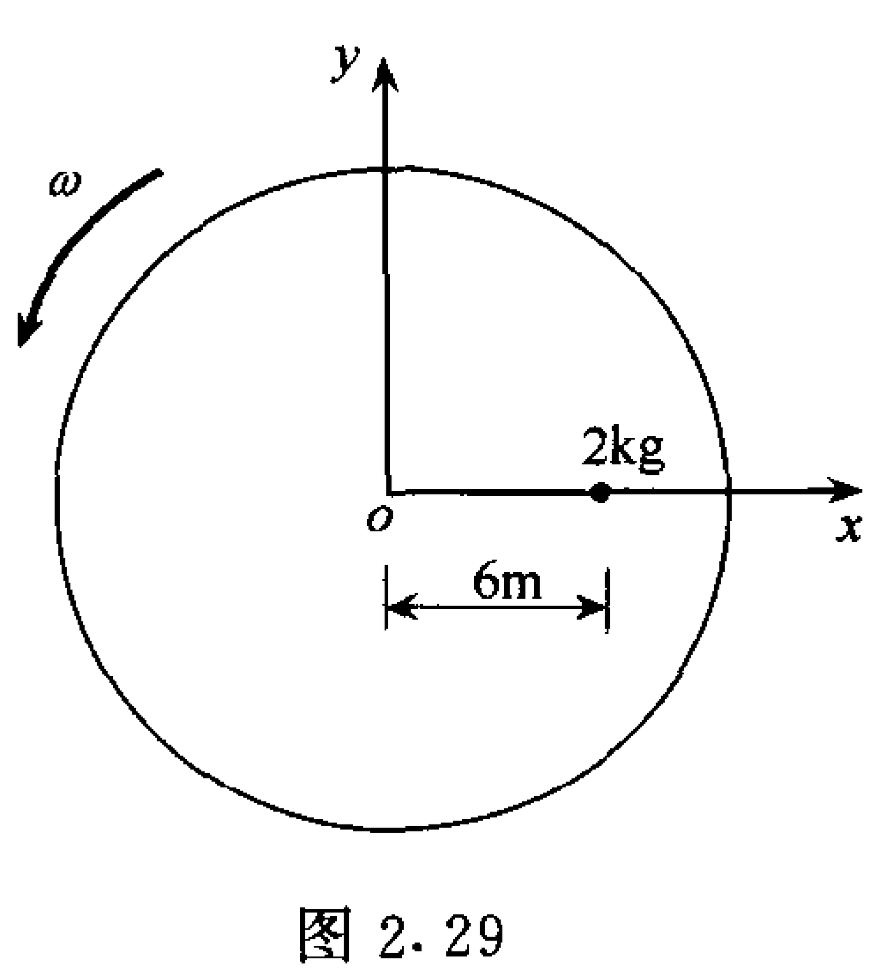


图 2.29

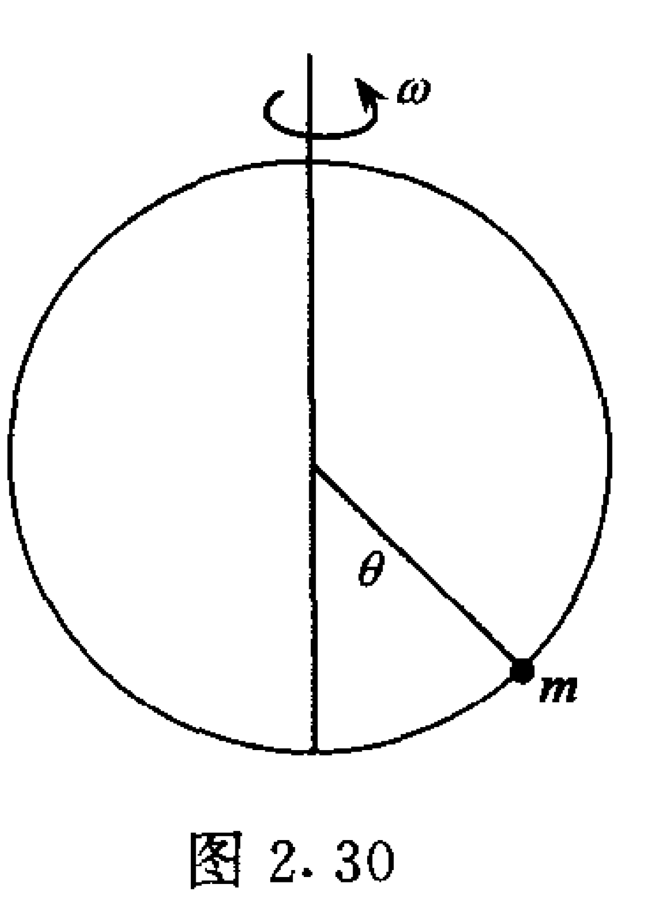


图 2.30

2.1.43 一个在竖直平面内半径为 a 的圆环,以角速度 ω 绕其竖直直径旋转. 一质量为 m 的小球在环上无摩擦地滑动,如图 2.30 所示.

(1) 在什么特殊条件下,小球在 $\theta=0$ 处是稳定平衡?

(2) 当 ω 为何值时,小球可处于另一稳定平衡位置,求出这时的 θ 值.

解 用圆环为参考系,运动微分方程为

$$ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + ma\omega^2\sin\theta\cos\theta \tag{1}$$

(1) $\theta=0$时,由式(1)可见, $\ddot{\theta}=0$, $\theta=0$是平衡位置. 它是否稳定平衡位置,要看从平

衡位置给一微扰后，质点受到的合力是否是使它回到平衡位置的恢复力，或者从结果看它是否是围绕该平衡位置的小幅振动.

$\theta=0$ 要是稳定平衡位置，要求受微扰后，以后的运动始终有 θ 为小量，即 $\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$. 代入式(1)得

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\right)\theta=0$$

稳定平衡的条件为

$$\frac{g}{a}-\omega^2\geqslant0$$

即

$$\omega\leqslant\sqrt{\frac{g}{a}}$$

关于 $\omega=\sqrt{\frac{g}{a}}$ 也是稳定平衡条件的说明：

$\omega=\sqrt{\frac{g}{a}}$ 时，式(1)不是简化为 $\ddot{\theta}=0$，而应对 $\cos\theta$ 的近似多保留一项较高级的小量，

$$\cos\theta\approx1-\frac{1}{2}\theta^2$$

故式(1)可近似为

$$\ddot{\theta}=-\frac{1}{2}\omega^2\theta^3=-\frac{g}{2a}\theta^3.$$

$\theta>0$ 时，$\ddot{\theta}<0$；$\theta<0$ 时，$\ddot{\theta}>0$，质点受到的合力是恢复力.

(2) 从式(1)可见，平衡位置处，$\ddot{\theta}=0$，

$$(-g+a\omega^2\cos\theta)\sin\theta=0$$

一个平衡位置是 $\sin\theta_0=0$，故 $\theta_0=0$.

另一个平衡位置 $-g+a\omega^2\cos\theta_0=0$，估

$$\cos\theta_0=\frac{g}{a\omega^2},\quad \theta_0=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$$

$\cos\theta$ 必须 <1，故 $\frac{g}{a\omega^2}<1$，$\omega>\sqrt{\frac{g}{a}}$，这说明，当 $\omega\leqslant\sqrt{\frac{g}{a}}$ 时，不存在另一平衡位置，只有 $\theta=0$ 是平衡位置，而且如上所述，它是稳定平衡位置. 当 $\omega>\sqrt{\frac{g}{a}}$ 时，$\theta=0$ 仍是平衡位置，但如上所述，它是不稳定平衡位置，此时存在着另一个平衡位置 $\theta_0=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$.

下面我们证明这另一平衡位置是稳定平衡位置，

令 $\varphi=\theta-\theta_0$，将 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 均在 $\theta=\theta_0$ 处作泰勒展开，且只保留一级小量，

$$\sin\theta\approx\sin\theta_0+\cos\theta_0(\theta-\theta_0)=\sin\theta_0+\varphi\cos\theta_0$$
$$\cos\theta\approx\cos\theta_0-\sin\theta_0(\theta-\theta_0)=\cos\theta_0-\varphi\sin\theta_0$$

代入式(1)，注意 $\ddot{\theta}=\ddot{\varphi}$，得

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}&=-\frac{g}{a}(\sin\theta_0+\varphi\cos\theta_0)+\omega^2(\sin\theta_0+\varphi\cos\theta_0)(\cos\theta_0-\varphi\sin\theta_0)\\&\approx-\left[\frac{g}{a}\cos\theta_0-\omega^2(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)\right]\varphi\end{aligned}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{g}{a\omega^2}, \quad \cos^2\theta_0 = \frac{g^2}{a^2\omega^4}, \quad \sin^2\theta_0 = 1 - \frac{g^2}{a^2\omega^4}$$

上式可改写为

$$\ddot{\varphi} = -\left(\omega^2 - \frac{g^2}{a^2\omega^2}\right)\varphi$$

因为
$$\frac{g}{a\omega^2} < 1, \omega^2 - \frac{g^2}{a^2\omega^2} = \omega^2\left(1 - \frac{g^2}{a^2\omega^4}\right) > 0$$

这就证明了只要存在另一个平衡位置,它一定是稳定平衡位置.

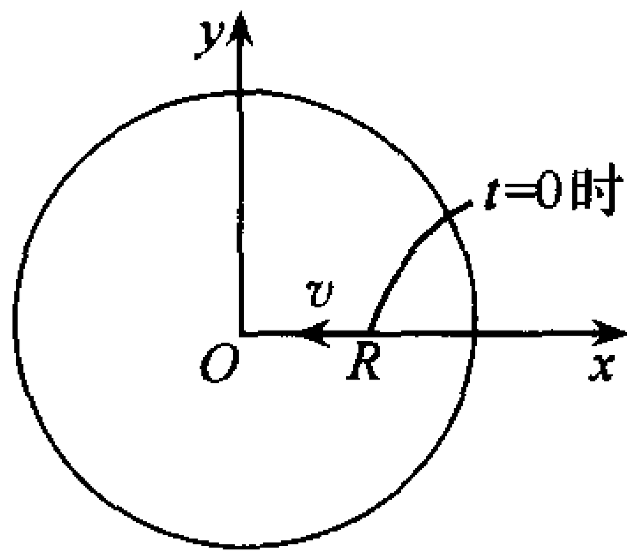


图 2.31

2.1.44 一光滑的水平圆盘以角速度 ω 绕通过盘心的垂直轴转动. 在圆盘上位于离盘心距离 R 的人给质量为 m 的光滑硬币(忽略大小)朝向盘心方向的推力,使硬币得到相对于圆盘的初速度 v. 证明:在圆盘上的人看来,在一段时间内[$(\omega t)^2$ 可以忽略]运动是一条抛物线,给出这条抛物线的方程.

证明 由 $m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 得

$$\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\,\dot{y} \tag{1}$$

$$\ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\,\dot{x} \tag{2}$$

式(1)+式(2)×i,并令 $z = x + \mathrm{i}y$,得

$$\ddot{z} = \omega^2 z - 2\omega\mathrm{i}\,\dot{z}$$

特征方程为
$$r^2 + 2\omega\mathrm{i}r - \omega^2 = 0$$

解得
$$r = -\omega\mathrm{i}\text{(重根)}$$

故
$$z = (A + B\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + (C + D\mathrm{i})t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$x = \mathrm{Re}z = A\cos\omega t + B\sin\omega t + Ct\cos\omega t + Dt\sin\omega t$$

$$y = \mathrm{Im}z = -A\sin\omega t + B\cos\omega t - Ct\sin\omega t + Dt\cos\omega t$$

由初始条件:$t = 0$ 时,$x = R, \dot{x} = -v, y = 0, \dot{y} = 0$,解出

$$A = R, B = 0, C = -v, D = R\omega$$

所以
$$x = R\cos\omega t - vt\cos\omega t + R\omega t\sin\omega t \approx R - vt$$

$$y = -R\sin\omega t + vt\sin\omega t + R\omega t\cos\omega t \approx v\omega t^2$$

作上述近似时,略去了$(\omega t)^2$ 及更高级的小量.

上述两式消去 t 即得轨道方程

$$y = \frac{\omega}{v}(x - R)^2$$

是一条抛物线.

2.1.45 卫星绕地球做圆轨道运动,卫星内的宇航员将一个小物体放在卫星质心和地心连线上离卫星质心 Δr 处然后释放. 求在卫星参考系中宇航员所看到的释放后物体的运动(设卫星像月球那样朝向地球的部分始终朝向地球).

解 取固连于卫星的坐标系 $Oxyz$,O 在卫星质心,y 轴指向地心,x 轴指向卫星运动的方向,释放时,$t=0$. 卫星参考系是跟随 O 点的平动(做圆周运动,设绕地心的角速度为

$\boldsymbol{\omega}$)和围绕 O 点的转动(角速度也是$\boldsymbol{\omega}$).

用卫星参考系,物体受以下几个力:地球的引力 $\boldsymbol{F}_1$;平动惯性力 $\boldsymbol{F}_2$;惯性离轴力 $\boldsymbol{F}_3$;科里奥利力 $\boldsymbol{F}_4$. 设地球质量为 M,物体质量为 m,地心的位矢为 $\boldsymbol{R}$,物体的位矢为 $\boldsymbol{r}$,

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{GmM}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|^3}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})$$

用三角形边角关系的余弦定理,

$$|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}| = (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{1/2} = (R^2 + r^2 - 2Ry)^{1/2}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 也是 $\boldsymbol{r}$ 与 y 轴的夹角,

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{GMm}{R^3}\frac{1}{\left(1-\frac{2Ry}{R^2}+\frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2}}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})$$

$$\approx \frac{GMm}{R^3}\left(1+\frac{3y}{R}\right)(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}) = \frac{GMm}{R^3}\left(1+\frac{3y}{R}\right)[(R-y)\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{i}]$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\frac{GMm}{R^2}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F}_3 = m\omega^2\boldsymbol{r} = m\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{F}_4 = -2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} = -2m\omega\boldsymbol{k}\times(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}) = 2m\omega(\dot{y}\boldsymbol{i} - \dot{x}\boldsymbol{j})$$

以上已考虑到初始条件和受力情况,物体仅限于在 xy 平面内运动.

设卫星质量为 m_s,在地球引力作用下做圆周运动,$m_sR\omega^2 = \frac{GMm_s}{R^2}$,$\frac{GM}{R^3} = \omega^2$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$$

$$= m\omega^2\left(1+\frac{3y}{R}\right)[(R-y)\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{i}] - m\omega^2R\boldsymbol{j} + m\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) + 2m\omega(\dot{y}\boldsymbol{i} - \dot{x}\boldsymbol{j})$$

$$\approx m\omega^2\left(1+\frac{3y}{R}\right)R\boldsymbol{j} - m\omega^2R\boldsymbol{j} + m\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) + 2m\omega(\dot{y}\boldsymbol{i} - \dot{x}\boldsymbol{j})$$

$$= 2m\omega\dot{y}\boldsymbol{i} + (3m\omega^2y - 2m\omega\dot{x})\boldsymbol{j}$$

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} \tag{1}$$

$$\ddot{y} = 3\omega^2y - 2\omega\dot{x} \tag{2}$$

积分式(1),用初条件:$t=0$ 时,$\dot{x}=0$,$y=\Delta r$,得

$$\dot{x} = 2\omega(y-\Delta r) \tag{3}$$

将式(3)代入式(2),

$$\ddot{y} = -\omega^2y + 4\omega^2\Delta r$$

通解为

$$y = 4\Delta r + c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$$

用初始条件:$t=0$ 时,$y=\Delta r$,$\dot{y}=0$,定出

$$c_1 = -3\Delta r,\quad c_2 = 0$$

故

$$y = 4\Delta r - 3\Delta r\cos\omega t$$

代入式(3),

$$\dot{x} = 6\omega\Delta r(1-\cos\omega t)$$

积分上式,并用初始条件:$t=0$ 时,$x=0$,

$$x = 6\Delta r(\omega t - \sin\omega t)$$

2.1.46 一质量为 m 的质点用原长为 l、劲度系数为 k 的弹簧挂起来，$t=0$ 时，弹簧上端的支撑点开始上下按正弦函数做振动，振动的振幅为 A，角频率为 $\omega(\omega\neq\sqrt{k/m})$. 求质点的运动.

解 取固连的支撑点作为原点竖直向下的 x 坐标. 并以它为参考系. 这个参考系对静参考系的加速度为 $A\omega^2\sin\omega t$. 用此非惯性系，质点的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -k(x-l) + mg - mA\omega^2\sin\omega t \tag{1}$$

初始条件为 $t=0$ 时，$x=l+\dfrac{mg}{k}$，$\dot{x}=0-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-A\sin\omega t)\Big|_{t=0}=\omega A$.

令 $y=x-\left(l+\dfrac{mg}{k}\right)$，式(1)化为

$$m\ddot{y} = -ky - mA\omega^2\sin\omega t \tag{2}$$

初始条件为 $t=0$ 时 $y=0$，$\dot{y}=\omega A$.

式(2)的通解为

$$y = \frac{A\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega t + c_1\sin\omega_0 t + c_2\cos\omega_0 t$$

其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

由初始条件得 $c_1=-\dfrac{A\omega^3}{\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)}$，$c_2=0$

$$y = \frac{A\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega t - \frac{A\omega^3}{\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\omega_0 t$$

$$x = \frac{A\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) + l + \frac{mg}{k}$$

其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2.1.47 一块光滑的水平板绕过板上一点的竖直轴做恒定角速度为 ω 的转动. 一质点用一根原长为零、劲度系数为 k 的弹簧连接于轴与平板的交点. 若取开始时质点与交点(取为坐标系原点)的连线为 x 轴，z 轴沿 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向，质点开始在 $(a,0)$ 处以 $(0,v_0)$ 的速度运动，求质点的运动学方程 $x(t)$、$y(t)$.

解 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=-k\boldsymbol{r}+m\omega^2\boldsymbol{r}-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$

令 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$，上式的分量方程为

$$\ddot{x} = -(\omega_0^2-\omega^2)x + 2\omega\dot{y} \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -(\omega_0^2-\omega^2)y - 2\omega\dot{x} \tag{2}$$

式(1)+式(2)×i，并令 $z=x+\mathrm{i}y$，得

$$\ddot{z} = -(\omega_0^2-\omega^2)z + 2\omega\mathrm{i}\dot{z}$$

特征方程为

$$r^2-2\omega\mathrm{i}r+\omega_0^2-\omega^2=0$$

$$r = \frac{2\omega\mathrm{i}\pm\sqrt{(2\omega\mathrm{i})^2-4(\omega_0^2-\omega^2)}}{2} = (\omega\pm\omega_0)\mathrm{i}$$

$$z=(c_1+c_2\text{i})[\cos(\omega+\omega_0)t+\text{i}\sin(\omega+\omega_0)t]$$
$$+(c_3+c_4\text{i})[\cos(\omega-\omega_0)t+\text{i}\sin(\omega-\omega_0)t]$$
$$x=\text{Re}z=c_1\cos(\omega+\omega_0)t-c_2\sin(\omega+\omega_0)t$$
$$+c_3\cos(\omega-\omega_0)t-c_4\sin(\omega-\omega_0)t$$
$$y=\text{Im}z=c_2\cos(\omega+\omega_0)t+c_1\sin(\omega+\omega_0)t$$
$$+c_3\sin(\omega-\omega_0)t+c_4\cos(\omega-\omega_0)t$$

由初始条件：$t=0$ 时，$x=a$，$\dot{x}=0$，$y=0$，$\dot{y}=v_0$，可得 c_1、c_2、c_3、c_4 满足的方程

$$c_1+c_3=a$$
$$-c_2(\omega+\omega_0)-c_4(\omega-\omega_0)=0$$
$$c_2+c_4=0$$
$$c_1(\omega+\omega_0)+c_3(\omega-\omega_0)=v_0$$

解出　$c_2=c_4=0$，$c_1=\dfrac{v_0-a(\omega-\omega_0)}{2\omega_0}$，$c_3=\dfrac{a(\omega+\omega_0)-v_0}{2\omega_0}$

所以
$$x=\frac{v_0-a(\omega-\omega_0)}{2\omega_0}\cos(\omega+\omega_0)t+\frac{a(\omega+\omega_0)-v_0}{2\omega_0}\cos(\omega-\omega_0)t$$
$$y=\frac{v_0-a(\omega-\omega_0)}{2\omega_0}\sin(\omega+\omega_0)t+\frac{a(\omega+\omega_0)-v_0}{2\omega_0}\sin(\omega-\omega_0)t$$

其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2.1.48　考虑一组荷质比 e/m 都相同的带电粒子，证明：这些粒子在一个小的磁场 $\boldsymbol{B}$（常矢量）中的运动同在一个适当选择的角速度$\boldsymbol{\omega}$ 转动的参考系中看到的没有这个磁场的运动相同，求这相应的$\boldsymbol{\omega}$ 值，并对"小场"作出说明.

证明　粒子在磁场中受到洛伦兹力 $e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$.

粒子在以角速度$\boldsymbol{\omega}$（常矢量）转动的参考系中受到两个惯性力：科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，惯性离轴力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^2\boldsymbol{r}$.

如惯性离轴力可以忽略，当

$$2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

即
$$\boldsymbol{\omega}=\frac{e\boldsymbol{B}}{2m}$$

满足上述关系时，则转动参考系中科氏力的效应与均匀恒定磁场中洛伦兹力的效应相同，今这些粒子 e/m 相同，可以用同一个转动参考系代替磁场.

小场是指 $\boldsymbol{B}$ 足够小，它要求代替它所用的转动参考系的转动角速度$\boldsymbol{\omega}$ 足够小. 具体说，要求惯性离轴力较之科氏力可以忽略，即

$$m\omega^2r\ll m\omega v,\qquad \omega\ll\frac{v}{r}$$

对磁场而言，要求

$$B\ll\frac{v}{r(e/m)}$$

其中 v 是粒子的速率，r 是粒子离转轴的距离，选择转轴位于粒子系统运动区域的中心，r

也可以说是系统运动区域的线度.

这些粒子可以有其他作用力,洛伦兹力与科氏力等效,运动微分方程相同,初始条件相同,当然有完全相同的运动.

2.1.49 一个质量为 m 的质点在光滑的水平面上以角速度 ω 做匀速率圆周运动,其向心力是通过一劲度系数为 k 的弹簧提供的.使质点突然获得一个很小的径向速度分量,求所引起的径向振动的频率.

解
$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-k(r-r_0) \tag{1}$$
$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=0 \tag{2}$$
由式(2)可得
$$r^2\dot{\varphi}=c \tag{3}$$

质点做匀速率圆周运动,$\dot{\varphi}=\omega$,设半径为 R,用式(1)得
$$mR\omega^2=k(R-r_0) \tag{4}$$

沿径向突然给一很小的径向速度分量,在运动中,$r=R+\Delta r$,$\dot{\varphi}=\omega+\Delta\dot{\varphi}$,代入式(1)得
$$m[\Delta\ddot{r}-(R+\Delta r)(\omega+\Delta\dot{\varphi})^2]=-k(R-r_0+\Delta r)$$
用式(4),且略去二级小量,得
$$m(\Delta\ddot{r}-2R\omega\Delta\dot{\varphi}-\omega^2\Delta r)=-k\Delta r \tag{5}$$
由式(3),Δr 与 $\Delta\dot{\varphi}$间有下列关系:
$$(R+\Delta r)^2(\omega+\Delta\dot{\varphi})=R^2\omega$$
Δr、$\Delta\dot{\varphi}$均为一级小量,略去二级小量,可得
$$\Delta\dot{\varphi}=-\frac{2\omega}{R}\Delta r$$

将上式代入式(5),得
$$\Delta\ddot{r}+\left(3\omega^2+\frac{k}{m}\right)\Delta r=0$$

径向运动振动的角频率为$\sqrt{3\omega^2+\frac{k}{m}}$.

2.1.50 一个质量为 M 的小珠套在光滑的水平的金属丝上,另一个质量为 m 的质点通过无质量的不可伸长的、长度为 a 的绳子连在小珠上.握住小珠与质点,使绳子沿金属丝拉直,然后突然释放.求此后绳子张力与绳子、竖直线间夹角 θ 的关系.

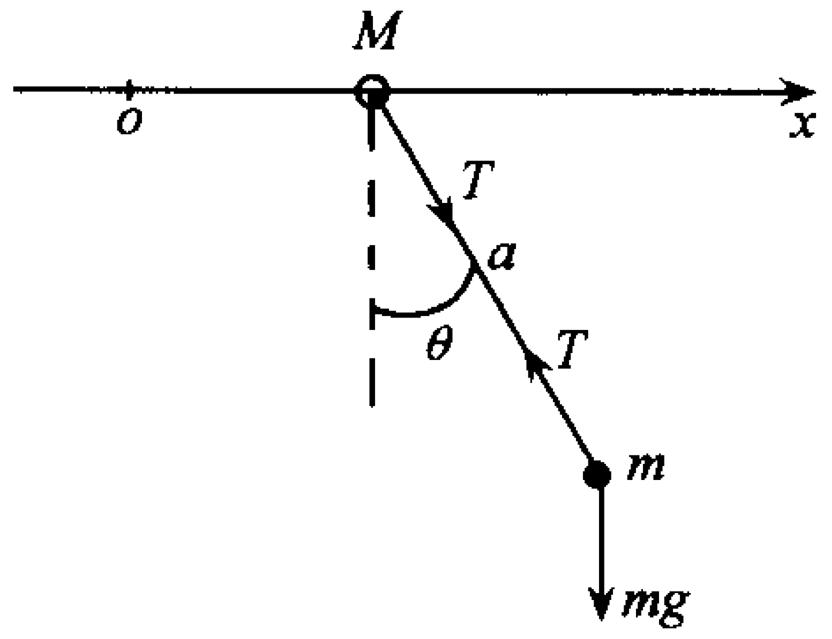


图 2.32

解
$$M\ddot{x}=T\sin\theta \tag{1}$$
$$ma\ddot{\theta}+m\ddot{x}\cos\theta=-mg\sin\theta \tag{2}$$
$$ma\dot{\theta}^2-m\ddot{x}\sin\theta=T-mg\cos\theta \tag{3}$$
式(1)~式(3)×$\sin\theta$,得
$$M\ddot{x}-ma\dot{\theta}^2\sin\theta+m\ddot{x}\sin^2\theta=mg\sin\theta\cos\theta \tag{4}$$

式(4)+式(2)×cosθ,得

$$M\ddot{x} - ma\dot{\theta}^2\sin\theta + m\ddot{x} + ma\ddot{\theta}\cos\theta = 0 \tag{5}$$

对 t 积分上式,得

$$(M+m)\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta = c_1 \tag{6}$$

由初始条件:$\theta=\frac{\pi}{2}$时,$\dot{\theta}=0$,$\dot{x}=0$ 定出 $c_1=0$,因此

$$(M+m)\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta = 0 \tag{7}$$

式(5)×$\dot{x}$+式(2)×$a\dot{\theta}$,得

$$\begin{aligned}(M+m)\dot{x}\ddot{x} - ma\dot{x}\dot{\theta}^2\sin\theta + ma\dot{x}\ddot{\theta}\cos\theta \\ + ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + ma\ddot{x}\dot{\theta}\cos\theta = - mga\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned} \tag{8}$$

对 t 积分上式,

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta = mga\cos\theta + c_2 \tag{9}$$

由初始条件:$\theta=\frac{\pi}{2}$时,$\dot{x}=0$,$\dot{\theta}=0$ 定出 $c_2=0$,因此

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta = mga\cos\theta \tag{10}$$

由式(7)得

$$\dot{x} = -\frac{m}{M+m}a\dot{\theta}\cos\theta \tag{11}$$

将式(11)代入式(10),解出

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2(M+m)\cos\theta}{(M+m\sin^2\theta)a}g \tag{12}$$

上式对 t 求导,

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{2(M+m)\sin\theta}{(M+m\sin^2\theta)a}g\dot{\theta} - \frac{2(M+m)\cos\theta}{(M+m\sin^2\theta)^2a}\cdot 2mg\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}$$

所以

$$\ddot{\theta} = -\frac{(M+m)g}{(M+m\sin^2\theta)^2a}(M+m+m\cos^2\theta)\sin\theta \tag{13}$$

将式(12)、(13)代入式(5),解出

$$\ddot{x} = \frac{mg(3M+2m+m\sin^2\theta)}{(M+m\sin^2\theta)^2}\sin\theta\cos\theta$$

将上式代入式(1),即得

$$T = \frac{Mmg(3M+2m+m\sin^2\theta)\cos\theta}{(M+m\sin^2\theta)^2}$$

说明:此题如用第六章讲的质点系的机械能守恒,可直接得到式(9)、(10),用质点系在 x 方向动量守恒,可直接得到式(6)、(7).

2.1.51 质量分别为 m 和 M 的两个小环可在一光滑的竖直平面内的圆圈上运动,两环被一根无质量的、不可伸长的绳子连着.证明:只要绳子保持拉紧,绳子张力为 $2mMg\tan\alpha\cos\theta/(m+M)$,其中 2α 是绳子拉紧时对圈心所张的角,θ 是绳子与水平线间的夹角,g 为重力加速度.

证明　可以直观地作出判断:m、M 在运动中绳子保持拉紧,m、M 连线必位于圈心 O

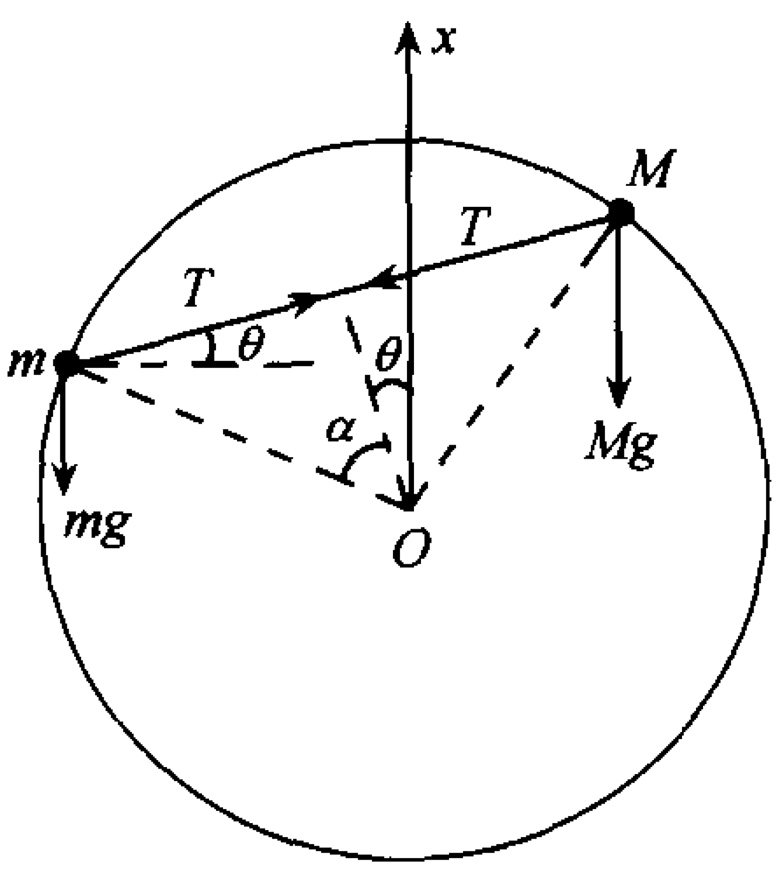


图 2.33

的上方,如图 2.33 所示.

用自然坐标,列 m、M 的切向方程. 设圆圈半径为 r,规定 m 作逆时针转动的速度为正,M 作顺时针转动的速度为正,即

$$v_m = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha+\theta),\quad v_M = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha-\theta)$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_m}{\mathrm{d}t} = mg\sin(\alpha+\theta) - T\cos\alpha$$

即
$$mr\ddot{\theta} = mg\sin(\alpha+\theta) - T\cos\alpha \tag{1}$$

$$M\frac{\mathrm{d}v_M}{\mathrm{d}t} = Mg\sin(\alpha-\theta) - T\cos\alpha$$

即
$$-Mr\ddot{\theta} = Mg\sin(\alpha-\theta) - T\cos\alpha \tag{2}$$

式(1)－式(2)得

$$(m+M)r\ddot{\theta} = mg\sin(\alpha+\theta) - Mg\sin(\alpha-\theta)$$

$$r\ddot{\theta} = \frac{g}{m+M}[m\sin(\alpha+\theta) - M\sin(\alpha-\theta)] \tag{3}$$

将式(3)代入式(1),解出 T,经计算可得

$$T = \frac{2mMg}{m+M}\tan\alpha\cos\theta$$

2.1.52 三个点源等距离地固定在一个半径为 a、圆心为原点的圆周上,每个点源对质量为 m 的质点的作用力为引力 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{R}$,其中 k 为正值常量,$\boldsymbol{R}$ 为质点对点源的位矢. 质点在 $t=0$ 时放入力场,初始条件为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$,$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}_0$,如图 2.34 所示.

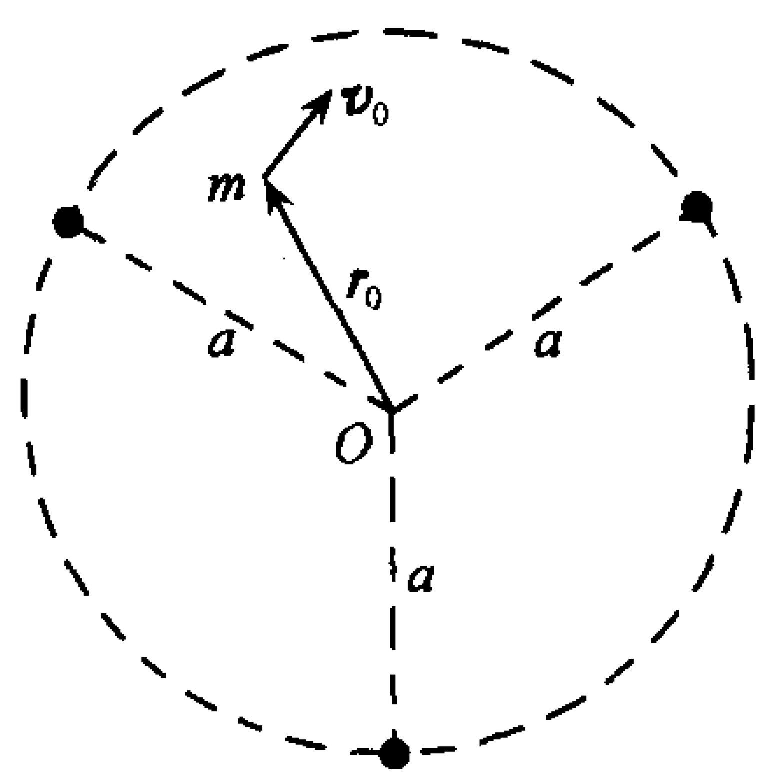


图 2.34

(1) 求解质点的运动,用 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$ 及其他参数表示 $\boldsymbol{r}(t)$;

(2) 在什么条件下,质点的运动轨道为圆?

解 (1) 用 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$、$\boldsymbol{r}$ 分别表示三个点源和质点对原点 O 的位矢,因三个点源在圆周上等距离分布,有

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3=0$$

三个点源对质点的合力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -k(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)-k(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)-k(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3)\\ &= -3k\boldsymbol{r}+k(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3) = -3k\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

运动微分方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -3k\boldsymbol{r}$$

通解为
$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{A}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\boldsymbol{B}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

由初始条件:$t=0$ 时,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$,$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}_0$,定出

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}_0,\quad \boldsymbol{B}=\sqrt{\frac{m}{3k}}\boldsymbol{v}_0$$

所以
$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{3k}}\boldsymbol{v}_0\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

(2) 取 $\boldsymbol{r}_0$ 方向为 x 轴正向，设$\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 的夹角为 α，则

$$x(t)=r_0\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{3k}}v_0\cos\alpha\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

$$y(t)=\sqrt{\frac{m}{3k}}v_0\sin\alpha\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

$$x^2+y^2=r_0^2\cos^2\sqrt{\frac{3k}{m}}t+2r_0v_0\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\alpha\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\left(\sqrt{\frac{m}{3k}}v_0\right)^2\sin^2\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

可以看出，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$时，且 $r_0=\sqrt{\frac{m}{3k}}v_0$ 时，

$$x^2+y^2=r_0^2$$

质点的运动轨道为圆．因此条件是 $\boldsymbol{r}_0\perp\boldsymbol{v}_0$，且 $r_0=\sqrt{\frac{m}{3k}}v_0$．

附带说明：用第三章讲的互相垂直的、同频率的两个简谐振动的合成，立即可得上述结论．

2.1.53　n 个质点质量均为 m，任何两个质点间相互作用力为斥力，大小与它们间的距离成正比，比例系数为 μm^2．开始把它们静止地放在一个光滑的水平面上处于以 O 为中心、a 为半径的圆圈上的对称位置．证明：同时释放后，任一质点位于离 O 点距离 r 处时的速率为

$$[\mu nm(r^2-a^2)]^{1/2}$$

提示：$2\left[\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=n\quad(n\geqslant2)$．

证明　考虑位于图中 A 点的一个质点，B 点的质点对它的作用力在 OA 方向的分量为

$$\mu m^2\cdot2r\sin^2\frac{\pi}{n}$$

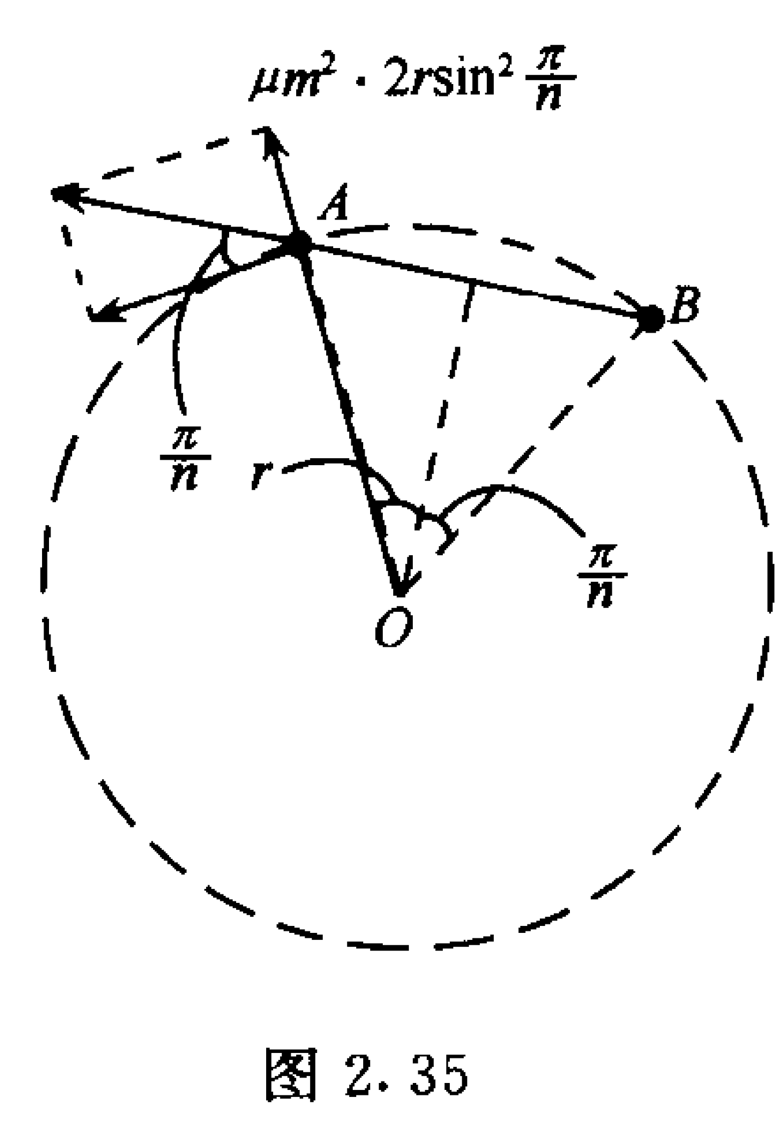


图 2.35

其他质点对 A 点的质点的作用力在 OA 方向的分量分别为 $\mu m^2\cdot2r\sin^2\frac{2\pi}{n}$、$\mu m^2\cdot2r\sin^2\frac{3\pi}{n}$、…、$\mu m^2\cdot2r\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}$，其中 r 为 n 个质点在 t 时刻离 O 点的距离．不论 n 为奇数还是偶数，任何一个质点受到的合力都沿半径方向向外，且大小相等．各质点在任何时刻都对称地分布在以 O 为圆心的一个圆上，每个质点的矢径满足下列方程：

$$m\ddot{r} = \mu m^2\left[2r\sin^2\frac{\pi}{n} + 2r\sin^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + 2r\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = \mu m^2 nr$$

$$\dot{r}\,\ddot{r} = \mu mnr\,\dot{r}, \quad \frac{1}{2}\mathrm{d}\,\dot{r}^2 = \frac{1}{2}\mu mn\mathrm{d}r^2$$

两边积分,用初条件:$r=a$ 时,$\dot{r}=0$,得

$$\dot{r}^2 = \mu mn(r^2 - a^2)$$

$$\dot{r} = [\mu mn(r^2 - a^2)]^{1/2}$$

2.1.54 考虑一质量为 m 的粒子在力 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$ 作用下运动,这里 k 是正值常量,$\boldsymbol{r}$ 是粒子的位矢.

(1) 证明粒子在一平面内运动;

(2) 设在 $t=0$ 时,$x=a, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=v_0$,求 $x(t)$和 $y(t)$;

(3) 证明该轨道是一椭圆;

(4) 求出周期.

解 (1) $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times(-k\boldsymbol{r})=0$,又因 $\boldsymbol{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$,$\therefore \boldsymbol{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$,所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$$

积分上式,

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{h} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{h}$ 为常矢量.

$\because$

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2}$$

将式(1)代入式(2),$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{h}=0$

即 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{h}$,说明粒子始终在与 $\boldsymbol{h}$ 垂直的平面上运动.

(2)

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\boldsymbol{r}$$

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{y} = -ky$$

令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$,$\ddot{x}+\omega^2x=0$,$\ddot{y}+\omega^2y=0$

$$x = A\cos(\omega t+\alpha), \quad y = B\cos(\omega t+\beta)$$

由初始条件:$t=0$ 时,$x=a, \dot{x}=0, y=0, \dot{y}=v_0$,定出 A、α、B、β,得

$$x = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad y = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}v_0\right)^2}=1$,这是一个椭圆的标准方程.

(4) 设周期为 T,$\sqrt{\dfrac{k}{m}}T=2\pi$,$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

2.1.55 质量分别为 m 及 m'的两个质点,用未伸缩时长度为 a 的弹性绳相连,绳的劲度系数 $k=\dfrac{2mm'\omega^2}{m+m'}$. 将此系统放在光滑的水平管内,管子绕通过管上某点的竖直轴以恒定角速度 ω 转动. 开始时,两质点相对于管子是静止的,两质点间距为 a. 试求此后任何时刻两质点间的距离.

解　用图 2.36 的 x_1、x_2 分别表示质量为 m、m' 的两质点的位置. 取水平管为参考系.

$$m\ddot{x}_1 = m\omega^2 x_1 - \frac{2mm'\omega^2}{m+m'}(x_1+x_2-a) \qquad (1)$$

$$m'\ddot{x}_2 = m'\omega^2 x_2 - \frac{2mm'\omega^2}{m+m'}(x_1+x_2-a) \qquad (2)$$

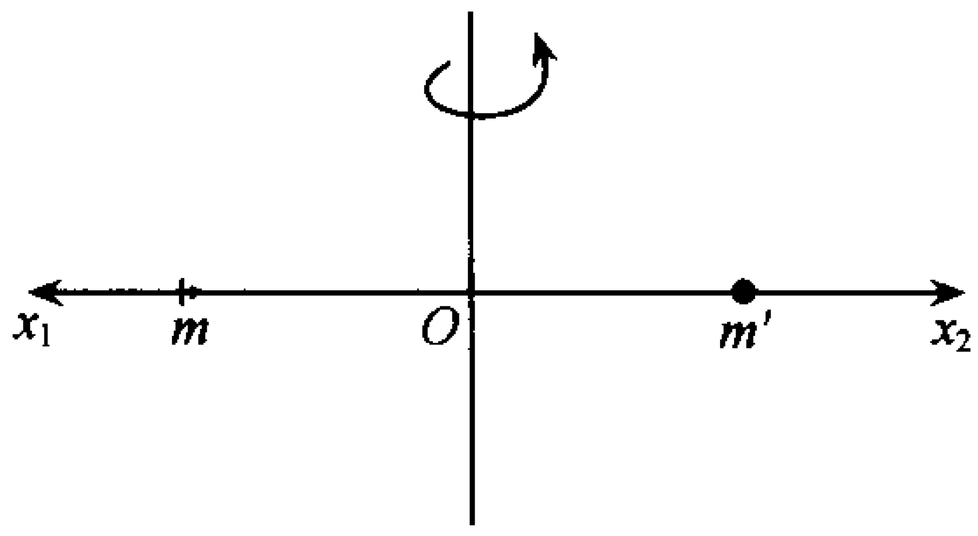


图 2.36

式(1)×m'+式(2)×m，并令 $s=x_1+x_2$，s 为两质点间距，

$$mm'\ddot{s} = mm'\omega^2 s - 2mm'\omega^2(s-a) = -mm'\omega^2 s + 2mm'\omega^2 a$$

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 2\omega^2 a$$

$$s = 2a + A\cos(\omega t + \alpha)$$

由初始条件：$t=0$ 时，$s=x_1+x_2=a$，$\dot{s}=\dot{x}_1+\dot{x}_2=0$，定出 $A=a$，$\alpha=\pi$.

$$s = 2a + a\cos(\omega t + \pi) = 2a - a\cos\omega t$$

说明：上面是我们对开始时 m、m' 分别处于转轴的两侧的情况得出的结果，如开始时 m、m' 处于转轴的同一侧，得到两质点间距 s 的微分方程是相同的，因而上述结果也适用.

2.1.56　质量为 m 的小环套在半径为 a 的光滑圆圈上，可在其上滑动. 如圆圈在水平面内以恒定角速度 ω 绕圈上某点 O 转动，转轴垂直于水平面. 试求小环沿圆圈切线方向的运动微分方程.

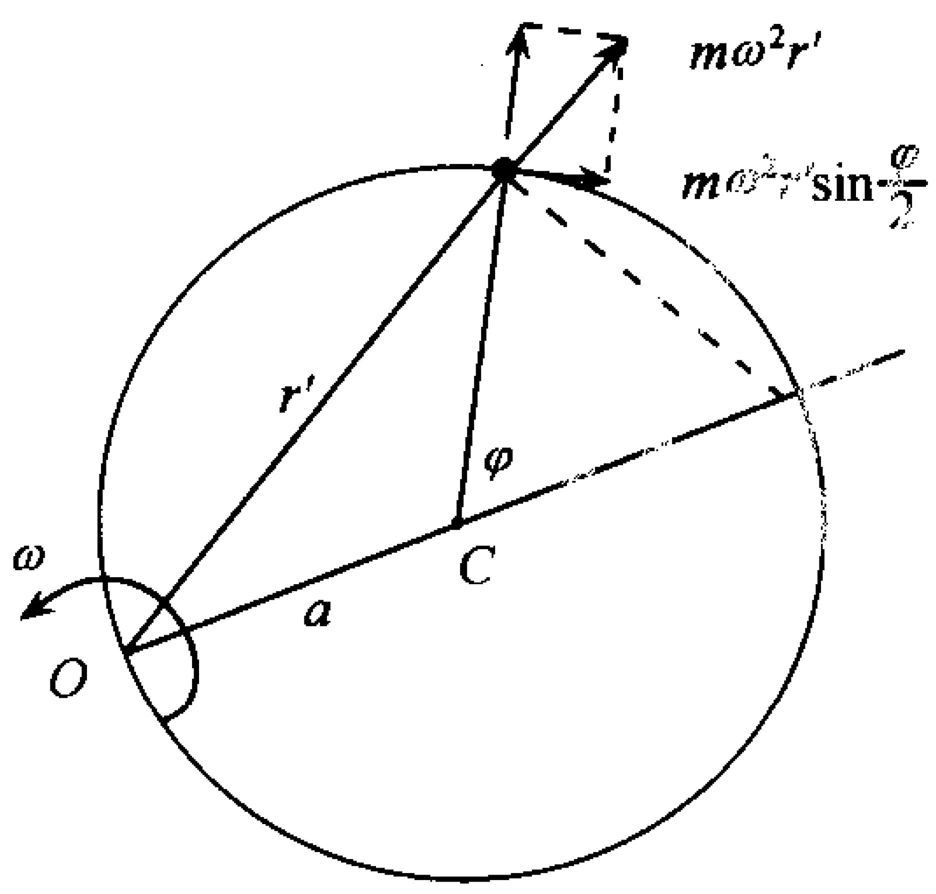


图 2.37

解　取圆圈为参考系，用固连于圆圈的极坐标表达，原点取在圆圈中心 C，取 OC 的延长线为极轴.

小环水平方向受到三个力：圆圈的作用力；惯性离轴力 $m\omega^2 r'$；科里奥利力. 只有惯性离轴力在切线方向的分量不为零，它的切线方向分量为

$$m\omega^2 r'\sin\frac{\varphi}{2} = m\omega^2\cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = m\omega^2 a\sin\varphi$$

切线方向的运动微分方程为

$$ma\ddot{\varphi} = -m\omega^2 a\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0$$

2.1.57　两个粒子质量为 m、带正电荷 q，用劲度系数为 k、平衡长度为零的弹簧相连. 沿水平方向有恒定电场 $\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{i}$，考虑粒子之间的库仑力，忽略磁效应、辐射效应和相对论效应等，假定粒子没有碰撞.

(1) 如果粒子在水平 x 方向的光滑直线上滑动，它们之间的距离 d 不变. 求 d；

(2) 若(1)中两粒子间的距离 $d(t)$ 为在一个平衡位置附近的小振动，求频率；

(3) 若粒子在水平的光滑桌面上滑动，求运动微分方程的通解，可在答案中保留积分.

解　(1) 用 x_1、x_2 分别表示两个粒子的位置. 图 2.38 画出了两个粒子的位置和受力情况，由此可分别列出两粒子的运动微分方程：

$$m\ddot{x}_1 = qE_0 + k(x_2 - x_1) - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_2 - x_1)^2},$$

$$m\ddot{x}_2 = qE_0 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_2 - x_1)^2} - k(x_2 - x_1).$$

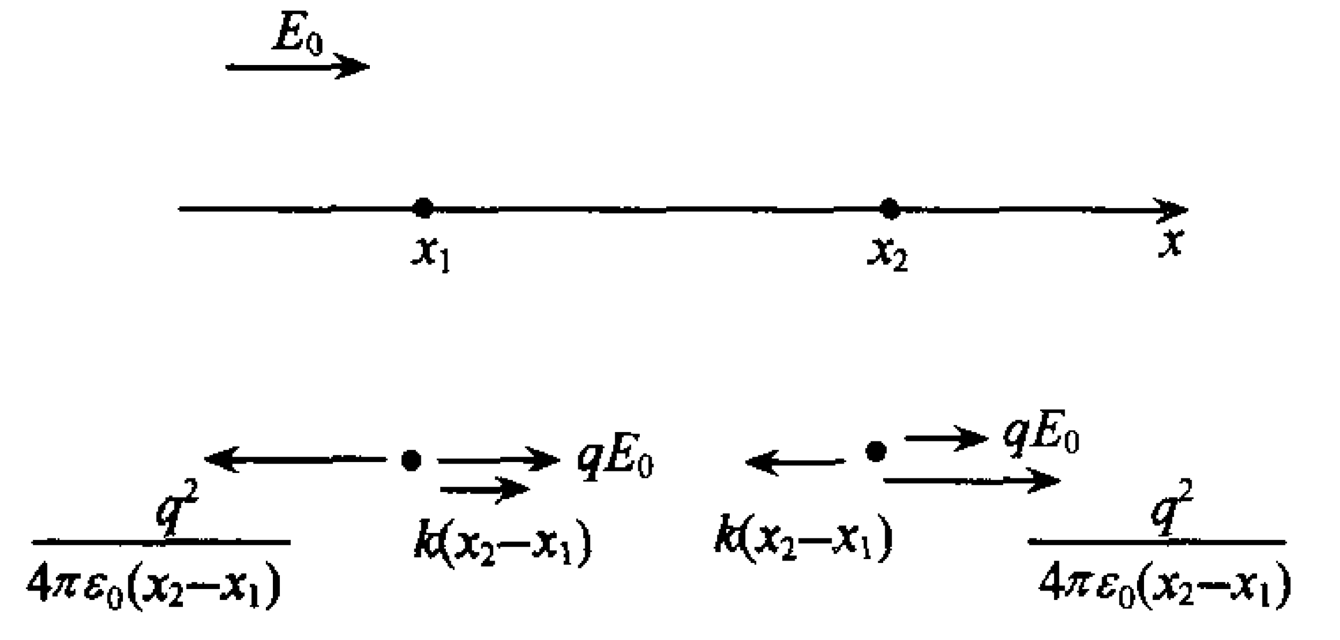


图 2.38

两式相减,可得粒子间距 $s=x_2-x_1$(可取 x 坐标较大者为 x_2,故 $x_2>x_1$)满足的微分方程为

$$m\ddot{s} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 s^2} - 2ks \tag{1}$$

$s=d$ 保持不变,则 $\ddot{s}=0$. 代入式(1)得

$$d = \left(\frac{q^2}{4\pi k\varepsilon_0}\right)^{1/3} \tag{2}$$

注意:$s=d$ 保持不变,并不意味着两粒子都静止不动(对静参考系). 对静系,$\ddot{x}_1=\ddot{x}_2=\frac{qE_0}{m}>0$. 对静系以 $\ddot{x}=\frac{qE_0}{m}$运动的参考系,两粒子都静止不动.

(2) 距离 s 在 d 附近做小振动,可令 $s=d+\Delta s$,代入式(1),

$$\begin{aligned} m\ddot{\Delta s} &= \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0(d+\Delta s)^2} - 2k(d+\Delta s) \\ &= \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1 - \frac{2\Delta s}{d}\right) - 2kd - 2k\Delta s \\ &= -\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3}\Delta s - 2k\Delta s = -6k\Delta s \end{aligned}$$

上述计算中,两次用了式(2).

$$m\ddot{\Delta s} + 6k\Delta s = 0$$

可见粒子间距在 d 附近的小振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

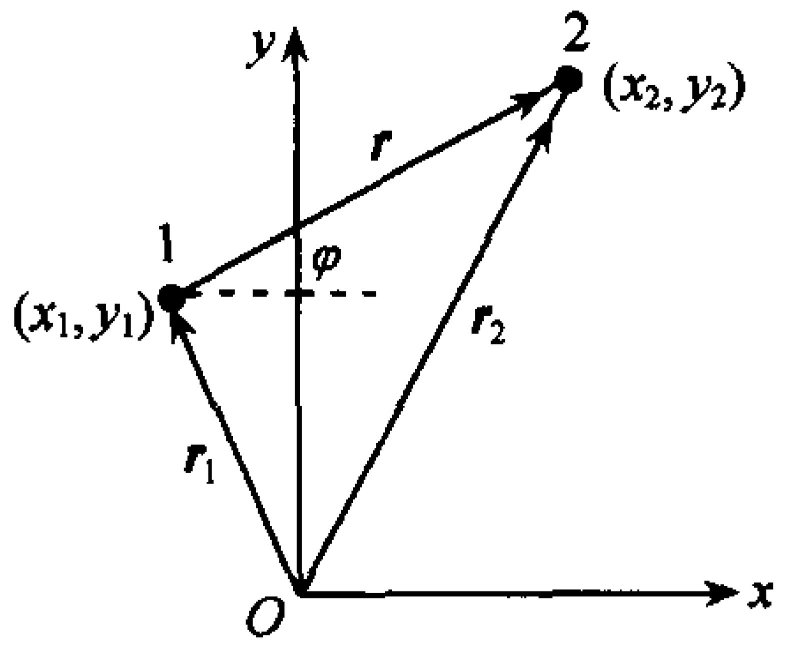


图 2.39

(3) 由图 2.39 表示两粒子的位置,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = qE_0\boldsymbol{i} + k(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) - \boldsymbol{F}_c \tag{3}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = qE_0\boldsymbol{i} - k(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \boldsymbol{F}_c \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{F}_c$ 是粒子 1 对粒子 2 的库仑力,

$$\boldsymbol{F}_c=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$

式(3)＋式(4)得

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1+\ddot{\boldsymbol{r}}_2=\frac{2qE_0}{m}\boldsymbol{i}$$

写成分量方程，对 t 积分两次，得

$$x_1+x_2=\frac{qE_0}{m}t^2+A_1t+A_2 \tag{5}$$

$$y_1+y_2=B_1t+B_2 \tag{6}$$

式(4)－式(3)，令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，得

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\left(\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0r^3}-2k\right)\boldsymbol{r}=\left(\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0r^2}-2kr\right)\boldsymbol{e}_r \tag{7}$$

注意 $\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$

$=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$

式(7)写成分量方程，

$$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0mr^2}-\frac{2kr}{m} \tag{8}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})=0 \tag{9}$$

由式(9)积分

$$r^2\dot{\varphi}=h \tag{10}$$

用式(10)，并用 $\ddot{r}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}\dot{r}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{r}^2}{\mathrm{d}r}$，式(8)化为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{r}^2=\left(\frac{h^2}{r^3}+\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0mr^2}-\frac{2kr}{m}\right)\mathrm{d}r$$

积分上式，得

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2=-\frac{h^2}{2r^2}-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0mr}-\frac{kr^2}{m}+\frac{1}{2}c$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}=\left(c-\frac{b^2}{r^2}-\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0mr}-\frac{2kr^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}r}{\left(c-\dfrac{b^2}{r^2}-\dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_0mr}-\dfrac{2kr^2}{m}\right)^{1/2}}=t+T \tag{11}$$

由式(11)可得

$$r=r(t)$$

$$r=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}$$

式(11)也可改写为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=[r(t)]^2 \tag{12}$$

$$\tan\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad \varphi=\arctan\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

式(10)可以改写为

$$[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\arctan\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]=h$$

$$[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)=h\mathrm{d}t$$

$$(x_2-x_1)\mathrm{d}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)=h\mathrm{d}t$$

两边积分,等号左边用分部积分,

$$y_2-y_1-\int\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\mathrm{d}(x_2-x_1)=ht+D \tag{13}$$

由式(12)可得 y_2-y_1 作为 x_2-x_1 的函数,因而式(13)的积分也可得到 y_2-y_1 与 x_2-x_1 的另一关系.

式(5)、(6)、(12)、(13)都是 x_1、x_2、y_1、y_2 的方程,可解出它们作为 t 和 A_1、A_2、B_1、B_2、h、c、T、D 八个积分常数的函数,这八个积分常数可由初条件 $t=0$ 时的 x_1、y_1、x_2、y_2、$\dot{x}_1$、$\dot{y}_1$、$\dot{x}_2$、$\dot{y}_2$ 确定.

2.1.58 一个半径为 R 的半球形碗以不变角速度 Ω 绕竖直的对称轴转动.质量为 M 的一个粒子在重力影响下在碗的内表面运动,粒子除受到碗面的支持力外,还受到一个摩擦力 $\boldsymbol{F}=-k\,\boldsymbol{v}$,其中 k 为正值常量,$\boldsymbol{v}$是相对于碗的速度.

(1) 用球坐标 θ、φ(坐标原点取在碗心),写出粒子相对于转动参考系的运动微分方程.证明:如果 $\Omega>\sqrt{\dfrac{g}{R}}$,除了碗底这个平衡位置以外,存在第二个平衡位置,并求出这第二个平衡位置的 θ 值.

(2) 考虑粒子在碗底这个平衡位置附近的运动.在此平衡点取一个固定的笛卡儿坐标系 x、y、z,除计算重力提供的恢复力以外,不考虑碗的曲率.证明:对于 $|x|\ll R$、$|y|\ll R$,粒子的一个特解为

$$x=\mathrm{Re}(x_0\mathrm{e}^{\lambda t}),\quad y=\mathrm{Re}(y_0\mathrm{e}^{\lambda t})$$

其中 λ 满足

$$\left(\lambda^2+\frac{k}{M}\lambda+\frac{g}{R}\right)^2+\left(\frac{k}{M}\right)^2\Omega^2=0$$

(3) 求碗的角速度 Ω_0,对于此角速度,粒子的运动是周期性的.

解 (1) $M\boldsymbol{a}=M\boldsymbol{g}-k\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{N}-M\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})-2M\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$
$$+(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\varphi$$

取 z 轴竖直向下,

$$\boldsymbol{g}=g\cos\theta\boldsymbol{e}_r-g\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$\boldsymbol{N}=-N\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{r}=R\boldsymbol{e}_r,r=R$$
$$\boldsymbol{\Omega}=-\Omega\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\Omega\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

今
$$v = R\dot{\theta}e_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta e_\varphi$$

$$a = (-R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)e_r + (R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)e_\theta + (R\ddot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)e_\varphi$$

关于 θ、φ 的两个运动微分方程为

$$M(R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) = -Mg\sin\theta - kR\dot{\theta} + MR\Omega^2\sin\theta\cos\theta - 2MR\Omega\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$$

$$M(R\ddot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) = -kR\dot{\varphi}\sin\theta + 2MR\Omega\dot{\theta}\cos\theta$$

质点处于平衡时，$\dot{\theta}=0$，$\ddot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}=0$，$\ddot{\varphi}=0$. 由关于 θ 的微分方程得

$$-Mg\sin\theta + MR\Omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\sin\theta(R\Omega^2\cos\theta - g) = 0$$

可得 $\sin\theta=0$，$\theta=0$ 为平衡位置.

如 $\frac{g}{R\Omega^2}<1$，则有 $R\Omega^2\cos\theta-g=0$，即

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{R\Omega^2}\right)$$

为第二个平衡位置，$\frac{g}{R\Omega^2}<1$ 也即 $\Omega>\sqrt{\frac{g}{R}}$.

关于 φ 的微分方程在平衡位置是 $0=0$ 的恒等式，说明只要 θ 合适，任何 φ 值处都可以是平衡位置.

(2) 在碗底取一个以碗底为原点的固定的笛卡儿坐标系 xyz，z 轴竖直向上.

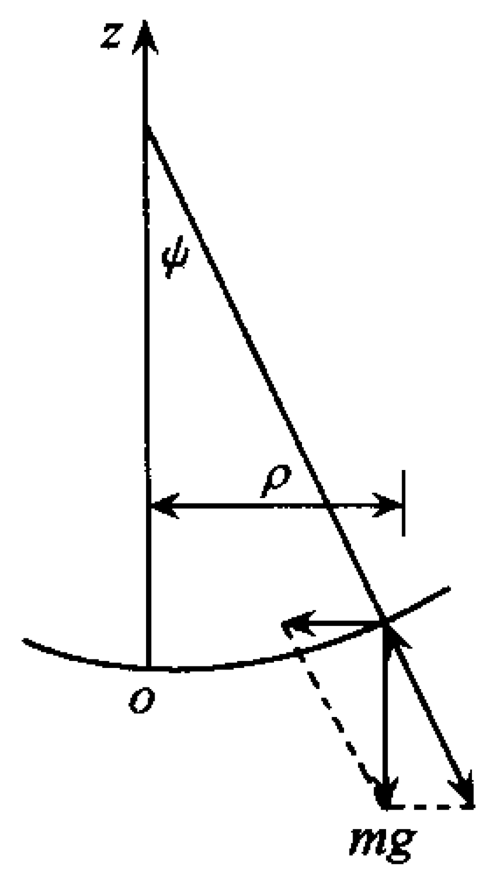


图 2.40

重力 Mg 在 x、y 方向的分量为

$$-Mg\tan\psi(\cos\varphi i + \sin\varphi j)$$

$\because |x|\ll R, |y|\ll R, \therefore \rho=\sqrt{x^2+y^2}\ll R$

$$\sin\psi = \frac{\rho}{R} \ll 1, \tan\psi \approx \sin\psi$$

$$\begin{aligned}-Mg\tan\psi\ (\cos\varphi i + \sin\varphi j) &\approx -Mg\sin\psi(\cos\varphi i + \sin\varphi j)\\ &= -Mg\frac{\rho}{R}(\cos\varphi i + \sin\varphi j) = -\frac{Mg}{R}(xi + yj)\end{aligned}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\tilde{d}r}{dt} + \Omega \times r$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}r}{dt} &= \frac{dr}{dt} - \Omega \times r = \dot{x}i + \dot{y}j - \Omega k \times (xi + yj)\\ &= (\dot{x} + \Omega y)i + (\dot{y} - \Omega x)j\end{aligned}$$

摩擦力 $F=-k\frac{\tilde{d}r}{dt}=-k[(\dot{x}+\Omega y)i+(\dot{y}-\Omega x)j]$

支持力与重力的另一个分量的合力为零.

现在用的是惯性参考系，

$$M\ddot{x} = -\frac{Mg}{R}x - k\dot{x} - k\Omega y$$

$$M\ddot{y}=-\frac{Mg}{R}y-k\dot{y}+k\Omega x$$

令 $x=x_0e^{\lambda t}$，$y=y_0e^{\lambda t}$，x_0、y_0、λ 均为复数，代入方程，可得

$$\left(\lambda^2+\frac{k}{M}\lambda+\frac{g}{R}\right)x_0+\frac{k\Omega}{M}y_0=0$$

$$-\frac{k\Omega}{M}x_0+\left(\lambda^2+\frac{k}{M}\lambda+\frac{g}{R}\right)y_0=0$$

方程组有非零解，必有系数行列式等于零，得

$$\left(\lambda^2+\frac{k}{M}\lambda+\frac{g}{R}\right)^2+\left(\frac{k\Omega}{M}\right)^2=0$$

$$x=\mathrm{Re}(x_0e^{\lambda t}),\quad y=\mathrm{Re}(y_0e^{\lambda t})$$

为一个特解，$x=\mathrm{Im}(x_0e^{\lambda t})$，$y=\mathrm{Im}(y_0e^{\lambda t})$是另一个特解.

(3) 粒子的运动是周期运动，要求 λ 为纯虚数，即 $\lambda=\mathrm{i}\omega$，ω 为实数，代入 λ 必须满足的方程，令 $\Omega=\Omega_0$，

$$\left(-\omega^2+\frac{k}{M}\omega\mathrm{i}+\frac{g}{R}\right)^2=-\left(\frac{k\Omega_0}{R}\right)^2$$

$$-\omega^2+\frac{k}{M}\omega\mathrm{i}+\frac{g}{R}=\pm\frac{k\Omega_0}{R}\mathrm{i}$$

等号两边实部、虚部分别相等，得

$$-\omega^2+\frac{g}{R}=0$$

$$\frac{k}{M}\omega=\pm\frac{k\Omega_0}{M}$$

解出

$$\Omega_0=\pm\omega=\pm\sqrt{\frac{g}{R}}$$

即

$$\boldsymbol{\Omega}_0=\sqrt{\frac{g}{R}}\boldsymbol{k}\quad 或\quad \boldsymbol{\Omega}_0=-\sqrt{\frac{g}{R}}\boldsymbol{k}$$

粒子的运动都是周期性的.

2.1.59 一个质点在重力作用下沿一粗糙的竖直的圆周运动. 如从水平直径的一端的静止状态开始运动，到圆的最低点时刚好静止. 求摩擦因数 μ 必须满足的关系.

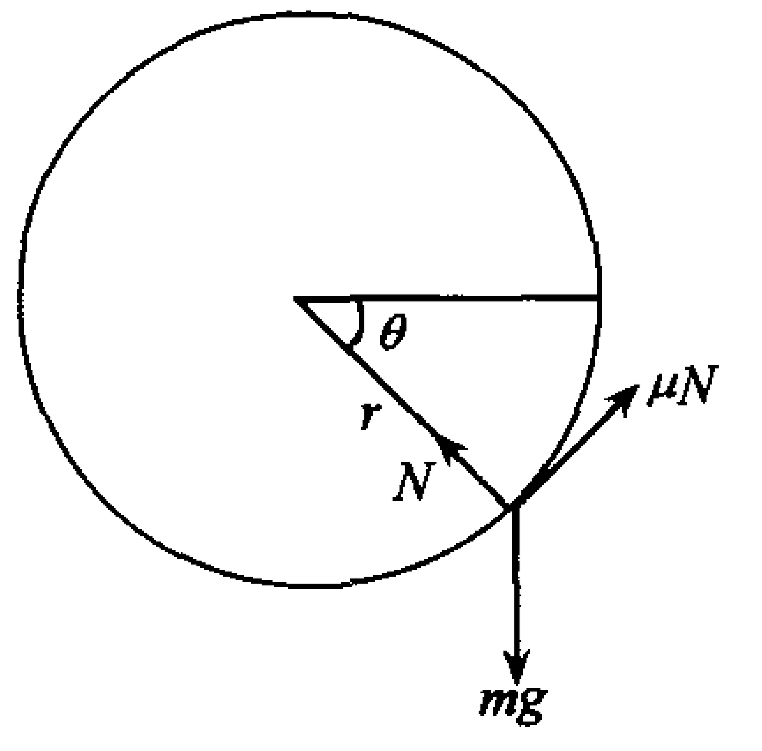


图 2.41

解 设圆周半径为 r，质点质量为 m，用自然坐标，

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg\cos\theta-\mu N \tag{1}$$

$$m\frac{v^2}{r}=N-mg\sin\theta \tag{2}$$

式(1)+式(2)×μ，约去两边的 m，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\mu v^2}{r}=g\cos\theta-\mu g\sin\theta \tag{3}$$

用

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

式(3)可改写为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}v^2 + \mu v^2\mathrm{d}\theta = gr(\cos\theta - \mu\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

令 $x=v^2$,

$$\mathrm{d}x + 2(\mu x - gr\cos\theta + \mu gr\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0$$

试用 $f(\theta)$ 作积分因子,代入上式,得 $f(\theta)$ 满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = 2\mu f$$

解出

$$f(\theta)=\mathrm{e}^{2\mu\theta}$$

$$\mathrm{e}^{2\mu\theta}\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^{2\mu\theta}(\mu x - gr\cos\theta + \mu gr\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0 \tag{4}$$

$$\mathrm{e}^{2\mu\theta}\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^{2\mu\theta}\mu x\mathrm{d}\theta = d(x\mathrm{e}^{2\mu\theta})$$

用分部积分,计算 $\int \mathrm{e}^{2\mu\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta$ 和 $\int \mathrm{e}^{2\mu\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$ 可得

$$\int\mathrm{e}^{2\mu\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^{2\mu\theta}}{1+4\mu^2}(\sin\theta + 2\mu\cos\theta)$$

$$\int\mathrm{e}^{2\mu\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^{2\mu\theta}}{1+4\mu^2}(2\mu\sin\theta - \cos\theta)$$

积分(4)式得

$$x\mathrm{e}^{2\mu\theta} - \frac{2gr\mathrm{e}^{2\mu\theta}}{1+4\mu^2}(\sin\theta + 2\mu\cos\theta) + \frac{2\mu gr\mathrm{e}^{2\mu\theta}}{1+4\mu^2}(2\mu\sin\theta - \cos\theta) = c$$

整理后,上式化成

$$\mathrm{e}^{2\mu\theta}\left\{x + \frac{2gr}{1+4\mu^2}[(2\mu^2-1)\sin\theta - 3\mu\cos\theta]\right\} = c$$

由 $\theta=0, x=v^2=0$ 定出 $c=-\frac{6\mu gr}{1+4\mu^2}$.

再用 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $x=v^2=0$,可得 μ 需满足的方程为

$$3\mu^2 - 1 + 3\mu\mathrm{e}^{-\mu\pi} = 0$$

2.1.60 一个质量为 M 的小球,用一根劲度系数为 k、自然长度为零的无质量弹簧悬挂于天花板下,小球下面挂一根相同的弹簧,原处于平衡状态.今有一个力 $F(t)$ 作用于下面弹簧的下端,如图 2.42 所示.求上面弹簧的长度 x_1 与 $F(t)$ 的关系;如 $F(t)=\lambda t$,λ 为常量,求 $x_1(t)$.

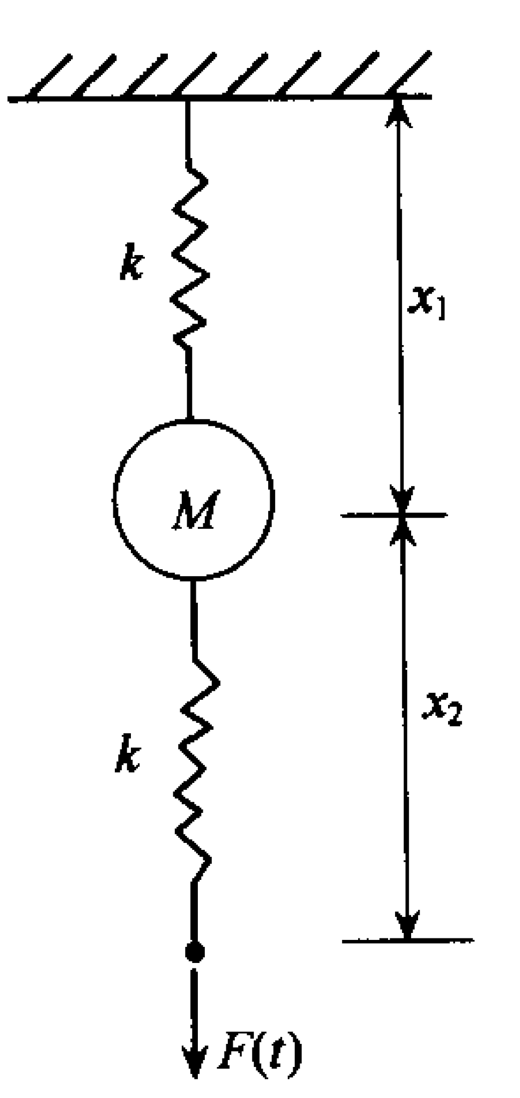


图 2.42

解 小球和下面弹簧的运动微分方程为

$$M\ddot{x}_1 = Mg - kx_1 + kx_2$$

$$-kx_2 + F(t) = 0$$

从两式消去 x_2 得

$$M\ddot{x}_1 + kx_1 = Mg + F(t) \tag{1}$$

与(1)式相应的齐次方程的两个特解为

$$x_{11}=\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t,\quad x_{12}=\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t$$

非齐次方程式(1)的通解为[参看强元棨编著的《经典力学》上册 p. 51]

$$x_1(t)=A\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t+B\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t+\frac{1}{M}\sqrt{\frac{M}{k}}\left[\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\int_0^t(F(t)\right.$$

$$\left.+Mg)\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t\mathrm{d}t-\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t\int_0^t(F(t)+Mg)\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\mathrm{d}t\right]$$

用初条件：$t=0$($F(t)$开始作用时)，$x_1=\frac{Mg}{k}$，$\dot{x}_1=0$，可得 $A=B=0$，并可进一步简化为

$$x_1(t)=\frac{Mg}{k}+\frac{1}{M}\sqrt{\frac{M}{k}}\left[\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\int_0^tF(t)\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t\int_0^tF(t)\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\mathrm{d}t\right]\qquad(t\geqslant 0)$$

$$x_1(t)=\frac{Mg}{k}\qquad(t<0)$$

当 $F(t)=\lambda t$ 时，经计算可得

$$x_1(t)=\frac{Mg}{k}+\frac{\lambda}{k}\left[t-\sqrt{\frac{M}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\right]\qquad(t\geqslant 0)$$

$$x_1(t)=\frac{Mg}{k}\qquad(t<0)$$

2. 1. 61　单位质量的质点在阻力与速度成正比的介质中运动，比例系数为 β，在一个按指数衰减的力 $F_0\mathrm{e}^{-\gamma t}$(其中 F_0、γ 均为常量)作用下自静止开始运动．用拉普拉斯变换法求解该质点此后的运动规律．

解　$\ddot{x}=-\beta\dot{x}+F_0\mathrm{e}^{-\gamma t}$

$t=0$ 时，$x=0$，$\dot{x}=0$

今原函数 $F(t)=x(t)$，$F(0)=0$，$F'(0)=0$．象函数为 $f(p)$．

由拉普拉斯变换将运动微分方程变为象函数的代数方程：

$$p^2f(p)-pF(0)-F'(0)=-\beta[pf(p)-F(0)]+\frac{F_0}{p+\gamma}$$

解出
$$f(p)=\frac{F_0}{p(p+\beta)(p+\gamma)}$$

把 $f(p)$ 写成
$$f(p)=F_0\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p+\beta}+\frac{C}{p+\gamma}\right)$$

$$A(p+\beta)(p+\gamma)+Bp(p+\gamma)+Cp(p+\beta)=1$$

比较等号两边 p 的各次幂的系数，令其分别相等，

$$A+B+C=0$$

$$A(\beta+\gamma)+B\gamma+C\beta=0$$

$$A\beta\gamma=1$$

解出
$$A=\frac{1}{\beta\gamma},B=\frac{1}{\beta(\beta-\gamma)},C=-\frac{1}{\gamma(\beta-\gamma)}$$

$$f(p) = F_0\left[\frac{1}{\beta\gamma}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)}\cdot\frac{1}{p+\beta} - \frac{1}{\gamma(\beta-\gamma)}\cdot\frac{1}{p+\gamma}\right]$$

变换为原函数

$$x(t) = F_0\left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\gamma)} - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma(\beta-\gamma)}\right]$$

2.1.62　用积分因子法求解上题.

解　用初始条件,先积分下式:

$$\ddot{x} = -\beta\dot{x} + F_0 e^{-\gamma t}$$

得

$$\dot{x} = -\beta x - \frac{F_0}{\gamma}(e^{-\gamma t} - 1)$$

$$dx + \left[\beta x + \frac{F_0}{\gamma}(e^{-\gamma t} - 1)\right]dt = 0$$

设有积分因子 $f(t)$.

$$\frac{df}{dt} = \beta f,\quad f = e^{\beta t}$$

$$e^{\beta t}dx + e^{\beta t}\beta x dt + \frac{F_0}{\gamma}(e^{(\beta-\gamma)t} - e^{\beta t})dt = 0$$

$$xe^{\beta t} + \frac{F_0}{\gamma}\int_0^t [e^{(\beta-\gamma)t} - e^{-\beta t}]dt = 0$$

(写上式时已考虑初始条件:$t=0$ 时,$x=0$).

$$xe^{\beta t} + \frac{F_0}{\gamma}\left[\frac{1}{\beta-\gamma}e^{(\beta-\gamma)t} - \frac{1}{\beta-\gamma} - \frac{1}{\beta}e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta}\right] = 0$$

解出 x,整理后可得到与上题相同的结果.

2.1.63　质量为 m 的质点在图 2.43 所示的力作用下做直线运动.

(1) 求 $F(t)$的拉普拉斯变换的象函数 $f(p)$;

(2) 用拉普拉斯变换法求此运动的通解;

(3) 直接用逐次积分的方法求通解.

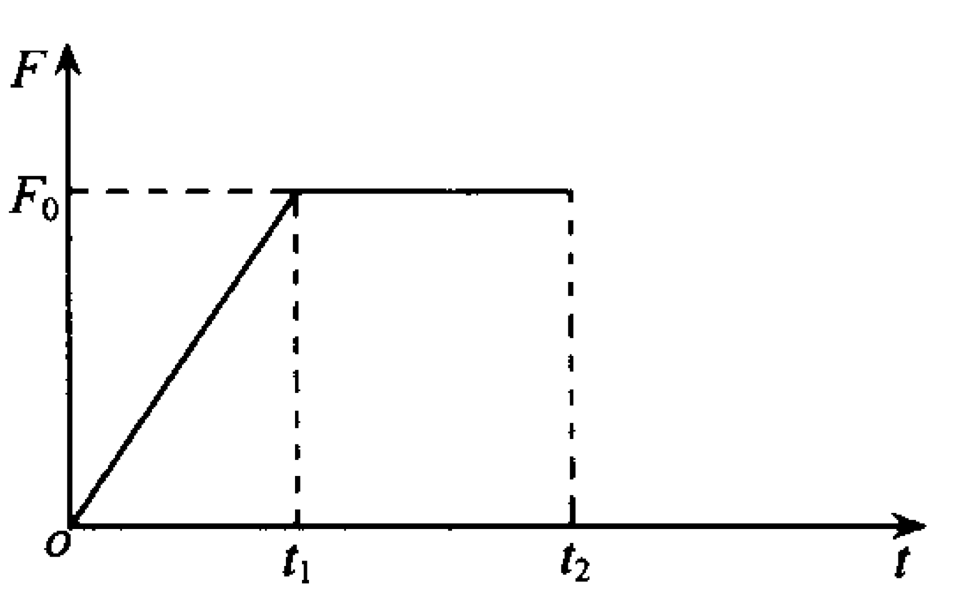


图 2.43

提示:$\frac{1}{p^\mu}e^{-kp}(\mu>0)$的原函数为

$$\frac{(t-k)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}u(t-k)$$

其中

$$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t<k \\ 1 & t\geqslant k \end{cases}$$

$$\Gamma(\mu) = (\mu-1)!$$

解　(1)

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{t_1}t & 0\leqslant t\leqslant t_1 \\ F_0 & t_1\leqslant t < t_2 \\ 0 & t\geqslant t_2 \end{cases}$$

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt$$

$$= \int_0^{t_1} e^{-pt} \frac{F_0}{t_1} t \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} F_0 e^{-pt} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{F_0}{t_1}(1 - e^{-pt_1}) \frac{1}{p^2} - F_0 e^{-pt_2} \frac{1}{p}$$

（2）$m\ddot{x} = F(t)$

为区别于力的象函数，$x(t)$的象函数改写为 $f^*(p)$，

$$m[p^2 f^*(p) - px(0) - \dot{x}(0)] = \frac{F_0}{t_1}\frac{1}{p^2} - \frac{F_0}{t_1}\frac{e^{-pt_1}}{p^2} - F_0 \frac{e^{-pt_2}}{p}$$

$$f^*(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{\dot{x}(0)}{p^2} + \frac{F_0}{mt_1}\frac{1}{p^4} - \frac{F_0}{mt_1}\frac{e^{-pt_1}}{p^4} - \frac{F_0}{m}\frac{e^{-pt_2}}{p^3}$$

查拉普拉斯变换表，

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{F_0}{6mt_1}t^3 - \frac{F_0}{6mt_1}(t - t_1)^3 u(t - t_1) - \frac{F_0}{2m}(t - t_2)^2 u(t - t_2)$$

其中

$$u(t - t_1) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ 1 & t \geqslant t_1 \end{cases}$$

即

$$x(t) = \begin{cases} x(0) + \dot{x}(0)t + \dfrac{F_0}{6mt_1}t & 0 \leqslant t < t_1 \\ x(0) + \dfrac{F_0}{6m}t_1^3 + \dot{x}(0)t + \dfrac{F_0}{2m}t(t - t_1) & t_1 \leqslant t < t_2 \\ x(0) + \dfrac{F_0}{6m}(t_1^2 - 3t_2^2) + \dot{x}(0)t + \dfrac{F_0}{2m}(2t_2 - t_1)t & t \geqslant t_2 \end{cases}$$

（3）

$$m\ddot{x} = \begin{cases} \dfrac{F_0}{t_1}t & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ F_0 & t_1 \leqslant t < t_2 \\ 0 & t \geqslant t_2 \end{cases}$$

$t=0$ 时，$x = x(0)$，$\dot{x} = \dot{x}(0)$.

在 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 期间：

$$m\ddot{x} = \frac{F_0}{t_1}t$$

$$\dot{x} = \dot{x}(0) + \frac{F_0}{2mt_1}t^2$$

$$x = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{F_0}{6mt_1}t^3$$

在 $t_1 \leqslant t < t_2$ 期间：

$$m\ddot{x} = F_0$$

$t = t_1$ 时，$x = x(0) + \dot{x}(0)t_1 + \dfrac{F_0}{6m}t_1^2$，$\dot{x} = \dot{x}(0) + \dfrac{F_0}{2m}t_1$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \frac{F_0}{2m}t_1 + \frac{F_0}{m}(t - t_1)$$

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t_1 + \frac{F_0}{6m}t_1^2 + \dot{x}(0)(t - t_1) + \frac{F_0}{2m}t_1(t - t_1) + \frac{F_0}{2m}(t - t_1)^2$$

$$= x(0) + \frac{F_0}{6m}t_1^2 + \dot{x}(0)t + \frac{F_0}{2m}t(t - t_1)$$

在 $t \geqslant t_2$ 期间：

$$m\ddot{x} = 0$$

$t = t_2$ 时，　$x = x(0) + \frac{F_0}{6m}t_1^2 + \dot{x}(0)t_2 + \frac{F_0}{2m}t_2(t_2 - t_1)\dot{x} = \dot{x}(0) + \frac{F_0}{2m}t_1 + \frac{F_0}{m}(t_2 - t_1)$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \frac{F_0}{2m}t_1 + \frac{F_0}{m}(t_2 - t_1)$$

$$x(t) = x(0) + \frac{F_0}{6m}t_1^2 + \dot{x}(0)t_2 + \frac{F_0}{2m}t_2(t_2 - t_1)$$

$$+ \dot{x}(0)(t - t_2) + \frac{F_0}{2m}t_1(t - t_2) + \frac{F_0}{m}(t_2 - t_1)(t - t_2)$$

$$= x(0) + \frac{F_0}{6m}t_1^2 - \frac{F_0}{2m}t_2^2 + \dot{x}(0)t + \frac{F_0}{2m}(2t_2 - t_1)t$$

2.1.64　质量为 m 的质点在恢复力 $-kx$ 和阻力 $-\gamma\dot{x}$ 以及周期性驱动力（每个周期）

$$F(t) = \begin{cases} A\sin\omega t & 0 < t \leqslant \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega} < t \leqslant \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

的共同作用下做受迫振动. 用傅里叶级数求解稳态时的运动学方程（要求写出级数的前四项）.

解　运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F(t) \tag{1}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

其中 $\beta = \frac{\gamma}{2m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, f(t) = \frac{F(t)}{m}$.

将 $f(t)$ 展成傅里叶级数.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t')\cos n\omega t' \mathrm{d}t'$$

$$= \frac{\omega}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0} 0 \cdot \cos n\omega t' \mathrm{d}t' + \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{A}{m}\sin\omega t' \cos n\omega t' \mathrm{d}t'\right]$$

$$= \frac{A\omega}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\omega t' \cos n\omega t' \mathrm{d}t'$$

用 $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin(A-B)$，可得

$$a_n = \frac{A}{m\pi}\frac{[(-1)^{n+1} - 1]}{(n+1)(n-1)} \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

前几项为 $a_0=\dfrac{2A}{m\pi}, a_1=0, a_2=-\dfrac{2A}{3m\pi}, a_3=0, a_4=-\dfrac{2A}{15m\pi}$.

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t')\sin n\omega t'\mathrm{d}t' = \frac{A\omega}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t'\sin n\omega t'\mathrm{d}t'$$

用 $\sin A\sin B=\dfrac{1}{2}\cos(A-B)-\dfrac{1}{2}\cos(A+B)$,可得

$$b_n=0 \qquad n\neq 1$$

$$b_1=\frac{A\omega}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t'\sin\omega t'\mathrm{d}t'=\frac{A}{2m}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \\ &= \frac{A}{m\pi}+\frac{A}{2m}\sin\omega t-\frac{2A}{m\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2\omega t+\frac{1}{15}\cos 4\omega t+\cdots\right) \end{aligned}$$

第一项的稳态解满足方程

$$\ddot{x}_1+2\beta\dot{x}_1+\omega_0^2x_1=\frac{A}{m\pi}$$

稳态解为

$$x_1=\frac{A}{m\pi\omega_0^2}$$

第二项的稳态解满足方程

$$\ddot{x}_2+2\beta\dot{x}_2+\omega_0^2x_2=\frac{A}{2m}\sin\omega t$$

稳态解为

$$x_2=A_1\sin(\omega t-\varphi_1)$$

代入方程,可定出

$$A_1=\frac{A/2m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\varphi_1=\arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

第三项的稳态解满足方程

$$\ddot{x}_3+2\beta\dot{x}_3+\omega_0^2x_3=-\frac{2A}{3m\pi}\cos 2\omega t$$

稳态解为

$$x_3=A_2\cos(2\omega t-\varphi_2)$$

其中

$$A_2=-\frac{2A}{3m\pi\sqrt{(\omega_0^2-4\omega^2)^2+16\beta^2\omega^2}}$$

$$\varphi_2=\arctan\left(\frac{4\beta\omega}{\omega_0^2-4\omega^2}\right)$$

第四项的稳态解满足方程

$$\ddot{x}_4+2\beta\dot{x}_4+\omega_0^2x_4=-\frac{2A}{15m\pi}\cos 4\omega t$$

稳态解为

$$x_4 = -\frac{2A}{15m\pi\sqrt{(\omega_0^2 - 16\omega^2)^2 + 64\beta^2\omega^2}}$$

$$\varphi_4 = \arctan\left(\frac{8\beta\omega}{\omega_0^2 - 16\omega^2}\right)$$

方程(1)的稳态解为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ &= \frac{A}{m\pi\omega_0^2} + \frac{A}{m}\frac{1}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi_1) \\ &\quad - \frac{2}{3\pi}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\beta^2\omega^2}}\cos(2\omega t - \varphi_2) \\ &\quad - \frac{2}{15\pi}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - 16\omega^2)^2 + 64\beta^2\omega^2}}\cos(4\omega t - \varphi_4) \end{aligned}$$

其中
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \beta = \frac{\gamma}{2m}, \varphi_n = \arctan\left(\frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}\right)$$

2.1.65　考虑一阻尼振子，其运动微分方程为

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x}\,|\,\dot{x}\,| + \omega_0^2 x = 0$$

λ 为小的正值常量，初始条件为 $x(0)=a, \dot{x}(0)=0$. 用微扰法证明第一个后半周位移与前半周位移之比(精确到 λ 的一次方)为 $1-\frac{4}{3}\lambda a$.

证明　前半周，$\dot{x}<0, |\dot{x}|=-\dot{x}$

运动微分方程为

$$\ddot{x} + \omega_0 x = -\lambda\dot{x}\,|\,\dot{x}\,| = \lambda\dot{x}^2$$

用微扰法，精确到 λ 的一次方，令 $x=x_0+\lambda x_1$，代入上式，

$$\ddot{x}_0 + \lambda\ddot{x}_1 + \omega_0^2(x_0 + \lambda x_1) = \lambda(\dot{x}_0 + \lambda x_1)^2$$

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \lambda(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \dot{x}_0^2) = 0$$

(写上式时，只保留 λ 的一次方项).

由 λ 的各次幂的系数分别为零，得

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \dot{x}_0^2 \tag{2}$$

式(1)满足初始条件：$t=0$ 时，$x_0=a, \dot{x}_0=0$ 的解为

$$x_0 = a\cos\omega_0 t \tag{3}$$

将零级解式(3)代入式(2)，

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = a^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}a^2\omega_0^2(1 - \cos 2\omega_0 t) \tag{4}$$

式(4)是一个非齐次线性微分方程，不难找出它的一个特解 $x_1^* = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2\cos 2\omega_0 t$

式(4)的通解为

$$x_1 = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2\cos2\omega_0 t$$

由初始条件：$t=0$ 时，$x_1=0, \dot{x}_1=0$，可得

$$A\cos\varphi + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = 0$$

$$-A\omega_0\sin\varphi = 0$$

定出 $\varphi=0, A=-\frac{2}{3}a^2$

$$x_1 = -\frac{2}{3}a^2\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2\cos2\omega_0 t$$

$$x = x_0 + \lambda x_1 = \left(1 - \frac{2}{3}\lambda a\right)a\cos\omega_0 t + \frac{1}{6}\lambda a^2(3 + \cos2\omega_0 t)$$

这个解只适用于$\dot{x}\leqslant 0$ 的情况，即前半周时(从$\dot{x}=0$ 开始，接着$\dot{x}<0$ 到$\dot{x}=0$ 为止)适用.

$$\dot{x} = -\left(1 - \frac{2}{3}\lambda a\right)a\omega_0\sin\omega_0 t - \frac{1}{3}\lambda a^2\omega_0\sin2\omega_0 t$$

由$\dot{x}=0$ 得 $t=0$ 及 $t=\frac{\pi}{\omega_0}$，故前半周位移为

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) - x(0) = \left(-2 + \frac{4}{3}\lambda a\right)a$$

再计算后半周的运动学方程，$\because \dot{x}>0, |\dot{x}|=\dot{x}$，运动微分方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\lambda\dot{x}^2$$

为方便计，后半周也从 $t=0$ 开始计时. 初始条件为：$t=0$ 时，$x=\left(-1+\frac{4}{3}\lambda a\right)a, \dot{x}=0$.

$$x = x_0 + \lambda x_1$$

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

初始条件为：$t=0$ 时，$x_0=\left(-1+\frac{4}{3}\lambda a\right)a, \dot{x}_0=0$，解出

$$x_0 = \left(-1 + \frac{4}{3}\lambda a\right)a\cos\omega_0 t$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\dot{x}_0^2 = -\left(-1 + \frac{4}{3}\lambda a\right)^2 a^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t$$

$$\approx -\frac{1}{2}a^2\omega_0^2(1 - \cos2\omega_0 t)$$

通解为 $$x_1 = B\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2\cos2\omega_0 t$$

满足初始条件：$t=0$ 时，$x_1=0, \dot{x}_1=0$ 的解为

$$x_1 = \frac{2}{3}a^2\cos\omega_0 t - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2\cos2\omega_0 t$$

后半周的运动学方程为

$$x = x_0 + \lambda x_1 = (-1 + 2\lambda a)a\cos\omega_0 t - \frac{1}{6}\lambda a^2(3 + \cos2\omega_0 t)$$

$$\dot{x}=-(-1+2\lambda a)a\omega_0\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\lambda a^2\omega_0\sin 2\omega_0 t$$

$\dot{x}=0$ 时，$t=0$ 及 $t=\dfrac{\pi}{\omega_0}$.

后半周位移为

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)-x(0)=(2-4\lambda a)a$$

$$|\text{第一个后半周位移} / \text{第一个前半周位移}|=\left|\frac{(2-4\lambda a)a}{\left(-2+\frac{4}{3}\lambda a\right)a}\right|$$

$$=\frac{2-4\lambda a}{2\left(1-\frac{2}{3}\lambda a\right)}\approx(1-2\lambda a)\left(1+\frac{2}{3}\lambda a\right)\approx 1-\frac{4}{3}\lambda a$$

2.1.66　一物体在北纬 40°的地球表面上方高 h 处从静止降落，若 $h=100\text{m}$，计算由于科里奥利力引起的着地点的横向位移.

解　按题意，物体除受到地球的引力以外，只受到科里奥利力作用.

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{g}-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}\tag{1}$$

今取向上为 z 轴，向南为 x 轴，则向东为 y 轴. 在北半球，纬度 λ 处.

$$\boldsymbol{\omega}=\omega(-\cos\lambda\boldsymbol{i}+\sin\lambda\boldsymbol{k})$$

(1)式的分量方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}=2\omega\dot{y}\sin\lambda\\ \ddot{y}=-2\omega\dot{x}\sin\lambda-2\omega\dot{z}\cos\lambda\\ \ddot{z}=-g+2\omega\dot{y}\cos\lambda\end{cases}\tag{2}$$

今 ω 是个较小的量，$\dot{x}$、$\dot{y}$与$\dot{z}$相比也是小量，式(2)可近似为

$$\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=-2\omega\dot{z}\cos\lambda\\ \ddot{z}=-g\end{cases}\tag{3}$$

初始条件：$t=0$ 时，$x=y=0, z=h; \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$.

$$\dot{z}=-gt, z=h-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\ddot{y}=2\omega gt\cos\lambda$$

$$\dot{y}=\omega gt^2\cos\lambda, y=\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda$$

$$\dot{x}=0,\qquad x=0$$

着地时，$z=0, t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

$$y=\frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos\lambda=\frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\cos\lambda$$

$$=\frac{1}{3}\times 7.27\times 10^{-5}\sqrt{\frac{8\times 100^3}{9.8}}\cos 40°=0.017\text{m}$$

物体着地点向东横向偏移 0.017m.

2.1.67 由于地球的自转而引起的下列偏离的大小和方向是什么？

(1) 从北纬 $\theta°$、高 L 的塔顶到底部悬挂的铅垂线下的摆锤；

(2) 从顶部降落的物体的着地点.

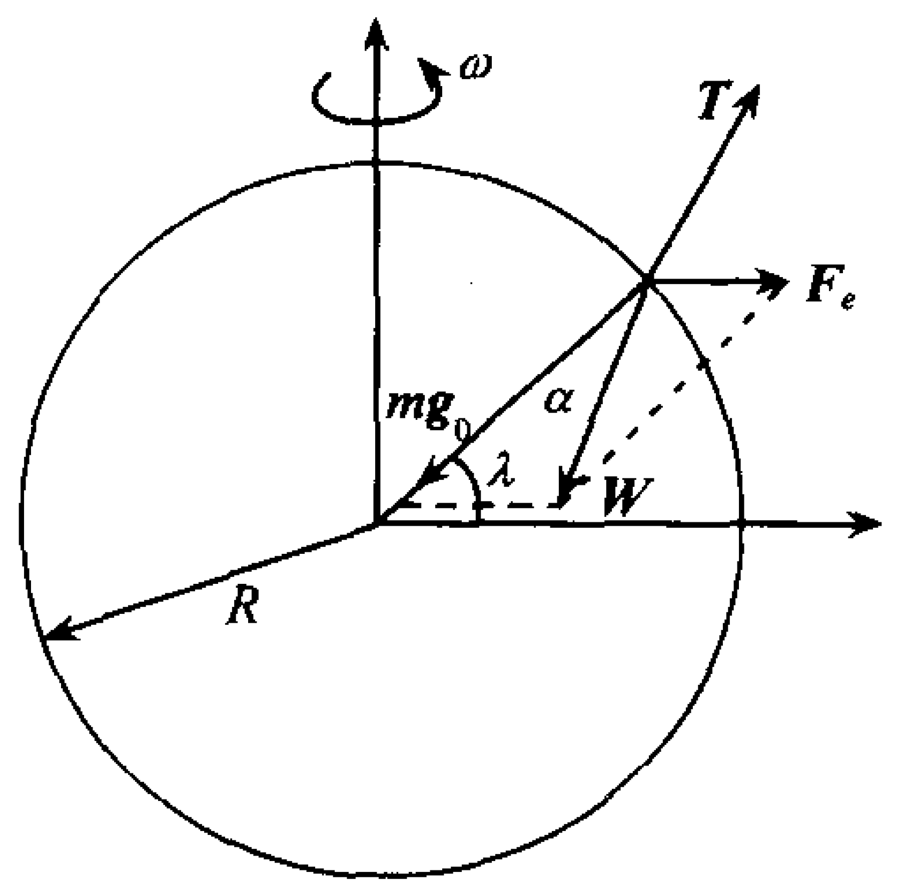


图 2.44

解 (1) 由于地球的自转，摆锤处于平衡时受到三个力作用，它们是绳子张力 $\boldsymbol{T}$；地球的万有引力 $m\boldsymbol{g}_0$ 和惯性离轴力 $\boldsymbol{F}_e$ 三个力平衡.

$$m\boldsymbol{g}_0+\boldsymbol{T}+\boldsymbol{F}_e=0$$

$m\boldsymbol{g}_0$ 是重力，$\boldsymbol{T}$ 的反作用力 $\boldsymbol{W}$ 是表观重力，可表为 $m\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{g}$ 为表观重力加速度. 由于自转的影响，铅垂线将向南偏离 $\alpha°$，$F_e=m\omega^2R\cos\lambda$，$R$ 为地球半径.

由余弦定理.

$$\begin{aligned}mg&=(m^2g_0^2+F_e^2-2mg_0F_e\cos\lambda)^{1/2}\\&=mg_0\left[1+\left(\frac{F_e}{mg_0}\right)^2-2\frac{F_e}{mg_0}\cos\lambda\right]^{1/2}\end{aligned}$$

略去$\left(\dfrac{F_e}{mg_0}\right)^2$项，代入 $F_e=m\omega^2R\cos\lambda$，可得

$$mg\approx mg_0\left(1-\frac{R\omega^2}{g_0}\cos^2\lambda\right)$$

$$g\approx g_0-R\omega^2\cos^2\lambda$$

由正弦定理，$\dfrac{mg}{\sin\lambda}=\dfrac{F_e}{\sin\alpha}$

$$\sin\alpha=\frac{F_e}{mg}\sin\lambda=\frac{\omega^2R\sin2\lambda}{2g}=\frac{\omega^2R\sin2\lambda}{2(g_0-R\omega^2\cos^2\lambda)}$$

故摆锤将向南偏离的距离为

$$L\alpha\approx L\sin\alpha=\frac{L\omega^2R\sin2\lambda}{2(g_0-R\omega^2\cos^2\lambda)}$$

(2) 取向上为 z 轴，向南为 x 轴，向东为 y 轴. 考虑自由落体受到地球引力、惯性离轴力和科里奥利力、列出在地球表面附近的运动微分方程. 在 $x=y=0$、$z=L$ 自由下落的物体，落地点不在(0,0,0)，作一级近似：

$$x^{(1)}=0,y^{(1)}=\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda,z^{(1)}=L-\frac{1}{2}gt^2$$

作二级近似：

$$x^{(2)}=\left(\frac{1}{8}gt^2+\frac{1}{2}h\right)\omega^2t^2\sin\lambda\cos\lambda$$

$$y^{(2)}=\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda$$

$$z^{(2)}=L-\frac{1}{2}gt^2+\left(\frac{1}{8}gt^2+\frac{1}{2}h\right)\omega^2t^2\cos^2\lambda$$

作一级近似时，落地点为$(0,y_0^{(1)},0)$；作二级近似时，落地点为$(x_0^{(2)},y_0^{(2)},0)$，$y^{(1)}$与$y^{(2)}$虽有相同的式子，但由于落地时间不同，也有所不同. 我们考虑一级近似，落地时$t=\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$，落地点东偏距离为$y_0^{(1)}=\dfrac{1}{3}\omega\sqrt{\dfrac{8L^3}{g}}\cos\lambda$.

2.1.68　S系是坐标原点固定在地球中心，z轴指向北随地心做平动的惯性参考系，S'系与S系相似放置(原点与z轴完全重合)但是随地球自转的参考系.

(1) 写出任意矢量对时间的微商，从S'系到S系的非相对论变换方程，利用这变换方程推导出在S'系中运动的物体受到的科里奥利力的表达式；

(2) 求出在北半球水平向东和垂直向上运动的物体受到的科里奥利力.

解　(1) $Oxyz$、$Ox'y'z'$分别固连于S系和S'系，S'系中任意矢量$\boldsymbol{A}$可表为

$$\boldsymbol{A}=Ax'\boldsymbol{i}'+Ay'\boldsymbol{j}'+Az'\boldsymbol{k}'$$

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$表示在$S$系中矢量$\boldsymbol{A}$对时间的微商，为$\boldsymbol{A}$对时间的绝对微商，$\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$表示在$S'$系中矢量$\boldsymbol{A}$对时间的微商，为$\boldsymbol{A}$对时间的相对微商，在$S'$系中$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$是不随时间变化的，在$S$系中$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$是随时间变化的，$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$，故$\boldsymbol{k}'$在$S$系中不随时间变化.

S'系对S系做纯转动，角速度$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}'$，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'=\omega\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{i}'=\omega\boldsymbol{j}',\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}'=-\omega\boldsymbol{i}',\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\mathrm{d}A_{x'}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}A_{y'}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}A_{z'}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'\right)\\&\quad+\left(A_{x'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}+A_{y'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}+A_{z'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times(A_{x'}\boldsymbol{i}'+A_{y'}\boldsymbol{j}'+A_{z'}\boldsymbol{k}')=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}\end{aligned}\tag{1}$$

对于这里S'系坐标系的取法.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\omega A_{x'}\boldsymbol{j}'-\omega A_{y'}\boldsymbol{i}'$$

用式(1)，求$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$及$\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\tilde{\mathrm{d}}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)\\&=\frac{\tilde{\mathrm{d}}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+2\,\boldsymbol{\omega}\times\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

推导中用了$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=0$.

对惯性参考系，由牛顿运动定律有

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是真实力，

$$m\frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{\tilde{d}\,\boldsymbol{r}}{dt}+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{F}$$

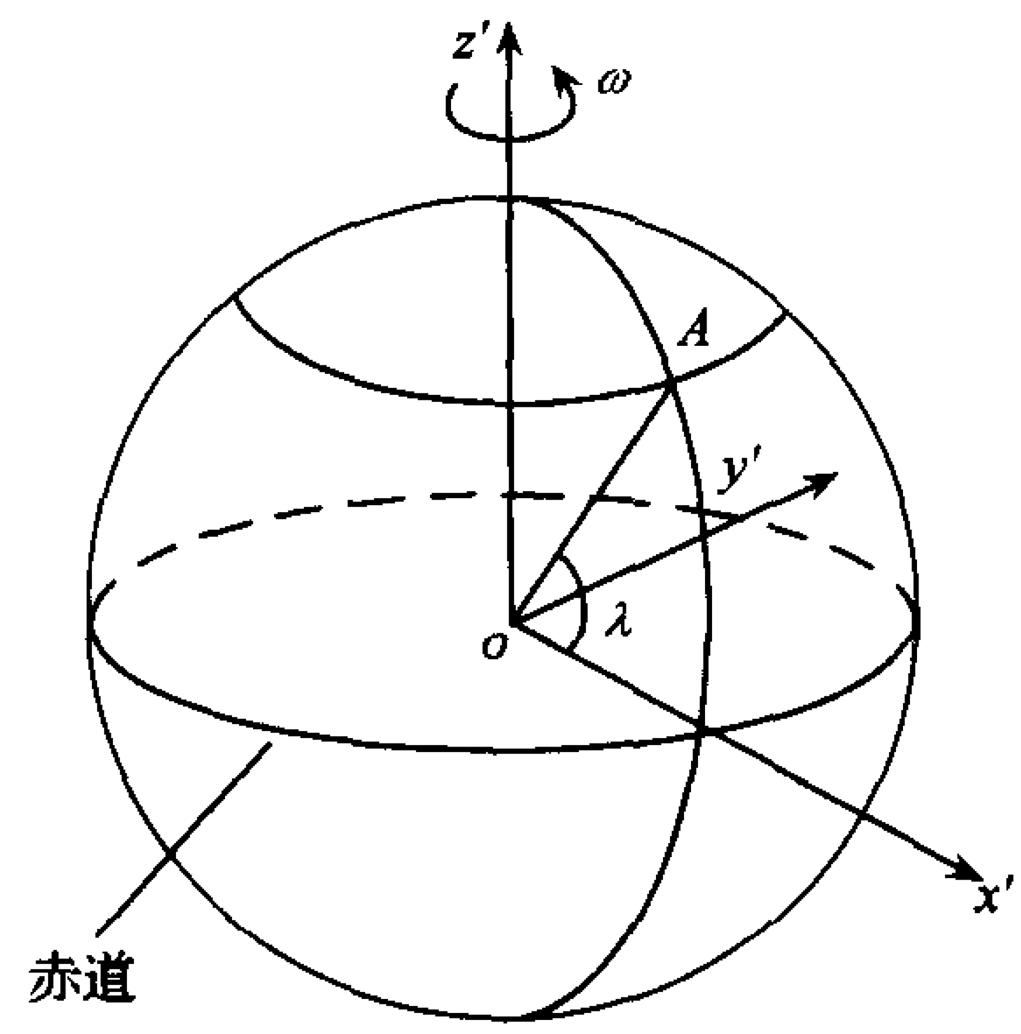


图 2.45

在 S' 系中，$\frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{a}'$，$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}'$，分别为加速度、速度.

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

其中 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ 为科里奥利力，即

$$\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$$

(2) 在北半球 A 处，取固连于地球的 $ox'y'z'$ 坐标如图 2.45 所示，x' 轴在赤道面上通过 A 所在的经线，y' 轴在赤道面上与 A 点所在的纬线的切线平行.

在北半球，沿水平向东运动时，$\boldsymbol{v}'=v'\boldsymbol{j}'$

$$\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'=-2m\omega\boldsymbol{k}'\times v'\boldsymbol{j}'=2m\omega v'\boldsymbol{i}'$$

在北纬 λ 处，物体垂直向上运动时，

$$\boldsymbol{v}'=v'(\cos\lambda\boldsymbol{i}'+\sin\lambda\boldsymbol{k}')$$

$$\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'=-2m\omega\boldsymbol{k}'\times v'(\cos\lambda\boldsymbol{i}'+\sin\lambda\boldsymbol{k}')$$
$$=-2m\omega v'\cos\lambda\boldsymbol{j}'$$

2.1.69 证明：一条宽度为 b、河水以速率 v 向北流的运河，在北纬 λ 处，东岸的河水水面比西岸高 $\frac{2bv\omega\sin\lambda}{g}$，其中 ω 是地球的自转角速度，g 为当地的表观重力加速度.

证明 方法一：在河面上取一质元，无加速度，表观重力、科里奥利力和周围河水的作用力的合力应为零，周围河水的作用力垂直于水面，故科里奥利力与表观重力的合力与水面垂直. 取竖直向上为 z 轴，向南为 x 轴，向东为 y 轴，如图 2.46 所示，由图可见，东岸水面比西岸水面高 h.

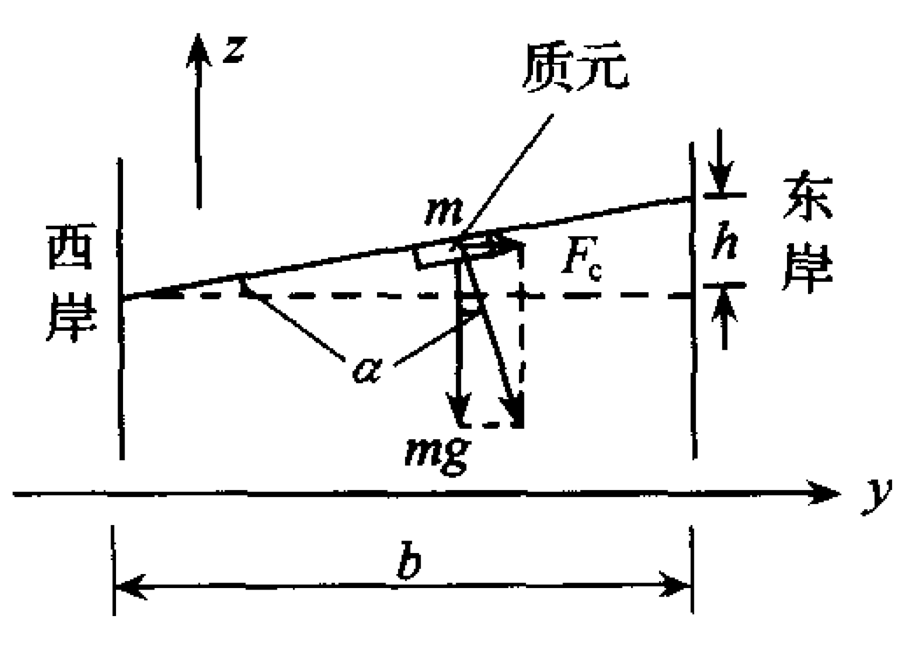


图 2.46

$$\frac{h}{b}=\tan\alpha=\frac{F_c}{mg}$$

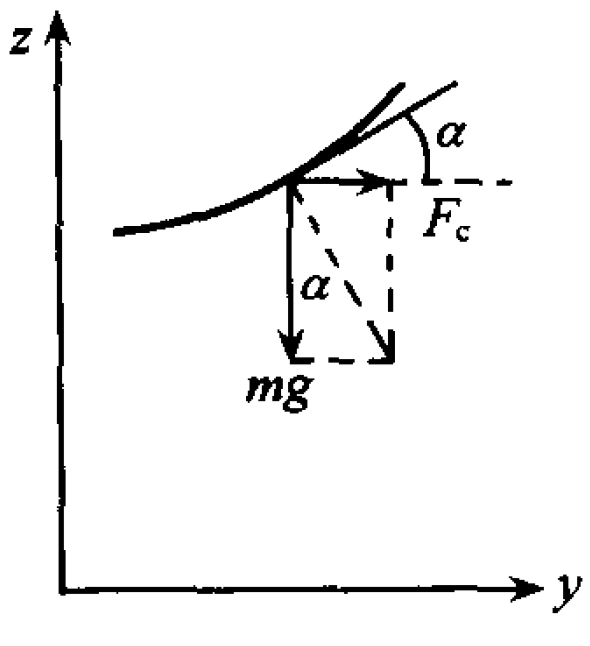


图 2.47

其中 m 是质元质量，F_c 是质元受到的科里奥利力.

$$\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-2m(-\omega\cos\lambda\boldsymbol{i}+\omega\sin\lambda\boldsymbol{k})\times(-v\boldsymbol{i})$$
$$=2m\omega v\sin\lambda\boldsymbol{j}$$

科氏力向东，与图所画一致.

$$h=\frac{b}{mg}F_c=\frac{2b\omega v\sin\lambda}{g}$$

方法二：介绍一种更严格的解法. 取坐标原点在河流中线

处，y 轴仍向东，z 轴仍向上.

$$F_y = F_c = 2m\omega v\sin\lambda$$

$$\frac{dz}{dy} = \tan\alpha = \frac{F_c}{mg} = \frac{2\omega v\sin\lambda}{g}$$

$$dz = \frac{2\omega v\sin\lambda}{g}dy$$

$$h = z\left(\frac{b}{2}\right) - z\left(-\frac{b}{2}\right) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{2\omega v\sin\lambda}{g}dy$$

$$= \frac{2b\omega v\sin\lambda}{g}$$

说明：对南半球，如 λ 取负值，上式也能适用.

2.1.70　在北纬 λ 处，一个质量为 m 的质点垂直上抛，可达高度 h 处. 问它在何处返回地面？

解　用一级近似，运动微分方程为

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\lambda \tag{1}$$

$$\ddot{z} = -g \tag{2}$$

$$\dot{z} = v_0 - gt, z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$z=h$ 时，
$$\dot{z}=0, t=\frac{v_0}{g}, h=\frac{v_0^2}{2g}$$

所以
$$v_0=\sqrt{2gh},\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

将 $\dot{z}=v_0-gt=\sqrt{2gh}-gt$ 代入(1)式，

$$\ddot{y} = 2\omega gt\cos\lambda - 2\omega\sqrt{2gh}\cos\lambda \tag{3}$$

逐次积分，用初条件：$t=0$ 时，$y=0, \dot{y}=0$，得

$$\dot{y} = \omega gt^2\cos\lambda - 2\omega\sqrt{2gh}t\cos\lambda$$

$$y = \frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda - \omega\sqrt{2gh}t^2\cos\lambda \tag{4}$$

微分方程式(3)对质点向上向下的运动均适用，故其解也适用于从抛出到落地的全过程. 微分方程式(2)也适用于全过程. 上升阶段历时$\sqrt{\frac{2h}{g}}$，下降阶段又历时$\sqrt{\frac{2h}{g}}$，全过程历时 $2\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

落地时，$t=2\sqrt{\frac{2h}{g}}$，

$$y= \frac{1}{3}\omega g\left(2\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3\cos\lambda - \omega\sqrt{2gh}\left(2\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2\cos\lambda$$

$$= -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\omega h\cos\lambda.$$

我们取坐标，z 轴向上，y 轴向东. 上述结果表明，在原点上抛，落地时在点$(0,y,0)$，$y=-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\omega h\cos\lambda$，故在抛出点西边$\frac{8\sqrt{2}\,\omega h^{3/2}\cos\lambda}{3g^{1/2}}$.

2.1.71 一个质点在地球北纬 λ 处的一完全光滑的水平面(它与那个纬度的铅垂线垂直)上滑动. 选 z 轴铅直向上，x 轴向南，y 轴向东. 若开始时质点位于 $x=0,y=a,\dot{x}=u,\dot{y}=0$.

(1) 证明：若略去运动微分方程中的 ω^2 项，则坐在平面上的观察者看到的轨道方程为

$$x^2+\left(y-a+\frac{u}{2\omega\sin\lambda}\right)^2=\left(\frac{u}{2\omega\sin\lambda}\right)^2$$

(2) 说明略去 ω^2 项是不合理的.

解

$$\boldsymbol{\omega}=\omega(-\cos\lambda\boldsymbol{i}+\sin\lambda\boldsymbol{k})$$

$$m\boldsymbol{a}=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{v}=\dot{x}\,\boldsymbol{i}+\dot{y}\,\boldsymbol{j}$$

$$m\ddot{x}=m\omega^2x\sin^2\lambda+2m\omega\,\dot{y}\sin\lambda$$

$$m\ddot{y}=m\omega^2y-2m\omega\,\dot{x}\sin\lambda$$

(1) 若略去 ω^2 项，运动微分方程为

$$\ddot{x}=2\omega\,\dot{y}\sin\lambda \tag{1}$$

$$\ddot{y}=-2\omega\,\dot{x}\sin\lambda \tag{2}$$

用初始条件：$t=0$ 时，$x=0,\dot{y}=0$，

$$\dot{y}=-2\omega x\sin\lambda \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)，

$$\ddot{x}=-4\omega^2x\sin^2\lambda$$

$$x=A\cos(2\omega t\sin\lambda)+B\sin(2\omega t\sin\lambda)$$

$$\dot{x}=-2\omega A\sin\lambda\sin(2\omega t\sin\lambda)+2\omega B\sin\lambda\cos(2\omega t\sin\lambda)$$

用初始条件：$t=0$ 时，$x=0,\dot{x}=u$，定出 $A=0,B=\frac{u}{2\omega\sin\lambda}$，

所以

$$x=\frac{u}{2\omega\sin\lambda}\sin(2\omega t\sin\lambda) \tag{4}$$

将式(4)代入式(3)，

$$\dot{y}=-u\sin(2\omega t\sin\lambda)$$

对上式积分，并用初条件：$t=0$ 时，$y=a$，

$$y=a-\frac{u}{2\omega\sin\lambda}+\frac{u}{2\omega\sin\lambda}\cos(2\omega t\sin\lambda) \tag{5}$$

将(4)、(5)两式消去 t 得

$$x^2+\left(y-a+\frac{u}{2\omega\sin\lambda}\right)^2=\left(\frac{u}{2\omega\sin\lambda}\right)^2$$

(2) 将上面得到的 $x(t)$、$y(t)$、$\dot{x}(t)$、$\dot{y}(t)$代入原微分方程中各项，比较 $\ddot{x}$ 式中的两项和 $\ddot{y}$ 式中的两项.

比较 $\omega^2 x\sin^2\lambda$ 与 $2\omega\,\dot{y}\sin\lambda$：

$$\omega^2 x\sin^2\lambda = \frac{1}{2}\omega u\sin\lambda\sin(2\omega t\sin\lambda)$$

$$2\omega\,\dot{y}\sin\lambda = -2\omega u\sin\lambda\sin(2\omega t\sin\lambda)$$

前者并不比后者小多少，而是同数量级的，不必再对 $\omega^2 y$ 与 $-2\omega\,\dot{x}\sin\lambda$ 作比较，已足以说明略去 ω^2 项是不合理的.

2.1.72　当从正上方俯视时，发现在海洋表面之下有一个相当分明的孤立层中有一海洋环流做逆时针旋转，旋转周期是 14 小时. 问此洋流是在什么纬度和哪个半球探测到的？

解　此题难于作精确计算. 作近似，略去微分方程中的 ω^2 项.

$$\ddot{x} = 2\omega\,\dot{y}\sin\lambda \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\,\dot{x}\sin\lambda \tag{2}$$

式(1)＋式(2)×i，并令 $w=x+\mathrm{i}y$，得

$$\ddot{w} = -2\omega\,i\dot{w}\sin\lambda$$

特征方程为　　$r^2 = -(2\omega i\sin\lambda)r$

$$r=0,\qquad r=-2\omega i\sin\lambda$$

$$w = A + B\mathrm{i} + C\mathrm{e}^{(-2\omega i\sin\lambda)t+\varphi}$$

$$x = \mathrm{Re}w = A + C\cos(2\omega t\sin\lambda - \varphi)$$

$$y = \mathrm{Im}w = B + C\sin(2\omega t\sin\lambda - \varphi)$$

可见，如略去微分方程中的 ω^2 项，不论初始条件如何，一定做圆周运动，角速度为 $2\omega|\sin\lambda|$. 另一方面，已测得周期 $T=14\times3600(\mathrm{s})$

$$2\omega|\sin\lambda| = \frac{2\pi}{T}$$

$$|\sin\lambda| = \frac{2\pi/(14\times3600)}{2\times2\pi/(24\times3600)} = \frac{6}{7} = 0.8571$$

$$|\lambda| = 59^\circ$$

沿 z 轴向负方向看，洋流做逆时针转动. 设某时刻洋流位于图 2.48 中 P 点，此时，$\dot{x}>0$，$\dot{y}>0$，$\ddot{x}<0$，$\ddot{y}>0$. 由式(1)，$\because\dot{y}>0$，$\ddot{x}<0$，必有 $\sin\lambda<0$；由式(2)，也能得出 $\sin\lambda<0$ 的结论. 可见，$\lambda=-59^\circ$

此洋流应是在南半球探测到的. 考虑到上题说明的略去 ω^2 项不合理. 59°显然是不精确的，洋流也不做圆周运动.

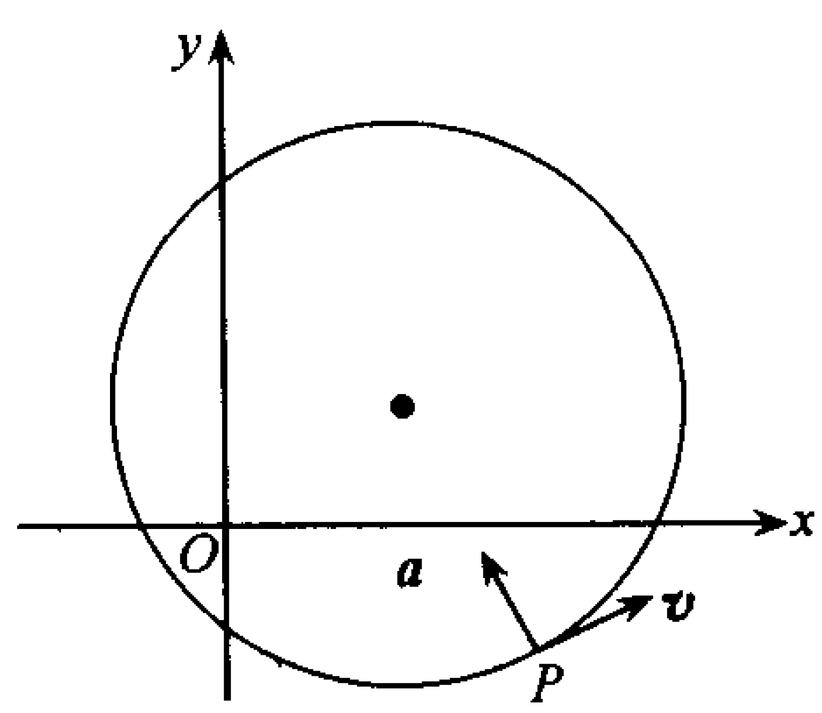


图 2.48

2.1.73　在北纬 λ 处，以初速 v_0 向东发射炮弹，发射角为 α. 若不计空气阻力，视重力为常值，且忽略其与铅垂线的偏差，即认为重力指向地心. 求炮弹的运动方程以及着地点的偏差.

解　取发射点为坐标原点，z 轴竖直向上，发射的水平方向沿 y 轴.

一级近似的运动微分方程为

$$\ddot{x}=0,\ddot{y}=-2\omega\dot{z}\cos\lambda,\ddot{z}=-g$$

初始条件:$t=0$ 时,$x=y=z=0,\dot{x}=0,\dot{y}=v_0\cos\alpha,\dot{z}=v_0\sin\alpha$

$$\dot{z}=-gt+v_0\sin\alpha$$

$$\ddot{y}=-2\omega(-gt+v_0\sin\alpha)\cos\lambda=(2\omega gt-2\omega v_0\sin\alpha)\cos\lambda$$

$$\dot{y}=v_0\cos\alpha+\omega gt^2\cos\lambda-2\omega v_0 t\sin\alpha\cos\lambda$$

二级近似,略去 ω^2 项,

$$\ddot{x}=2\omega\dot{y}\sin\lambda=2\omega v_0\cos\alpha\sin\lambda$$

$$\ddot{y}=-2\omega\dot{z}\cos\lambda=2\omega gt\cos\lambda-2\omega v_0\sin\alpha\cos\lambda$$

$$\ddot{z}=-g+2\omega\dot{y}\cos\lambda=-g+2\omega v_0\cos\alpha\cos\lambda$$

用初始条件积分上述各式:

$$\dot{x}=2\omega v_0 t\cos\alpha\sin\lambda$$

$$\dot{y}=v_0\cos\alpha+\omega gt^2\cos\lambda-2\omega v_0 t\sin\alpha\cos\lambda$$

$$\dot{z}=v_0\sin\alpha-gt+2\omega v_0 t\cos\alpha\cos\lambda$$

$$x=\omega v_0 t^2\cos\alpha\sin\lambda$$

$$y=v_0 t\cos\alpha+\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda-\omega v_0 t^2\sin\alpha\cos\lambda$$

$$z=v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2+\omega v_0 t^2\cos\alpha\cos\lambda$$

$z=0$ 时,除 $t=0$ 外,另一个 t_1 值满足

$$v_0\sin\alpha-\frac{1}{2}gt_1+\omega v_0 t_1\cos\alpha\cos\lambda=0$$

故　$$t_1=\frac{2v_0\sin\alpha}{g-2\omega v_0\cos\alpha\cos\lambda}\approx\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\left(1-\frac{2\omega v_0\cos\alpha\cos\lambda}{g}\right)$$

着地点的偏差 Δx、Δy 分别为

$$\Delta x=x(t_1)-0\approx\frac{4\omega v_0}{g^2}\sin^2\alpha\cos\alpha\sin\lambda$$

$$\Delta y=y(t_1)-v_0\cos\alpha\cdot\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

2.1.74　设有质量为 m 的质点在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(c-z)^2}{c^2}-1=0$$

的最低点做微振动,z 轴竖直向上.求其运动规律及约束力.又如 $a=b$,且椭球绕 z 轴以等角速 ω 转动,求质点在相对平衡状态时与椭球最低点的高度差.

解　用拉格朗日乘子法解此约束运动.

$$f=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}-1=0$$

$$m\ddot{x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2\lambda}{a^2}x \tag{1}$$

$$m\ddot{y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2\lambda}{b^2}y \tag{2}$$

$$m\ddot{z}=-mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=-mg+\frac{2\lambda}{c^2}(z-c)$$

因为是微振动，可认为 $z\approx 0$，$\ddot{z}\approx 0$，所以

$$0=-mg-\frac{2\lambda}{c},\quad \lambda=-\frac{1}{2}cmg$$

将 λ 代入式(1)、式(2)，

$$\ddot{x}=-\frac{cg}{a^2}x,\quad \ddot{y}=-\frac{cg}{b^2}y$$

$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{a^2}}t+\alpha_1\right)$$

$$y=B\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{b^2}}t+\alpha_2\right)$$

约束力 $\boldsymbol{N}$ 的 x、y、z 分量为

$$N_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{cmg}{a^2}x=-\frac{cmgA}{a^2}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{a^2}}t+\alpha_1\right)$$

$$N_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{cmg}{b^2}y=-\frac{cmgB}{b^2}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{b^2}}t+\alpha_2\right)$$

$$N_z=\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=mg$$

如 $a=b$，椭球绕 z 轴以等角速 ω 转动，设质点相对平衡位置在 $z=h$ 处.

取固连于椭球面的 x、z 坐标为参考系.

$$m\ddot{x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+m\omega^2x=\frac{2\lambda x}{a^2}+m\omega^2x=0$$

$$m\ddot{z}=-mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=-mg+\frac{2\lambda(h-c)}{c^2}=0$$

由前式得
$$\lambda=-\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

代入后式解出
$$h=c-\frac{c^2g}{a^2\omega^2}$$

2.1.75　一个质量为 m 的质点，在重力作用下在一个光滑的旋转抛物面的内表面上运动. 用柱坐标 ρ、φ、z 表示，抛物面的方程为 $\rho^2=az$（a 为常量），z 轴竖直向上. 开始质点于 $\rho=a$、$\varphi=0$、$z=a$ 处被抛射时，具有在水平方向的速率 v. 求质点运动过程中 z 的最大值和最小值.

解　用拉格朗日乘子法处理此约束运动.

$$f=\rho^2-az=0$$

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=\lambda\frac{\partial f}{\partial\rho}=2\lambda\rho \tag{1}$$

$$\frac{m}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})=\lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi}=0 \tag{2}$$

$$m\ddot{z}=-mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=-mg-\lambda a \tag{3}$$

式(2)积分,用初始条件:$t=0$ 时,$\rho=a,\rho\dot{\varphi}=v,\dot{\rho}=0$

$$\rho^2\dot{\varphi}=av \tag{4}$$

用式(4),将式(1)改写为

$$m\left(\ddot{\rho}-\frac{a^2v^2}{\rho^3}\right)=2\lambda\rho \tag{5}$$

由 $\rho^2=az,\dot{z}=\frac{2}{a}\rho\dot{\rho},\ddot{z}=\frac{2}{a}(\rho\ddot{\rho}+\dot{\rho}^2)$

式(3)改写为

$$\frac{2m}{a}(\rho\ddot{\rho}+\dot{\rho}^2)=-mg-\lambda a \tag{6}$$

式(5)$\times a+$式(6)$\times 2\rho$,可得

$$a\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho}+\frac{4\rho\dot{\rho}^2}{a}+2g\rho-\frac{a^3v^2}{\rho^3}=0$$

用 $\ddot{\rho}=\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}\rho}\dot{\rho}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}^2}{\mathrm{d}\rho}$,上式可改写为

$$\frac{a}{2}\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\mathrm{d}\dot{\rho}^2+\left(\frac{4\rho\dot{\rho}^2}{a}+2g\rho-\frac{a^3v^2}{\rho^3}\right)\mathrm{d}\rho=0$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{a}{2}\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\dot{\rho}^2}\left(\frac{4\rho\dot{\rho}^2}{a}\right)=\frac{4\rho}{a}$$

上式是恰当微分,积分得

$$\frac{a}{2}\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2+g\rho^2+\frac{a^3v^2}{2\rho^2}=c$$

由初始条件:$t=0$ 时,$\rho=a,\dot{\rho}=0$ 定 c 得

$$\frac{a}{2}\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2+g\rho^2+\frac{a^3v^2}{2\rho^2}=ga^2+\frac{1}{2}av^2$$

在 z 的最大值和最小值,$\dot{\rho}=0$,与它们相应的 ρ 满足的方程为

$$g\rho^2+\frac{a^3v^2}{2\rho^2}=ga^2+\frac{1}{2}av^2$$

用约束方程 $\rho^2=az$,换成 $z_{\max}$、$z_{\min}$满足的方程.

$$agz+\frac{a^2v^2}{2z}=ga^2+\frac{1}{2}av^2$$

$$2gz^2-2\left(ga+\frac{1}{2}v^2\right)z+av^2=0$$

$$z=\frac{1}{4g}\left[2ga+v^2\pm\sqrt{(2ga+v^2)^2-8gav^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4g}\left[2ga+v^2\pm(2ga-v^2)\right]$$

$z_{\max}$、$z_{\min}$分别为 a 与$\frac{v^2}{2g}$中的较大者和较小者.

2.1.76　一个单位质量的质点在一个旋转抛物面内表面上运动,旋转抛物面的柱坐

标方程为 $\rho^2=4az$，z 轴竖直向上，a 为常量. 该质点受到一个垂直于 z 轴向外的大小为 $\mu\rho$ 的斥力，摩擦力可忽略不计，开始质点位于 $z=0$，具有垂直于 z 轴的速度 $2a\mu^{1/2}$. 用拉格朗日乘子法求质点所能达到的最高点.

解　$f=\rho^2-4az=0$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}=2\rho,\qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-4a$$

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2=\mu\rho+2\lambda\rho \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})=0 \tag{2}$$

$$\ddot{z}=-g-4\lambda a \tag{3}$$

式(2)积分，并用初始条件. $t=0$ 时，$z=0$ 亦即 $\rho=0$，得

$$\rho^2\dot{\varphi}=c=0$$

用上式，式(1)改为

$$\ddot{\rho}=\mu\rho+2\lambda\rho \tag{4}$$

式(3)×ρ+式(4)×$2a$，得

$$\rho\ddot{z}+2a\ddot{\rho}=-\rho g+2\mu a\rho$$

$$z=\frac{1}{4a}\rho^2,\qquad \dot{z}=\frac{1}{2a}\rho\dot{\rho},\qquad \ddot{z}=\frac{1}{2a}(\rho\ddot{\rho}+\dot{\rho}^2)$$

上式改写为

$$\left(\frac{1}{2a}\rho^2+2a\right)\ddot{\rho}+\frac{1}{2a}\rho\dot{\rho}^2=(2\mu a-g)\rho$$

用 $\ddot{\rho}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}^2}{\mathrm{d}\rho}$，上式改写为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a}\rho^2+2a\right)\mathrm{d}\dot{\rho}^2+\frac{1}{2a}\rho\dot{\rho}^2\mathrm{d}\rho=(2\mu a-g)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\frac{1}{4a}\rho^2\dot{\rho}^2+a\dot{\rho}^2-\frac{1}{2}(2\mu a-g)\rho^2=c$$

由初始条件：$t=0$ 时，$\rho=0$（∵$z=0$），$\dot{\rho}=2a\mu^{1/2}$，定 c，得

$$\left(\frac{1}{4a}\rho^2+a\right)\dot{\rho}^2-\frac{1}{2}(2\mu a-g)\rho^2=4a^3\mu$$

最高点，$\dot{z}=0$，因 $\rho\neq0$，故 $\dot{\rho}=0$

$$-\frac{1}{2}(2\mu a-g)\rho_{\max}^2=4a^3\mu$$

$$\rho_{\max}^2=\frac{8a^3\mu}{g-2\mu a}$$

$$z_{\max}=\frac{\rho_{\max}^2}{4a}=\frac{2a^2\mu}{g-2\mu a}$$

2.1.77　一块均匀的面密度为 σ 的边长为 $2a$ 和 $2b$ 的矩形平板，一个质量为 m 的质点位于通过矩形板的中心且垂直于平板的直线上的一点，质点距平板的距离为 z. 求矩形

平板作用于质点的万有引力.

解　取平板为 xy 平面,原点位于中心,x、y 轴分别与两条矩形边平行,原点至质点的方向为 z 轴正向.根据对称性可判断出引力沿 $-\boldsymbol{k}$ 方向.

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{k}Gm\sigma\int_{-b}^{b}\mathrm{d}y\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\mathrm{d}x$$
$$=-4Gm\sigma\boldsymbol{k}\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^a\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

被积函数中 $\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ 是质点到平板上位于 (x,y,z) 处质元的连线与 z 轴的夹角的余弦.

设
$$I=\int_0^a\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

在此积分中,y、z 均视为常量,作变量代换,令 $x=\sqrt{y^2+z^2}\tan t$,$\mathrm{d}x=\sqrt{y^2+z^2}\sec^2t\mathrm{d}t$

$$I=\int_0^{\arctan\frac{a}{\sqrt{y^2+z^2}}}\frac{z\sqrt{y^2+z^2}\sec^2t}{[(y^2+z^2)(1+\tan^2t)]^{3/2}}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\arctan\frac{a}{\sqrt{y^2+z^2}}}\frac{z}{y^2+z^2}\cos t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{z}{y^2+z^2}\sin\left(\arctan\frac{a}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

令
$$\arctan\frac{a}{\sqrt{y^2+z^2}}=\alpha$$

则
$$\tan\alpha=\frac{a}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad\sec^2\alpha=1+\frac{a^2}{y^2+z^2}$$
$$\cos^2\alpha=\frac{y^2+z^2}{a^2+y^2+z^2}$$
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{y^2+z^2}{a^2+y^2+z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}$$
$$I=\frac{z}{y^2+z^2}\sin\alpha=\frac{az}{(y^2+z^2)\sqrt{a^2+y^2+z^2}}$$
$$\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^a\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^bI\mathrm{d}y=\int_0^b\frac{az}{(y^2+z^2)\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y$$

设
$$I'=\int_0^b\frac{az}{(y^2+z^2)\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y$$

令
$$y=\sqrt{a^2+z^2}\tan t,\mathrm{d}y=\sqrt{a^2+z^2}\sec^2t\mathrm{d}t$$

$$I'=\int_0^{\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2+z^2}}}\frac{az\sqrt{a^2+z^2}\sec^2t}{[(a^2+z^2)\tan^2t+z^2]\sqrt{(a^2+z^2)(1+\tan^2t)}}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2+z^2}}}\frac{az\sec t}{a^2\tan^2t+z^2\sec^2t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2+z^2}}} \frac{az\sec t}{\sec^2 t(z^2 + a^2\sin^2 t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=0}^{t=\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2+z^2}}} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{z}\sin t\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{a}{z}\sin t\right)$$

$$= \arctan\left[\frac{a}{z}\sin\left(\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\right]$$

令

$$\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2+z^2}}=\beta$$

则　$\tan\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+z^2}}, \sec^2\beta=\dfrac{a^2+b^2+z^2}{a^2+z^2}\cos^2\beta=\dfrac{a^2+z^2}{a^2+b^2+z^2},\quad \sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}$

$$I'=\arctan\frac{ab}{z\sqrt{a^2+b^2+z^2}}$$

$$\boldsymbol{F}=-4Gm\sigma\arctan\frac{ab}{z\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\boldsymbol{k}$$

2.1.78　求一个质量为 M 的均质球作用于位于离球心距离为 r 的质量为 m 的质点的万有引力．设球的半径为 R.

解　可像上题那样，取球心到质点 m 的方向为 z 轴正向，球心为原点，采用柱坐标，先求出 $z\sim z+\mathrm{d}z$ 的薄圆盘对质点的引力，再对各薄圆盘积分．这种方法比较麻烦．可借用静电学中讲的高斯定理，求具有高度对称性的质量分布对质点的万有引力．比较两种力（用球坐标表达）：

静电场	万有引力场
$\boldsymbol{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$	$\boldsymbol{f} = -\dfrac{GM}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

$\boldsymbol{E}$ 是带单位正电荷质点受的力，$\boldsymbol{f}$ 是单位质量质点受的力，

静电场有高斯定理

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

万有引力场应有类似的关系

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -4\pi G\sum_i M_i$$

用此关系求解本题，质量为 M、半径为 R 的均质球，质量密度 $\rho=\dfrac{3M}{4\pi R^3}$.

对于位于离球心距离 r 的质量为 m 的质点的万有引力的计算需分别两种情况：$r<R$ 及 $r>R$.

$r<R$ 的情况：

$$m\oint \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -4\pi Gm\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

$$F\cdot 4\pi r^2 = -4\pi Gm\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$F = -\frac{GMmr}{R^3}$$

$$F = -4Gm\sigma\arctan\frac{ab}{z\sqrt{a^2+b^2+z^2}}$$

负号表示引力.

令 $a\to\infty$、$b\to\infty$,

$$F = -4Gm\sigma\lim_{b\to\infty}\left[\lim_{a\to\infty}\arctan\frac{b}{z\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^2}}\right]$$

$$= -4Gm\sigma\lim_{b\to\infty}\arctan\frac{b}{z} = -2\pi Gm\sigma$$

上式表明一个面密度为 σ 的无穷大平面对位于平面外距离 z 处质量为 m 的质点的引力为 $2\pi Gm\sigma$. 它与 z 无关. 可见,质量为 m 的质点换成质量为 M 的任意有限大小的物体(包括半径为 a 的均质球壳)受到无穷大面密度为 σ 的平面的引力均为 $2\pi GM\sigma$.

方法二:用 2.1.78 题得出的关于万有引力的"高斯定理"

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -4\pi G\sum_i M_i$$

取图 2.49 中的"高斯面",法线方向 $\boldsymbol{n}$ 总取闭合面向外的方向为正,考虑引力,$\boldsymbol{f}$ 的正向如图 2.49 所示,在圆柱"高斯面"的侧面,$\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$. 底面面积为 S,

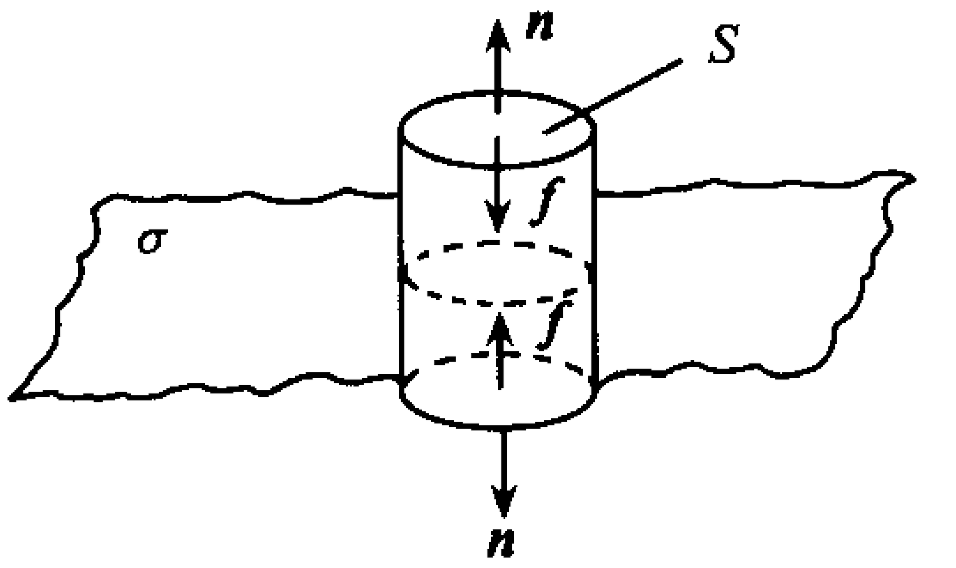


图 2.49

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -fS - fS = -2fS$$

$$\sum_i M_i = \sigma S$$

$$-2fS = -4\pi GS, \quad f = 2\pi G\sigma$$

这是单位质量质点受到的引力,与质点的位置无关. 质量为 M 的球壳受薄板的作用力大小为

$$F = Mf = 2\pi GM\sigma$$

球壳对薄板的作用力是它的反作用力,方向垂直于薄板、指向球心.

2.1.82　考虑一块靠自身引力维持的由液态物质构成并处于流体静力平衡的平板,其总厚度为 $2h$,横向范围(x 和 y 方向)是无限的. 平板密度只是 z 的函数 $\rho(z)$,与 x、y 无关,且对于 $z=0$ 的中间平面是对称的. 求中间平面的压强 $p(0)$,把它写成 $\sigma=\int_0^h\rho(z)\mathrm{d}z$ 的函数.

解　用关于万有引力的"高斯定理",在 z 和 $-z$ 处取两个平行的面积为 S 的形状完全相同的平面,其边缘相应的点的连线都平行于 z 轴,构成一个如上题所画的那样的"高斯面".

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -4\pi G\int_V \rho \mathrm{d}V$$

$\int_V \rho\mathrm{d}V$ 是"高斯面"所围体积 V 内的质量.

根据质量分布的对称性可以判断,只有两个底面处 $\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\neq 0$. 设 $\boldsymbol{f}$ 向 $\boldsymbol{n}$ 的方向为正.

$$2fS = -4\pi G \cdot 2\int_0^z \rho(z')\mathrm{d}z' \cdot S$$

$$f(z) = -4\pi G\int_0^z \rho(z')\mathrm{d}z' \tag{1}$$

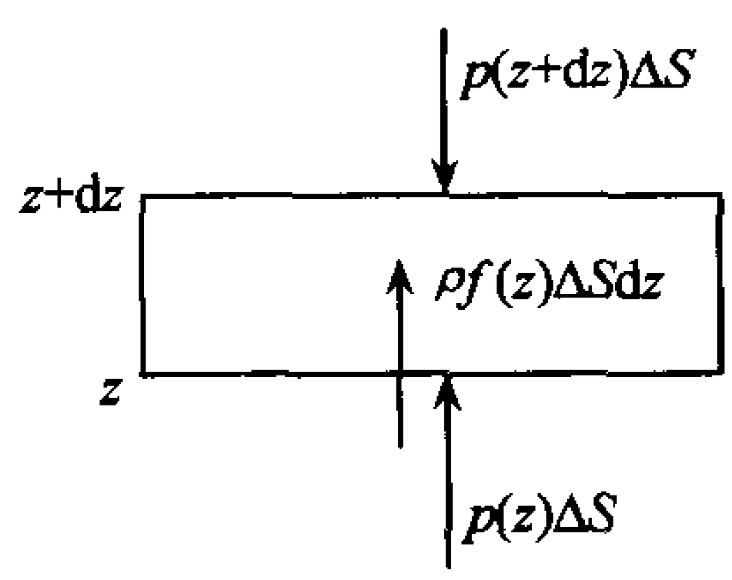


图 2.50

在 $z\sim z+\mathrm{d}z$ 处取一平行于平板、面积为 ΔS 的质元,受力情况如图 2.50 所示. $\rho f(z)\Delta S\mathrm{d}z$ 是平板对质元的万有引力, $p(z)\Delta S$ 和 $p(z+\mathrm{d}z)\Delta S$ 是质元在 z 平面和 $z+\mathrm{d}z$ 平面受到周围液体的压力,侧面受到周围液体压力相互抵消,图中未画.

由静力平衡

$$p(z+\mathrm{d}z)\Delta S = \rho f(z)\Delta S\mathrm{d}z + p(z)\Delta S$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho f(z)$$

$$\mathrm{d}p = \rho(z)f(z)\mathrm{d}z$$

两边积分, $z=0$ 时, $p=p(0)$, $z=h$ 时, $p=0$,

$$\int_{p(0)}^0 \mathrm{d}p = \int_0^h \rho(z)f(z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

将式(1)代入式(2),

$$-p(0) = \int_0^h \rho(z)\left[-4\pi G\int_0^z \rho(z')\mathrm{d}z'\right]\mathrm{d}z$$

$$p(0) = 4\pi G\int_0^h \rho(z)\mathrm{d}z\int_0^z \rho(z')\mathrm{d}z' \tag{3}$$

令 $\varphi(z)=\int_0^z \rho(z')\mathrm{d}z'$, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}=\rho(z)$,式(3)可改写为

$$p(0) = 4\pi G\int_0^h \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\varphi\mathrm{d}z = 4\pi G\cdot\frac{1}{2}\varphi^2\Big|_{z=0}^{z=h}$$

$$= 2\pi G\left[\int_0^z \rho(z')\mathrm{d}z'\right]^2\Big|_{z=0}^{z=h}$$

$$= 2\pi G\left[\int_0^h \rho(z')\mathrm{d}z'\right]^2 = 2\pi G\sigma^2$$

2.2　质点的动能定理和机械能守恒定律

2.2.1　一质点在力 $\boldsymbol{F}=4y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 作用下沿一螺旋线 $x=4\cos\theta, y=4\sin\theta, z=2\theta$ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$. 求此力在这过程中对质点所做的功.

解　$W = \int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int 4y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

$= \int_0^{2\pi}[16\sin\theta(-4\sin\theta) + 8\cos\theta\cdot 4\cos\theta + 2]\mathrm{d}\theta$

$= -28\pi$

2.2.2　作用在骑自行车的人身上的摩擦力和空气阻力合在一起,其大小 $F=av$,其

中 v 是骑车人的速度，而 $a=4\text{N}\cdot\text{s/m}$，该骑车人最多能产生 600W 的推动功率. 问在无风情况下在水平面上他的最大速度等于多少?

解　当达到最大速度时，就其大小而言，推动力等于阻力，此时推动力等于 F，最大速度为 v，则

$$F=\frac{600}{v}(\text{N}).$$

又有

$$F=av$$

所以

$$\frac{600}{v}=av,v=\sqrt{\frac{600}{a}}=\sqrt{\frac{600}{4}}=12.2(\text{m/s})$$

2.2.3　一辆 2500kg 的卡车在水平面上以 30m/s 的速度行驶. 现突然推入空挡(即做滑行)，于是速度按下列规律变化:

$$v=\frac{30}{1+\frac{t}{30}}\qquad(\text{m/s})$$

其中 t 以秒作为单位. 求在这条路上以 15m/s 的速度驱动该卡车所需要的功率.

解

$$v=\frac{30}{1+\frac{t}{30}}\tag{1}$$

按牛顿运动第二定律，滑行时受到的阻力为

$$f=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2500\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{t}{30}\right)^2}\quad(\text{N})\tag{2}$$

由式(2)可知，阻力随时间而变化，式(1)表明了速度与时间变化的关系，式(1)、(2)两式消去 t 可得阻力与速度的变化关系

$$f=-\frac{2500}{(30)^2}v^2$$

今在这条路上保持 $v'=15\text{m/s}$ 的速度行驶，受到的阻力为

$$f(v')=-\frac{2500}{(30)^2}v'^2$$

所需驱动功率

$$P'=|f(v)|v'=\left|-\frac{2500}{(30)^2}\times15^2\right|\times15=9375(\text{W})$$

2.2.4　一个无限大的均质薄板割出一个半径为 a 的圆孔，一个半径为 a 的均质球壳放在孔中，圆孔中心和球壳中心重合. 薄板和球壳单位面积的质量均为 σ. 要将质量为 m 的粒子从孔的中心 O 点移到在过 O 垂直于薄板的直线上离 O 点距离为 $h(h\geqslant a)$ 的 P 点，至少要做多大的功.

解　取 O 为原点，OP 方向为 z 轴，薄板在 xy 平面上.

先计算位于 z 轴任意位置的质量 m 的粒子受到薄板的万有引力

$$\boldsymbol{F}_1(z)=-\boldsymbol{k}\int_a^{\infty}\frac{Gm\sigma}{r^2+z^2}\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\cdot2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2Gm\pi\sigma z}{(z^2+a^2)^{1/2}}\boldsymbol{k}$$

粒子从 $z=0$ 移到 $z=h$,薄板对粒子所做的功为

$$W_1=\int \boldsymbol{F}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_0^h \frac{2\pi Gm\sigma z}{(z^2+a^2)^{1/2}}\mathrm{d}z$$
$$=-2\pi Gm\sigma[(h^2+a^2)^{1/2}-a]$$

现计算薄球壳对粒子的作用力.用关于万有引力的"高斯定理",粒子在球壳内部时,不受球壳的作用力,而在球壳外部,所受的力如同位于球心的具有球壳质量的质点施给的力.由此计算在此移动中球壳对粒子所做的功,

$$W_2=-\int_a^h \frac{Gm\cdot 4\pi a^2\sigma}{z^2}\mathrm{d}z=-4\pi Gm\sigma(h-a)a/h$$

在此过程中所需做的最小功 W 必须克服上述两个引力所做的功.

$$W=-(W_1+W_2)=2\pi Gm\sigma\left[(h^2+a^2)^{1/2}+a-\frac{2a^2}{h}\right]$$

2.2.5 一重量为 w 的人处于一个重量为 w 的电梯内,电梯以加速度 a 向上加速,在某一瞬时的速度为 V.

(1) 问人的表观重量等于多少?

(2) 若此人以相对于电梯为 v 的速度爬上安放在电梯内的一个垂直梯子,此人的能量消耗率(功率输出)等于多少?

解 (1) 人的表观重量是指电梯内磅秤的指示数,数值上等于磅秤给予人的支持力

$$\frac{w}{g}a=N-w\qquad(\text{用惯性参考系})$$

设 w' 为人的表观重量,

$$w'=N=w\left(1+\frac{a}{g}\right)$$

(2) 在电梯中人爬上垂直梯子,速度不变,需克服表观重力做功,做的功等于表观重力势能的增量.在某瞬时,电梯对惯性系的速度为 V,人消耗的功率为

$$P=w'v=w\left(1+\frac{a}{g}\right)v$$

人所消耗的功率不因参考系的选择而不同,在惯性系中,此刻人的速度是 $v+V$,可人消耗的功率不是 $w\left(1+\frac{a}{g}\right)(V+v)$;仍是 $w\left(1+\frac{a}{g}\right)v$.人消耗的功率是人与梯子相互作用力这一对作用反作用力的功率之和.任何一对作用反作用力做的功率之和或在同一时间段内做功之和都是与参考系如何选取无关的.

2.2.6 一质量为 m 的质点,能在半径为 a 的圆环形小管内无摩擦滑动,圆环绕铅直直径以恒定角速度 ω 转动,如图 2.51 所示.写出质点的运动微分方程;如果质点在 $\theta=0$ 的不稳定平衡位置,受轻微扰动,求出其最大动能位置.

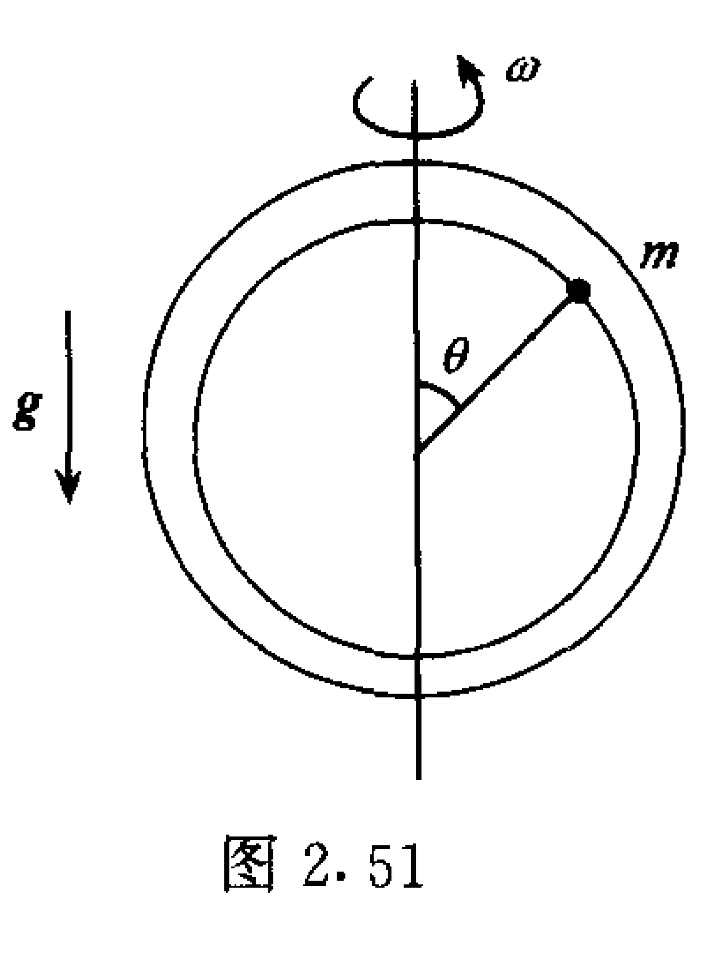


图 2.51

解 取圆环为参考系,写自然坐标的切向微分方程

$$ma\ddot{\theta}=m\omega^2 a\sin\theta\cos\theta+mg\sin\theta$$

用 $\ddot{\theta}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}$,上式改写为

$$a\mathrm{d}\,\dot{\theta}^2 = (2\omega^2 a\sin\theta\cos\theta + 2g\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

考虑初始条件：$t=0$ 时，$\theta=0$，$\dot{\theta}=0$，

$$a\,\dot{\theta}^2 = \int_0^\theta (2\omega^2 a\sin\theta\cos\theta + 2g\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$= \omega^2 a\sin^2\theta + 2g(1-\cos\theta)$$

对静参考系，质点的动能

$$T = \frac{1}{2}m(a^2\,\dot{\theta}^2 + \omega^2 a^2\sin^2\theta)$$
$$= \frac{1}{2}m[\omega^2 a^2\sin^2\theta + 2ga(1-\cos\theta) + \omega^2 a^2\sin^2\theta]$$
$$= ma[\omega^2 a\sin^2\theta + g(1-\cos\theta)]$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}=0$ 解出 T 有极值的 θ 值．

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta} = ma[2\omega^2 a\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta] = 0$$

$$\sin\theta = 0,\qquad \theta = 0$$

为 T 的极小值位置，

$$2\omega^2 a\cos\theta + g = 0,\qquad \theta = \arccos\left(-\frac{g}{2\omega^2 a}\right)$$

为 T 的极大值位置.

2.2.7　找出与下列势能函数相应的力场：

(1) $V=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$；

(2) $V(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-kr}$；

(3) $V(r,\theta,\varphi)=\dfrac{a}{r^2}\cos\theta$.

解　(1) $\boldsymbol{F}=-\nabla V=-\dfrac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}-\dfrac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}-\dfrac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}=-\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

(2) 方法一：

$$\boldsymbol{F}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2},\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{x}{r}$$

令 $\dfrac{\partial V}{\partial \theta}=0$，$\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}=0$，

所以 $\quad\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}=\left(-\dfrac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-kr}-\dfrac{k}{r}\mathrm{e}^{-kr}\right)\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{1}{r^2}(kr+1)\dfrac{x}{r}\mathrm{e}^{-kr}$

同理，可得

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{kr+1}{r^2}\cdot\frac{y}{r}\mathrm{e}^{-kr},\ \frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{kr+1}{r^2}\cdot\frac{z}{r}\mathrm{e}^{-kr}$$

$$\boldsymbol{F}=\frac{kr+1}{r^2}\mathrm{e}^{-kr}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r}=\frac{kr+1}{r^2}\mathrm{e}^{-kr}\boldsymbol{e}_r$$

方法二:直接用梯度的球坐标表达式.

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

今 $V=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-kr}$,

所以

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-kr}-\frac{k}{r}\mathrm{e}^{-kr}=-\frac{1+kr}{r^2}\mathrm{e}^{-kr}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=0,\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$$

$$\boldsymbol{F}=-\nabla V=\frac{1+kr}{r^2}\mathrm{e}^{-kr}\boldsymbol{e}_r$$

(3) 方法一:用 $\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\\&=\frac{2a\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{a\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\theta\\&=\frac{a}{r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\end{aligned}$$

方法二:把 $V(r,\theta,\varphi)$ 改写成 $V(x,y,z)$,

$$V=\frac{a\cos\theta}{r^2}=\frac{ar\cos\theta}{r^3}=\frac{az}{r^3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=\frac{3az}{r^4}\cdot\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{3az}{r^4}\cdot\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\left(\frac{3az}{r^4}\cdot\frac{z}{r}-\frac{a}{r^3}\right)\boldsymbol{k}\\&=\frac{3az}{r^4}\boldsymbol{e}_r-\frac{a}{r^3}\boldsymbol{k}\\&=\frac{3ar\cos\theta}{r^4}\boldsymbol{e}_r-\frac{a}{r^3}(\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\&=\frac{a}{r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\end{aligned}$$

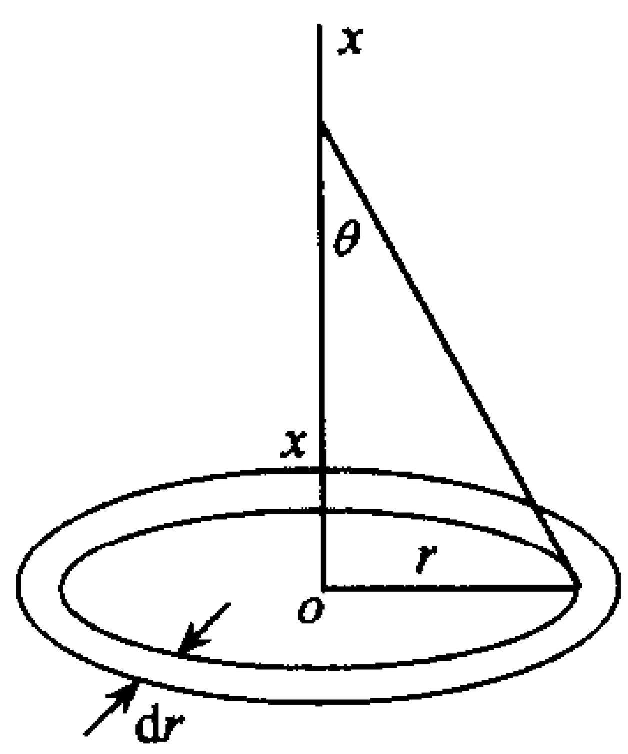


图 2.52

2.2.8 证明一个半径为 a、面密度为 σ 的薄圆盘,圆盘的轴向距离为 x 的点的引力势为

$$V(x)=-2\pi G\sigma(\sqrt{x^2+a^2}-|x|)$$

证明 引力势是单位质量质点的势能.

考虑半径为 $r\sim r+\mathrm{d}r$ 环状质元对轴上离圆盘中心 O 距离 x 处的单位质量质点的引力,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-\frac{G\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r}{r^2+x^2}\cdot\cos\theta\boldsymbol{i}=-\frac{2\pi G\sigma rx}{(r^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}r\boldsymbol{i}$$

该环状质元的引力势，取 x 为∞处 $\mathrm{d}V=0$，

$$\mathrm{d}V=\int_{\infty}^{x}\mathrm{d}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\infty}^{x}\left(-\frac{2\pi G\sigma r x}{(r^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}r\boldsymbol{i}\right)(-\mathrm{d}x\boldsymbol{i})$$

$$=+2\pi G\sigma r\mathrm{d}r\int_{\infty}^{x}\frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=+\pi G\sigma r\mathrm{d}r\cdot(-2)\frac{1}{(r^2+x^2)^{1/2}}\Bigg|_{x=\infty}^{x}=-\frac{2\pi G\sigma}{(r^2+x^2)^{1/2}}r\mathrm{d}r$$

整个圆盘的轴向距离为 x 的点的引力势

$$V(x)=\int\mathrm{d}V=\int_0^a\left(-\frac{2\pi G\sigma}{\sqrt{r^2+x^2}}r\right)\mathrm{d}r$$

$$=-\int_0^a\frac{\pi G\sigma}{\sqrt{r^2+x^2}}\mathrm{d}r^2=-2\pi G\sigma\sqrt{r^2+x^2}\Bigg|_{r=0}^{r=a}$$

$$=-2\pi G\sigma(\sqrt{x^2+a^2}-|x|)$$

注意：在求 $\mathrm{d}V$ 时，积分路线是从∞沿 x 轴至 x，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\mathrm{d}x\boldsymbol{i}$，而不是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}$. 另外，$\sqrt{x^2}$ 已表明开方后取正值，故 $\sqrt{x^2}=|x|$ 对 x 为负值时也适用.

2.2.9 计算半径为 a、质量为 M 的均质圆环对位于环的平面内，但在环的外侧的各点的引力势.

提示：可表示为第一类椭圆积分.

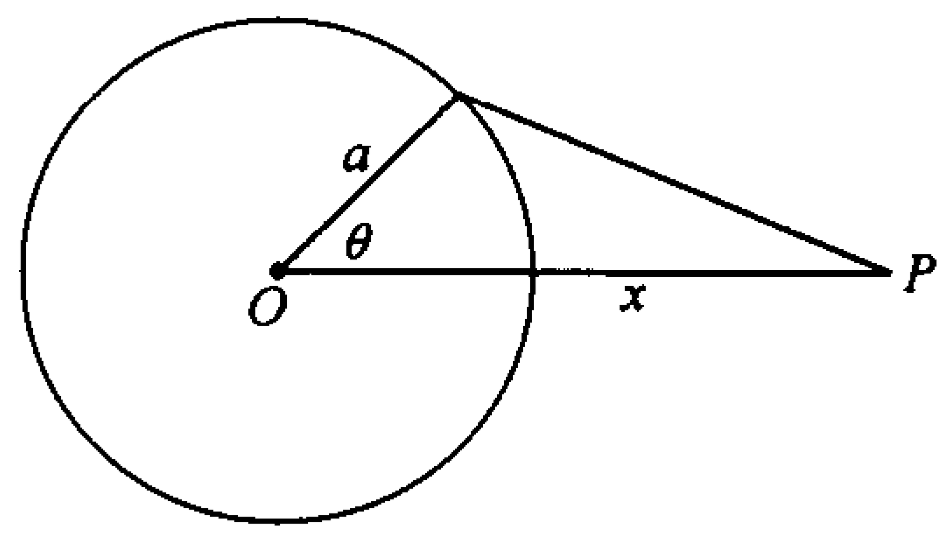


图 2.53

解 图 2.53 中 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$ 质元对 P 点的引力势为

$$\mathrm{d}V=-\frac{G\eta a\mathrm{d}\theta}{\sqrt{x^2+a^2-2ax\cos\theta}}$$

其中 η 是圆环的线密度，x 是 P 点至环心 O 的距离.

$$x^2+a^2-2ax\cos\theta$$

$$=x^2+a^2-2ax\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)$$

$$=x^2+a^2+2ax-4ax\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$=(x+a)^2-4ax\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=(x+a)^2\left[1-\frac{4ax}{(x+a)^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

令 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$，$\mathrm{d}\theta=-2\mathrm{d}\varphi$，$k^2=\frac{4ax}{(x+a)^2}$

$$V=-\int_0^{2\pi}\frac{G\eta a}{\sqrt{x^2+a^2-2ax\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\int_0^{\pi}\frac{G\eta a}{\sqrt{x^2+a^2-2ax\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{G\eta a}{(x+a)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}(-2)\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{4G\eta a}{x+a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{4G\eta a}{x+a}\cdot\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right]$$

$$=-\frac{4G\eta a}{x+a}K$$

K 也可写成 $F\left(\frac{\pi}{2},k\right)$. 要求 $k^2<1$，今 $k^2=\frac{4ax}{(x+a)^2}<1$ 是成立的，证明如下：

$$(x-a^2)>0,\qquad x^2-2ax+a^2>0$$

$$x^2+2ax+a^2>4ax,\qquad \frac{4ax}{(x+a)^2}<1$$

代入 $\eta=\frac{M}{2\pi a}$，　$V(x)=-\frac{2GaM}{\pi a(x+a)}K.$

2.2.10 考虑一个任意形状的物体，证明：对物体外一个球内各点的引力势的平均值等于在此球心处的引力势.

证明 只要证明物体内任何一个质点(设质量为 m)在物体外一个球内各点的引力势的平均值等于该质点在此球心的引力势即可.

取球心 O 为原点，质点至 O 的方向为 z 轴正向，如图 2.54 所示. 设质点至 O 的距离为 R. 考虑球内 P 点(位于球坐标 r,θ,φ 处)，

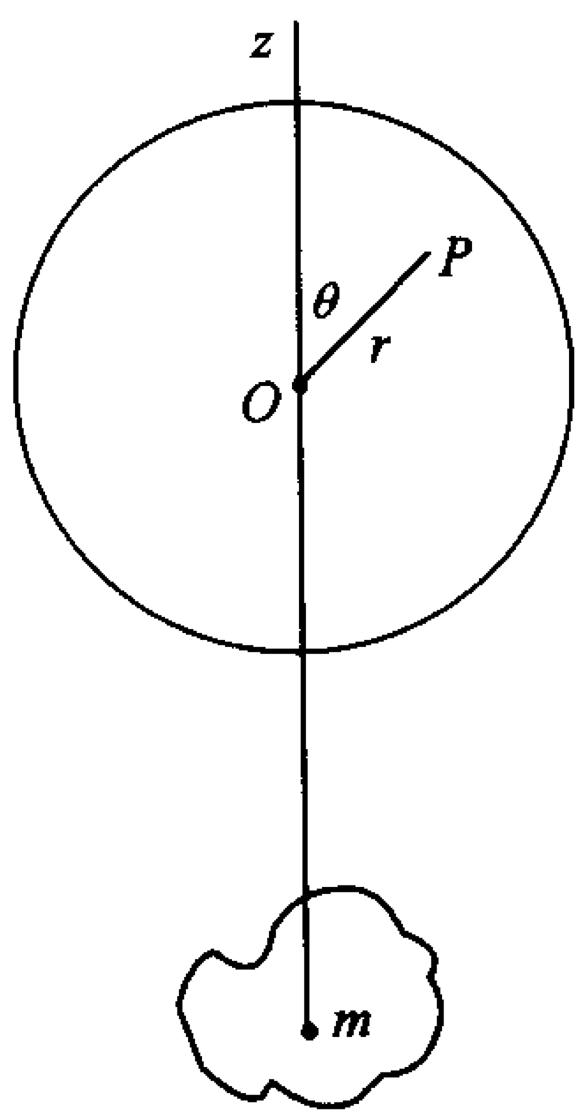


图 2.54

$$V(P)=-\frac{Gm}{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos\theta}}$$

设球的半径为 a，球内各点引力势之和为

$$\sum_P V(P)=-\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{Gm}{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos\theta}}r^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=-2\pi Gm\int_0^a r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi Gm\int_0^a\frac{r}{2R}\mathrm{d}r\int\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos\theta}}\mathrm{d}(2Rr\cos\theta)$$

$$=\frac{\pi Gm}{R}\int_0^a r\cdot 2\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi Gm}{R}\int_0^a r[(R-r)-(R+r)]\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{4\pi Gm}{R}\int_0^a r^2\mathrm{d}r=-\frac{4\pi Gm}{3R}a^3$$

$$\overline{V(P)}=\frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3}\sum_P V(P)=-\frac{Gm}{R}$$

2.2.11 判断以下各力是否是保守力，如果是保守力，找出它的势能函数.

(1) $\boldsymbol{F}=(ax+by^2)\boldsymbol{i}+(az+2bxy)\boldsymbol{j}+(ay+bz^2)\boldsymbol{k}$，$a$、$b$ 为常量；

(2) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{a}$ 为常矢量;

(3) $\boldsymbol{F}=a\boldsymbol{r}$,$a$ 为常量;

(4) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{a}$ 为常矢量.

解　(1)

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$=(a-a)\boldsymbol{i}+(0-0)\boldsymbol{j}+(2by-2by)\boldsymbol{k}=0$$

此 $\boldsymbol{F}$ 是保守力,取(0,0,0)处为势能零点,

$$V(x,y,z)=-\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

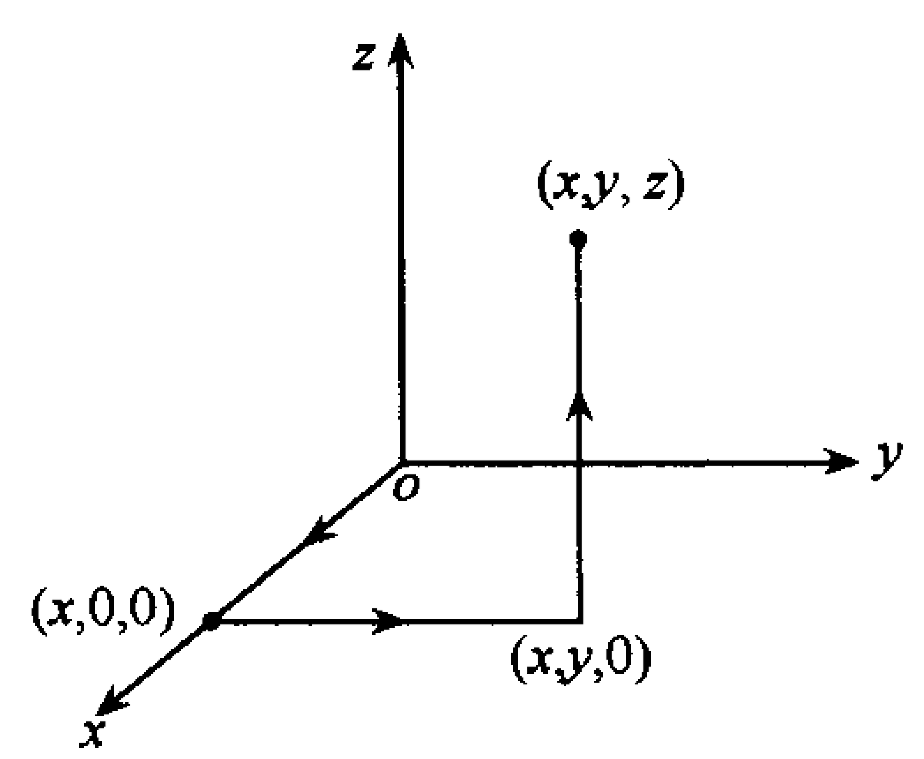


图 2.55

对于保守力,作上述积分可取任意的路径,今选图 2.55 所示的路径,

$$V(x,y,z)=-\int_0^x F_x(x,0,0)\mathrm{d}x$$

$$-\int_0^y F_y(x,y,0)\mathrm{d}y-\int_0^z F_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^x ax\mathrm{d}x-\int_0^y 2bxy\mathrm{d}y-\int_0^z (ay+bz^2)\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{2}ax^2-bxy^2-ayz-\frac{1}{3}bz^3$$

(2) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=(a_yz-a_zy)\boldsymbol{i}+(a_zx-a_xz)\boldsymbol{j}+(a_xy-a_yx)\boldsymbol{k}$,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=-a_z,\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}=a_z$$

两者不相等,足以说明 $\boldsymbol{F}$ 是非保守力.

(3) $\boldsymbol{F}=a\boldsymbol{r}=a(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$

$\boldsymbol{F}$ 是保守力,选 $\boldsymbol{r}=0$ 处为势能零点,选用(2)问所用的积分路径,可得

$$V=-\frac{1}{2}a(x^2+y^2+z^2)=-\frac{1}{2}ar^2$$

(4) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=a_x(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{i}+a_y(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}+a_z(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x(a_xx+a_yy+a_zz) & a_y(a_xx+a_yy+a_zz) & a_z(a_xx+a_yy+a_zz)\end{vmatrix}$$

$$=(a_za_y-a_ya_z)\boldsymbol{i}+(a_xa_z-a_za_x)\boldsymbol{j}+(a_ya_x-a_xa_y)\boldsymbol{k}$$

$$=0$$

此 $\boldsymbol{F}$ 是保守力.

选原点为势能零点，用前述的积分路径，

$$V=-\int_0^x F_x(x,0,0)\mathrm{d}x-\int_0^y F_y(x,y,0)\mathrm{d}y-\int_0^z F_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^x a_x^2x\mathrm{d}x-\int_0^y a_y(a_xx+a_yy)\mathrm{d}y-\int_0^z a_z(a_xx+a_yy+a_zz)\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{2}a_x^2x^2-a_xa_yxy-\frac{1}{2}a_y^2y^2-a_za_xxz-a_ya_zyz-\frac{1}{2}a_z^2z^2$$

$$=-\frac{1}{2}(a_xx+a_yy+a_zz)^2=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2$$

2.2.12 一个密度均匀的行星绕一个固定轴以角速度 ω 自转，行星的赤道半径 R_E 略大于球的半径 R，行星两极的半径 R_P 略小于球的半径 R，用参量 $\varepsilon=\dfrac{R_E-R_P}{R_E}$ 描述变形的大小. 由于这种变形引起重力势有一增量

$$\Delta V(R,\theta)=-\frac{2}{5}\frac{GM\varepsilon R_E^2}{R^3}P_2(\cos\theta)$$

其中 θ 是球坐标，$P_2(\cos\theta)=\dfrac{3}{2}\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}$. 由行星表面平衡的条件得出 ε 与 $\lambda=\dfrac{\omega^2R_E}{g}$ 的关系，对地球就 ε 作数值估计.

解 行星表面为一旋转椭球面，取通过两极的对称轴为 z 轴，行星与 xz 平面的交线为一椭圆，方程为

$$\frac{x^2}{R_E^2}+\frac{z^2}{R_P^2}=1$$

可引入参量 α，椭圆方程表示为

$$x=R_E\sin\alpha,\quad z=R_P\cos\alpha$$

参量 α 与球坐标 θ 的关系为

$$\tan\theta=\frac{x}{z}=\frac{R_E\sin\alpha}{R_P\cos\alpha}=\frac{R_E}{R_P}\tan\alpha$$

在行星表面单位质量质点处于平衡的条件是它受到的重力、惯性离轴力和行星表面的支持力的合力为零，表面的支持力垂直于表面，因此平衡条件要求重力、惯性离轴力的合力无沿表面的切向分量.

现求图 2.56 中 P 点沿椭圆的切线单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$，设 $\boldsymbol{\tau}$ 与 z 轴夹角为 φ，

$$\tan\varphi=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha)}{(\mathrm{d}z/\mathrm{d}\alpha)}=\frac{R_E\cos\alpha}{-R_P\sin\alpha}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{R_E}{R_P}\cdot\frac{R_E}{R_P\tan\theta} = -\frac{R_E^2}{R_P^2\tan\theta}\\
\boldsymbol{\tau} &= \cos\varphi\,\boldsymbol{k} + \sin\varphi\,\boldsymbol{i}\\
&= -\frac{R_P^2\tan\theta}{\sqrt{R_E^4 + R_P^4\tan^2\theta}}\boldsymbol{k} + \frac{R_E^2}{\sqrt{R_E^4 + R_P^4\tan^2\theta}}\boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

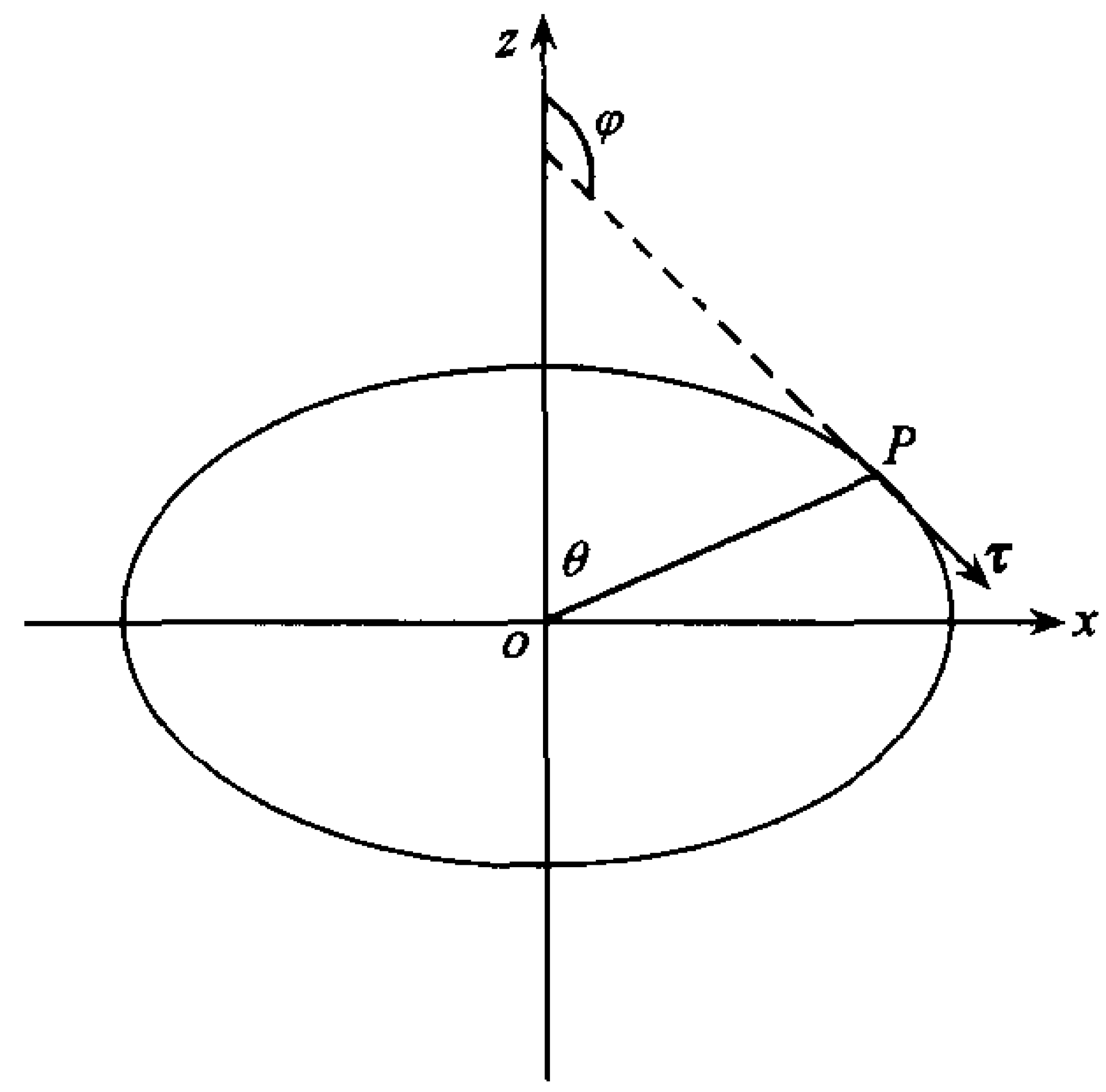


图 2.56

单位质量质点受到的惯性离轴力为

$$\boldsymbol{f}_1 = r\omega^2\sin\theta\boldsymbol{i} \approx R\omega^2\sin\theta\boldsymbol{i}$$

单位质量质点受到的重力为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_2 &= -\nabla V = \nabla\left[\frac{GM}{R} + \frac{2GM\varepsilon R_E^2}{5R^3}P_2(\cos\theta)\right]\\
&= GM\left[-\frac{1}{R^2} - \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}P_2(\cos\theta)\right]\boldsymbol{e}_r - \frac{6GM\varepsilon R_E^2}{5R^4}\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
$$

所以

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{k}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_2 = {} & GM\left[-\frac{\sin\theta}{R^2} - \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}\sin\theta P_2(\cos\theta) - \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}\sin\theta\cos^2\theta\right]\boldsymbol{i}\\
& + GM\left[-\frac{\cos\theta}{R^2} - \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}\cos\theta P_2(\cos\theta) + \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}\sin^2\theta\cos\theta\right]\boldsymbol{k}\\
= {} & GM\left\{\sin\theta\left[-\frac{1}{R^2} - b\left(\frac{5}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right]\boldsymbol{i}\right.\\
& \left. + \cos\theta\left[-\frac{1}{R^2} - b\left(\frac{5}{2}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\right)\right]\boldsymbol{k}\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $b=\frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}$.

在表面平衡的条件为

$$(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2)\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$$

可得：

$$-R\omega^2R_E^2+GM\left(\frac{1}{R^2}+\frac{5}{2}b\cos^2\theta\right)(R_E^2-R_P^2)-GMb\left(\frac{1}{2}R_E^2-\frac{3}{2}R_P^2\right)=0$$

只保留 ε 的一次方项，

$$-R\omega^2R_E^2+GM\frac{R_E-R_P}{R}\cdot\frac{R_E+R_P}{R}+GMbR_P^2=0$$

代入 $\varepsilon=\frac{R_E-R_P}{R_E}$，$b=\frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}$，只保留 ε 的一次方项，

$$-R\omega^2R_E^2+2GM\varepsilon+\frac{6}{5}GM\varepsilon=0$$

$$\varepsilon=\frac{5}{16}\frac{R\omega^2R_E^2}{GM}\approx\frac{5}{16}\frac{\omega^2R_E}{g}=\frac{5}{16}\lambda$$

其中用了 $g\approx\frac{GM}{R^2}\approx\frac{GM}{RR_E}$.

对于地球，用 $\omega=7.3\times10^{-5}\text{rad/s}$，$g=9.8\text{m/s}^2$，$R_E=6.378\times10^6\text{m}$，$\varepsilon\approx1.1\times10^{-3}$.

2.2.13　求在势能为

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{3}m\lambda x^3$$

(其中 λ 很小)的保守力作用下的非线性振子的运动的一级近似解，假定 $t=0$ 时 $x=0$.

解
$$m\ddot{x}=-\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}=-kx+m\lambda x^2\tag{1}$$

零级近似：
$$m\ddot{x}^{(0)}=-kx^{(0)}\tag{2}$$

$$x^{(0)}=A\sin(\omega t+\varphi)$$

由 $t=0$ 时，$x=0$，定出 $\varphi=0$，

$$x^{(0)}=A\sin\omega t\tag{3}$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

一级近似：设 $x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda x_1$，代入式(1)，略去高阶小量，

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=-kx_1+m(x^{(0)})^2\\&=-kx_1+\frac{mA^2}{2}-\frac{mA^2}{2}\cos2\omega t\end{aligned}$$

或写作
$$\ddot{x}_1+\omega^2x_1=\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{2}\cos2\omega t\tag{4}$$

不难看出，式(4)有如下形式的特解：

$$x_1^*=\frac{A^2}{2\omega^2}+B\cos2\omega t$$

代入式(4)，得 $B=\frac{A^2}{6\omega^2}$.

式(4)的通解为

$$x_1=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\frac{A^2}{2\omega^2}+\frac{A^2}{6\omega^2}\cos2\omega t$$

满足初条件 $t=0$ 时，$x_1=0$，$\dot{x}_1=0$ 的解为

$$x_1 = -\frac{2A^2}{3\omega^2}\cos\omega t + \frac{A^2}{2\omega^2} + \frac{A^2}{6\omega^2}\cos 2\omega t$$

故一级近似解为

$$x^{(1)} = A\sin\omega t + \lambda\left(\frac{A^2}{2\omega^2} - \frac{2A^2}{3\omega^2}\cos\omega t + \frac{A^2}{6\omega^2}\cos 2\omega t\right)$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$A$ 由 $t=0$ 时的 $\dot{x}$ 值决定.

2.2.14　(1) 质量为 m 的粒子在势能 $V(x)=\frac{cx}{x^2+a^2}$ 的保守力场中运动，其中 c 和 a 是正的常数. 求稳定平衡位置及在它附近做小振动的周期.

(2) 如果粒子从所求的平衡位置以速度 v 开始运动，求 v 值的范围，粒子将做：(a) 振动；(b) 逃到 $-\infty$；(c) 逃到 $+\infty$.

解　(1) 平衡位置，$F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0$

即

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{c(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}=0$$

$$x = x_1 = a \quad 和 \quad x = x_2 = -a$$

均为平衡位置.

由

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2cx(x^2-3a^2)}{(x^2+a^2)^3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_1=a} = -\frac{c}{2a^3} < 0$$

可见 $x=a$ 为不稳定平衡位置；

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_2=-a} = \frac{c}{2a^3} > 0$$

可见 $x=-a$ 为稳定平衡位置.

在 $x=-a$ 附近，令 $x=-a+x'$，x' 为小量，

$$f(x') = -\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-a+x'} = -\frac{c(2ax'-x'^2)}{(x'^2-2ax'+2a^2)^2}$$

只保留 x' 的一次方项，

$$f(x') = -\frac{cx'}{2a^3}$$

$$m\ddot{x} = m\ddot{x}' = -\frac{cx'}{2a^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{2ma^3}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{c}{2ma}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi a\sqrt{\frac{2ma}{c}}$$

(2) $x=0$ 时，$V(x)=0$，$x\to\pm\infty$ 时，$V(x)\to 0$，$x=a$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0$，$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}<0$，$V(x)$ 有极大值，$V(a)=\frac{c}{2a}$，$x=-a$ 时，$V(-a)=-\frac{c}{2a}$ 为极小值，在 $-a<x<a$，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}>0$，在 $x>a$ 及 $x<$

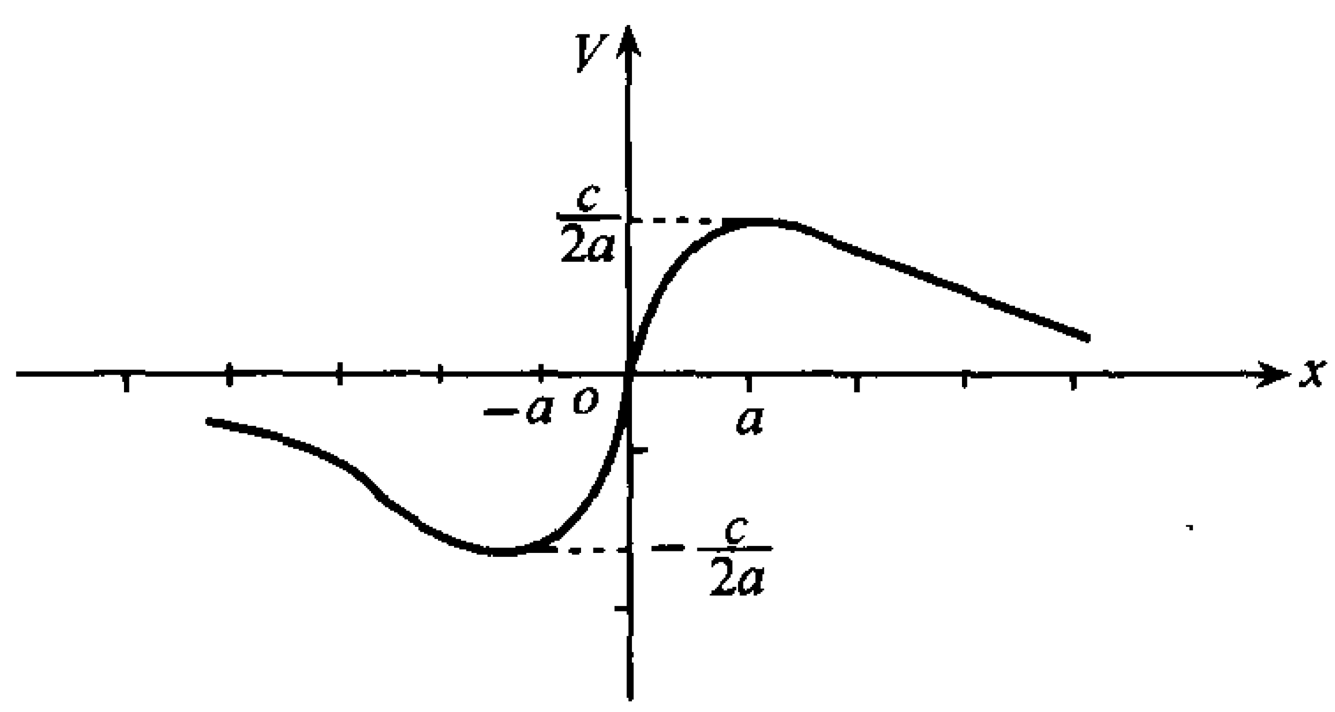


图 2.57

$-a$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}<0$, $V\sim x$ 关系曲线如图 2.57 所示.

(a) 从 $x=-a$,以速度 v 开始运动,要以后的运动是在有限范围内振动,由图可见,要求

$$E=T+V<0$$

$$\frac{1}{2}mv^2+V(-a)<0$$

$$v<\sqrt{\frac{2V(-a)}{m}}=\sqrt{\frac{c}{ma}}$$

(b) 从 $x=-a$,以速度 v 开始运动,要能逃到 $-\infty$,需考虑两种情况;如开始 $v<0$,只要 $E>0$ 即可.

$$\frac{1}{2}mv^2+V(-a)>0$$

$$|v|>\sqrt{\frac{2V(-a)}{m}}=\sqrt{\frac{c}{ma}}$$

如开始 $v>0$,要防止 $x\to+\infty$,必须有 $E<V(a)$,

$$\frac{1}{2}mv^2+V(-a)<V(a)$$

得

$$v<\sqrt{\frac{2c}{ma}}$$

结论是从 $x=-a$ 开始运动,开始 $v<0$ 时,要求 $|v|>\sqrt{\frac{c}{ma}}$;开始 $v>0$ 时,要求 $\sqrt{\frac{c}{ma}}<|v|<\sqrt{\frac{2c}{ma}}$,粒子将逃到 $-\infty$.

(c) 从 $x=-a$ 开始运动,要逃到 $+\infty$,首先必须开始 $v>0$,且要求

$$\frac{1}{2}mv^2+V(-a)>V(a)$$

由此得

$$v>\sqrt{\frac{2c}{ma}}$$

2.2.15 比地面高 h 的平台上有一质量为 m 的小车系于绳子一端,绳子跨过一小滑

轮在另一端被地面上的人拉着并以匀速 v_0 向右运动，如图 2.58 所示．若小车与平台间的摩擦力可以不计，求：

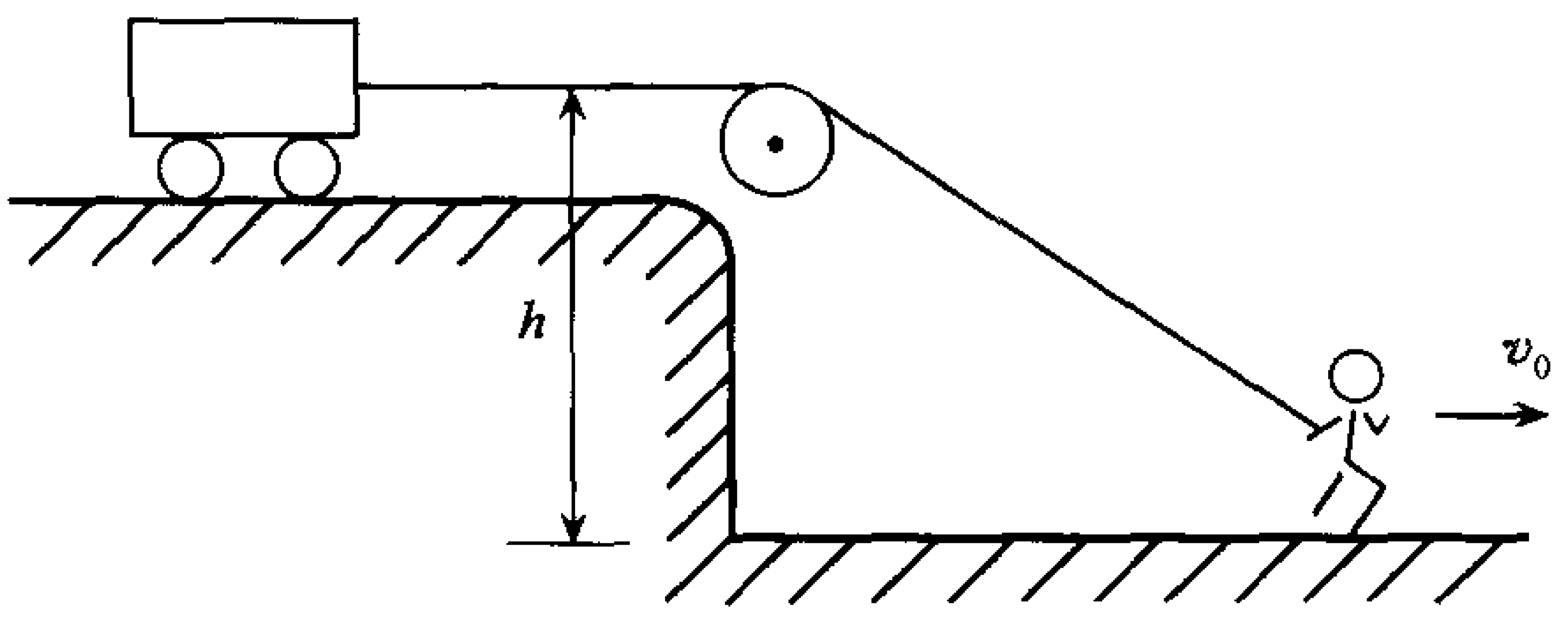


图 2.58

（1）当人位于离小滑轮正下方向右距离 s 处小车的速度和加速度；

（2）人在上述位置拉绳的力；

（3）在人从滑轮正下方到上述位置的过程中人所做的功．

解　（1）$l^2=s^2+h^2$

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{sv_0}{\sqrt{s^2+h^2}}$$

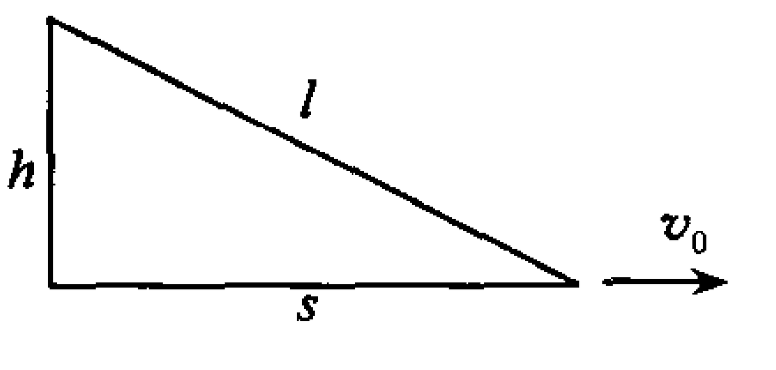


图 2.59

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0^2}{\sqrt{s^2+h^2}}-\frac{1}{2}\frac{sv_0\cdot 2sv_0}{(s^2+h^2)^{3/2}}=\frac{v_0^2h^2}{(s^2+h^2)^{3/2}}$$

v、a 的方向均向右．

（2）$F=ma=\dfrac{mv_0^2h^2}{(s^2+h^2)^{3/2}}$

（3）$W=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}m[v(0)]^2=\dfrac{ms^2v_0^2}{2(s^2+h^2)}$

2.2.16　一质量为 m 的小球系于不可伸长的轻绳的一端，穿过桌面上的一小孔后在光滑的水平桌面上运动，绳子与小孔间无摩擦力．问：

（1）要使小球以小孔为中心做半径为 r_1、角速度为 ω_1 的圆周运动，绳的另一端需用多大的拉力？

（2）要使小球圆周运动的半径从 $r=r_1$ 缩小到 $r=r_2$，拉力需做多大的功？

解　（1）$F=mr_1\omega_1^2$

（2）在小球的矢径缩小过程中受到的力是径向的，列横向的运动微分方程

$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=\frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})=0$$

$$r^2\dot{\varphi}=c$$

所以

$$r_2^2\omega_2=r_1^2\omega_1,\quad \omega_2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\omega_1$$

$$W=\frac{1}{2}m(r_2\omega_2)^2-\frac{1}{2}m(r_1\omega_1)^2=\frac{1}{2}mr_1^2\omega_1^2\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}-1\right)$$

2.2.17 火车质量为 m，其所产生功率为常数 P，若车受的阻力为常数 f，试证时间与速度的关系为 $t=\frac{mP}{f^2}\ln\frac{P}{P-fv}-\frac{mv}{f}$；若所受阻力与速度 v 成正比，则 $t=\frac{mv}{2f}\ln\frac{P}{P-fv}$.

证明
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=P-fv$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=P-fv$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t&=\frac{mv}{P-fv}\mathrm{d}v=\frac{m}{f}\frac{Pv}{P-fv}\mathrm{d}v\\&=\frac{m}{f}\left(\frac{-P+fv}{P-fv}+\frac{P}{P-fv}\right)\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t&=-\int_0^v\frac{m}{f}\mathrm{d}v+\frac{mP}{f}\int_0^v\frac{1}{P-fv}\mathrm{d}v\\&=-\frac{mv}{f}+\frac{mP}{f^2}\ln\frac{P}{P-fv}\end{aligned}$$

若 f 与速度 v 成正比，设 $f=cv$，c 为常数，则

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}=P-fv=P-cv^2$$

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{P-cv^2}$$

$$\begin{aligned}t&=\frac{1}{2}m\int\frac{\mathrm{d}v^2}{P-cv^2}=-\frac{m}{2c}\ln(P-cv^2)\Big|_{v=0}^{v}\\&=\frac{m}{2c}\ln\frac{P}{P-cv^2}=\frac{mv}{2f}\ln\frac{P}{P-fv}\end{aligned}$$

2.2.18 一质量为 m 的质点，受引力作用在一直线上运动．当 $x\geqslant a$ 时，引力值为 $m\mu a^2/x^2$；当 $x\leqslant a$ 时，引力值为 $m\mu x/a$，式中 x 是相对于线上某一点(取为原点)的距离，μ 及 a 为常量．如质点在离原点 $2a$ 处从静止开始运动，求到达原点时的速度及走此段路程所需的时间．

解 在 $a\leqslant x\leqslant 2a$ 段．

$$m\ddot{x}=-m\mu a^2/x^2$$

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\mu a^2/x^2$$

$t=0$ 时，$x=2a$，$v=0$，

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=-\int_{2a}^x\frac{\mu a^2}{x^2}\mathrm{d}x,\qquad \frac{1}{2}v^2=\mu a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2a}\right)$$

$$v=-\sqrt{2\mu a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2a}\right)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2\mu a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2a}\right)}$$

$$t=\int_0^t \mathrm{d}t=-\int_{2a}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\mu a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2a}\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{\mu a}}\int_{2a}^{x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}x$$

令 $2a-x=u^2$，则 $x=2a-u^2$，$\mathrm{d}x=-2u\mathrm{d}u$，

$$t=-\frac{1}{\sqrt{\mu a}}\int\frac{\sqrt{2a-u^2}}{u}(-2u)\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\mu a}}\int\sqrt{2a-u^2}\mathrm{d}u$$

用积分公式

$$\int\sqrt{b^2-u^2}\mathrm{d}u=\frac{u}{2}\sqrt{b^2-u^2}+\frac{b^2}{2}\arcsin\frac{u}{b}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{\mu a}}\left[\sqrt{2a-x}\cdot\sqrt{x}+2a\arcsin\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}\right]$$

当 $x=a$ 时，

$$v=v_1=-\sqrt{2\mu a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}\right)}=-\sqrt{\mu a}$$

$$t=t_1=\frac{1}{\sqrt{\mu a}}\left[\sqrt{2a-a}\cdot\sqrt{a}+2a\arcsin\sqrt{\frac{2a-a}{2a}}\right]$$

$$=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

在 $0\leqslant x\leqslant a$ 段，

$$m\ddot{x}=-m\mu x/a$$

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\mu x/a$$

初始条件：$t=t_1$ 时，$x=a$，$v=-\sqrt{\mu a}$，

$$\int_{-\sqrt{\mu a}}^{v}v\mathrm{d}v=-\int_a^x\frac{\mu x}{a}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}(-\sqrt{\mu a})^2=-\frac{\mu}{2a}(x^2-a^2)$$

$$v=-\sqrt{2\mu a-\frac{\mu}{a}x^2}$$

$$\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t=-\int_a^x\frac{1}{\sqrt{2\mu a}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2a^2}x^2}}\mathrm{d}x$$

$$t=t_1-\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}\,a}-\frac{\pi}{4}\right)$$

到达 $x=a$ 时，$v=-\sqrt{2\mu a}$，$t=\left(1+\frac{3\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{a}{\mu}}$.

说明：此题不必解运动微分方程，用动能定理即可得 v 与 x 的函数关系.

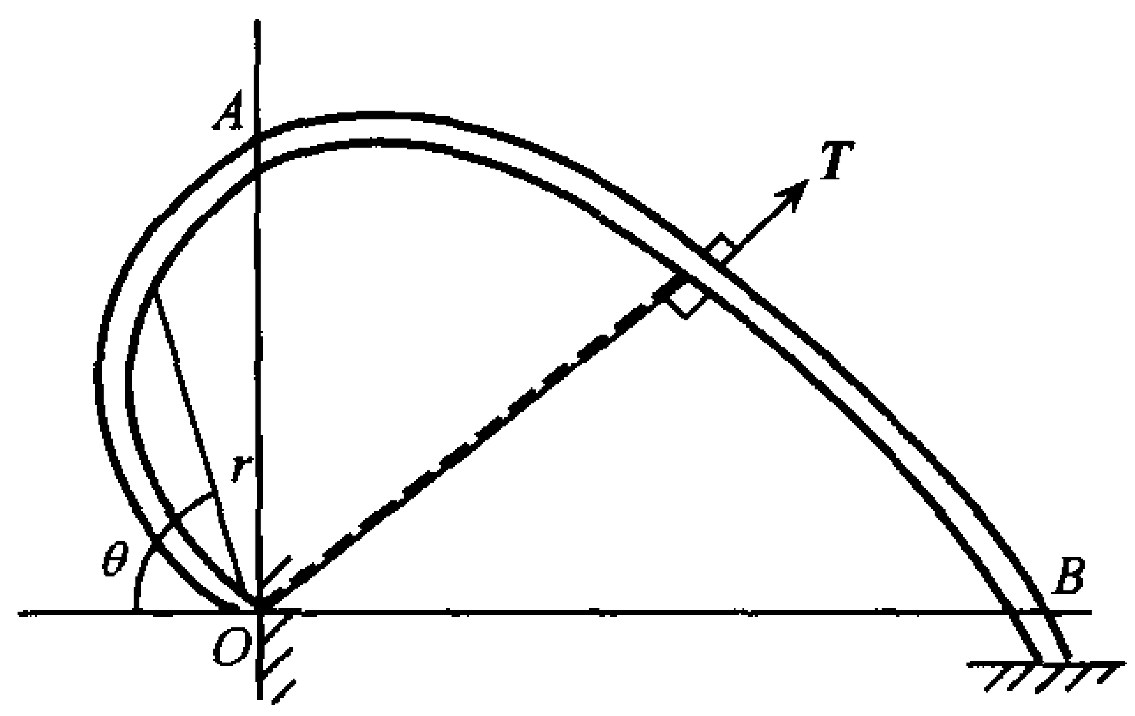


图 2.60

2.2.19　轴套 A 的质量为 0.5kg，沿着位于铅垂平面的螺线形杆无摩擦地滑动. 螺线形方程为 $r=0.3\theta$，式中 r 以米计，θ 以弧度计，轴套在大小不变的径向力 $T=10\text{N}$ 作用下，从 A 点静止释放，滑到位置 B 处(见图 2.60). 求轴套到达 B 处时的速度.

解　由质点的动能定理，

$$\frac{1}{2}mv^2-0=\int_{r_A}^{r_B}m\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{r_A}^{r_B}\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\int m\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{g}\cdot\int_{r_A}^{r_B}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A)=mg\cdot r\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

在上述计算中用了 $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_B=0,-m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_A=mg\cdot r\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_{r_A}^{r_B}\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int T\boldsymbol{e}_r\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\theta\boldsymbol{e}_\theta)=\int T\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}T\cdot 0.3\mathrm{d}\theta=0.3T\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$v^2=\left(0.3g+0.3\frac{T}{m}\right)\pi$$

代入 $g=9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2},T=10\text{N},m=0.5\text{kg}$，可算出

$$v=5.3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

2.2.20　一质量为 80kg 的人由 1m 高处跳下，当他落地时，他忘了弯曲他的膝盖，人体减速的距离只有 1cm. 求在减速阶段，作用在他腿上的力.

解　$$h=1\text{m},s=1\text{cm}=0.01\text{m}$$

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh,\quad 0-\frac{1}{2}mv^2=(mg-N)s$$

其中 N 是在减速阶段作用在腿上的力.

$$N=mg+\frac{mgh}{s}=mg\left(1+\frac{h}{s}\right)$$

$$=80\times 9.8\times\left(1+\frac{1}{0.01}\right)=7.9\times 10^4\text{N}$$

2.2.21　一质点无摩擦地在环形轨道上滑下，如图 2.61 所示，轨道弯曲段的曲率半径为 R，该质点由高 h 处由自静止开始下滑，在某处质点开始和轨道脱离接触，说明脱离接触的位置并计算出发生这种情况的 h 的最小值.

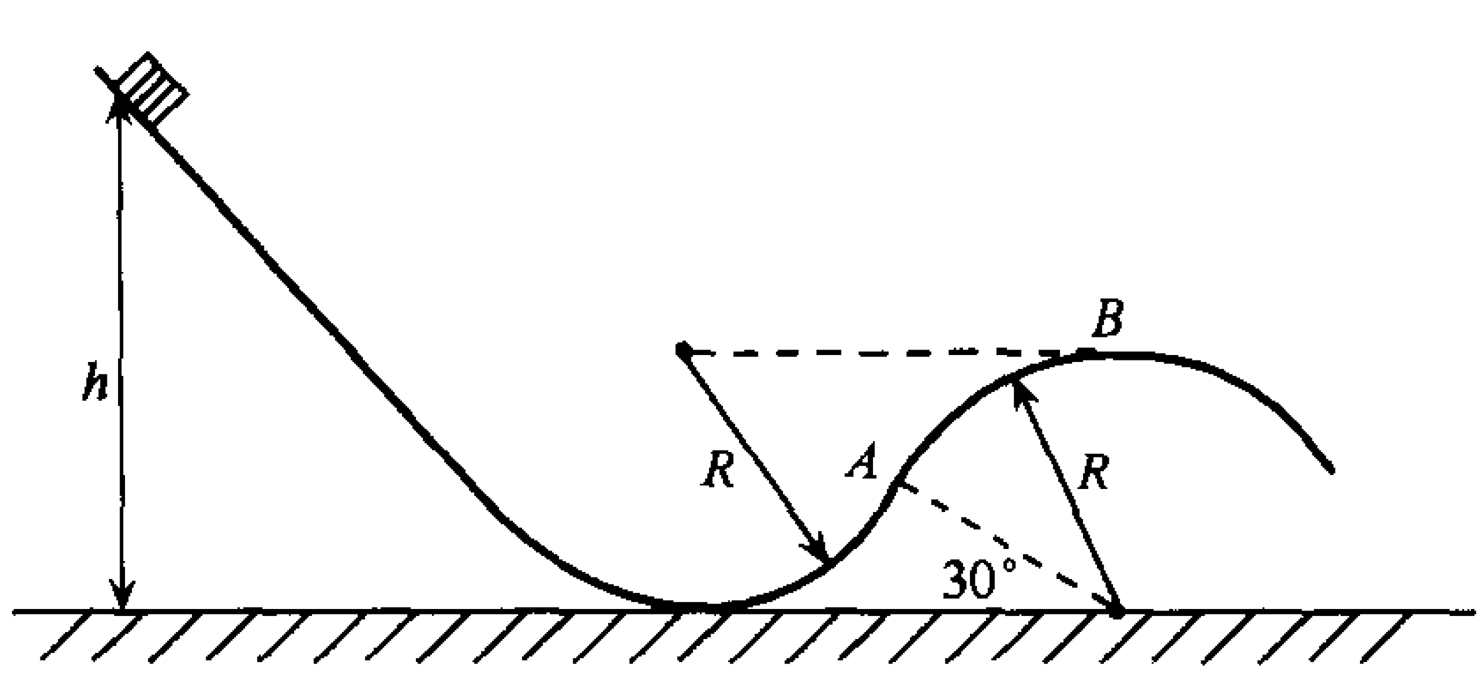


图 2.61

解　开始与轨道脱离接触的位置是拐点 A，在到达 A 点以前，质点要脱离轨道，需要轨道的支持力为零，可这支持力不为零，因此，到达 A 点以前不可能脱离轨道. 另一方面，如在 A 点未脱离轨道，则在 A 到 B 的过程中，因速率减小，而重力的法向分量增大，轨道的支持力必然增大，自然是不能脱离轨道的. 过 B 点以后，直到与 A 同样高度处，根据对称性考虑，也和从 A 到 B 的过程一样，不能脱离轨道. 再以后脱离轨道是可能的. 问题是发生脱离轨道情况的最小的 h 多大？开始脱离轨道的位置是在 A 点还是别处？

现考虑在 A 点开始脱离轨道需要的最小高度 h. 先求在 A 点脱离时所需的最小速率 v，

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos 60° = \frac{1}{2}mg$$

$$v^2 = \frac{1}{2}gR$$

由机械能守恒，

$$mgh = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}gR\right) + mgR\sin 30°$$

$$h = \frac{3}{4}R$$

要越过轨道高度的极大值 B 点，h 必须大于 R. 可见，发生脱离轨道的最小 h 值为 $\frac{3}{4}R$，开始脱离轨道的位置只能是 A 点.

2.2.22　一个转动的球形行星，其赤道上的点的速率为 V，赤道上的 g 是两极处 g 的一半. 问粒子从极点逃逸的逃逸速度多大？

解　若用 g 和 g' 分别表示极点和赤道处的重力加速度和表观重力加速度.

在极点，
$$mg = \frac{GMm}{R^2} \tag{1}$$
其中 M、R 分别是行星的质量和半径，m 是质点质量.

在赤道，
$$\frac{mV^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} - N = \frac{GMm}{R^2} - mg' \tag{2}$$

$$g' = \frac{1}{2}g \tag{3}$$

其中 N 是行星表面对质点的支持力，其反作用力是表观重力.

由式(1)、(2)、(3)可得

$$g = \frac{2V^2}{R}$$

取无穷远处行星的引力势能为零，在行星表面的引力势能为 $-\frac{GmM}{R}$（对质量 m 的质点而言），设在极点的逃逸速度为 v，它是对行星参考系的相对速度，也是对惯性参考系（静系）的绝对速度，对惯性系用机械能守恒定律，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} = 0$$

$$v^2 = \frac{2GM}{R} = 2gR = 4V^2$$

所以
$$v = 2V$$

2.2.23 一跳伞员在 3000m 高处起跳. 在降落伞张开之前他达到一极限速度 30m/s.

(1) 假定空气阻力正比于速度,他达到这个极限速度需多久？达到这个速度时,运行了多少距离？

(2) 为了经受一个不大于 $10g$(g 为重力加速度)的减速度,在他的伞张开以后,当他碰到地面时,速度已降到 3m/s,他弯曲膝部以减缓冲撞,需将膝部弯曲多少？假定他的膝部像弹簧一样具有正比于位移的阻力.

(3) 空气阻力正比于速度的假定是否合理？

解 (1) 根据空气阻力正比于速度的假定,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \alpha v$$

积分得
$$v = \frac{g}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})$$

$$x = \frac{g}{\alpha}t + \frac{g}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

极限速度 $v_{\max} = \frac{g}{\alpha}$, $t \to \infty$ 才能达到此极限速度,运行距离为 $x \to \infty$.

(2) 在跳伞员碰到地面以后,空气阻力的减速作用是可以忽略的.

设膝部弯曲 ξ 时具有势能为 $\frac{1}{2}k\xi^2$,则碰地时开始弯曲,弯曲 ξ 时,动能降为零,由机械能守恒,

$$\frac{1}{2}k\xi^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg\xi \tag{1}$$

又由最大减速不大于 $10g$ 的条件,有

$$mg - k\xi = ma = -10mg \tag{2}$$

由式(2)解出 $k = \frac{11mg}{\xi}$,代入式(1)得

$$\xi = \frac{v^2}{9g} = 0.102\mathrm{m}$$

(3) 在空气阻力正比于速度的假定下,需运行无穷远的距离,经无穷长的时间才能达到极限速度,实际上运行距离不到 3000m,所需时间也是有限的,就到达极限速度 30m/s,说明所述假定与实际不符.

2.2.24 一个光滑球固定在水平面上,一个点粒子在最高点从静止开始沿球面滑下. 令球的半径为 R,描述粒子落到平面以前的路径(见图 2.62).

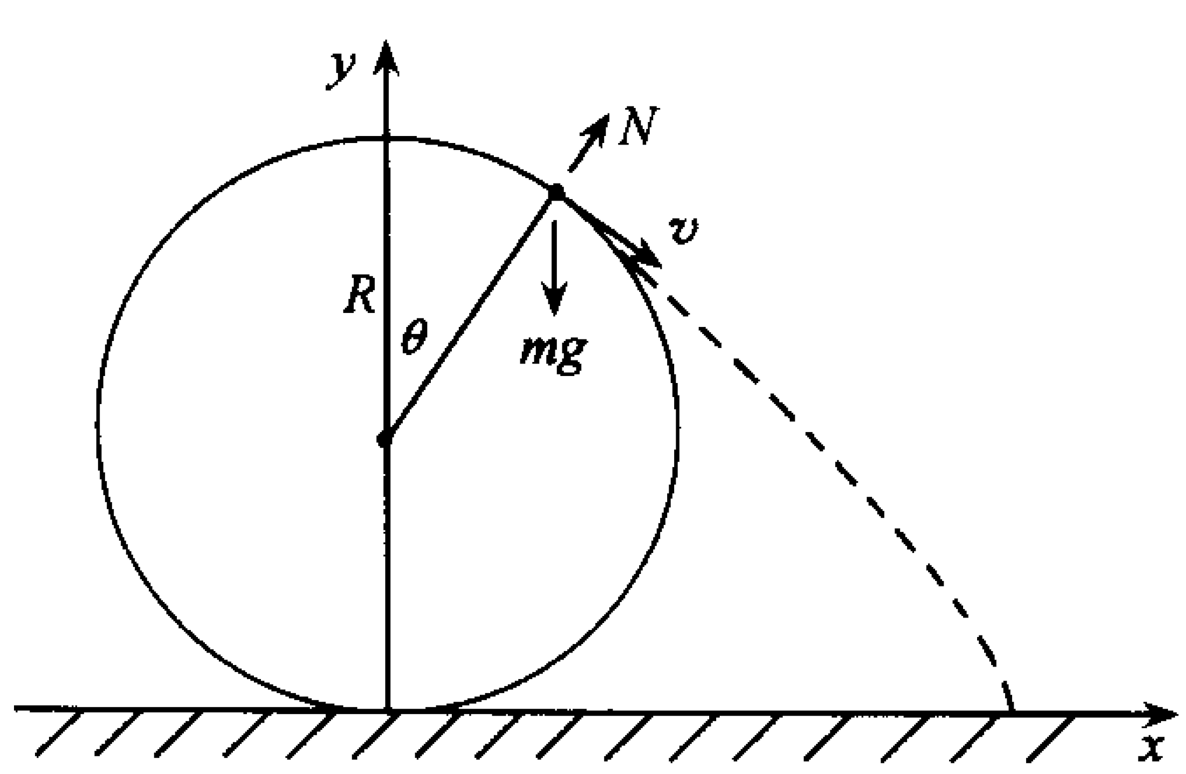


图 2.62

解 粒子在离开球面以前,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

离开球面时，$N=0$，此时

$$\frac{v^2}{R}=2g(1-\cos\theta)$$

$$\frac{v^2}{R}=g\cos\theta$$

解得 $\theta=\arccos\frac{2}{3}=48.2°$，$v=\sqrt{\frac{2}{3}gR}$.

在 $\theta=48.2°$时粒子离开球面，以$\sqrt{\frac{2}{3}gR}$的速率朝水平线向下 48.2°的方向做抛物运动，落到平面以前，运动轨道为抛物线.

粒子运动的路径可定量描述如下：

在 $0\leqslant\theta\leqslant48.2°$期间，粒子运动轨道为圆，轨道方程为

$$x^2+(y-R)^2=R^2,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{5}}{3}R$$

此后运动轨道为抛物线，设离开球面时为 $t=0$，轨道的参数方程为

$$x=\left(\sqrt{\frac{2}{3}gR}\cos48.2°\right)t=\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}\right)t$$

$$y=\frac{5R}{3}-\left(\sqrt{\frac{2}{3}gR}\sin48.2°\right)t-\frac{1}{2}gt^2=-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}\right)t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{5}{3}R$$

消去 t 可得不含参数的轨道方程：

$$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{27}{16R}x^2+\frac{5}{3}R,\quad \frac{\sqrt{5}}{3}R\leqslant x\leqslant\frac{4}{27}(\sqrt{50}-\sqrt{5})R$$

或

$$x^2+(y-R)^2=R^2,\quad \frac{5}{3}R\leqslant y\leqslant 2R$$

$$y=\frac{5}{3}R-\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{27}{16R}x^2,\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{5}{3}R$$

2.2.25 若在北京和天津间用一条直的地下铁道联结，如图 2.63 所示，两市间的火车在地球引力作用下运行，两市间直线距离为 130km，地球半径 $R=6400$km. 忽略摩擦，计算火车的最大速度以及从北京到天津坐此火车所需的时间.

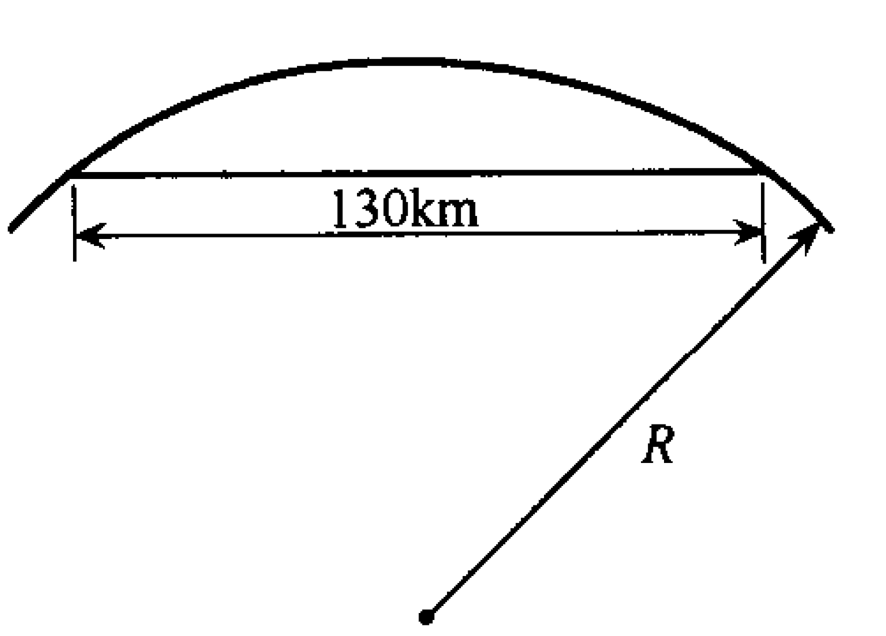


图 2.63

解 方法一：由 2.1.78 题求得质量为 m 的质点在地球内外受到地球的引力为

$$\boldsymbol{F}=\begin{cases}-\dfrac{GMm}{R^3}r\boldsymbol{e}_r & 0\leqslant r\leqslant R\\ -\dfrac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r & r\geqslant R\end{cases}$$

其中 M 为地球质量，R 为地球半径.

由此可计算质点 m 在地球内部的引力势能，

$$V(r)=\int_r^R\left(-\frac{GMm}{R^3}r\right)\mathrm{d}r+\int_R^\infty\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{GMm}{2R^3}(R^2-r^2)-\frac{GMm}{R}=\frac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^2)$$

由机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^2)=-\frac{GMm}{R}$$

解得

$$v^2=\frac{GM}{R^3}(R^2-r^2)=g\,\frac{R^2-r^2}{R}$$

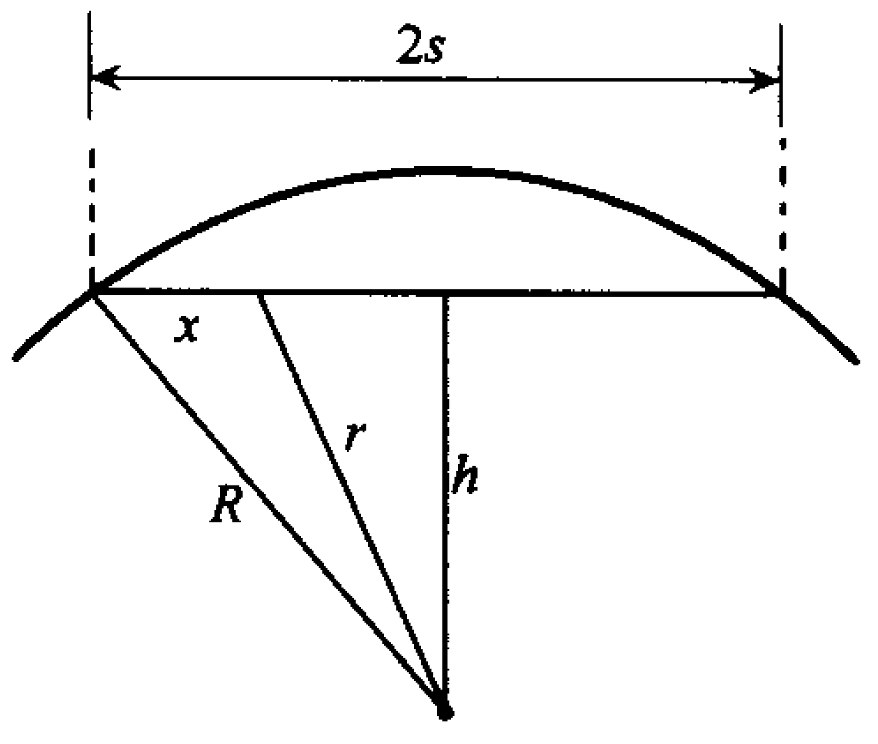


图 2.64

由图 2.64 可得

$$r^2=h^2+(s-x)^2=(R^2-s^2)+(s-x)^2$$
$$=R^2-2sx+x^2$$

所以 $v^2=\frac{g}{R}x(2s-x)$

由 $\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x}=0$ 得

$$v_{\max}=v(s)=\sqrt{\frac{g}{R}}s=80.4\mathrm{m/s}$$

从北京到天津所需时间

$$T=\int_0^{2s}\frac{\mathrm{d}x}{v}=\int_0^{2s}\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2s-x)}}$$

用积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{uv}}=\frac{1}{\sqrt{-bb'}}\arctan\sqrt{\frac{-b'u}{bv}}$$

其中 $u=a+bx, v=a'+b'x$.

令 $u=x, v=2s-x, a=0, b=1, a'=2s, b'=-1$,

$$\int_0^{2s}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2s-x)}}=2\arctan\sqrt{\frac{x}{2s-x}}\Bigg|_{x=0}^{x=2s}=\pi$$

所以

$$T=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=\pi\sqrt{\frac{6400\times10^3}{9.8}}=2539(\mathrm{s})=42.3\mathrm{min}$$

方法二：用牛顿运动第二定律，

$$m\ddot{x}=\frac{GMm}{R^3}r\cdot\frac{s-x}{r}=\frac{GMm}{R^3}s-\frac{GMm}{R^3}x$$

$$\ddot{x}=\frac{g}{R}s-\frac{g}{R}x$$

通解为

$$x=s+A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t+\alpha\right)$$

所需时间 $T=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R}}}=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

初始条件：$t=0$ 时，$x=0$，$\dot{x}=0$，定出 A、α，得

$$x = s - s\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

$$v_{\max} = s\sqrt{\frac{g}{R}}$$

T 与 s 无关，说明在地球上任何两个城市间铺设这样的地下铁道，运行时间都一样，火车运行中的最大速度是与 s 有关的.

2.2.26　估计一下通过跳跃就能脱离的小行星多大.

解　一般来说，跳跃前人们总要弯曲他的膝盖使身体的重心降低约 50cm，然后跳起能使重心比正常高度高出 60cm，则在此跳跃中人能产生的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(0.50 + 0.60) \tag{1}$$

其中 m 是人的质量，g 是地球表面的重力加速度.

设小行星半径为 R、质量为 M，并设小行星的密度与地球相同.

$$M = M_e\left(\frac{R}{R_e}\right)^3 \tag{2}$$

其中 M_e、R_e 分别为地球的质量和半径.

跳跃能脱离小行星的条件是

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \tag{3}$$

又知

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} \tag{4}$$

由式(1)、(2)、(3)、(4)可得

$$R = \sqrt{1.10R_e} = \sqrt{1.1 \times 6.4 \times 10^6} = 2.7 \times 10^3\text{m}$$

其中用了 $R_e=6.4\times10^6$m.

2.2.27　求：(1) 月球表面的重力加速度；(2) 从月球表面出发逃离月球所需的最小速度. 月球质量为 7.35×10^{22}kg，月球半径为 1.74×10^3km.

解　(1) 设 M_m 和 R_m 分别为月球的质量和半径，g_m 为在月球表面的重力加速度.

质量为 m 的物体在月球表面的重力为 mg_m.

$$mg_m = \frac{GM_m m}{R_m^2}$$

所以

$$g_m=\frac{GM_m}{R_m^2}=\frac{6.67\times10^{-11}\times7.35\times10^{22}}{(1.74\times10^6)^2}=1.62\text{m/s}^2$$

(2) 设逃逸速度为 v，逃离条件为

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_m m}{R_m} = 0$$

$$v=\sqrt{\frac{2GM_m}{R_m}} = \sqrt{2g_m R_m} = \sqrt{2 \times 1.62 \times 1.74 \times 10^6}$$

$$= 2.37 \times 10^3\text{m/s}$$

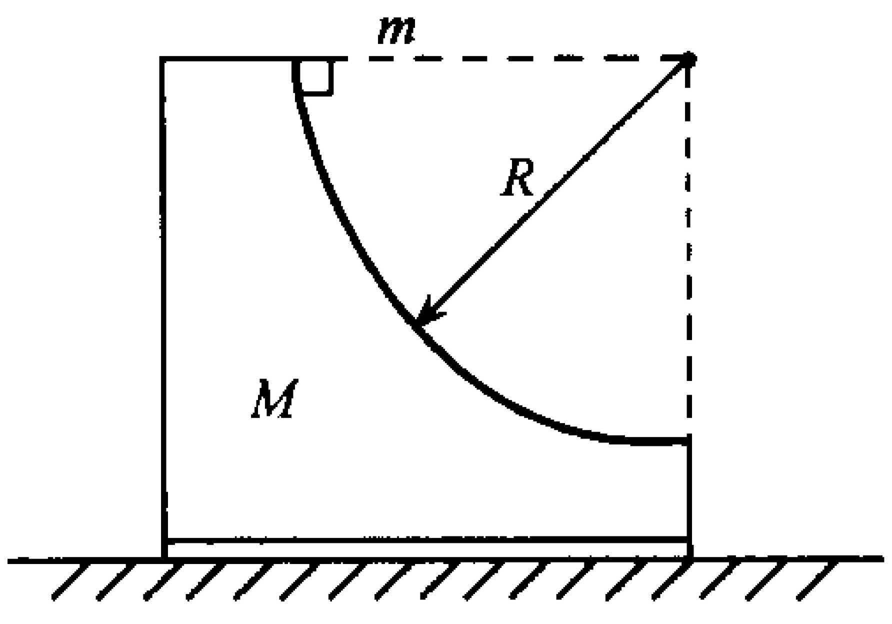


图 2.65

2.2.28　一质量为 m 的质点从置于光滑水平面上的、质量为 M 的光滑的、半径为 R 的弧形槽的顶端滑下，如图 2.65 所示. 开始滑下时，m、M 都是静止的，求质点离开弧形槽时质点和弧形槽的速度.

解　方法一：用质点系动力学理论，m、M 系统在水平方向动量守恒和机械能守恒，可列出下列两个方程：

$$mv + MV = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - mgR = 0 \tag{2}$$

其中 v、V 分别是质点离开弧形槽时质点和弧形槽的速度，均规定向右为正.

解得　$$v=\sqrt{\frac{2MgR}{m+M}},\quad V=-m\sqrt{\frac{2gR}{(m+M)M}}$$

方法二：限于只用质点动力学的理论.

设 $\boldsymbol{N}$ 为弧形槽对质点的作用力，x 轴沿水平向右为正. 对质点、弧形槽分别用动量定理(只写水平方向的分量方程)和动能定理.

$$mv - 0 = \int N_x \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$MV - 0 = \int (-N_x)\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int \boldsymbol{N}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{m}} + mgR \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}MV^2 - 0 = \int (-\boldsymbol{N})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}} \tag{6}$$

式(3)+式(4)即得式(1)，式(5)+式(6)可得式(2)，其中用了

$$\int \boldsymbol{N}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{m}} + \int (-\boldsymbol{N})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}} = \int \boldsymbol{N}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{m}} - \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}) = \int \boldsymbol{N}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{mM}} = 0$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{mM}}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{m}}-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}$ 是质点对弧形槽的相对位移，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{mM}}$沿弧形槽的切线方向，任何时刻都有

$$\boldsymbol{N} \perp \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{mM}},\qquad \boldsymbol{N}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{mM}} = 0$$

2.2.29　如图 2.66 所示，小球质量为 m，连接在绕水平轴 O 旋转的 BD 杆的 D 端，连杆 BC 穿过绕 A 点转动的套筒，并能在其内滑动，劲度系数为 k 的弹簧套在 BC 杆的 AC 段，当球下降时压缩弹簧，$\theta=60°$的位置时，弹簧无伸缩. 从此位置静止释放，求 $\theta=90°$时 BC 杆的角速度. 设 BC 杆及 BD 杆的质量及各处摩擦可略去不计.

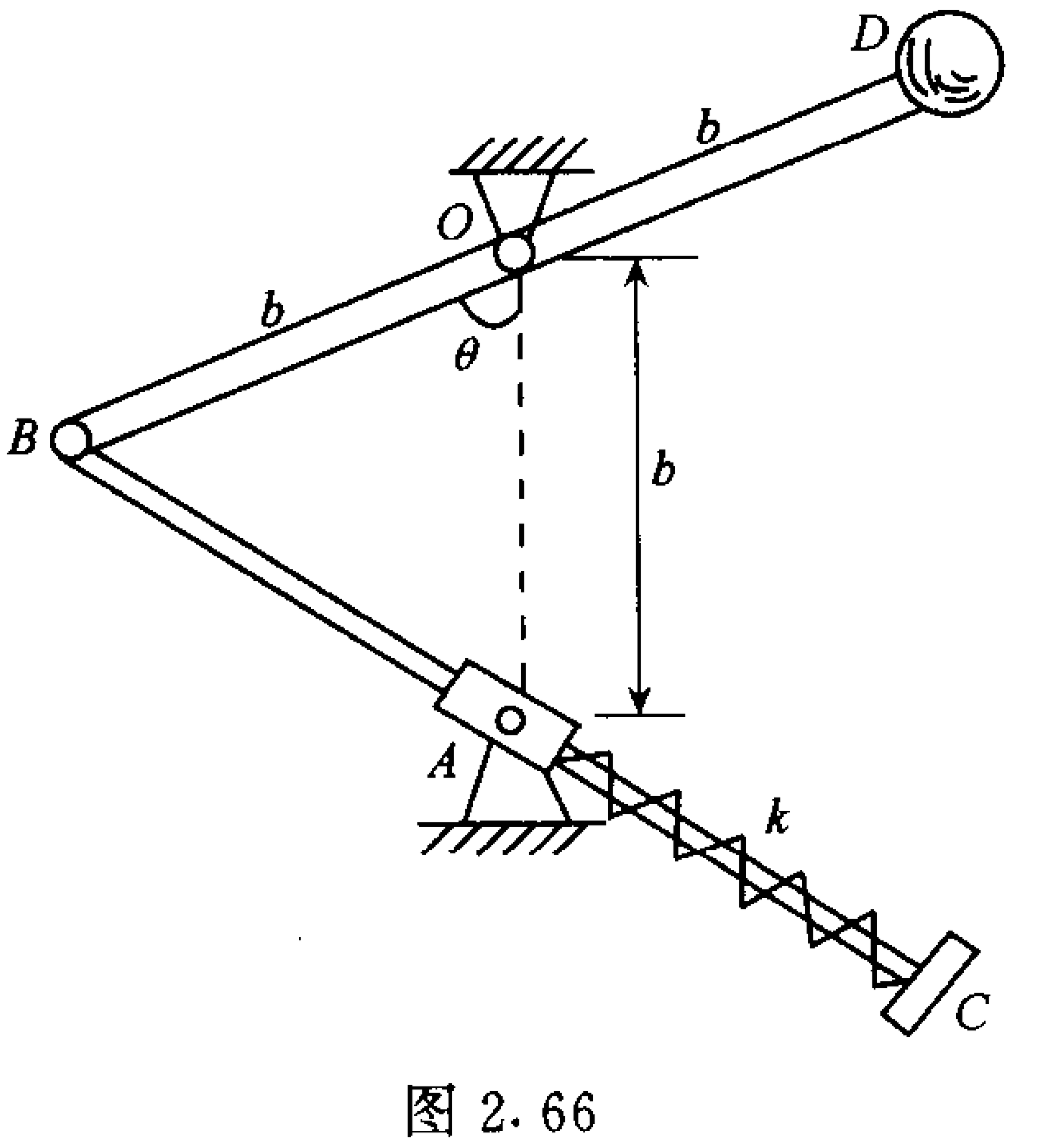


图 2.66

解　方法一：用质点的机械能定理.

至终态时，弹簧的压缩量等于 BA 段的增量，取终态时的位置，小球的重力势能为零，弹簧在初态时无伸缩，取为弹簧势能的零点.

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(\sqrt{b^2+b^2}-b)^2=mgb\cos 60°$$

解得终态时小球向下的速度也即 B 点向上的速度

$$v=\sqrt{gb-\frac{kb^2(3-2\sqrt{2})}{m}}$$

在终态 $\theta=90°$时，BC 杆的位置及此时 B 点的速度及杆上与 A 点重合的点的速度如图 2.67 所示，此时而且任何时刻 BC 杆上与 A 重合的点受套筒约束，其速度总是沿套筒的方向. 此时，BC 杆必绕上述两点速度的垂线的交点 D 转动，BD 距离为 $2b$，故 BC 杆此时的角速度为

$$\omega_{BC}=\frac{v}{2b}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}-\frac{k(3-2\sqrt{2})}{m}}$$

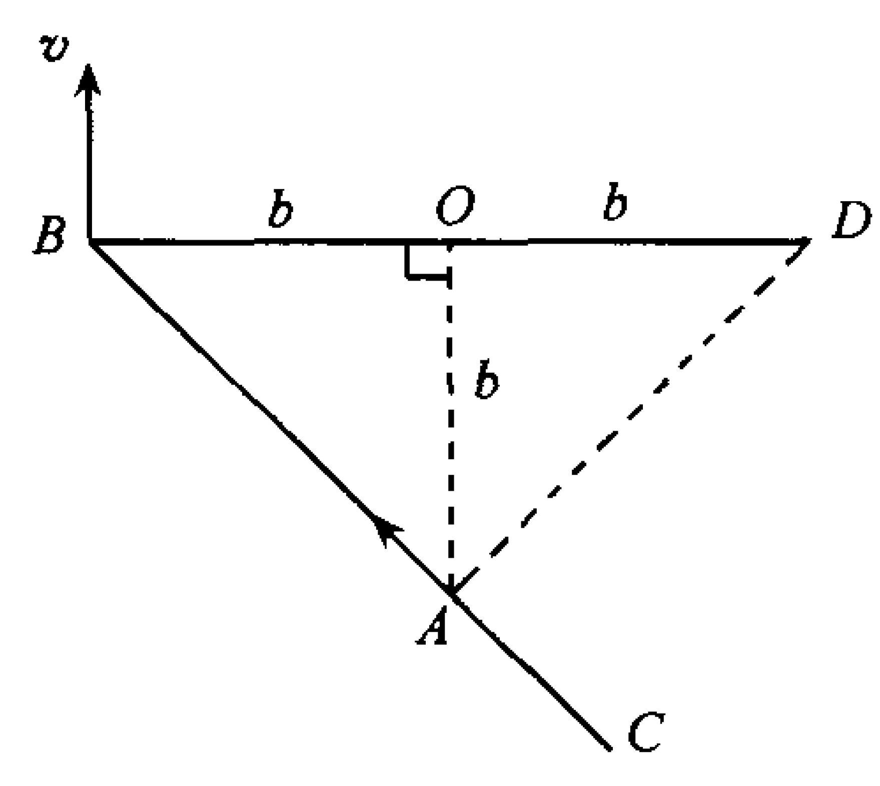


图 2.67

方法二：上面求 ω_{BC}的方法用了刚体平面平行运动求瞬心的办法. 现用相对运动的知识求 ω_{BC}.

取此时以与 A 重合的 BC 杆上的点的速度作平动的参考系，B 点的绝对速度等于牵连速度和相对速度的矢量和，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

$\boldsymbol{v}_e$ 即图 2.67 中画在 A 点的沿 AB 方向的速度，它与$\boldsymbol{v}$的夹角为 45°，$\boldsymbol{v}_r$ 是 B 点围绕与 A 重合的点以角速度 ω_{BC}转动的线速度，$\boldsymbol{v}_r$ 与$\boldsymbol{v}$的夹角也是 45°，

$$v_r=\omega_{BC}\cdot\sqrt{b^2+b^2},\qquad v_r=v\cos 45°$$

可得
$$\omega_{BC}=\frac{v}{2b}.$$

2.2.30　求质量为 m 和具有能量 E 的质点在势场 $V=V_0\tan^2 ax$（式中 V_0 和 a 为常量）中做一维运动的周期.

解
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V_0\tan^2 ax=E$$

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{2(E-V_0\tan^2 ax)}{m}}$$

$$\int\sqrt{\frac{2}{m}}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V_0\tan^2 ax}}=\int\frac{\cos ax\mathrm{d}x}{\sqrt{E\cos^2 ax-V_0\sin^2 ax}}$$
$$=\frac{1}{a\sqrt{E}}\int\frac{\mathrm{d}\sin ax}{\sqrt{1-\frac{E+V_0}{E}\sin^2 ax}}=\frac{1}{a\sqrt{E+V_0}}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

其中 $u=\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}\sin ax$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t-t_0)=\frac{1}{a\sqrt{E+V_0}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}\sin ax\right)$$

$$\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}\sin ax=\sin\left[a\sqrt{\frac{2(E+V_0)}{m}}(t-t_0)\right]$$

$$x=\frac{1}{a}\arcsin\left\{\sqrt{\frac{E}{E+V_0}}\sin\left[a\sqrt{\frac{2(E+V_0)}{m}}(t-t_0)\right]\right\}$$

显然运动周期 T 为

$$T=2\pi\bigg/a\sqrt{\frac{2(E+V_0)}{m}}=\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{2m}{E+V_0}}$$

2.2.31　一根长度为 a 的不可伸长的轻绳,一端连着一个质量为 m 的粒子 P,另一端连着一个质量为 $\frac{3}{2}m$ 的环 Q,此环穿在一根固定的粗糙的水平的金属丝上. 从环和粒子处于平衡的状态给粒子一个沿水平方向的速度 $\sqrt{2ag}$,证明:在小环不在金属丝上滑动的情况下,绳中张力为 $3mg\cos\theta$,其中 θ 是绳子与铅垂线间的夹角;并证明:如环与金属丝间摩擦因数大于 $\frac{1}{\sqrt{3}}$,环就不会滑动.

证明　在小环不在金属丝上滑动的情况下,粒子运动时机械能守恒,

$$\frac{1}{2}mv^2+mga(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m(\sqrt{2ga})^2 \tag{1}$$

再列自然坐标的法向方程,

$$\frac{mv^2}{a}=T-mg\cos\theta \tag{2}$$

从式(1)、(2)两式解得

$$T=3mg\cos\theta$$

环受到四个力:重力 $\frac{3}{2}mg$;金属丝的支持力 N;金属丝给予的静摩擦力 f 和绳子张力 T. 环在金属丝上不滑动的条件是始终有最大静摩擦大于等于绳子张力在水平方向上的分量.

$$\mu N\geqslant T\sin\theta$$

今

$$N=\frac{3}{2}mg+T\cos\theta,\quad T=3mg\cos\theta$$

得

$$\mu\geqslant\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+2\cos^2\theta}$$

对运动过程中经历的一切 θ 值均成立,即要在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 区间内,

$$\mu\geqslant\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+2\cos^2\theta}\right)_{\max}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+2\cos^2\theta}\right)=0$$

得

$$\cos2\theta=-\frac{1}{2},\qquad \theta=\frac{1}{3}\pi$$

$$\mu\geqslant\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+2\cos^2\theta}\bigg|_{\theta=\frac{1}{3}\pi}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

如果在所给的初条件下，能达到的 θ 的最大值小于 $\frac{1}{3}\pi$，μ 可以再小些，因此需计算在此初条件下的 θ_{max}，

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{2ga})^2 = mga(1-\cos\theta_{max})$$

得
$$\cos\theta_{max}=0,\quad \theta_{max}=\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{3}.$$

2.2.32　一质点自一光滑的抛物线上一点 Q 自由滑下，该点在轴线上方 h 处，抛物线的方程为 $y^2=2px$，y 轴竖直向上. 问质点滑至何处时，曲线对质点的约束力将改变符号(求出此点的 y 坐标满足的方程即可).

解　约束力改变符号处，约束力为零，设此点为 A 点，如图 2.68 所示. 在此处，用自然坐标，写出运动微分方程的法向方程：

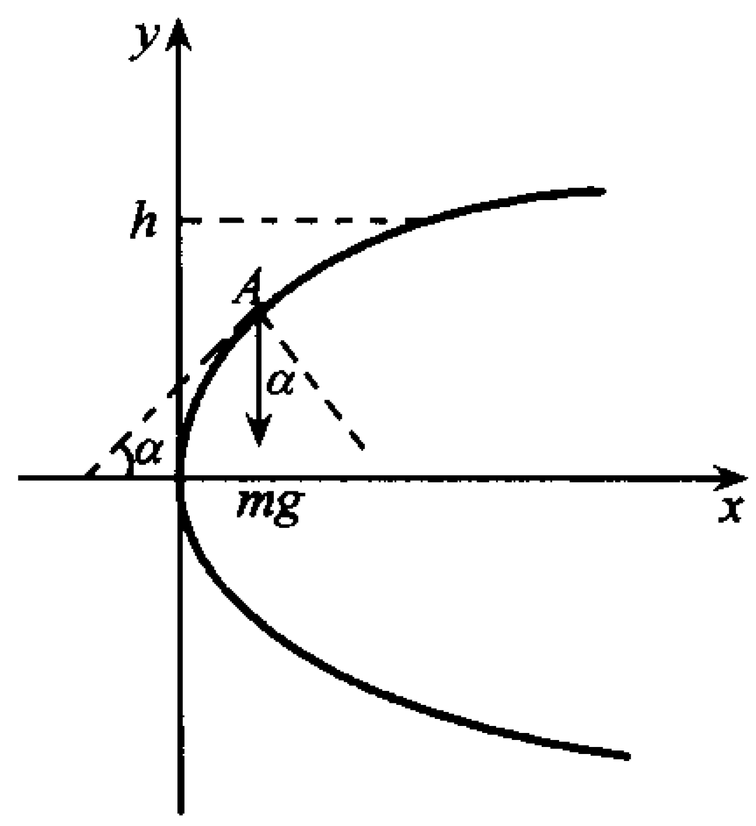


图 2.68

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\cos\alpha \tag{1}$$

由机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

$$v^2 = 2g(h-y) \tag{2}$$

用曲率半径公式：$\rho=\dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}|}$

$$\dot{x}=\frac{dx}{dy}\dot{y}=x'\dot{y},\quad \ddot{x}=\frac{d^2x}{dy^2}\dot{y}^2+x'\ddot{y}=x''\dot{y}^2+x'\ddot{y}$$

ρ 的公式可改写为

$$\rho = \left|\frac{(1+x'^2)^{3/2}}{x''}\right|$$

今
$$x'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}y,\qquad x''=\frac{1}{p}$$

$$\rho = \left|\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{3/2}\Big/\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{p^2}(p^2+y^2)^{3/2} \tag{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{p}{y}$$

可得
$$\cos\alpha = \frac{y}{(p^2+y^2)^{1/2}} \tag{4}$$

将式(2)、(3)、(4)代入式(1)，即得曲线对质点的约束力改变符号的点的 y 坐标满足的代数方程

$$y^3 + 3p^2y - 2p^2h = 0$$

2.2.33　一个质点在恒定的重力作用下在 xy 平面内运动，重力沿 y 轴负方向. 找出该二维运动的四个独立的运动常数，其中有三个独立的运动常数不显含时间.

解
$$m\ddot{x}=0,\quad m\ddot{y}=-mg$$

立即可得，
$$\dot{x}=c_1,\dot{y}+gt=c_2$$

由机械能守恒，
$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mgy=c$$
可得
$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+2gy=c_3$$
由 $\ddot{y}=\frac{\mathrm{d}\,\dot{y}}{\mathrm{d}x}\dot{x}$,　$\ddot{y}=-g$,得
$$\dot{x}\mathrm{d}\,\dot{y}=-g\mathrm{d}x$$
由 $\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\,\dot{x}}{\mathrm{d}y}\dot{y}$,　$\ddot{x}=0$,得
$$\dot{y}\mathrm{d}\,\dot{x}=0$$
上述两式相加，
$$\dot{x}\,\mathrm{d}\,\dot{y}+\dot{y}\,\mathrm{d}\,\dot{x}=-g\mathrm{d}x$$
积分得
$$\dot{x}\dot{y}+gx=c_4$$

2.2.34　当一个正在收缩的星体收缩到它的 Schwarzschild 半径 R_s 以下时，它变成一个黑洞，光和任何粒子都不能逃离它. 导出 R_s 和它的质量 M 的关系.

解　一个质量为 m 的粒子从星体逃逸所需的最小速率设为 v，
$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=0$$
$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$
其中 R 是星体的半径.

将粒子的逃逸速率 v 换成光在真空中的传播速度 c，所得的 R 即为 R_s，
$$c=\sqrt{\frac{2GM}{R_s}},\quad R_s=\frac{2GM}{c^2}$$
在 $R=R_s$ 时，任何粒子都不能逃离，$R<R_s$ 时，光也不能逃离.

2.3　质点的角动量定理和角动量守恒定律

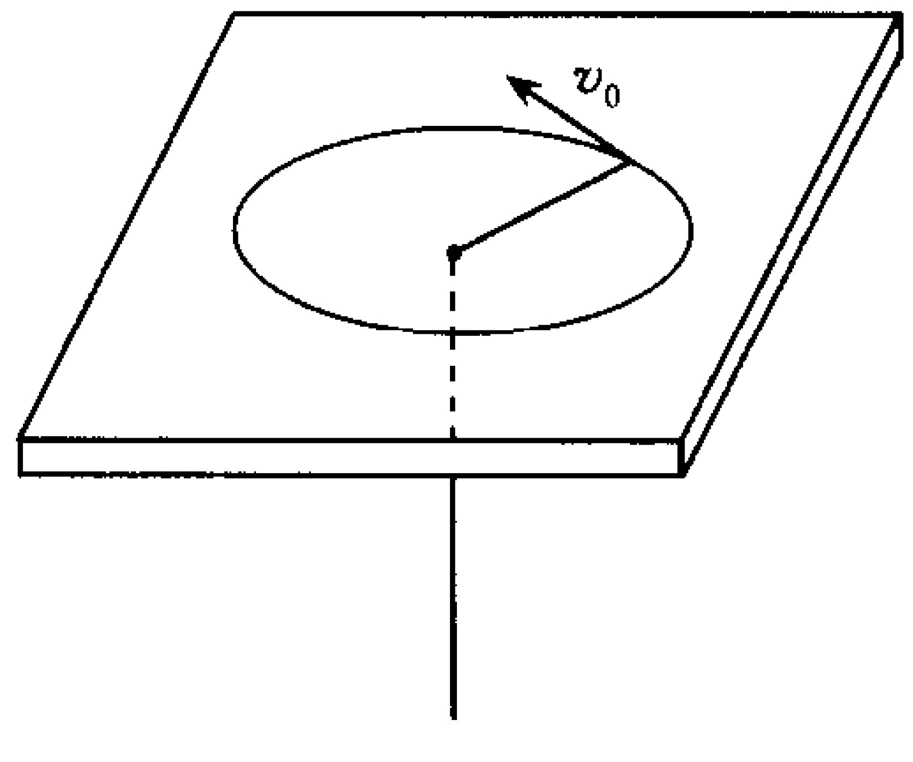


图 2.69

2.3.1　一质量为 m 的质点在光滑水平面上以速率 v_0 做半径为 R_0 的圆周运动. 该质点系在一根不可伸长的轻绳上，绳子又穿过该平面上的一个光滑小孔，如图 2.69 所示.

(1) 绳中的张力多大?

(2) 质点对小孔的角动量多大?

(3) 质点的动能多大?

(4) 若使绳中的张力逐渐地增大，最后使质点做半径为 $\frac{1}{2}R_0$ 的圆周运动，质点最终的动能多大?

(5) 如果张力不是逐渐增大，上问的答案还对吗?

解　(1) $T=\frac{mv_0^2}{R}$

(2) $J=mv_0R_0$

(3) $T=\frac{1}{2}mv_0^2$

(4) 质点对小孔的角动量守恒，设当半径为$\frac{1}{2}R_0$时质点的速率为v_1，动能为T_1，则

$$mv_1\cdot\frac{1}{2}R_0=mv_0R_0,\qquad v_1=2v_0$$

$$T_1=\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m(2v_0)^2=2mv_0^2$$

(5) 如果张力不是逐渐增大，不影响角动量守恒关系，因此当半径减小到$\frac{1}{2}R_0$时，$v_1=2v_0$仍然是对的，但张力不是逐渐增大，质点的径向速度分量不能忽略，则$T_1=2mv_0^2$没有计算径向速度分量对动能的贡献，因而是不正确的．如果"最终"意味着质点到小孔的距离不再变化（虽然在过程中不是"逐渐"），则$T_1=2mv_0^2$还是对的．

2.3.2 一质量为m的小孩坐在一秋千上，秋千的质量可以忽略，悬挂在一端固定的、长度为l的绳的另一端．小孩的父亲拉他的后背使绳子和铅直方向的夹角为1rad，然后以力$F=mg$沿圆周的切线方向推小孩直到绳子到达铅直位置放开该秋千．问孩子的父亲推秋千用了多少时间？在$\theta<1$rad时可作近似$\sin\theta\approx\theta$.

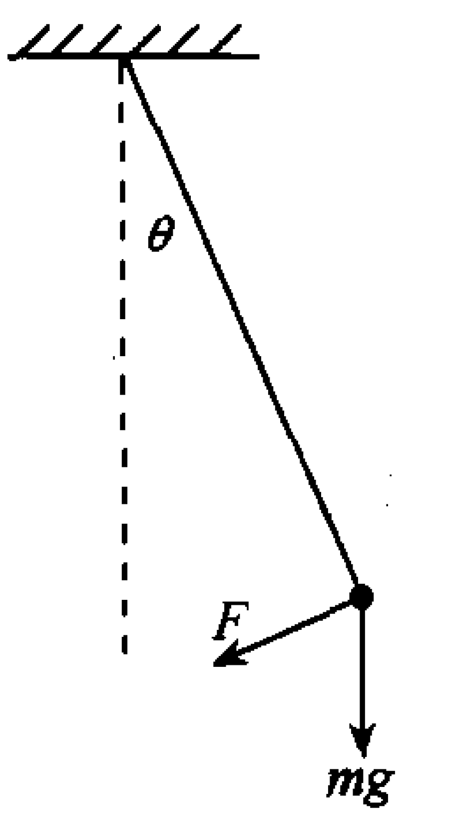


图 2.70

解 用质点对固定点的角动量定理，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\dot{\theta})=-mgl-mgl\sin\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=-\frac{g}{l}$$

令$\omega^2=\frac{g}{l}$，用近似$\sin\theta\approx\theta$，

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=-\omega^2$$

方程的通解为

$$\theta=-1+A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

初始条件：$t=0$时，$\theta=1$，$\dot{\theta}=0$，可得

$$\theta=-1+2\cos\omega t$$

当$\theta=0$时，$\cos\omega t_1=\frac{1}{2}$

$$t_1=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.3.3 一质量为m的质点受到两个力的作用，$\boldsymbol{F}_1=f(r)\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{F}_2=-\lambda\boldsymbol{v}$（$\lambda>0$，为常量），$\boldsymbol{v}$是质点的速度．若该质点初始时对原点的角动量为$\boldsymbol{J}_0$，求以后时刻它对原点的角动量．

解 用质点对原点的角动量定理，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)$$

取 $\boldsymbol{J}_0$ 的方向为 z 轴正向，用柱坐标，根据受力情况、初始条件可以判断，质点限在 xy 平面上运动，对原点的角动量总沿 z 轴正方向，

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = -\lambda r^2\dot{\varphi} = -\frac{\lambda}{m}J$$

满足初始条件 $t=0, J=J_0$ 的解为

$$J = J_0 \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

$\boldsymbol{J}$ 总沿 $\boldsymbol{J}_0$ 的方向，

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

2.3.4 一质量为 m 的粒子，在半顶角为 α 的锥体内表面无摩擦地滑动.

(1) 找出使该质点绕竖直轴做圆轨道运动在初始条件方面的要求；

(2) 说明这种轨道运动是否稳定，何故？

解 (1) 用球坐标，

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = F_r = -mg\cos\alpha \tag{1}$$

在正圆锥内表面运动，$\theta=\alpha$，故 $\dot{\theta}=0$. 要求质点绕竖直轴做圆轨道运动，如圆轨道离锥体顶点距离 l_0，则 $r=l_0, \dot{r}=0, \ddot{r}=0$，上式简化为

$$-ml_0\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha = -mg\cos\alpha$$

可见 $\dot{\varphi}^2$ 应为常量，初速度 $v_0=l_0\sin\alpha\cdot\dot{\varphi}_0$，沿水平方向.

$$(l_0\dot{\varphi}_0\sin\alpha)^2 = gl_0\cos\alpha$$

$$v_0^2 = gl_0\cos\alpha$$

即要求初速度是水平的，v_0 满足上述关系，则粒子在离顶点 l_0 处做绕竖直轴的圆周运动.

(2) 考虑对 $r=l_0$ 的圆周运动给一个微扰，

$$r = l_0 + \Delta r, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \Delta\dot{\varphi}$$

代入(1)式，注意仍有 $\theta=\alpha, \dot{\theta}=0$.

$$\Delta\ddot{r} - (l_0 + \Delta r)(\dot{\varphi}_0 + \Delta\dot{\varphi})^2\sin^2\alpha = -g\cos\alpha$$

用 $l_0\dot{\varphi}_0^2\sin^2\alpha=g\cos\alpha$，略去二级小量 $\Delta r\cdot\Delta\dot{\varphi}$ 及 $(\Delta\dot{\varphi})^2$ 项，得

$$\Delta\ddot{r} - 2l_0\dot{\varphi}_0\sin^2\alpha\cdot\Delta\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0^2\sin^2\alpha\cdot\Delta r = 0 \tag{2}$$

$$\Delta\dot{\varphi} = -\frac{2\dot{\varphi}_0}{l_0}\Delta r \qquad (3)$$

将式(3)代入式(2)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Delta r + 3\dot{\varphi}_0^2\sin^2\alpha \cdot \Delta r = 0$$

其通解为　$\Delta r = A\cos[(\sqrt{3}\dot{\varphi}_0\sin\alpha)t+\beta]$

Δr 始终为一小量，r 的变化在 l_0 附近做小振动，说明粒子的圆周运动是稳定的.

2.3.5 质量分别为 m、$2m$、$3m$、$4m$、$5m$ 的五个质点，用八根长度均为 l 的轻质杆连成图 2.71 所示的锥体，以角速度 ω 绕连接 $4m$ 与 $5m$ 的线转动. 求锥体对 O 点的角动量的 x、y、z 方向的分量.

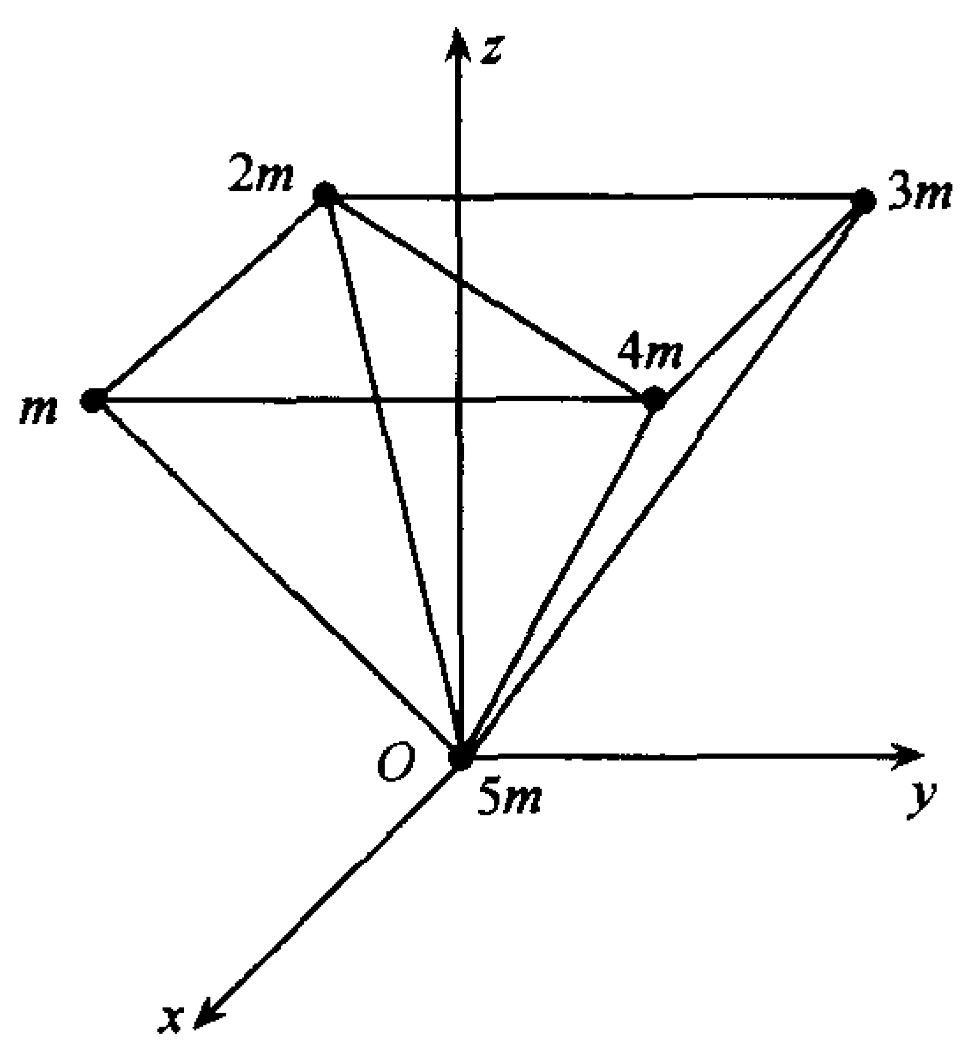


图 2.71

解　$m, 2m, \cdots$ 五个质点的位矢依次用 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$ 表示. 坐标分别为 $\left(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}l\right)$、$\left(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}l\right)$、$\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}l\right)$、$\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}l\right)$、$(0,0,0)$.

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{l}{2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \sqrt{2}\boldsymbol{k}), \qquad \boldsymbol{r}_2 = \frac{l}{2}(-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \sqrt{2}\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \frac{l}{2}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \sqrt{2}\boldsymbol{k}), \qquad \boldsymbol{r}_4 = \frac{l}{2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \sqrt{2}\boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{r}_5 = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{r}_4, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\omega(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \sqrt{2}\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{5}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{5}[\boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{5} m_i[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i)]$$

$$= m\omega l^2\left(\frac{7}{2}\boldsymbol{i} + \frac{5}{2}\boldsymbol{j} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{k}\right)$$

所以　$$J_x = \frac{7}{2}m\omega l^2, \quad J_y = \frac{5}{2}m\omega l^2, \quad J_z = 2\sqrt{2}m\omega l^2$$

2.3.6 一有方向的直线 L，其方向余弦为 l、m、n，且通过点 (a,b,c). 求在 xy 平面上通过原点与 x 轴夹角为 α、与 y 轴夹角为 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的单位矢量对有向直线 L 的矩.

解　这个单位矢量为 $\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$，通过原点，它对点 (a,b,c) 的位矢为 $-(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})$.

单位矢量对点 (a,b,c) 的矩为

$$\boldsymbol{M} = -(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}) \times (\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j})$$

单位矢量对有向直线 L 的矩为

$$M_L = \boldsymbol{M} \cdot (l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k})$$

$$= [-(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})\times(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j})]\cdot(l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k})$$
$$= (cl-an)\sin\alpha+(bn-cm)\cos\alpha$$

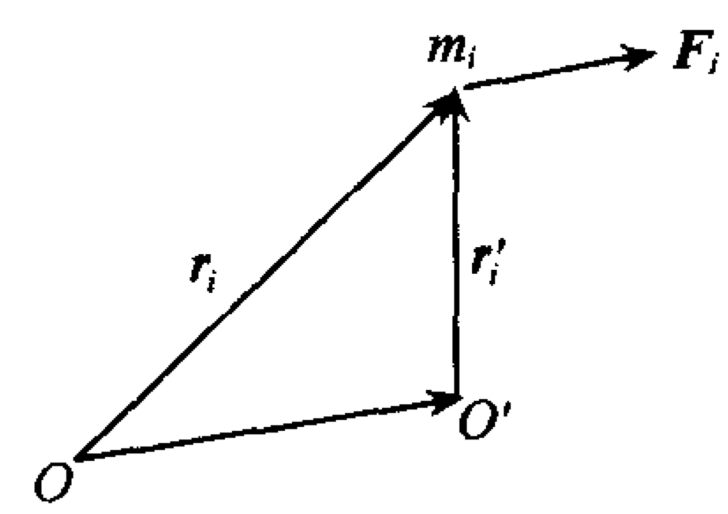


图 2.72

2.3.7 (1) 如果加给 n 个质点的所有力的矢量和等于零，证明：加给这 n 个质点的力矩之矢量和与计算它的参考点(矩心)无关；

(2) 如果 n 个质点的动量之矢量和等于零，证明：这 n 个质点的角动量之矢量和与计算它的参考点(矩心)无关.

证明 (1) 考虑加给 n 个质点对任意点 O' 的力矩，O' 点对原点 O 的位矢为 $\overrightarrow{OO'}$，m_i 对 O' 点的位矢 $\boldsymbol{r}_i'=-\overrightarrow{OO'}+\boldsymbol{r}_i$，如图 2.72 所示.

$$\boldsymbol{M}_{O'}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i=\sum_{i=1}^{n}(-\overrightarrow{OO'}+\boldsymbol{r}_i)\times\boldsymbol{F}_i$$
$$=-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OO'}\times\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$$
$$=-\overrightarrow{OO'}\times\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{M}_O$$

对任意点的力矩都等于对原点的力矩.

(2) 将(1)的证明中的 $\boldsymbol{F}_i$ 改成 $m_i\boldsymbol{v}_i$，$\boldsymbol{M}_{O'}$ 改成 $\boldsymbol{J}_{O'}$，即能得到 $\boldsymbol{J}_{O'}=\boldsymbol{J}_O$.

2.3.8 一个质点在重力作用下，沿一个对竖直轴对称的光滑旋转面上运动. 用柱坐标表示的该旋转面的方程为 $\rho=f(z)$. 如质点在高度 z_1 处，速度是水平的、大小为 v_1，在高度 z_2 处，速度再次是水平的、大小为 v_2. 求 v_1、v_2，把它们写成 z_1、z_2 的函数.

解 用机械能守恒和对 z 轴的角动量守恒，

$$\frac{1}{2}mv_1^2+mgz_1=\frac{1}{2}mv_2^2+mgz_2 \tag{1}$$

$$m\rho_1v_1=m\rho_2v_2$$

即

$$mf(z_1)v_1=mf(z_2)v_2 \tag{2}$$

$$v_2=\frac{f(z_1)}{f(z_2)}v_1 \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)，得

$$v_1^2=\frac{2gf^2(z_2)(z_1-z_2)}{f^2(z_1)-f^2(z_2)}$$

$$v_2^2=\frac{2gf^2(z_1)(z_1-z_2)}{f^2(z_1)-f^2(z_2)}$$

2.3.9 一个原长为 a、弹性模量为 λ 的弹性绳一端固定在一个光滑水平面上的固定点 O，另一端系一个质量为 m 的质点，原先在平面上处于静止，突然给质点施加一个大小为 v、方向垂直于绳的速度，以后运动中，绳被拉伸到最大长度 $3a$. 求质点的初速度 v.

解 弹性绳的劲度系数＝弹性模量/原长，即 $k=\dfrac{\lambda}{a}$.

设绳被拉伸到最大长度时，质点的速度为 v_1，方向与绳垂直，由机械能守恒和对 O 点的角动量守恒.

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}\frac{\lambda}{a}(3a-a)^2=\frac{1}{2}mv^2$$

$$3av_1=av$$

可解出
$$v=\sqrt{\frac{9\lambda a}{2m}}$$

2.3.10　质量为 m、带电量为 e 的点电荷，在强度为 g 的磁单极子场中运动，磁单极子可以看成无限重、位于原点，点电荷受磁单极子的作用力为 $-ge\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$，不计重力.

（1）证明动能 $T=\dfrac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ 是运动积分；

（2）证明 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}+\dfrac{eg}{r}\boldsymbol{r}$ 是运动积分，其中 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times m\,\dot{\boldsymbol{r}}$；

（3）利用上述 $\boldsymbol{L}$ 是运动积分，证明这个带电粒子的运动轨道在一个半顶角为 α 的圆锥面上，$\boldsymbol{L}$ 是该圆锥的对称轴，α 满足 $\cos\alpha=\dfrac{eg}{|\boldsymbol{L}|}$.

提示：考虑 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}$.

证明　（1）$m\,\ddot{\boldsymbol{r}}=-ge\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\right)=m\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot m\,\ddot{\boldsymbol{r}}$$

$$=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\left(-ge\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-ge\frac{\boldsymbol{r}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3}=0$$

上式积分，$T=\dfrac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})=$常量.

（2）
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\times m\,\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{eg}{r}\boldsymbol{r}\right)$$

$$=\dot{\boldsymbol{r}}\times m\,\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{r}\times m\,\ddot{\boldsymbol{r}}+eg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$=\boldsymbol{r}\times\left(-ge\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)+eg\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{1}{r^2}\dot{r}\,\boldsymbol{r}\right)$$

$$=-ge\left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3}\right]+eg\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\dot{r}\,\boldsymbol{r}}{r^2}\right)$$

$$=-ge\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{r\,\dot{r}\,\boldsymbol{r}}{r^3}\right)+eg\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\dot{r}\,\boldsymbol{r}}{r^2}\right)=0$$

其中用了 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}=r\,\dot{r}$$

所以
$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}+eg\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\text{常矢量}.$$

（3）
$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\cdot\left(\boldsymbol{J}+\frac{eg}{r}\boldsymbol{r}\right)=egr\tag{1}$$

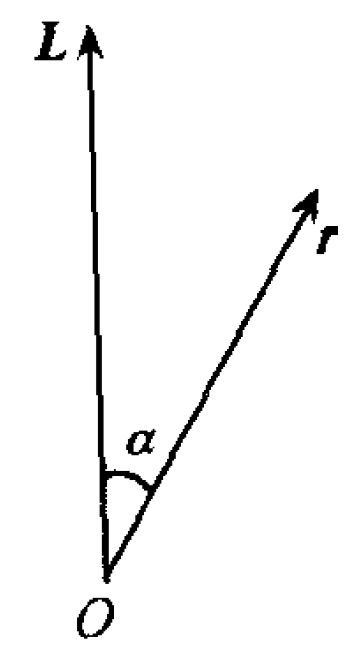


图 2.73

其中用了 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times m\,\dot{\boldsymbol{r}})=0$.

设 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{L}$ 的夹角为 α，如图 2.73 所示，

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}=r|\boldsymbol{L}|\cos\alpha \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)，

$$\cos\alpha=\frac{egr}{r|\boldsymbol{L}|}=\frac{eg}{|\boldsymbol{L}|}=\text{常量},$$

$$\alpha=\arccos\frac{eg}{|\boldsymbol{L}|}=\text{常量}$$

由图可见，点电荷的运动轨道在 $\boldsymbol{L}$ 为对称轴、半顶角为 $\alpha\left(=\arccos\dfrac{eg}{|\boldsymbol{L}|}\right)$ 的圆锥面上.

2.3.11 两个同轴的长半圆筒，其截面如图 2.74 所示，分别带正、负电，使其间电场为 $\boldsymbol{E}=\dfrac{k}{r}\boldsymbol{e}_r$，($k$ 为常量)，一质量为 m、带电 $-q(q>0)$ 的粒子，从左方以垂直半圆筒的轴和垂直半径方向的速度 $\boldsymbol{v}$ 进入两极之间，如图 2.74 所示. 粒子将在图平面内运动.

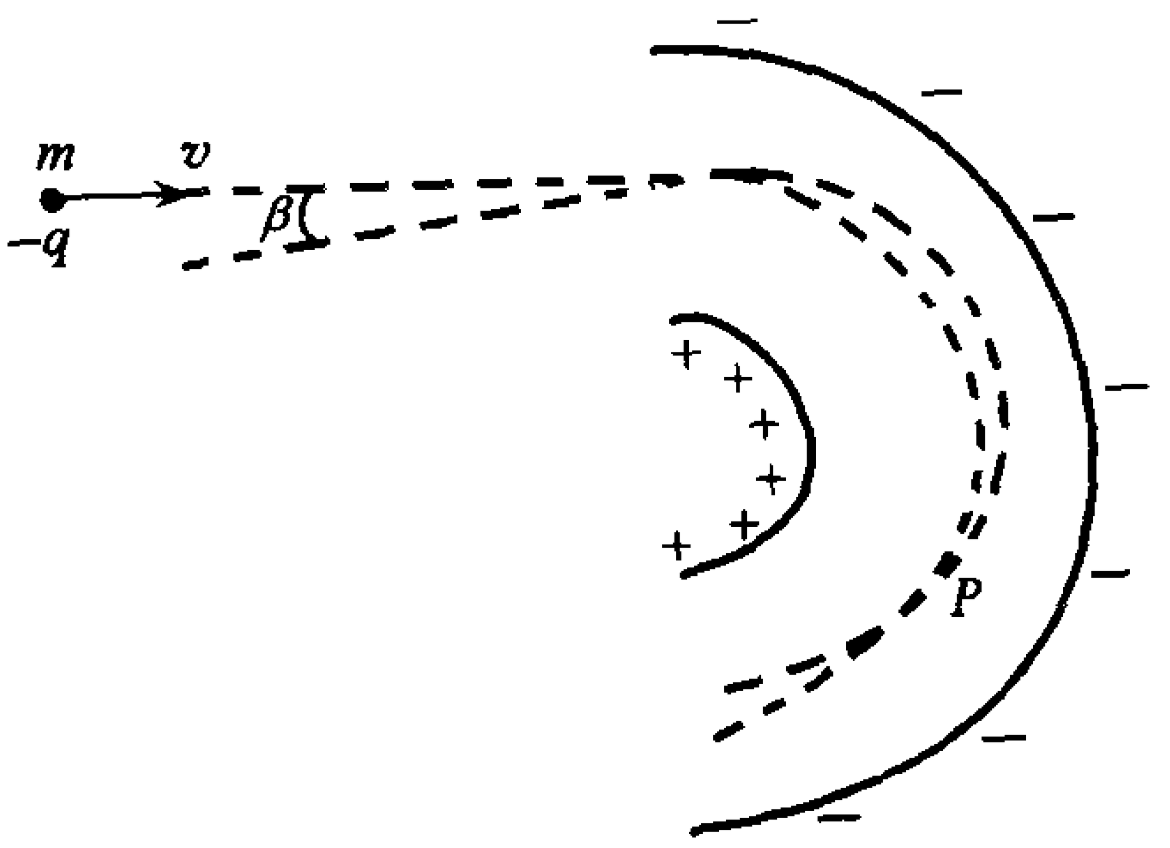


图 2.74

(1) 如果粒子在两极间沿圆轨道运动，其轨道半径 r 多大?

(2) 假定粒子进入场区时，离轴的距离 r 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小均与(1)中相同，但 $\boldsymbol{v}$ 的方向偏离一个小角 β. 新轨道与(1)中的轨道将再次相交于 P 点，P 点的位置与 β 无关，求出 P 点的位置(粒子进入场区时仍没有轴向的分速度，仍在图平面内运动).

(3) 如果把电场改为平行于半圆筒轴的均匀磁场，粒子沿圆轨道运动，轨道半径 r 多大?

解 用平面极坐标，原点取在粒子运动平面(图平面)与两半圆筒的轴的交点.

(1)
$$m\frac{v^2}{r}=qE=\frac{qk}{r}$$

$$v^2=\frac{qk}{m}$$

可见，只要速度满足上式的关系，则它能以入射时的任意半径在两极间做圆周运动.

(2) 对于有 β 角偏离的新轨道，粒子进入场区后，由能量守恒和对原点的角动量守恒，

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+qk\ln\frac{r}{r_0}=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

其中 $qk\ln\frac{r}{r_0}$ 是带电粒子的电势能，取 $r=r_0$ 处为势能零点.

$$V(r)=-\int_{r_0}^{r}(-q)\frac{k}{r}\mathrm{d}r=qk\ln\frac{r}{r_0}$$

$$mr^2\dot{\varphi}=mr_0v\cos\beta\approx mr_0v \tag{2}$$

（β 很小，$\cos\beta\approx1-\frac{1}{2}\beta^2+\cdots$，略去二级及二级以上小量，$\cos\beta\approx1$）.

$$r=r_0+\delta r$$

$$\dot{\varphi}=\frac{r_0v}{r^2}=\frac{v}{r_0}\frac{1}{\left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right)^2}$$

$$\dot{\varphi}^2=\left(\frac{v}{r_0}\right)^2\left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right)^{-4}=\left(\frac{v}{r_0}\right)^2\left[1-4\frac{\delta r}{r_0}+10\left(\frac{\delta r}{r_0}\right)^2\right]$$

$$\ln\frac{r}{r_0}=\ln\left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right)=\frac{\delta r}{r_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta r}{r_0}\right)^2$$

在写 $\dot{\varphi}^2$、$\ln\frac{r}{r_0}$ 的近似式时均保留到二级小量，因为将它们代入到式(1)中时，一级小量项为零.

代入式(1)，整理后得

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{mv^2}{r_0^2}-\frac{qk}{2r_0^2}\right)(\delta r)^2+\left(\frac{qk}{r_0}-\frac{mv^2}{r_0}\right)\delta r=0$$

用上问得到关系 $v^2=\frac{qk}{m}$，上式简化为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v}{r_0}\right)^2(\delta r)^2=0$$

两边对 t 求导，

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta r}{\mathrm{d}t^2}+2\left(\frac{v}{r_0}\right)^2\delta r=0$$

其解为

$$\delta r=A\sin\left(\frac{\sqrt{2}v}{r_0}t+\alpha\right)$$

由初始条件：$r(0)=r_0$，$\dot{r}(0)=v\sin\beta$，或 $t=0$ 时，$\delta r=0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta r=v\sin\beta$ 定出 $\alpha=0$，$A=\frac{r_0}{\sqrt{2}}\sin\beta$，

$$\delta r=\frac{r_0}{\sqrt{2}}\sin\beta\sin\left(\frac{\sqrt{2}v}{r_0}t\right)$$

当 $\delta r=0$ 时，新轨道与(1)问的圆周轨道相交. 交于 P 点的时间 t 由下式给出：

$$\frac{\sqrt{2}v}{r_0}t=\pi,\quad t=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{r_0}{v}$$

下面求 P 点的位置，需求出 $\varphi(t)$，

$$\dot{\varphi}=\frac{r_0v}{r^2}=\frac{v}{r_0}\left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right)^{-2}=\frac{v}{r_0}\left(1-2\frac{\delta r}{r_0}\right)$$
$$=\frac{v}{r_0}\left[1-\sqrt{2}\sin\beta\sin\left(\frac{\sqrt{2}v}{r_0}t\right)\right]$$

积分上式,注意 $t=0$ 时 $\varphi=0$,

$$\varphi=\frac{v}{r_0}t+\sin\beta\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}v}{r_0}t\right)-1\right]$$

P 点的角位置为

$$\varphi(P)=\frac{v}{r_0}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{r_0}{v}-2\sin\beta\approx\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

基本上与 β 无关. P 点的位置为$\left(r_0,\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$.

(3) 如用平行于半圆筒轴的均匀磁场代替电场,均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向必须垂直图平面向下,

$$\frac{mv^2}{r}=qvB$$

圆轨道的半径将为

$$r=\frac{mv}{qB}$$

这个半径 r 不一定是(1)问中以原点为圆心的. 要和(1)问一样以原点为圆心,则 m、v、q 和 B 和进入场区时的 r 必须满足上述关系.

2.3.12 证明:在两个质量为 m_1、m_2 的质点按库仑定律相互作用的问题中,矢量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{J}+\frac{a\boldsymbol{r}}{r}$是运动积分,其中 $\boldsymbol{V}$ 是相对速度,$\boldsymbol{r}$ 是相对位矢,$\boldsymbol{J}=\mu(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})$是与相对运动相联系的角动量,$a$ 是库仑定律中的常系数,$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

提示:要考虑质点 2 相对于质点 1 的运动.

证明 $m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2=\boldsymbol{f}(r)=\frac{a}{r^3}\boldsymbol{r}$,其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$,

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\boldsymbol{f}(r)$$
$$m_1m_2(\ddot{\boldsymbol{r}}_2-\ddot{\boldsymbol{r}}_1)=(m_1+m_2)\boldsymbol{f}(r)$$
$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{f}(r)=\frac{a}{r^3}\boldsymbol{r}$$

其中 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{J})=\dot{\boldsymbol{V}}\times\boldsymbol{J}+\boldsymbol{V}\times\dot{\boldsymbol{J}}$$
$$\boldsymbol{J}=\mu(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})$$
$$\dot{\boldsymbol{J}}=\mu(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{V})+\mu(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{V}})=\mu(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V})+\mu\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}$$
$$=\boldsymbol{r}\times\frac{a}{r^3}\boldsymbol{r}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{J})=\dot{\boldsymbol{V}}\times\boldsymbol{J}=\ddot{\boldsymbol{r}}\times\mu(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})$$

$$=\frac{a}{\mu r^3}\boldsymbol{r}\times\mu(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\frac{a}{r^3}[(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}-r^2\dot{\boldsymbol{r}}]$$

因为

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t}=r\dot{r}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{J})=\frac{a}{r^3}(r\dot{r}\boldsymbol{r}-r^2\dot{\boldsymbol{r}})=-a\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\dot{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{J}+\frac{a\boldsymbol{r}}{r}\right)=-a\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\dot{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right)+a\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\dot{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right)=0$$

$$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{J}+\frac{a\boldsymbol{r}}{r}=\text{常矢量}$$

2.3.13　一宇宙飞船围绕质量为 M 的恒星作半径为 r_0 的圆周运动，宇宙飞船的火箭可以迅速点燃，使飞船速度瞬时改变 $\Delta\boldsymbol{v}$，点燃的方位用飞船的速度$\boldsymbol{v}$和 $\Delta\boldsymbol{v}$之间的夹角来说明，如图 2.75 所示，为了保存燃料，在连续 N 次发射中，希望 $\Delta\boldsymbol{v}=\sum\limits_{i=1}^{N}|\Delta\boldsymbol{v}_i|$减至最小，称 $\Delta\boldsymbol{v}$ 为比冲量.

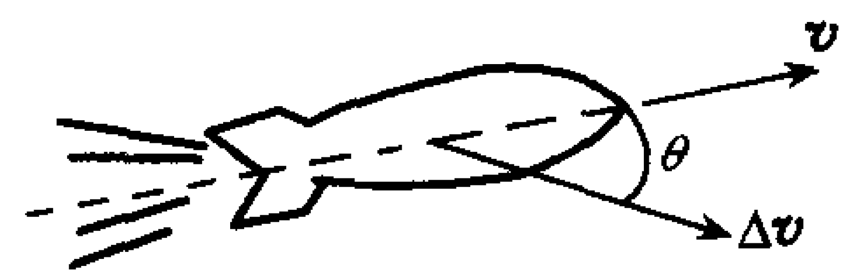


图 2.75

(1) 假如我们要利用飞船的火箭逃离这个恒星，且只点燃一次，需要的最小的比冲量多大？在什么方位点燃？

(2) 假如我们要在半径为 $r_1(>r_0)$的圆轨道上视察一颗行星，让火箭再次点燃，达到该行星轨道所需的最小比冲量多大？

(3) 假如我们要用飞船的火箭使它撞上恒星(假定恒星的半径可以忽略)，对下列两种点火策略计算最小比冲量：(a)在 $\theta=180°$一次迅速点燃；(b)在 $\theta=0°$一次快速点燃，然后在晚些时候在 $\theta=180°$第二次点燃，为使总的比冲量最小，选择第二次点火的时间和每次突发的强度.

解　(1) 设 v_0 是飞船作半径为 r_0 的圆周运动时的速率，v_{0e}是从这轨道逃离的速度，则

$$\frac{mv_0^2}{r_0}=\frac{GMm}{r_0^2},\quad \frac{1}{2}mv_{0e}^2-\frac{GMm}{r_0}=0$$

得

$$v_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0}},\quad v_{0e}=\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

因为

$$v_{0e}=v_0+|\Delta\boldsymbol{v}|\cos\theta=v_0+\Delta V\cos\theta$$

$$\Delta V=\frac{v_{0e}-v_0}{\cos\theta}$$

当 $\theta=0°$时，所需的比冲量 Δv 最小，

$$\Delta V=v_{0e}-v_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}(\sqrt{2}-1)$$

(2) 在第一次点燃后，飞船从围绕恒星的圆轨道沿抛物线轨道逃离，当飞船到达该行星的圆轨道 $r=r_1$ 时，再次迅速点燃，如图 2.76 所示.

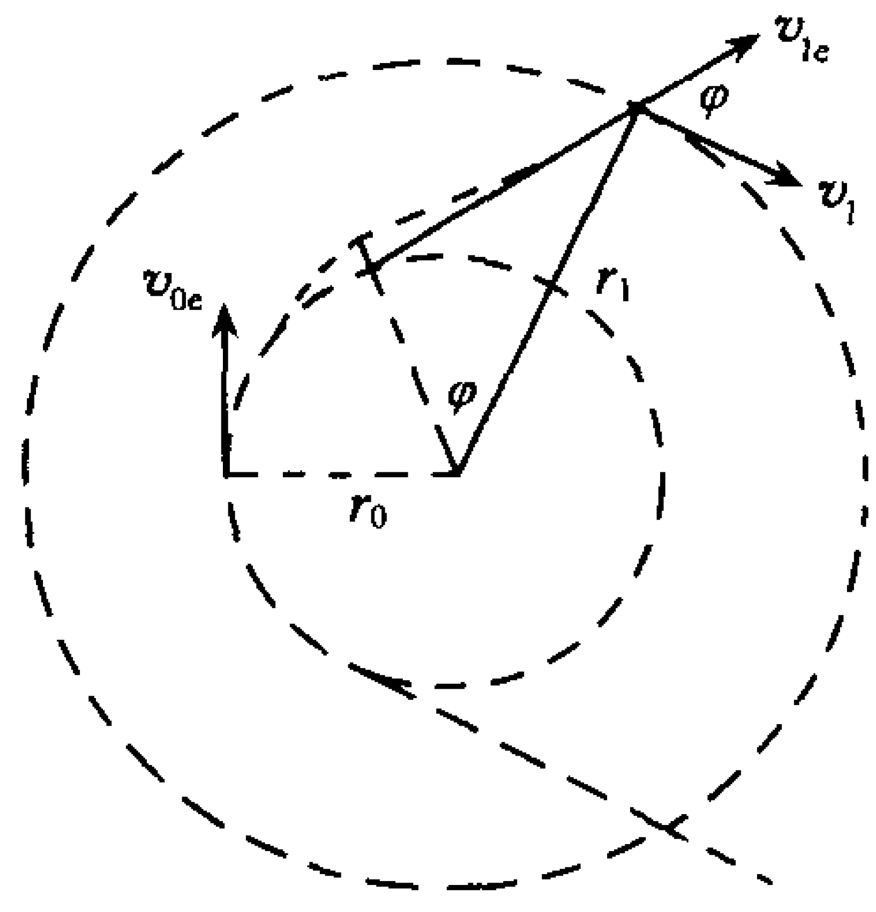


图 2.76

飞船沿半径为 r_1 的圆轨道运动时,应有速率

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

设 v_{1e}为飞船到达 $r=r_1$ 第二次引爆前的速率. 由角动量守恒,

$$v_{0e}r_0 = v_{1e}r_1\cos\varphi \quad 或 \quad v_{1e}\cos\varphi = \frac{r_0}{r_1}v_{0e}$$

由机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}mv_{1e}^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_{0e}^2 - \frac{GMm}{r_0} = 0$$

$$v_{1e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$$

所需的最小比冲量为

$$\Delta v = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{1e}|$$

$$\begin{aligned}(\Delta v)^2 &= v_{1e}^2 + v_1^2 - 2v_{1e}v_1\cos\varphi \\ &= \frac{2GM}{r_1} + \frac{GM}{r_1} - 2\frac{r_0}{r_1}\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\cdot\sqrt{\frac{GM}{r_1}} \\ &= \frac{GM}{r_1}\left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_1}\left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right)}$$

(3) 分别考虑两种点火策略.

(a) 在 $\theta=180°$一次点燃,因飞船原作 $r=r_0$ 的圆轨道运动,恒星的半径又可忽略,只有角动量为零时才能到达 $r=0$,撞上恒星,因此必须使飞船的速率 $v'=0$,

$$v' = v_0 + \Delta v\cos 180° = 0$$

$$\Delta v = v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

(b) 如第一次在 $\theta=0°$ 方位引爆使飞船获得逃逸速度 $v_{0e}=\sqrt{\dfrac{2GM}{r_0}}$，即 $\Delta v_1=v_{0e}-v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{r_0}}(\sqrt{2}-1)$，它能从轨道逃逸. 由机械能守恒，飞船的速率 v 与它离恒星的距离 r 有下列关系：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}mv_{0e}^2-\frac{GMm}{r_0}=0$$

为使第二次点燃的 Δv_2 尽可能小，显然，当 $r\to\infty, v\to 0$ 时在 $\theta=180°$ 方位第二次点燃，使飞船朝恒星转向，所需的 $\Delta v_2\approx 0$，总的比冲量为

$$\Delta v\approx\Delta v_1=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}(\sqrt{2}-1)$$

下面说明这样的比冲量是最小的.

假定第一次在 $\theta=0°$ 方位的发射

$$\Delta v_1<v_{0e}-v_0$$

则飞船将沿椭圆轨道运动，为了使第二次在 $\theta=180°$ 的点燃 Δv_2 最小，根据角动量守恒定律应在飞船抵达远星点(此时速率最小)进行第二次点燃.

在第一次点燃后，由机械能守恒和角动量守恒，设 v_2 是在近星点或远星点飞船的速率.

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_2}=\frac{1}{2}m(v_0+\Delta v_1)^2-\frac{GMm}{r_0}$$

$$mr_2v_2=mr_0(v_0+\Delta v_1)$$

两式中消去 r_2，可得

$$v_2^2-\frac{2GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}v_2+\frac{2GM}{r_0}-(v_0+\Delta v_1)^2=0$$

解得

$$v_2=\frac{GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}\pm\left[\frac{GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-(v_0+\Delta v_1)\right]$$

因

$$(v_0+\Delta v_1)^2>v_0^2=\frac{GM}{r_0},\quad\frac{GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-(v_0+\Delta v_1)<0$$

在远星点，取 v_2 的较小的解，

$$v_2=\frac{GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}+\frac{GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-(v_0+\Delta v_1)$$

$$=\frac{2GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-(v_0+\Delta v_1)$$

第二次在 $\theta=180°$ 方位点燃的结果必须使飞船的速率等于零，才能落向恒星，

$$v_2+\Delta v_2\cos 180°=0$$

$$\Delta v_2=v_2=\frac{2GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-(v_0+\Delta v_1)$$

总的比冲量

$$\Delta v=\Delta v_1+\Delta v_2=\frac{2GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-v_0$$

下面证明

$$v_{0e}-v_0<\frac{2GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-v_0$$

因

$$\Delta v_1<v_{0e}-v_0$$

$$\frac{2GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}>\frac{2GM}{r_0(v_0+v_{0e}-v_0)}=\frac{2GM}{r_0v_{0e}}=\frac{v_{0e}^2}{v_{0e}}=v_{0e}$$

故

$$v_{0e}-v_0<\frac{2GM}{r_0(v_0+\Delta v_1)}-v_0$$

因此,为使总比冲量最小,第一次引爆的强度应为 $\Delta v_1=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}(\sqrt{2}-1)$,然后经无限长时间后进行 $\Delta v_2\approx 0$ 的第二次引爆.

补充说明:(2)问的回答未对比冲量是否最小的问题加以论证,这里补充说明一下.显然,飞船在沿抛物线运行途中不是在到达 $r=r_1$ 时再次点燃火箭,而是在此之前或之后点燃,使之达 $r=r_1$ 后又一次点燃,使飞船的运动轨道变成半径为 r_1 的圆轨道都不可能有更小的总比冲量.可以一比的是当沿抛物线轨道,在 $r\to\infty$,$v\to 0$ 时,给一个 $\Delta v_1\approx 0$ 的比冲量,使之落向恒星,在 $r=r_1$ 时再给 Δv_2,使它获得在 $r=r_1$ 做圆周运动的速度.这 $\Delta v\approx\Delta v_2$ 也是大于 $\sqrt{\frac{GM}{r_1}\left(3-2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right)}$ 的,因由机械能守恒知,从无穷远落到 $r=r_1$ 处的速率也是 v_{1e},但它与 $\boldsymbol{v}_1$ 的夹角为 90°,我们用的方案 $\varphi<90°$,因而我们用的比冲量小.

2.4 碰　撞

2.4.1 一质量为 m 的子弹射入置于光滑水平面上质量为 M 并与劲度系数为 k 的轻弹簧连着的木块后使弹簧最大压缩了 L,求子弹射入前的速度 v_0.

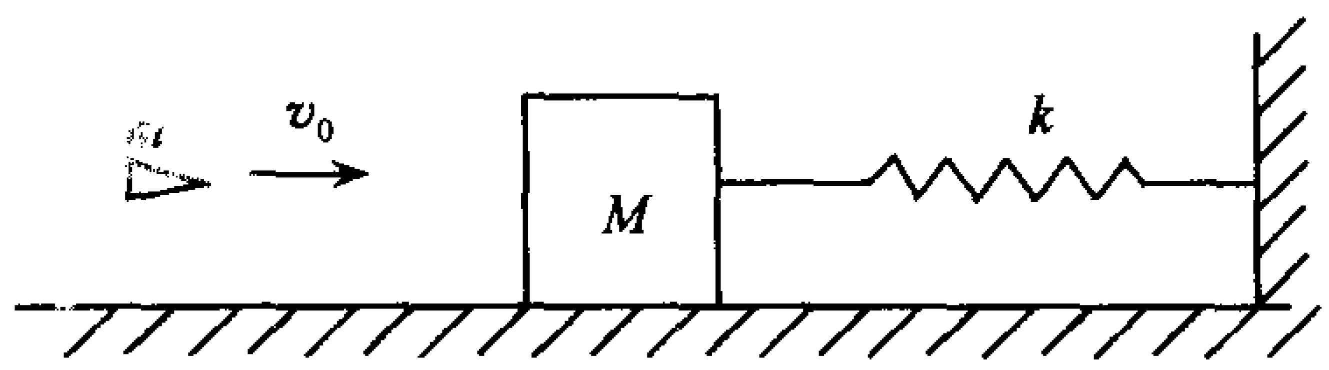


图 2.77

解 子弹射入木块到相对木块静止的过程是一个完全非弹性碰撞,时间极短,木块获得了速度,尚未位移,因而弹簧尚未压缩.此时木块和子弹有共同的速度 v_1,由动量守恒,

$$(m+M)v_1=mv_0$$

此后,弹簧开始压缩,直到最大压缩,由机械能守恒,

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2=\frac{1}{2}kL^2$$

由两式消去 v_1,解出 v_0 得

$$v_0=\frac{L}{m}\sqrt{k(m+M)}$$

2.4.2　质量为 m、速度为 v 的子弹射向质量为 M 的靶，靶中开有一孔，孔内装了一个劲度系数为 k 的弹簧，如图 2.78 所示. 靶在初始时刻处于静止状态，能在无摩擦的水平面上滑动. 求子弹射入靶后弹簧的最大压缩距离 Δx.

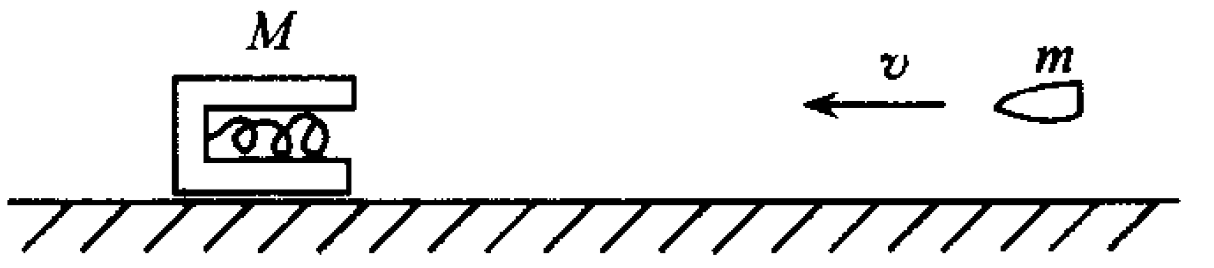


图 2.78

解　整个过程机械能都是守恒的，弹簧最大压缩时，子弹和靶有相同的速度，整个过程，m、M 系统动量也是守恒的. 设弹簧最大压缩时，子弹和靶的相同速度为 V，则

$$mv = (m + M)V$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

消去两式中的 V，解得

$$\Delta x = \sqrt{\frac{mM}{k(m + M)}}v$$

2.4.3　一辆质量为 m 的车以速度 v 驶向另一辆原来静止的质量为 $3m$ 的车，在两车正碰时弹簧被压缩，如图 2.79 所示.

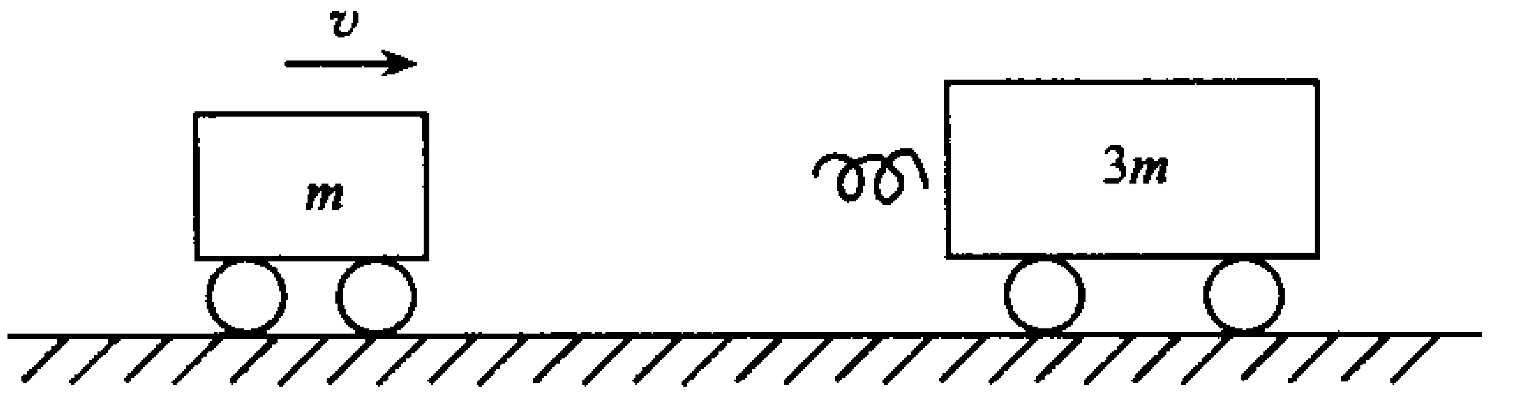


图 2.79

(1) 若机械能是守恒的，那么在弹簧压缩最大的瞬间，质量为 $3m$ 的那辆车的速度多大?

(2) 若机械能不守恒的话，结果是否不一样?

(3) 若机械能守恒，经过较长的一段时间后，较重的车的末速度多大?

(4) 对于完全非弹性碰撞的情形，较重的车的末速度多大?

解　(1) 弹簧处于最大压缩时，两车的速度相同，设为 V，由两车的总动量守恒，有

$$(m + 3m)V = mv$$

故重车的速度　$V=\frac{1}{4}v$

(2) 若机械能不守恒，上述结果不变，因为两车的总动量仍然守恒.

(3) 由机械能守恒和动量守恒，

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(3m)v_2^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mv_1 + 3mv_2 = mv$$

其中 v_1、v_2 分别是轻、重两车的末速度，均规定向右为正. 可求出：

$$v_1 = -\frac{1}{2}v,\quad v_2 = \frac{1}{2}v$$

(4) 若碰撞是完全非弹性的，两车有相同的末速度，由动量守恒，末速度为 $\frac{1}{4}v$.

$$v = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$$

此时,质点、物体和弹簧系统具有的动能为

$$T = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{m^2gh}{m+M}$$

取弹簧为原长时弹簧势能为零,物体在此位置时重力势能为零,则碰撞后系统的势能为

$$V = \frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 - (m+M)g\frac{Mg}{k} = -\frac{1}{2k}M(2m+M)g^2$$

系统具有的机械能为

$$E = T + V = \frac{m^2gh}{m+M} - \frac{1}{2k}M(2m+M)g^2$$

弹簧最大压缩或最大伸长时,系统动能为零. 设最大压缩量为 $x_{\max}$,由机械能守恒,

$$\frac{1}{2}kx_{\max}^2 - (m+M)gx_{\max} = E$$

即 $\frac{1}{2}kx_{\max}^2-(m+M)gx_{\max}-\left[\frac{m^2gh}{m+M}-\frac{1}{2k}M(2m+M)g^2\right]=0$

$$x_{\max} = \frac{1}{k}\left[(m+M)g + \sqrt{(m+M)^2g^2 + \frac{2km^2gh}{m+M} - M(2m+M)g^2}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[(m+M)g + mg\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}}\right]$$

另一个方程的根 $\frac{1}{k}\left[(m+M)g-mg\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}}\right]$ 无意义,首先它不是所要求的 $x_{\max}$,因为 $x=\frac{1}{k}(m+M)g$ 是平衡位置时的压缩量,最大压缩自然比它大,另一个根比它小;还要指出的是,另一个根也与弹簧最大伸长量毫无关系,最大伸长量满足的代数方程与最大压缩量满足的方程不同,它们一次方项的系数的正负号相反.

弹簧对地面的最大压力为

$$kx_{\max} = (m+M)g + mg\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}}$$

2.4.6 一质量为 M 的车上装有一根杆,用一细绳将质量为 μ 的球挂在杆上 P 点,车和球的初速度为 v,这辆车撞到另一辆质量为 m 的原来静止的车上并且和它粘在一起. 若细绳的长度为 R,试证明能使球绕 P 点转圆圈的最小初速度为 $v=\left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{5gR}$,忽

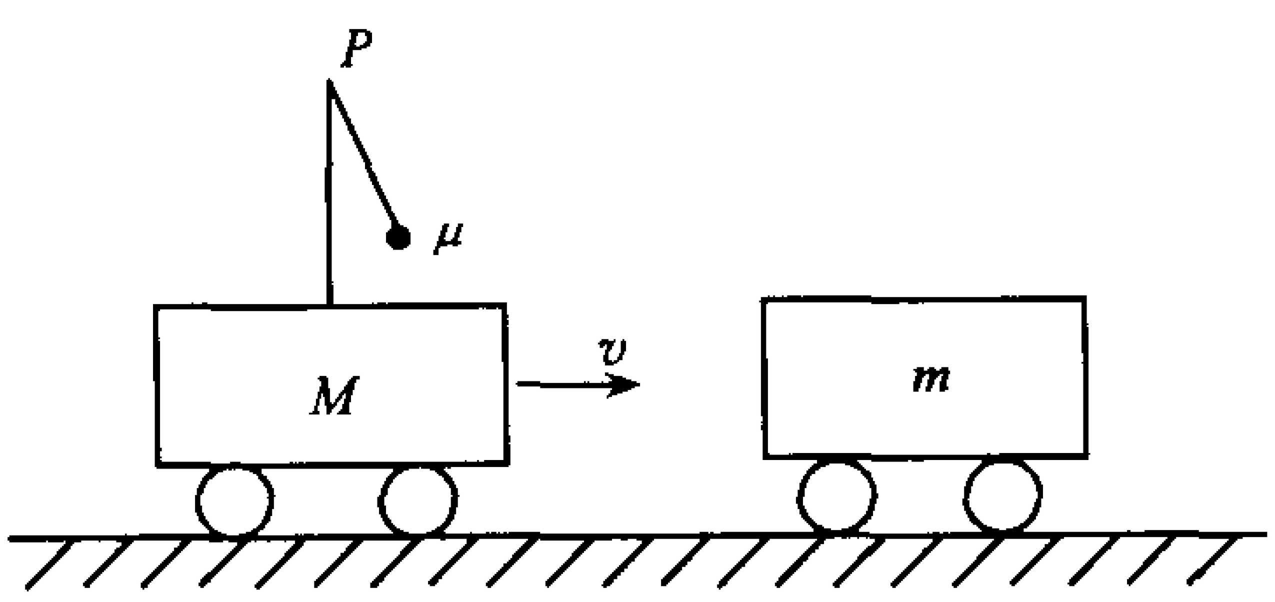


图 2.82

略摩擦并假定 M、$m \gg \mu$.

证明　两车相撞后的速度为

$$v' = \frac{M}{M+m}v$$

在静止的车上一个质量为 μ 的小球要绕 P 点做半径为 R 的圆周运动所需的最小水平速度设为 v_1，小球到达最高点时的速率设为 $v_{\min}$.

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_{\min}^2 + \mu g(2R),$$

$$\frac{\mu v_{\max}^2}{R} = \mu g.$$

解出

$$v_1 = \sqrt{5Rg}$$

今在以速度 v' 运动的车上，小球相对此车的最小水平速度为 v_1. 小球刚能绕 P 点做圆周运动，小球要在对静参考系的速度 v 在两车碰撞后能刚好绕 P 点做圆周运动，则应有

$$v - v' = v_1 = \sqrt{5Rg}$$

即

$$v - \frac{M}{M+m}v = \sqrt{5Rg}$$

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5Rg}$$

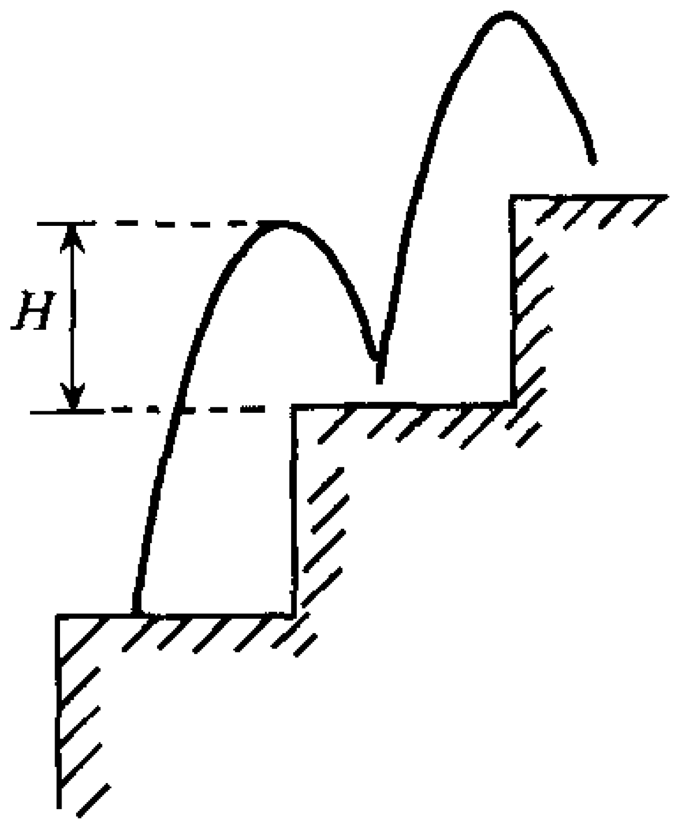


图 2.83

2.4.7　一弹子球从阶梯上弹下，在每一台阶都落在同一位置，都弹起相同的高度，每个台阶的高度和宽度相等为 l，每次碰撞恢复系数为 e. 求弹子球所必需的水平速度 v_h 和每次弹起的高度 H.

解　设 $\boldsymbol{i}$ 为水平向左的单位矢量，$\boldsymbol{j}$ 为竖直向下的单位矢量. 由于水平方向不受力，弹子球水平方向的速度分量保持不变.

设弹子落到台阶上时的速度为

$$\boldsymbol{v}_1 = v_h\boldsymbol{i} + v_i\boldsymbol{j},$$

从台阶上弹起时的速度为

$$\boldsymbol{v}_2 = v_h\boldsymbol{i} + v_f\boldsymbol{j}$$

从台阶上弹起到落到下一个台阶上，机械能守恒，设弹子球质量为 m.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgl$$

或

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgl \tag{1}$$

由恢复系数的定义，

$$e = \frac{-v_f - 0}{v_i - 0}$$

即

$$v_f = -ev_i \tag{2}$$

从弹起到落到下一个台阶上所需的时间为 t，在此期间，水平方向运动的距离为台阶的宽度 l，可写出下列两个式子：

$$v_i = -v_f + gt \tag{3}$$

$$l = v_h \cdot t \tag{4}$$

由式(1)、(2)、(3)、(4)可解出

$$v_i = \sqrt{\frac{2gl}{1-e^2}}, \qquad v_h = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}\cdot\frac{gl}{2}}$$

对弹起到达到每次弹起的最大高度的过程考虑机械能守恒，

$$\frac{1}{2}m(v_h^2 + v_f^2) = \frac{1}{2}mv_h^2 + mgH$$

得

$$H = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{e^2v_i^2}{2g} = \frac{e^2}{1-e^2}l$$

2.4.8　一质量为 m、荷电为 q、初速为 v 的粒子，和另一个处于静止的全同粒子发生正碰，求：

(1) 两个粒子最接近时的距离；

(2) 最接近的瞬时两个粒子的速度；

(3) 两个粒子的末速度.

解　两个粒子实际上并没有相遇，但由于相互作用，两个粒子的速度发生变化，可以视为发生了碰撞. 碰撞前后，两粒子的速度都在同一直线上，故为正碰；碰撞过程中，只有静电势能和动能之间的相互转化，可认为碰撞是弹性的.

两粒子最接近时，相对速度为零，在静参考系中具有相同的速度，设此速度为 v'，由动量守恒，

$$2mv' = mv, \qquad v' = \frac{1}{2}v$$

没有给出运动粒子与静止粒子开始时的距离，说明具有初速 v 的粒子距静止粒子足够远，可视为无穷远，相互间开始无库仑力作用. 由弹性碰撞，即动能和静电场能之和为恒量，达到最近距离时，

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}mv^2$$

代入 $v' = \frac{1}{2}v$，即得两粒子间的最近距离

$$r = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 mv^2}$$

达到最近距离时，两粒子相互作用是斥力，其大小达到最大，作用的结果，原运动的粒子速度继续减小，原静止的粒子速度继续增大，根据对称性可以作出结论：两个全同粒子作弹性正碰的结果是最终交换速度，即原运动的粒子的末速度 $v_1 = v_{20} = 0$，原静止的粒子的末速度 $v_2 = v_{10} = v$，脚标 1、2 分别标记原运动和原静止的粒子，v_{10} 表示原运动粒子的初速度，v_1 表示它的末速度.

2.4.9　小球 1 从离碗底高 h 处静止滑下，与静置于碗底的完全相同的小球 2 发生非

弹性碰撞，若恢复系数为 e，求第一次碰撞后两球达到的高度(忽略一切摩擦力).

解　球 1 与球 2 碰撞前的速度为 $v_{10}=\sqrt{2gh}$，碰撞后两球的速度设为 v_1、v_2，由动量守恒，

$$v_1+v_2=v_{10}=\sqrt{2gh} \tag{1}$$

由恢复系数的定义，

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-0}$$

即

$$v_2-v_1=e\sqrt{2gh} \tag{2}$$

由式(1)、(2)解得

$$v_1=\frac{1}{2}(1-e)\sqrt{2gh}$$

$$v_2=\frac{1}{2}(1+e)\sqrt{2gh}$$

对球 1、球 2 碰撞后分别用机械能守恒，可得第一次碰撞后两球能达到的高度.

$$mgh_1=\frac{1}{2}mv_1^2,\quad h_1=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{1}{4}(1-e)^2h$$

$$mgh_2=\frac{1}{2}mv_2^2,\quad h_2=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{1}{4}(1+e)^2h$$

2.4.10　质量为 m_1 和 m_2 的两个小球悬挂在长度分别为 l_1 和 l_2 的不可伸长的轻绳下，两球恰好相切. 在两线所在的平面内把第一个小球拉到与铅垂线成 α 角的位置，静止后再放开，摆下与静止的第二个球发生弹性碰撞. 求第一次碰撞后两球偏离铅垂线的最大角度 α_1 和 α_2.

解　先求第一个球碰撞前的速度 v_{10}，

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2=m_1gl_1(1-\cos\alpha)$$

$$v_{10}=\sqrt{2gl_1(1-\cos\alpha)}$$

设 v_1、v_2 分别为两球碰撞后的速度，沿 v_{10}的方向为正向，

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_{10}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_{10}^2$$

可解出

$$v_1=v_{10}\text{ 及 }v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{10}$$

前者是碰撞前的速度，后者是碰撞后的速度，应取后者. 故

$$v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{10}$$

$$v_2=\frac{m_1}{m_2}(v_{10}-v_1)=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{10}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=m_1gl_1(1-\cos\alpha_1)$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = m_2gl_2(1-\cos\alpha_2)$$

经计算可得第一次碰撞后两球偏离铅垂线的角度 α_1 和 α_2 为

$$\alpha_1 = \arccos\left[1-\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2(1-\cos\alpha)\right]$$

$$\alpha_2 = \arccos\left[1-\frac{4m_1^2l_1}{(m_1+m_2)^2l_2}{}^{2}(1-\cos\alpha)\right]$$

α_1、α_2 的正向规定与 α 相反.

2.4.11　一个运动粒子与另一个静止的全同粒子发生弹性碰撞，试证明：碰后两粒子的运动方向相互垂直.

证明　取碰撞时两粒子连心线方向为 x 轴. 设运动粒子碰撞前速度 $\boldsymbol{v}_{10}$ 与 x 轴的夹角为 α.

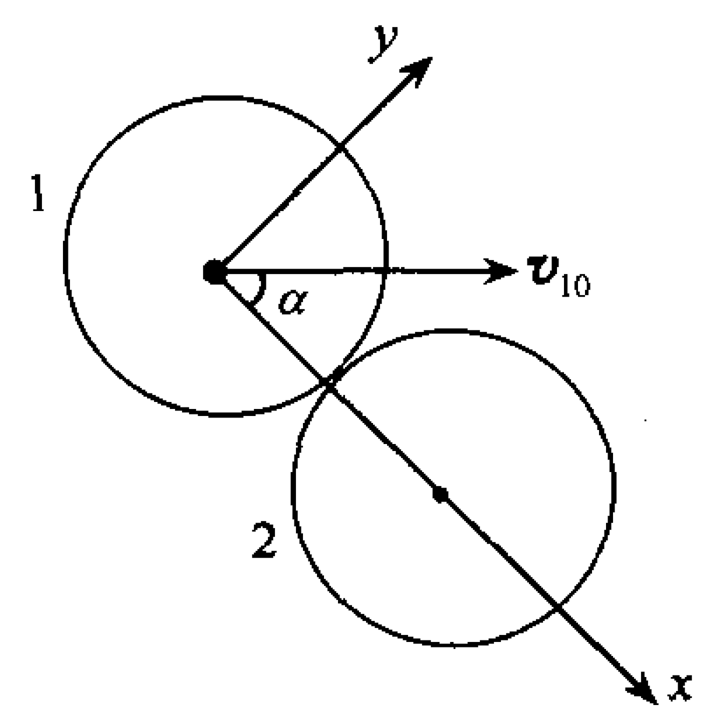


图 2.84

考虑到两粒子质量相同，由动量守恒和弹性碰撞机械能守恒，有下列关系：

$$v_1x + v_2x = v_{10}\cos\alpha \tag{1}$$

$$v_1y + v_2y = v_{10}\sin\alpha \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+\frac{1}{2}(v_{2x}^2+v_{2y}^2) = \frac{1}{2}v_{10}^2 \tag{3}$$

式(1)的平方＋式(2)的平方－式(3)×2，得

$$2(v_{1x}v_{2x}+v_{1y}v_{2y}) = 0$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0 \quad 即 \quad \boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2 \tag{4}$$

结果与运动粒子的初速度 $\boldsymbol{v}_{10}$ 无关，如果两粒子间有摩擦力，式(2)照样成立，因此在式(3)可近似成立的前提下可不必要求两粒子(或两球)是光滑的. 需特别说明的是，当 $\alpha=0$ 时，发生正碰，碰后，运动粒子静止，原静止的粒子获得运动粒子的速度，因式(4) $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0$ 仍成立，可视为互相垂直的一种特殊情况，同样当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_{10}$，$\boldsymbol{v}_2=0$(不论摩擦因数是否为零，因无正压力，摩擦力均为零)，也是可视为互相垂直的特殊情况.

2.4.12　两个完全相同的光滑小球，一个静止，另一个以 $\boldsymbol{v}_0$ 的速度与之发生非弹性碰撞，测得原静止的小球以 $\frac{3}{8}v_0$ 的速率向着偏离 $\boldsymbol{v}_0$ 方向 60°的方向运动. 求：

(1) 恢复系数 e；

(2) 原来运动的小球的散射角.

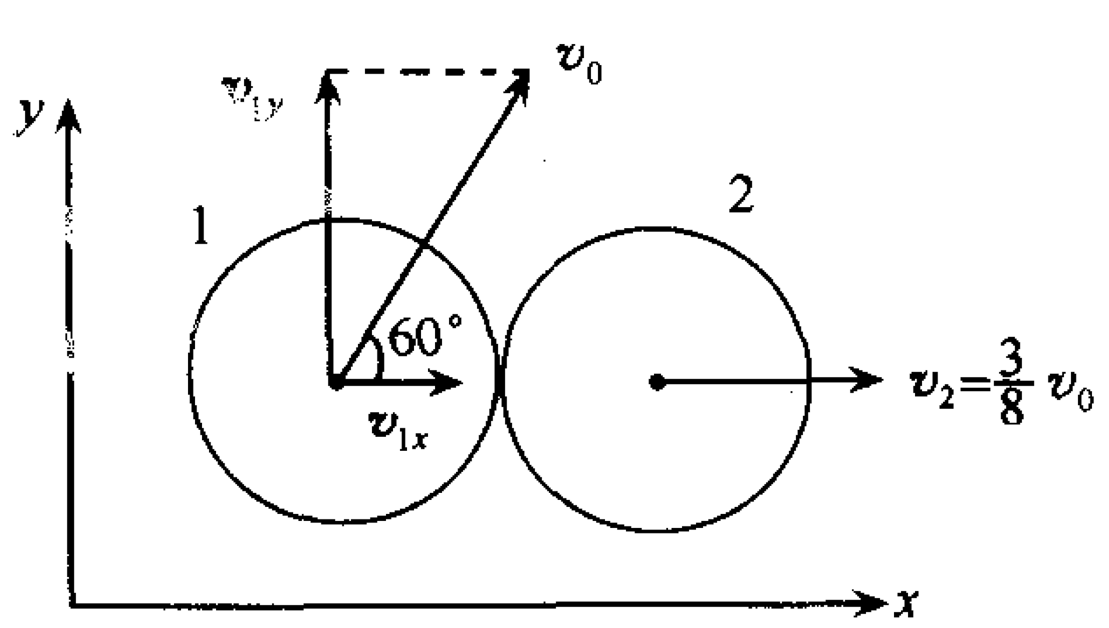


图 2.85

解　取被碰撞小球碰撞后的运动方向为 x 轴，如图 2.85 所示. 碰撞后，原静止的小球的速度

$$v_{2x} = \frac{3}{8}v_0, \qquad v_{2y} = 0$$

原运动的小球碰撞后的速度设为 v_{1x}、v_{1y}，因 y 方向两球无相互作用力，$v_{1y}=v_0\sin60°$. 由 x 方向动量守恒，

$$v_{1x}+v_{2x}=v_{10x}v_0\cos60°=\frac{1}{2}v_0$$

$$v_{1x}=\frac{1}{2}v_0-\frac{3}{8}v_0=\frac{1}{8}v_0$$

$$e=\frac{v_{2x}-v_{1x}}{v_{10x}-0}=0.5$$

原运动的小球(即小球 1)的散射角 θ 为$\boldsymbol{v}_1$ 与 x 轴的夹角与 60°的差的绝对值,

$$\theta=\left|\arctan\frac{v_{1y}}{v_{1x}}-60°\right|=21.8°$$

2.4.13 一个质量为 m_1 以$\boldsymbol{v}_{10}$的速度运动的粒子 1,与一个质量为 m_2 的静止粒子 2 发生弹性斜碰撞,碰撞后,在质心平动参考系中,粒子 1 的散射角为 α_c. 试证:在实验室参考系中两粒子的速度与$\boldsymbol{v}_{10}$的夹角 α、β 满足下列关系:

$$\tan\alpha=\frac{m_2\sin\alpha_c}{m_1+m_2\cos\alpha_c},\quad \tan\beta=\frac{\sin\alpha_c}{1-\cos\alpha_c}$$

证明 质心速度 $\boldsymbol{v}_c=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{10}$

在质心平动参考系中,两粒子碰撞前的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_{10c}=\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_c=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{10}$$

$$\boldsymbol{v}_{20c}=0-\boldsymbol{v}_c=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{10}$$

两粒子碰撞后的速度设为$\boldsymbol{v}_{1c}$、$\boldsymbol{v}_{2c}$,总动量为零,

$$m_1\boldsymbol{v}_{1c}+m_2\boldsymbol{v}_{2c}=0$$

$\boldsymbol{v}_{1c}$、$\boldsymbol{v}_{2c}$方向相反,其大小有下列关系:

$$v_{2c}=\frac{m_1}{m_2}v_{1c}\tag{1}$$

因弹性碰撞,机械能守恒,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v_{1c}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2c}^2&=\frac{1}{2}m_1v_{10c}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20c}^2\\&=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}v_{10}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{10}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_{10}^2\end{aligned}\tag{2}$$

由式(1)、(2)两式解出

$$v_{1c}=\frac{m_2}{m_1+m_2}v_{10},\quad v_{2c}=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{10}$$

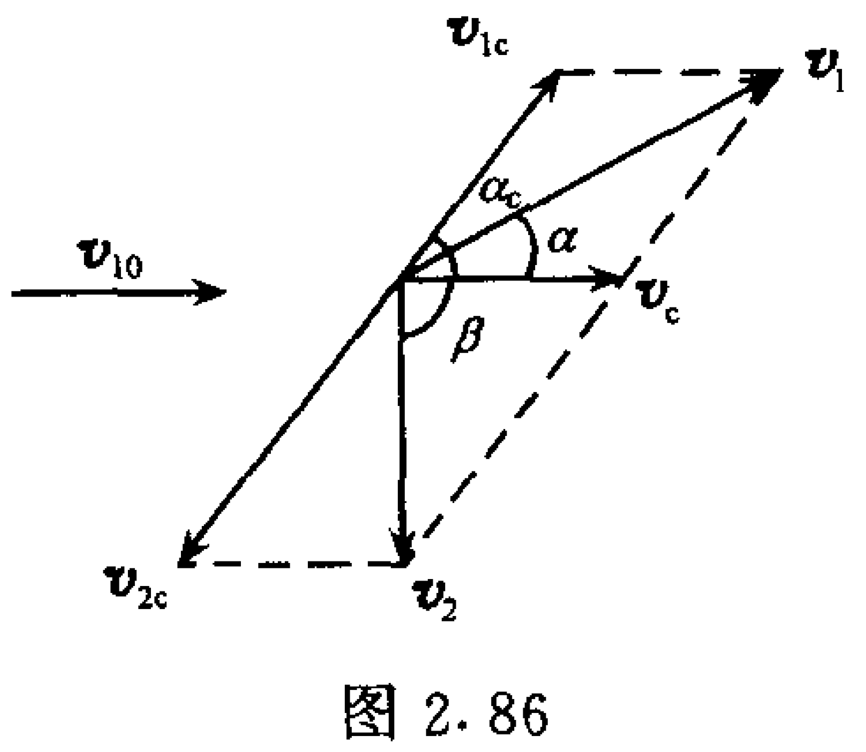


图 2.86

在实验室参考系中,碰撞后两粒子的速度分别为$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_{1c}+\boldsymbol{v}_c$,$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_{2c}+\boldsymbol{v}_c$,如图 2.86 所示,注意$\boldsymbol{v}_c$ 与$\boldsymbol{v}_{10}$方向相同. 因此,图中$\boldsymbol{v}_1$ 与$\boldsymbol{v}_c$ 的夹角为$\boldsymbol{v}_1$ 与$\boldsymbol{v}_{10}$的夹角 α,$\boldsymbol{v}_2$ 与$\boldsymbol{v}_c$ 的夹角为$\boldsymbol{v}_2$ 与$\boldsymbol{v}_{10}$的夹角 β. 由图立即可得

$$\tan\alpha = \frac{v_{1c}\sin\alpha_c}{v_c + v_{1c}\cos\alpha_c} = \frac{m_2\sin\alpha_c}{m_1 + m_2\cos\alpha_c}$$

$$\tan\beta = \frac{v_{2c}\sin\alpha_c}{v_c - v_{2c}\cos\alpha_c} = \frac{\sin\alpha_c}{1 - \cos\alpha_c}$$

2.4.14　一质量为 m 的质子以 $v_0(v_0 \ll c)$ 的速度去撞击静止的质量为 $4m$ 的氦核，用实验室参考系，质子以 $\frac{1}{2}v_0$ 的速率和 30°的角度散射. 求：

(1) 用实验室参考系，撞击后氦核的速率及运动方向；

(2) 用质心平动参考系，质子的散射速度.

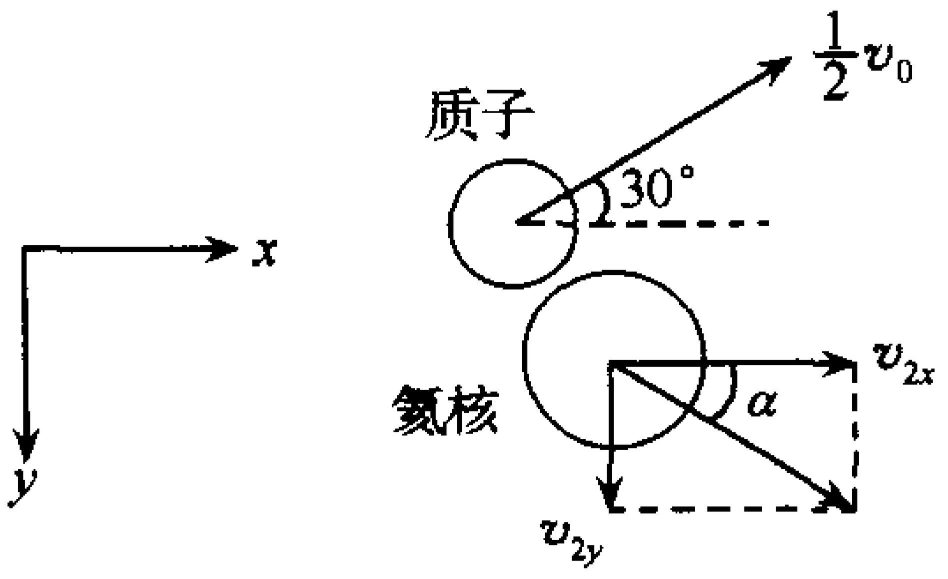


图 2.87

解　(1) 取 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向为 x 轴正向，质子和氦核碰撞后的速度如图 2.87 所示.

由动量守恒，

$$mv_0 = m \cdot \frac{1}{2}v_0\cos 30° + 4mv_{2x}$$

$$0 = m\left(-\frac{1}{2}v_0\sin 30°\right) + 4mv_{2y}$$

得

$$v_{2x} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)v_0 = 0.142v_0$$

$$v_{2y} = \frac{1}{16}v_0 = 0.0625v_0$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 0.155v_0$$

$$\alpha = \arctan\frac{v_{2y}}{v_{2x}} = 23.8°$$

(2) $(m+4m)v_c = mv_0$，　$v_c = \frac{1}{5}v_0$

$$v_{1c} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v_0\cos 30° - \frac{1}{5}v_0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v_0\sin 30°\right)^2} = 0.342v_0$$

$\boldsymbol{v}_{1c}$与 x 轴的夹角(向 $-y$ 轴的转角)为

$$\beta = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}v_0\sin 30°}{\frac{1}{2}v_0\cos 30° - \frac{1}{5}v_0}\right) = 47.0°$$

第三章　振动和波

3.1　简谐振动

3.1.1　一平台在竖直方向做简谐振动，振幅为 5cm，频率为$\frac{10}{\pi}s^{-1}$，在平台到达最低点时，将一木块轻轻地放在平台上(设木块质量远小于平台质量．问：

(1) 木块于何处离开平台？

(2) 木块能达到的高度比平台能达到的高度高多少？

解　取 x 轴向上为正，原点取在平衡位置．平台到达最低点时开始计时，则平台的运动学方程为

$$x = -5\cos\left(2\pi \cdot \frac{10}{\pi}t\right) = -5\cos 20t$$

木块离开平台的条件是平台对它的支持力为零，它只受重力作用，故脱离平台时，平台的加速度

$$\ddot{x} = -g$$

$$\dot{x} = 100\sin 20t, \ddot{x} = 2000\cos 20t$$

设 $t=t_1$ 时 $\ddot{x}=-g$，则

$$2000\cos 20t_1 = -g = -980$$

此时木块和平台的位置为

$$x(t_1) = -5\cos 20t_1 = \frac{(-5)(-980)}{2000} = 2.45\text{cm}$$

木块离开平台的位置在平台做简谐振动的平衡位置上方 2.45cm(不难从此后木块和平台的加速度分析，平台的速度将小于木块的速度，确认木块在此位置脱离平台)．

离开平台时木块的速度为

$$\dot{x}(t_1) = 100\sin 20t_1 = 87.2\text{cm/s}$$

木块能达到的最高点的 x 坐标为

$$x_m = 2.45 + \frac{[\dot{x}(t_1)]^2}{2g} = 6.33\text{cm}$$

比平台能达到的高度高 6.33－5＝1.33cm．

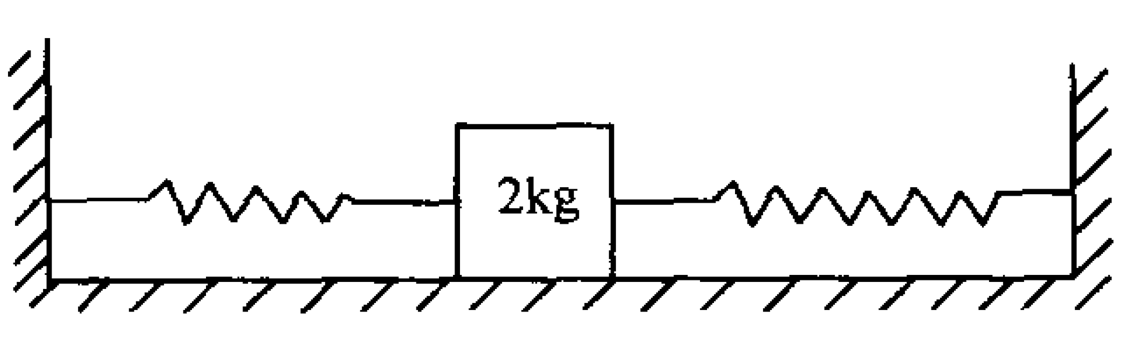


图 3.1

3.1.2　图 3.1 中质量为 2kg 的物体从平衡位置拉开并释放后以$\frac{\pi}{6}$s 的周期在光滑的水平面上沿直线振动．

(1) 将它由平衡位置拉开 2cm 需要多大作

用力?

(2) 如果将一小质量块放在 2kg 质量块上,它们之间的静摩擦因数为 0.1,问:2kg 物体的振动振幅不超过何值时,小质量块对它无相对运动?(假定附加小质量块后对振动周期的影响可以忽略)

解 (1)
$$T=\frac{\pi}{6}\mathrm{s},\omega=\frac{2\pi}{T}=12\mathrm{s}^{-1}$$
$$k = m\omega^2 = 2 \times (12)^2 = 288\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

至少需力
$$F=kx=288\times 0.02=5.76\mathrm{N}$$

(2) 设小质量块对 2kg 质量块无相对运动,2kg 质量块振动的最大振幅为 A,
$$x = A\cos\omega t$$

要求小物块随 2kg 物块振动中的最大加速度值不超过最大静摩擦力所能产生的加速度,即
$$|\ddot{x}|_{\max} = A\omega^2 \leqslant \mu g$$
$$A \leqslant \frac{\mu g}{\omega^2} = 6.81 \times 10^{-3}\mathrm{m}$$

3.1.3 在劲度系数为 k 的弹簧下悬挂一质量为 m 的盘子,处于静止状态. 有一质量也为 m 的物体,自比原静止的盘子高 h 处由静止落下,与盘子做完全弹性碰撞(碰撞时机械能不损失),求:

(1) 头两次碰撞期间盘子的运动;

(2) 用作图法求第三次碰撞的时间(取第一次碰撞时 $t=0$).

解 (1)第一次碰撞刚要发生时,物体速度为$\sqrt{2gh}$. 设第一次碰撞后,物体速度为 v,盘子速度为 V,有
$$mv + mV = m\sqrt{2gh}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\sqrt{29h})^2 = mgh$$

可有两组解:一组解 $V=0,v=\sqrt{2gh}$,这是碰撞前的情况,不是要求的解;另一组解是所求的碰撞后的情况:
$$V = \sqrt{2gh},v = 0$$

盘子在第一次碰撞后、第二次碰撞前做简谐振动,取平衡位置为 x 轴的零点,向下为正,运动微分方程为
$$m\ddot{x}=- kx$$

通解为
$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right)$$

初始条件:$t=0$ 时,$x=0,\dot{x}=V=\sqrt{2gh}$,定出
$$A =\sqrt{\frac{2mgh}{k}}, \qquad \alpha =- \frac{\pi}{2}$$
$$x =\sqrt{\frac{2mgh}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2mgh}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(2) 作图时,注意盘子做简谐振动,周期不变,但第二次碰撞后做的简谐振动和第一次碰撞后做的简谐振动振幅不同、初相位不同物体做抛物运动,加速度为 g(仍取 x 轴向下为正),物体在第一次碰撞后和第二次碰撞后的运动轨道均为抛物线;均向上弯曲,可将第一次碰撞后画的抛物线轨道向右作平移．由于物体和盘子质量相同且做弹性碰撞,碰撞后交换速度．因此在第二次碰撞的位置,碰撞后盘子的正弦曲线轨道应与碰撞前物体的抛物线轨道相切,碰撞后物体的抛物线轨道应与碰撞前盘子的正弦曲线轨道相切,如图 3.2 所示．这样可从图上确定第三次碰撞的时间和位置．这里未给 m、k 和 h 值,所画的图只是示意图,如 m、k 和 h 值给定,可画出较准确的图．

这里画的第二次碰撞时,物体的速率小于盘的速率,碰撞后交换速度值,物体碰撞后速率变大,总的机械能守恒,因此碰撞后盘的机械能减小,振幅是减小的．

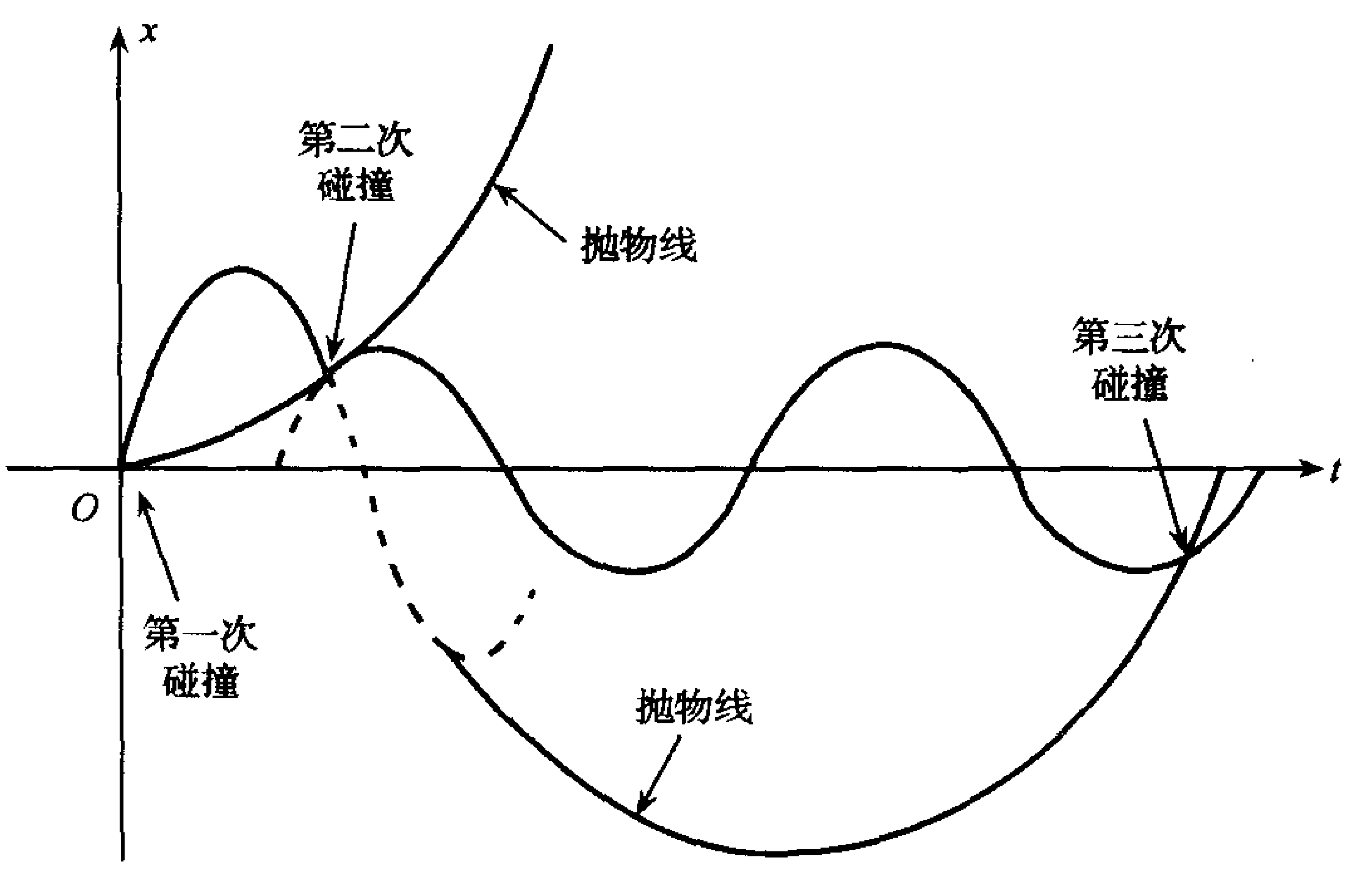


图 3.2

3.1.4 两个完全相同的圆柱体,它们的轴平行,且在同一水平面上,相距为 $2L$,以相同的角速率按图 3.3 所示方向绕轴快速转动,在圆柱体上放一均质木板,木板与圆柱体之间的滑动摩擦因数为 μ. 开始把木板放在平衡位置偏右 x_0 的位置,且给它一个向右的初速度 v_0,求木板的运动．

解 可把木板视为位于其中心的一个质点,设其质量为 m. 取 x 轴向右,原点取在木板的平衡位置．

当木板中心位于 x 处,两圆柱体对木板的支持力 N_1、N_2,如图 3.4 所示,木板除受到图示的三个力以外,还受到圆柱体施给的沿 x 方向的滑动摩擦力．

由牛顿运动第二定律,

$$m\ddot{x}=\mu N_1-\mu N_2 \tag{1}$$

$$N_1+N_2-mg=0 \tag{2}$$

由对固定点 O 的角动量定理,注意 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}\times m\dot{x}\boldsymbol{i}=0$,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=0$,有 $\boldsymbol{M}_0=0$,即

$$N_2L - N_1L - mgx = 0 \tag{3}$$

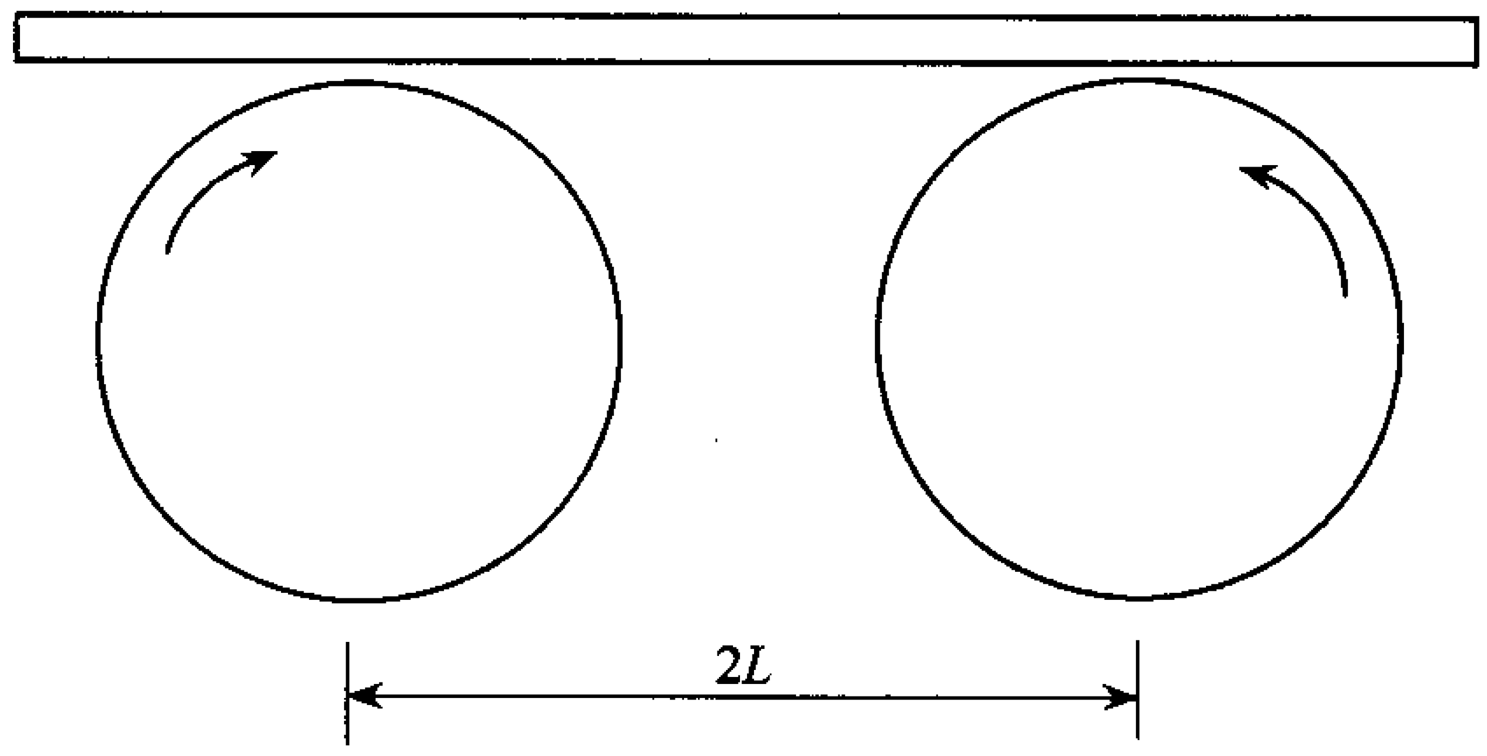


图 3.3

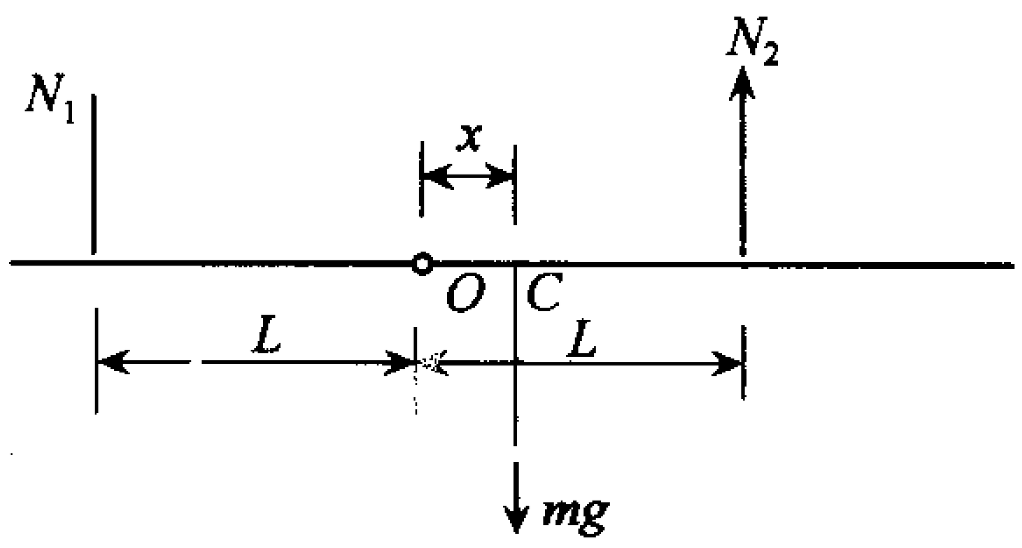


图 3.4

由式(2)、(3)可解出

$$N_1 = \frac{mg(L-x)}{2L}, N_2 = \frac{mg(L+x)}{2L}$$

代入式(1),化简后得

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{L}x = 0$$

通解为

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{L}}t + \alpha\right)$$

由初条件:$t=0, x=x_0, \dot{x}=v_0$,得

$$A\cos\alpha = x_0, \ -A\sqrt{\frac{\mu g}{L}}\sin\alpha = v_0$$

得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2 L}{\mu g}}$$

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{v_0}{x_0}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}\right)$$

又∵$\sin\alpha < 0$,α 在第四象限,

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2 L}{\mu g}}\cos\left[\sqrt{\frac{\mu g}{L}}t - \arctan\left(\frac{v_0}{x_0}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}\right)\right]$$

3.1.5　质量为 m 和 $2m$ 的两质点系在一个不可伸长的轻绳两端,并搭在光滑的滑轮上,在 m 的下端用原长为 a、劲度系数 $k=\frac{mg}{a}$ 的质量可忽略的弹簧与另一个质量为 m 的质点相连.

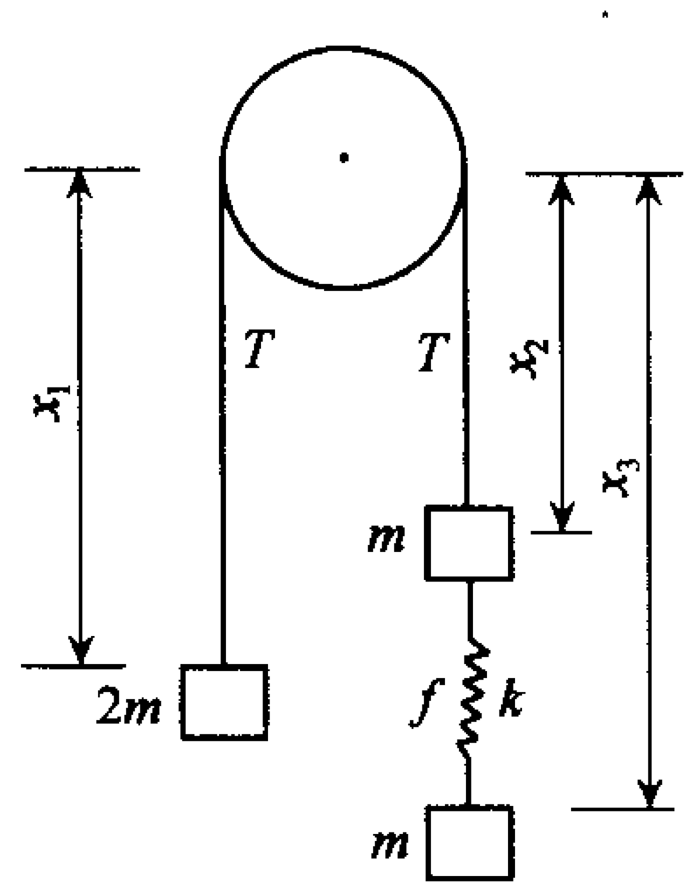


图 3.5

开始时从下列状态：三个质点均静止；绳被拉紧；弹簧为原长开始运动．求：

(1) 任何时刻两质量为 m 的质点间的距离；

(2) 绳子张力；

(3) 弹簧对质点的作用力．

解　用 x_1、x_2、x_3 分别表示三个质点的位置，如图 3.5 所示．

$$2m\ddot{x}_1 = 2mg - T \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_2 = mg + f - T \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_3 = mg - f \tag{3}$$

弹簧原长为 a，设伸长量为 ξ.

$$f = k\xi = \frac{mg}{a}\xi \tag{4}$$

又设绳长为 L，滑轮半径为 r.

$$x_2 = L - \pi r - x_1$$

$$x_3 = x_2 + a + \xi$$

对上两式对 t 求导，

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 \tag{5}$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_2 + \ddot{\xi} = -\ddot{x}_1 + \ddot{\xi} \tag{6}$$

用式(4)、(5)、(6)，式(2)、(3)可改写为

$$-m\ddot{x}_1 = mg + \frac{mg}{a}\xi - T \tag{7}$$

$$-m\ddot{x}_1 + m\ddot{\xi} = mg - \frac{mg}{a}\xi \tag{8}$$

式(1)－式(7)＋式(8)×3 得

$$3m\ddot{\xi} = 4mg - \frac{4mg}{a}\xi$$

$$\ddot{\xi} + \frac{4g}{3a}\xi = \frac{4}{3}g$$

通解为

$$\xi = a + A\cos\left(\sqrt{\frac{4g}{3a}}t + \alpha\right)$$

用初始条件：$t=0$ 时，$\xi=0$，$\dot{\xi}=0$，得

$$\xi = a - a\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{3a}}t\right)$$

两质量为 m 的质点间的距离为

$$L = a + \xi = a\left[2 - \cos\left(2\sqrt{\frac{g}{3a}}t\right)\right]$$

式(8)－式(7)得

$$m\ddot{\xi} = -\frac{2mg}{a}\xi + T$$

$$T = m\left(\ddot{\xi} + \frac{2g}{a}\xi\right) = 2mg\left[1 - \frac{1}{3}\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{3a}}t\right)\right]$$

$$f=\frac{mg}{a}\xi=mg\left[1-\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{3a}}t\right)\right]$$

3.1.6　一质点被一根轻弹性绳系于固定点 A，绳的固有长度为 a，当悬挂质点平衡后，绳的长度为 $a+b$，今质点从 A 点静止下降，求质点落到最低点与 A 点间的距离以及此过程所用的时间．

解　取 x 轴竖直向下，原点取在质点的平衡位置．设弹性绳的劲度系数为 k，质点质量为 m，则

$$mg-kb=0,\quad k=\frac{mg}{b}$$

质点从 A 点静止下落到 B 点，只受重力作用，为自由落体运动．设质点至 B 点时的速度为 v_0

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mga,v_0=\sqrt{2ga}$$

此段运动需时 t_1，则

$$a=\frac{1}{2}gt_1^2,\qquad t_1=\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

自 B 点往下直至质点到达最低点，有下列运动微分方程：

$$m\ddot{x}=mg-k(x+b)=-\frac{mg}{b}x$$

$$\ddot{x}+\frac{g}{b}x=0$$

通解为

$$x=c\cos\left[\sqrt{\frac{g}{b}}(t-t_1)+\alpha\right]$$

初始条件为：$t=t_1$ 时，$x=-b,\dot{x}=v_0=\sqrt{2ga}$，故

$$-b=c\cos\alpha,\sqrt{2ga}=-\sqrt{\frac{g}{b}}c\sin\alpha$$

因 $t=t_1$ 时 $x<0,\dot{x}>0,\alpha$ 在第三象限定出．

$$c=\sqrt{b^2+2ab}$$

$$\alpha=\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}-\pi$$

其中 $\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}$ 取主值．

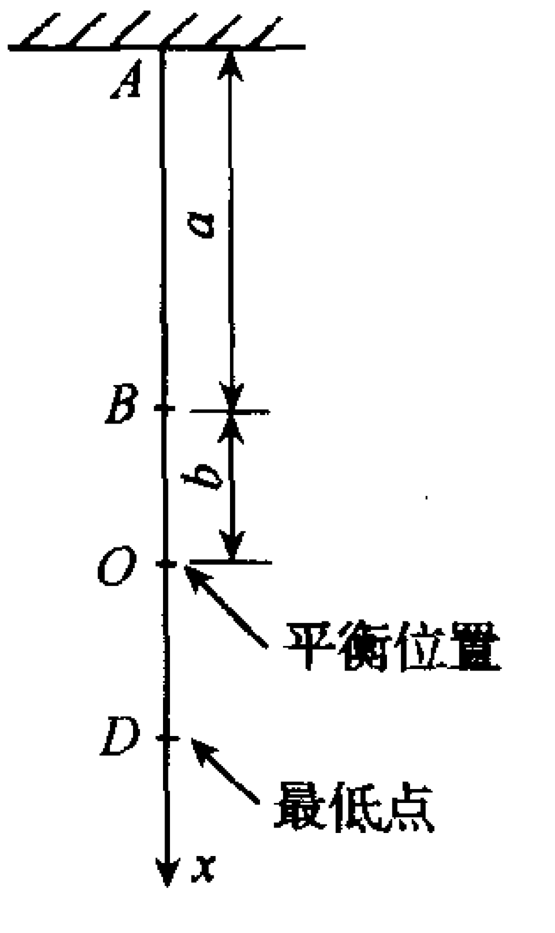


图 3.6

$$\therefore\qquad x=\sqrt{b^2+2ab}\cos\left[\sqrt{\frac{g}{b}}(t-t_1)+\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}-\pi\right]$$

达到最低点 D 时，$\dot{x}=0$，此时 t_2 满足下式：

$$-\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot\sqrt{b^2+2ab}\sin\left[\sqrt{\frac{g}{b}}(t_2-t_1)+\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}-\pi\right]=0$$

即 $$\sin\left[\sqrt{\frac{g}{b}}(t_2-t_1)+\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}-\pi\right]=0$$

注意：因 $t_2>t_1$，在 D 点振动的相位大于在 B 点的相位，上面写的 α 取负值(在第三象限)，则在 D 点时振动相位为零(如上面的 α 取 $\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}+\pi$，则 D 点振动相位为 2π).

$$\sqrt{\frac{g}{b}}(t_2-t_1)+\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}-\pi=0$$

∴ $$t_2=t_1+\sqrt{\frac{b}{g}}\left(\pi-\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2a}{g}}+\sqrt{\frac{b}{g}}\left(\pi-\arctan\sqrt{\frac{2a}{b}}\right)$$

此时 $$x=x(t_2)=\sqrt{b^2+2ab}$$

最低点至 A 点的距离为 $a+b+\sqrt{b^2+2ab}$.

3.1.7 滑轮上绕有不可伸长的轻绳，绳上悬一弹簧，弹簧的另一端挂一质量为 m 的物体，当滑轮等角速度转动时，物体以等速度 v_0 下降，此时弹簧伸长量为 λ. 如将滑轮突然停住，求此后运动中弹簧的最大伸长量和绳子的最大张力 .

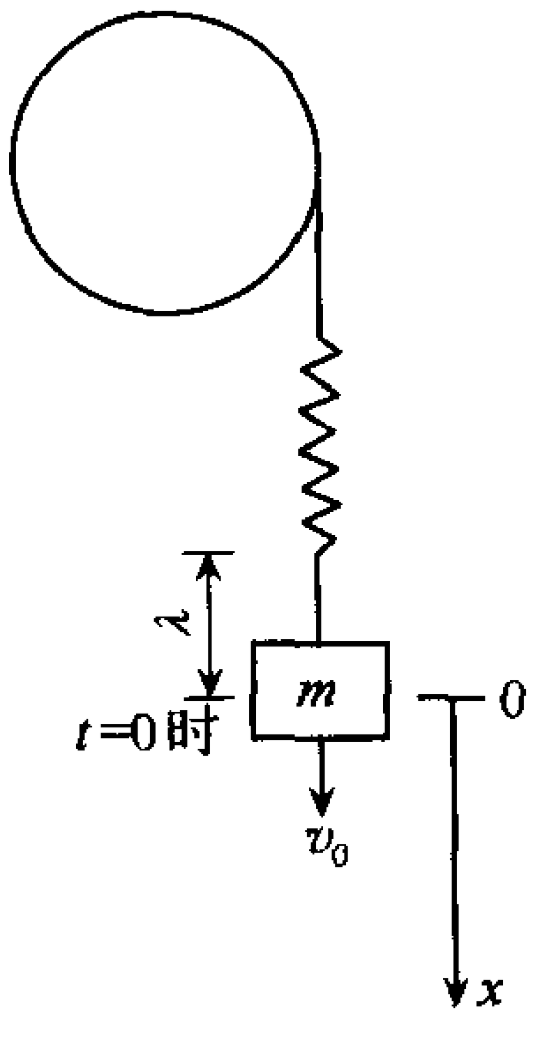


图 3.7

解 取滑轮突然停止时为 $t=0$，且取此时物体所在位置为坐标原点，x 轴竖直向下，如图 3.7 所示，

$$m\ddot{x}=mg-k(x+\lambda)$$

其中 k 是弹簧的劲度系数 .

物体匀速运动时所受合力为零 .

$$mg-k\lambda=0,\qquad k=\frac{mg}{\lambda}$$

代入上式得 $$\ddot{x}+\frac{g}{\lambda}x=0$$

$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\lambda}}t+\alpha\right)$$

初始条件：$t=0$ 时，$x=0$，$\dot{x}=v_0$，定出

$$A=v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}},\quad \alpha=-\frac{\pi}{2}$$

$$x=v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\lambda}}t-\frac{\pi}{2}\right)=v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\lambda}}t\right)$$

弹簧的最大伸长量为

$$\lambda+x_{\max}=\lambda+v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

绳子最大张力等于弹簧最大伸长时的弹簧力为

$$k(\lambda + x_{\max}) = \frac{mg}{\lambda}\left(\lambda + v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\right) = mg\left(1 + \frac{v_0}{\sqrt{\lambda g}}\right)$$

3.1.8 如果通过实心的均质分布的无自转动的地球沿一条直径钻一小隧道，一块石头从地球的一边从静止开始让它掉入隧道，经 $t_1=\frac{\pi}{\omega_0}$ 时间后在地球的另一边会看到它．如果石头不是掉入而是以速度 v_0 抛入，问 v_0 应当多大才能使它经 $t_2=\frac{1}{2}t_1$ 时间后在地球的另一边出现？答案用 ω_0 和地球的半径 R 给出．

解 参看 2.1.78 题，可以证明：石块在隧道中受到地球的万有引力是恢复力，其大小与距平衡位置的距离成正比，方向总是指向平衡位置，不论初始条件如何，是自由掉入还是以初速 v_0 抛入，都是做相同角频率的简谐振动，不同的初始条件，振动的振幅和初相位有所不同．取地球中心（平衡位置）为 x 坐标的原点，设简谐振动的角频率为 ω，则

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

在地球表面一隧道口（取为 $x=R$）让石头自由掉入，即初始条件为 $t=0$ 时 $x=R$，$\dot{x}=0$，则定出 $A=R$，$\alpha=0$，所以

$$x = R\cos\omega t$$

到达另一表面的隧道口时，$t=t_1$，$x=-R$，有

$$\omega t_1 = \pi, \qquad t_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

今知 $t_1=\frac{\pi}{\omega_0}$，可见 $\omega=\omega_0$.

现在改初始条件为 $t=0$ 时 $x=R$，$\dot{x}=-v_0$. 要求在 $t=t_2=\frac{1}{2}t_1=\frac{\pi}{2\omega_0}$ 时，$x=-R$. 要确定 v_0 值．

运动学方程可写为

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

根据上述初始条件和要求，有下列三个关系：

$$R = A\cos\alpha \tag{1}$$

$$-v_0 = -A\omega_0\sin\alpha \tag{2}$$

$$-R = A\cos\left(\omega_0 \cdot \frac{1}{2}t_1 + \alpha\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -A\sin\alpha \tag{3}$$

三个方程可解出 v_0、A 和 α 三个未知量．

比较式(2)、(3)，即得 $v_0=R\omega_0$.

3.1.9 一根不计质量、不可伸长的绳子，穿过光滑的水平桌面上的小孔，两端分别连着质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体．m_1 在水平桌面上做半径为 r_0 的圆周运动时，m_2 静止不动，如图 3.8 所示．今给 m_2 一个向下的极小的冲量，证明 m_2 将做简谐振动，并求出其振动周期（小孔的摩擦力可忽略不计）.

解 取小孔为坐标原点，用平面极坐标描述 m_1 的运动，用竖直向下的 x 轴描述 m_2 的运动，设绳子张力为 T，

$$m_1(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -T \tag{1}$$

$$m_1(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = \frac{m_1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{2}$$

$$m_2\ddot{z} = m_2 g - T \tag{3}$$

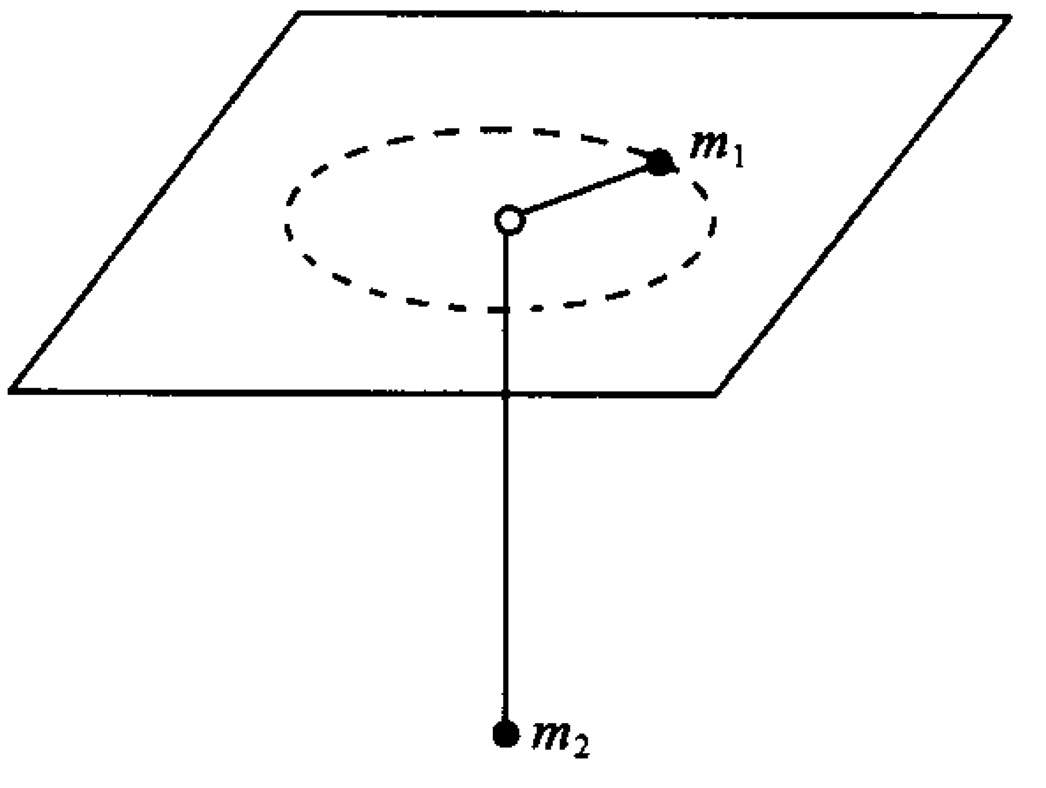


图 3.8

由式(2)知，$$r^2\dot{\varphi} = 常量$$

由 m_1 做半径为 r_0 的圆周运动确定此常量．设做此圆周运动时的 $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$，由自然坐标法向方程

$$m_1 r_0 \dot{\varphi}_0^2 = T = m_2 g$$

得
$$r_0^2\dot{\varphi}_0 = r_0\sqrt{\frac{m_2 g r_0}{m_1}}$$

∴
$$r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0 = r_0\sqrt{\frac{m_2 g r_0}{m_1}} \tag{4}$$

由式(4)，式(1)可改写为

$$m_1\left(\ddot{r} - \frac{m_2 g r_0^3}{m_1 r^3}\right) = -T \tag{5}$$

考虑绳子不可伸长，$r + z =$ 常量，$\ddot{r} = -\ddot{z}$，式(3)可改写为

$$-m_2\ddot{r} = m_2 g - T \tag{6}$$

式(5)－式(6)得

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - \frac{m_2 g r_0^3}{r^3} = -m_2 g \tag{7}$$

用

$$r = r_0 + \xi = r_0\left(1 + \frac{\xi}{r_0}\right)$$

$$r^{-3} = r_0^{-3}\left(1 + \frac{\xi}{r_0}\right)^{-3} \approx r_0^{-3}\left(1 - \frac{3\xi}{r_0}\right) \text{(略去高级小量)}$$

$$\ddot{r} = \ddot{\xi}$$

式(7)可改写为

$$(m_1 + m_2)\ddot{\xi} + \frac{3m_2 g}{r_0}\xi = 0 \tag{8}$$

$$r + z = 常量, r_0 + \xi + z = 常量$$

$$\ddot{\xi}=-\ddot{z}$$

式(8)可改写为

$$-(m_1+m_2)\ddot{z}-\frac{3m_2g}{r_0}z=常量$$

$$\ddot{z}+\frac{3m_2g}{(m_1+m_2)r_0}z=常量 \tag{9}$$

式(9)是简谐振动的运动微分方程,常量只是表明平衡位置不在 $z=0$,角频率和周期分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{3m_2g}{(m_1+m_2)r_0}},\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{(m_1+m_2)r_0}{3m_2g}}$$

3.1.10 一质量为 M 的质点在势能 $V(x)=-kx\mathrm{e}^{-ax}$(k 和 a 均为正值、常量)的影响下沿 x 轴运动,求平衡位置和在此平衡位置附近做小幅振动的周期. 若 k 和(或)a 是负的常数,情况如何?

解

$$V(x)=-kx\mathrm{e}^{-ax}$$

$$f(x)=-\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}=+k\mathrm{e}^{-ax}+akx\mathrm{e}^{-ax}$$

平衡位置:

$$f(x)=0$$

$$-k\mathrm{e}^{-ax}+akx\mathrm{e}^{-ax}=0,\qquad x=\frac{1}{a}$$

$$m\ddot{x}=f(x)=+k\mathrm{e}^{-ax}(1-ax) \tag{1}$$

考虑在平衡位置 $x=\frac{1}{a}$附近的运动,

$$x=\frac{1}{a}+\xi\qquad 或\qquad \xi=x-\frac{1}{a}$$

$$f(x)=f\left(\frac{1}{a}+\xi\right)=+k\mathrm{e}^{-a\left(\frac{1}{a}+\xi\right)}\left[1-a\left(\frac{1}{a}+\xi\right)\right]$$

$$=-\frac{ka}{e}\mathrm{e}^{-a\xi}\xi=-\frac{ka}{e}\left(1-a\xi+\frac{1}{2}a^2\xi^2+\cdots\right)\xi$$

$$\approx-\frac{ka}{e}\xi(只保留一级小量)$$

在 $x=\frac{1}{a}$附近的运动,式(1)可近似为

$$M\ddot{\xi}=-\frac{ka}{e}\xi\qquad 或\qquad \ddot{\xi}+\frac{ka}{eM}\xi=0$$

这是简谐振动的运动微分方程,可保持在平衡位置附近做小幅振动. 振动的角频率和周期为

$$\omega=\sqrt{\frac{ka}{eM}},\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{eM}{ka}}$$

若 k 和 a 均为负的常量,$\frac{1}{a}$仍是稳定平衡位置,可在它的附近做小幅简谐振动,上述

ω 和 T 仍成立．若 k 和 a 中有一个为负值，则$\frac{1}{a}$仍是平衡位置，但是不稳定平衡位置，质点偏离平衡位置后，受到的力不是恢复力，质点不能保持在平衡位置附近的运动．

3.1.11　悬挂在原点的"单摆"，两边用旋轮线

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), y = a(1 - \cos\varphi)$$

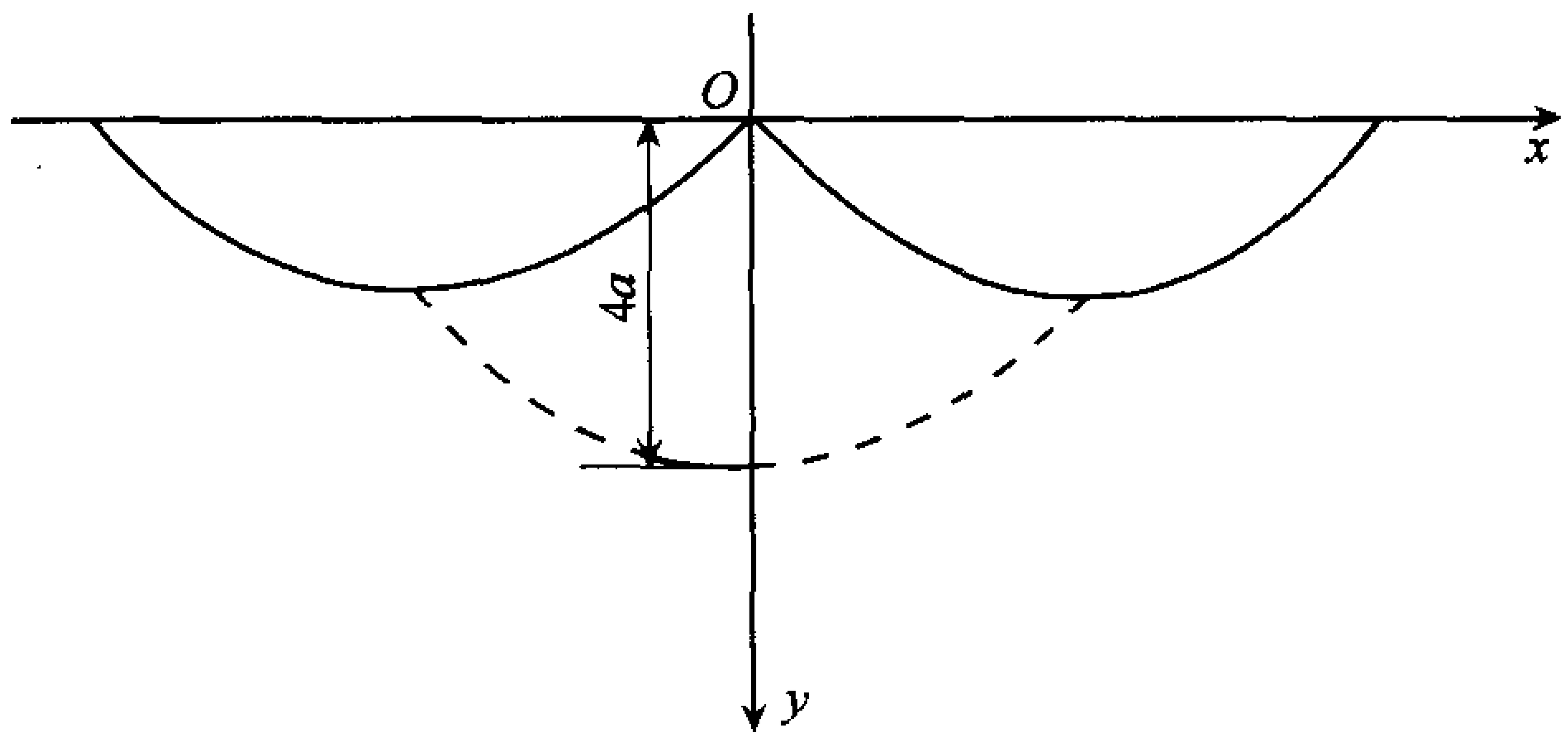


图 3.9

(其中 φ 为产生旋轮线的半径为 a 的圆轮转过的角度)做成挡板来对"单摆"的摆长加以限制，如图所示．"单摆"由长度为 $4a$ 的不可伸长的轻绳和摆锤构成．证明：

(1) 摆锤的轨迹是一条旋轮线；

(2) 摆锤的运动是周期运动，其周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$，与摆幅无关．

提示：用自然坐标的运动微分方程，证明 $\sin\theta$ 做简谐振动，θ 是摆线的直线部分与 y 轴的夹角．

证明　(1)图中 OPM 是在某时刻受挡板限制的一条摆线，OP 是摆线沿挡板的曲线部分，PM 是摆线的直线部分，图中的 φ 就是表示 P 点 x、y 坐标所用的参数 φ，$a\varphi=OQ$. PM 是摆线与旋轮线挡板不相接触的部分，PM 与旋轮线相切．设 PM 与 y 轴的夹角为 θ，如图 3.10 所示．

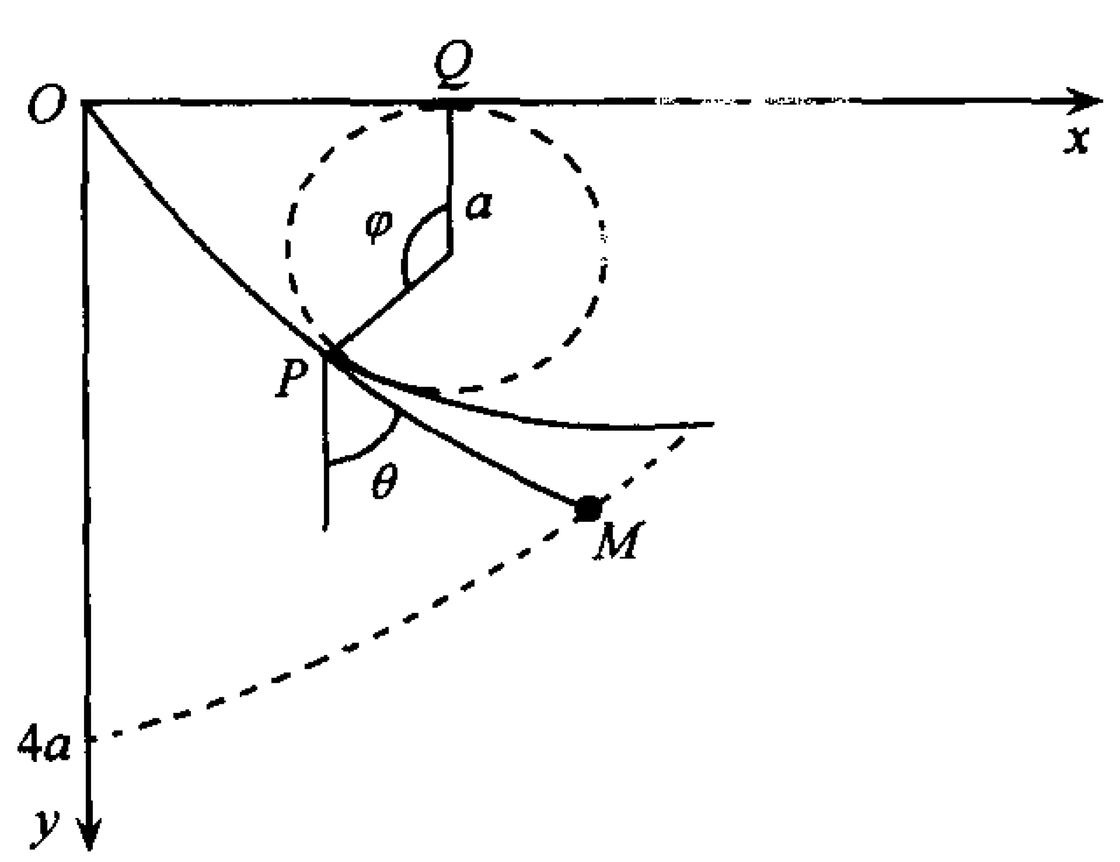


图 3.10

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \frac{a(1-\cos\varphi)}{a\sin\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \tan\frac{\varphi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2}\varphi$$

设摆锤 M 的 x、y 坐标为 x'、y'，与 P 点的坐标 x、y 有下列关系：

$$x' = x + PM\sin\theta, y' = y + PM\cos\theta$$

为计算 PM，先计算$\overset{\frown}{OP}$段长度 s. 设旋轮的角速度为 $\dot{\varphi}$，则 P 点沿旋轮线运动的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}\boldsymbol{j}$$

$$v = \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2\right]^{1/2}$$

$$s = \int v\mathrm{d}t = \int\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{1/2}\dot{\varphi}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\varphi}\sqrt{[a(1-\cos\varphi)]^2 + (a\sin\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= a\int_0^{\varphi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\mathrm{d}\varphi = a\int_0^{\varphi}\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4a\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$PM = 4a - s = 4a\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$x' = x + PM\sin\theta = a(\varphi + \sin\varphi)$$

$$y' = y + PM\cos\theta = a(3 + \cos\varphi)$$

这个 x'、y' 是旋轮线方程，而且是和挡板的旋轮线一样的方程，旋轮的半径相同，只是坐标轴取法不同（有一平移），转角的零点不同．为说明这一点，引入 $\phi = \varphi - \pi$，并令 $x'' = x' - a\pi$，$y'' = y' - 2a$，则

$$x'' = a[\phi + \pi + \sin(\phi + \pi)] - a\pi = a(\phi - \sin\phi)$$

$$y'' = a[3 + \cos(\phi + \pi)] - 2a = a(1 - \cos\phi)$$

（2）设摆锤质量为 m，对摆锤到自然坐标的切向方程．为了与前面已用过的 v，s 相区别，描述 M 点摆锤运动的各物理量除时间仍用 t 以外，均带"$'$"．

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\tau}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是轨道切线方向的单位矢量，

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}'}{v} = \frac{1}{v'}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right) = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\boldsymbol{j}$$

$$mg\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\tau} = mg\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}$$

$$y' = a(3 + \cos\varphi),\mathrm{d}y' = -a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}s' = \sqrt{(\mathrm{d}x')^2 + (\mathrm{d}y')^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$$

$$mg\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\tau} = mg\frac{-a\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi} = -mg\sin\frac{\varphi}{2} = -mg\sin\theta$$

$$\mathrm{d}s' = 2a\cos\theta\mathrm{d}(2\theta) = 4a\mathrm{d}\sin\theta$$

$$v' = \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t} = 4a\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = 4a\frac{\mathrm{d}^2\sin\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

将$\frac{dv'}{dt}$和 $mg\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\tau}$ 代入自然坐标的切向方程,

$$4am\frac{d^2\sin\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\sin\theta}{dt^2} + \frac{g}{4a}\sin\theta = 0$$

$\sin\theta$ 做简谐振动,说明摆锤的运动是周期性的,其周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$$

导出上述关于 $\sin\theta$ 的微分方程中对 $\sin\theta$ 没有任何限制,θ 值反映摆幅的大小,因此摆锤做的周期运动的周期与摆幅无关.

说明:以上的证明只适用于摆长等于 $4a$,a 为旋轮线挡板的旋轮半径这样的"单摆".

3.1.12 若放置在光滑的水平面上的弹簧振动系统,弹簧的质量不可忽略,证明系统的振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + m/3}{k}}$$

其中 m 为弹簧的质量,k 为弹簧的劲度系数,M 为系于弹簧上的物体的质量.

提示:可将弹簧等效于一个弹簧振子:质量可忽略的弹簧的原长和劲度系数均与质量不可忽略的弹簧一样,连在弹簧上的物体质量为 m',先证明 $m' = \frac{1}{3}m$.

证明　取系统(包括物体与弹簧)平衡时为 x 轴的零点,x 表示物体的位置,也是弹簧的伸长量.

弹簧伸长量为 x 时,弹簧的势能为$\frac{1}{2}kx^2$,物体的速度为 $\dot{x}$,物体的动能为$\frac{1}{2}M\dot{x}^2$,弹簧的动能可用积分计算,设此时弹簧长 l,考虑 $x=x'$ 至 $x=x'+dx'$ 段弹簧的动能,这段弹簧的质量为$\frac{m}{l}dx'$,速度为$\frac{x'}{l}\dot{x}$,动能为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}dx'\right)\left(\frac{x'}{l}\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{mx'^2}{l^3}\dot{x}^2dx'$$

整个弹簧的动能为

$$\int_0^l\frac{1}{2}\frac{mx'^2}{l^3}\dot{x}^2dx' = \frac{1}{6}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\right)\dot{x}^2$$

弹簧的动能和势能和提示中说的等效弹簧振子一样.

整个系统的机械能守恒.

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{6}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 常量$$

两边对时间求导,

$$M\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{3}m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\left(M + \frac{1}{3}m\right)\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M+\frac{1}{3}m}},\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{1}{3}m}{k}}$$

3.1.13 一个质量为 m 的小物体放在光滑的水平面上被两个原长为 l_0、劲度系数为 k 的弹簧约束，在图 3.11 所示的平衡位置附近做小振动．

(1)求小振动的角频率；

(2) 如果弹簧原长变为 $2l_0$，运动将会发生什么定性变化？

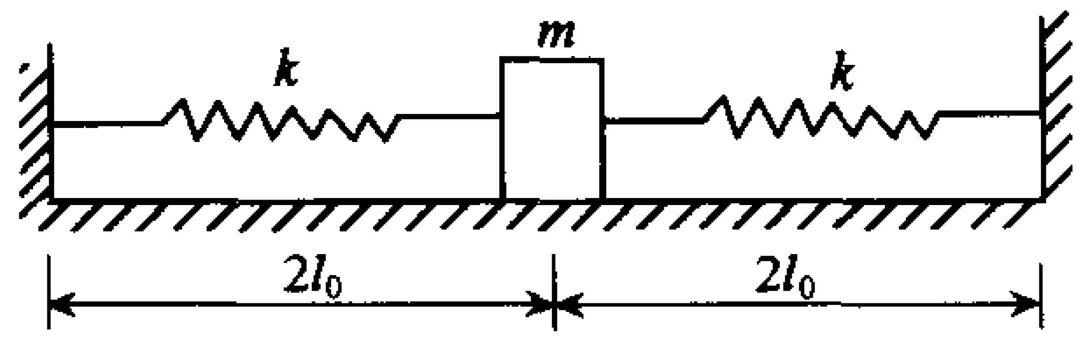


图 3.11

解 沿平衡时的弹簧方向取 x 轴，垂直于弹簧的方向取 y 轴，平衡位置为坐标原点．

(1)
$$m\ddot{x}=-k(\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}-l_0)\cdot\frac{2l_0+x}{\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}}+k(\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}-l_0)\frac{2l_0-x}{\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}}$$

$$m\ddot{y}=-k(\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}-l_0)\cdot\frac{y}{\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}}-k(\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}-l_0)\frac{y}{\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}}$$

考虑到小振动，x、y 为一级小量，对以上两式作近似，只保留一级小量，可得

$$m\ddot{x}=-2kx$$
$$m\ddot{y}=-ky$$

x 方向简谐振动的角频率为

$$\omega_x=\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

y 方向简谐振动的角频率为

$$\omega_y=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(2) 在弹簧原长改为 $2l_0$ 的情况下，近似时，保留不为零的最低级近似项，得

$$m\ddot{x}=-2kx$$
$$m\ddot{y}=-\frac{k}{4l_0^2}y^3$$

可见，x 方向的振动与(1)问的解答相同，仍做简谐振动，振动的角频率仍为 $\omega_x=\sqrt{\frac{2k}{m}}$，$y$ 方向的运动不是简谐振动，但受力方向仍指向平衡位置，仍是围绕平衡位置的周期运动．

3.1.14 一个机器内某零件的振动规律为

$$x=0.4\sin\omega t+0.3\cos\omega t$$

x 的单位为 cm，$\omega=20\mathrm{s}^{-1}$. 求这个振动的振幅、最大速度及最大加速度.

解 $$x=A\cos(\omega t+\alpha)=A\cos\omega t\cos\alpha-A\sin\omega t\sin\alpha$$

与 $x=0.4\sin\omega t+0.3\cos\omega t$ 比较，可得

$$A\cos\alpha=0.3,\qquad A\sin\alpha=-0.4$$

解得 $$A=\sqrt{(0.3)^2+(-0.4)^2}=0.5(\mathrm{cm})$$

$$v_{\max}=Aw=0.5\times 20=10(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

$$a_{\max}=Aw^2=0.5\times(20)^2=200(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

3.1.15 判断下列振动是否周期运动.若是周期运动,求出它的周期.

期 $T=\sqrt{2}\pi$.

3.1.16　两个在同一直线上做频率相同的简谐振动的合振动的振幅为 10cm，合振动的相位超前第一个振动$\frac{\pi}{6}$，第一个振动的振幅 $A_1=8.0\text{cm}$. 求第二个振动的振幅 A_2 及它与第一个振动的相位差.

解

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\alpha_1)=8.0\cos(\omega t+\alpha_1)$$

$$x_2=A_2\cos(\omega t+\alpha_2)$$

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\alpha)=10\cos\left(\omega t+\alpha_1+\frac{\pi}{6}\right)$$

由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$，已知 $A_1=8.0\text{cm}$，$A=10\text{cm}$，$\alpha=\alpha_1+\frac{\pi}{6}$，画振幅矢量图，如图 3.12 所示，

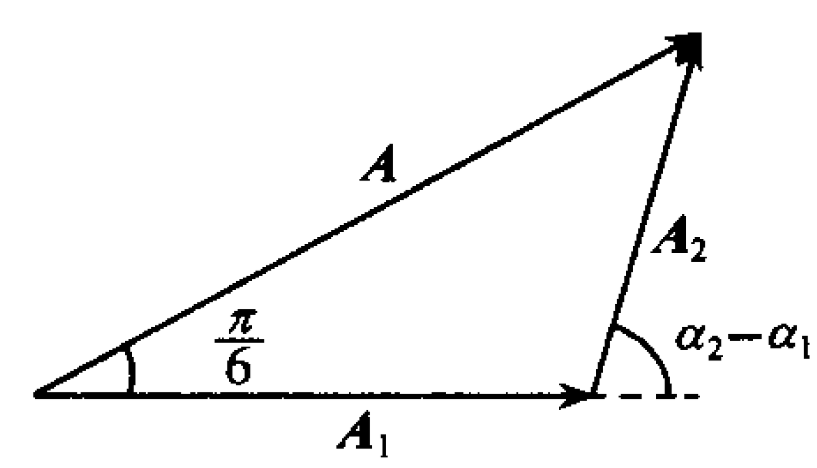


图 3.12

$$A_2=\sqrt{A^2+A_1^2-2AA_1\cos\frac{\pi}{6}}$$
$$=5.04\text{cm}$$

$$\alpha_2-\alpha_1=\arctan\left(\frac{A\sin\frac{\pi}{6}}{A\cos\frac{\pi}{6}-A_1}\right)=82.5°$$

3.1.17　一弹簧振子的劲度系数 $k_1=9.8\text{N/m}$，质量 $m=9.8\times10^{-2}\text{kg}$，它的影子水平地投射在一屏上，该屏的质量 $M=0.98\text{kg}$，通过劲度系数 $k_2=98\text{N/m}$ 的弹簧挂起来，如图 3.13 所示. 开始时，把它们都从平衡位置拉下 0.10m，先释放弹簧振子，如果要使影子在屏上振动的振幅为 0.050m，问要过多长时间释放屏？并写出影子在屏上的振动方程.

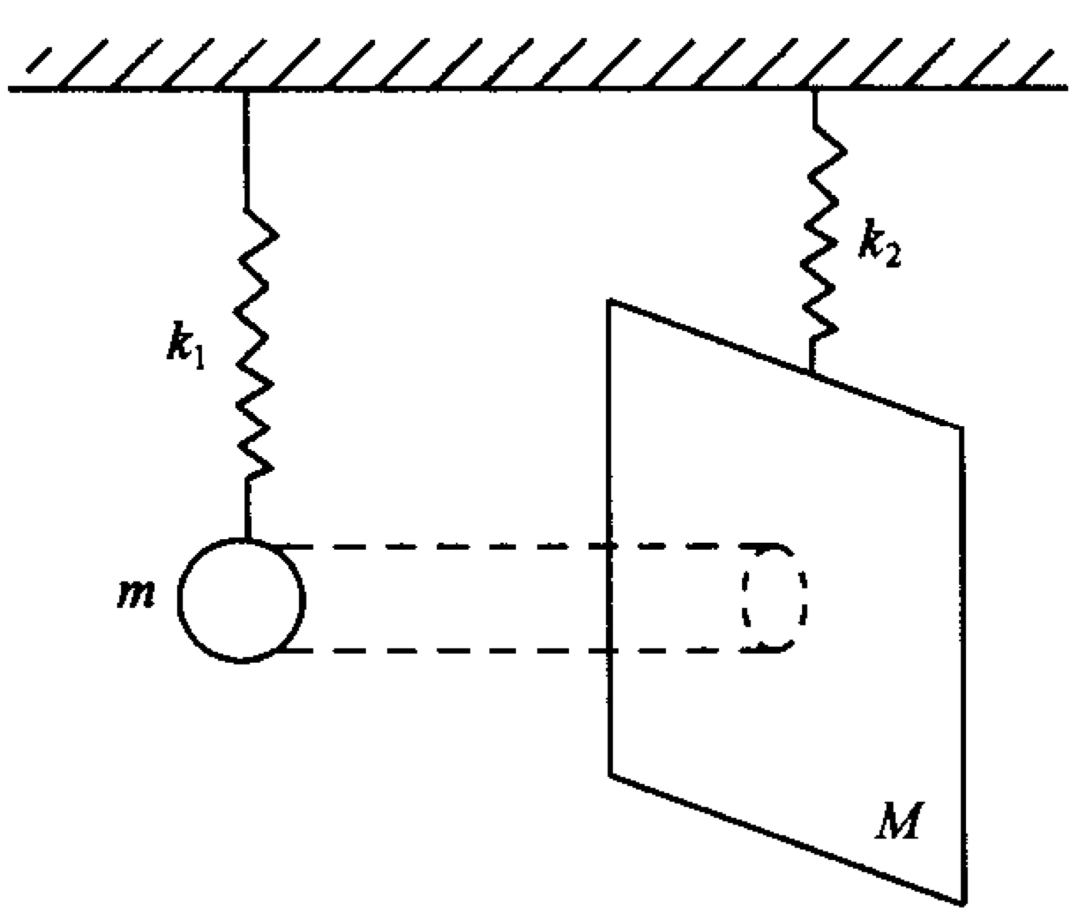


图 3.13

解　用 x_1、x_2 分别表示 m、M 的坐标，向下为正，原点均取在平衡位置，$x=x_1-x_2$ 表示影子在屏上的坐标. 释放振子时，$t=0$，$t=t_0$ 时释放屏.

$$x_1=A_1\cos\sqrt{\frac{k_1}{m}}t=0.10\cos10t$$

$$x_2=A_2\cos\sqrt{\frac{k_2}{M}}(t-t_0)=0.10\cos10(t-t_0)$$

$$x=x_1-x_2=0.050\cos(10t+\alpha)$$

要求出 t_0 和 α

方法一：用矢量图法：图 3.14(a)和(b)分别画出了 t_0 的两个答案.

图 3.14(a)：　$$10t_0=2\arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}\times0.050}{0.10}\right)+2\pi n$$

$$t_0 = (0.0505 + 0.628n)\text{s}, n = 0,1,2,\cdots$$

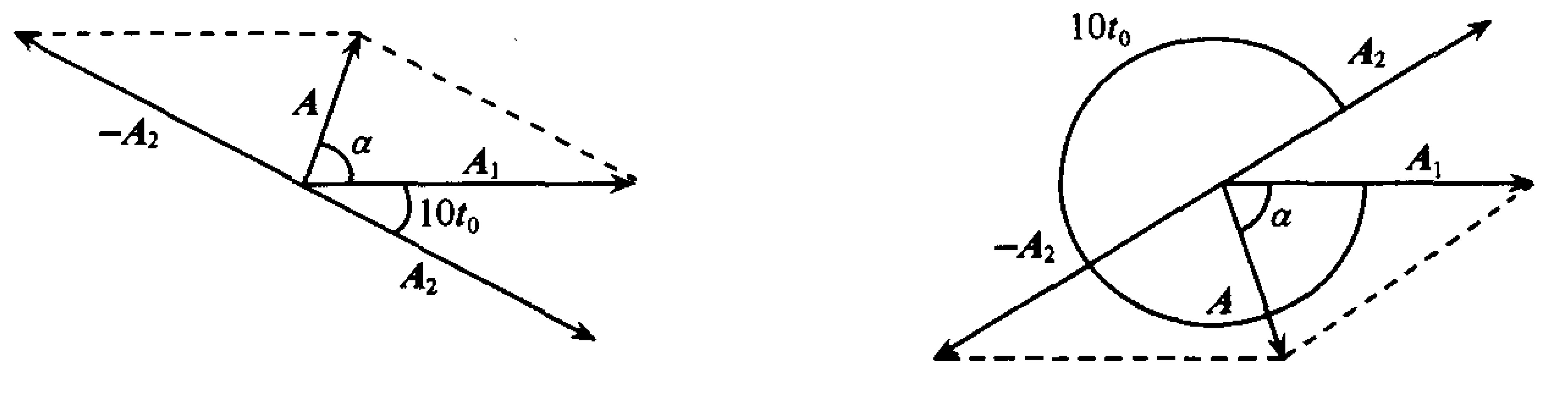


图 3.14

图 3.14(b)：
$$10t_0 = 2\pi - 2\arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}\times 0.050}{0.10}\right) + 2\pi(n-1)$$

$$t_0 = (-0.0505 + 0.628n)\text{s}, n = 1,2,3,\cdots$$

可合写成
$$t_0 = |\pm 0.0505 + 0.628n|\text{s},\quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$\alpha = \pm\arccos\left(\frac{\frac{1}{2}\times 0.050}{0.10}\right) = \pm 1.318(\text{rad})$$

$$x = 0.050\cos(10t \pm 1.318)(\text{m})$$

方法二：用分析法：

$$0.10\cos 10t - 0.10\cos(10t - 10t_0) = 0.050\cos(10t + \alpha)$$

$$0.10\cos 10t - (0.10\cos 10t\cos 10t_0 + 0.10\sin 10t\sin 10t_0)$$
$$= 0.050\cos 10t\cos\alpha - 0.050\sin 10t\sin\alpha$$

两边 $\cos 10t$、$\sin 10t$ 的系数分别相等，得

$$0.10 - 0.10\cos 10t_0 = 0.050\cos\alpha$$
$$-0.10\sin 10t_0 = -0.050\sin\alpha$$

两式平方后相加，解出 $\cos 10t_0$，得

$$\cos 10t_0 = \frac{2(0.10)^2 - (0.050)^2}{2\cdot(0.10)^2} = 0.875$$

$$10t_0 = \arccos 0.875 = \pm 0.505 + 2\pi n$$

∴
$$t_0 = |\pm 0.0505 + 0.628n|\text{s}\qquad n = 0,1,2,\cdots$$

因为 t_0 要取正值（后释放屏），不取 $t_0 = -0.505\text{s}$，

$$\alpha = \arccos\left[\frac{1}{0.050}(0.10 - 0.10\cos 10t_0)\right] = \pm 1.318(\text{rad})$$

3.1.18 用旋转矢量法证明，在同一直线上的 N 个简谐振动，它们有相同的振幅 A_0、相同的角频率 ω_0、相位依次超前 δ，即

$$x_i = A_0\cos[\omega t + (i-1)\delta]\qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

叠加后的合振动

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i = A_0\frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\delta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\delta\right)}\cos\left[\omega t + \frac{1}{2}(N-1)\delta\right]$$

提示：考虑 N 个振幅矢量都是一个圆上的弦，每个振幅矢量是正多边形的一条边．

证明　考虑 N 个振幅矢量都是一个圆上的弦，每个振幅矢量是正多边形的一条边，如图 3.15 所示，每个振幅矢量这条弦所对应的中心角等于相邻两振幅矢量的夹角，也等于两个相位相近的简谐振动的相位差 δ[从圆心作相邻两弦的垂线，其夹角等于 δ，也等于弦对应的中心角]

圆的半径　$R=\dfrac{1}{2}\dfrac{A_0}{\sin\left(\dfrac{1}{2}\delta\right)}$

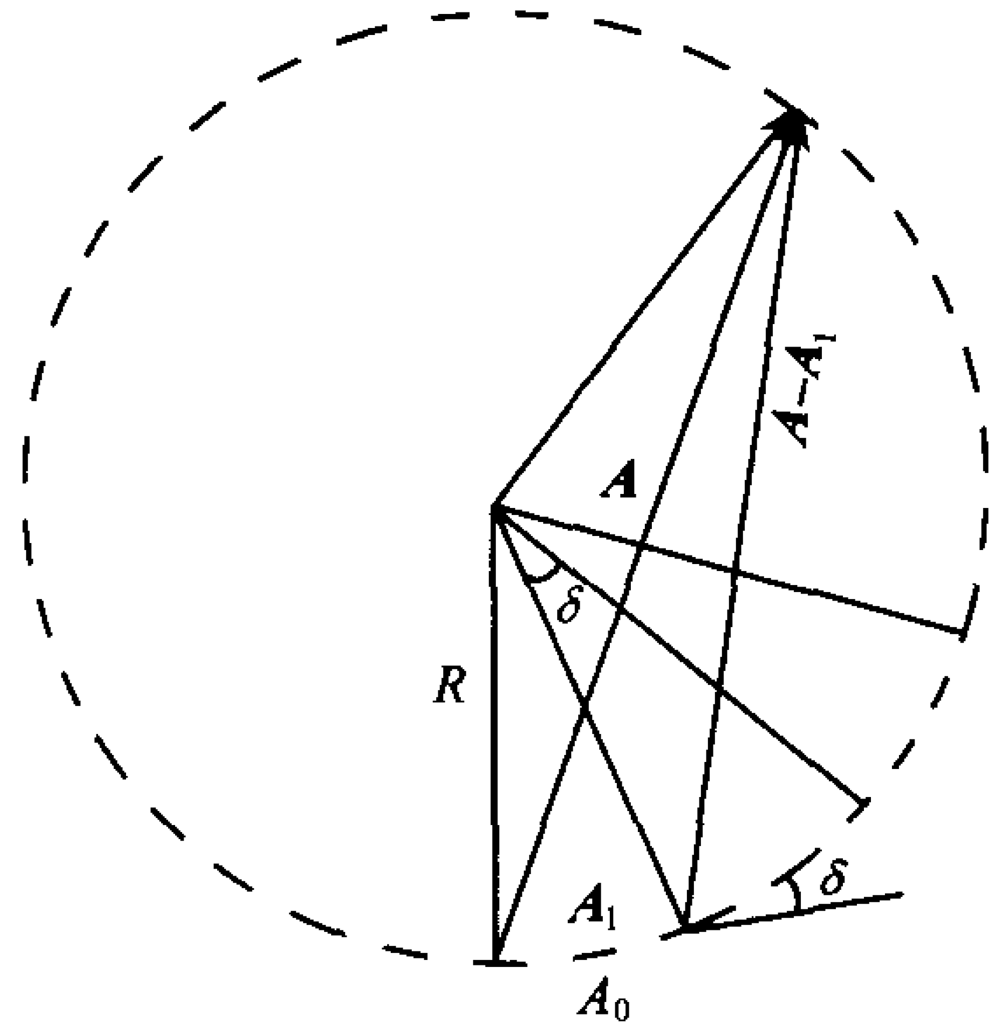


图 3.15

N 个振幅矢量之和相应的弦对应的中心角为 $N\delta$，合矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小为

$$A=2R\sin\left(\frac{1}{2}N\delta\right)=A_0\frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\delta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\delta\right)}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_1$ 的相位差是 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_1$ 这条弦所对应的圆周角，相应的中心角为 $(N-1)\delta$，故此圆周角为 $\dfrac{1}{2}(N-1)\delta$.

$$x_1=A_0\cos\omega t$$

$$x=\sum_{i=1}^{N}x_i=A\cos\left[\omega t+\frac{1}{2}(N-1)\delta\right]$$

$$=A_0\frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\delta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\delta\right)}\cos\left[\omega t+\frac{1}{2}(N-1)\delta\right]$$

3.1.19　有两支标有 256Hz 的音叉，一支是标准的，另一支是待校正的．同时敲击两支音叉，在半分钟内能听到 45 拍，若在待校正的音叉上适当涂蜡，从少逐渐增多，在半分钟内听到的拍数先减少到听不见拍声，而后又增多，问待校正音叉原来的频率多大？

解　$\nu_1=256\text{Hz}$ 是标准音叉的频率，设 ν_2 为待校正音叉的频率．

两同方向、频率不同但相接近的两个简谐振动的合振动为拍，拍频为

$$|\nu_2-\nu_1|=\frac{45}{30}=1.5(\text{Hz})$$

参照弹簧振子的振动频率为 $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，今音叉涂蜡使质量增大了，而弹性不变，故涂蜡将使音叉的频率减小，涂蜡从少逐渐增多，听到的拍数先减少到听不见再逐渐增多，说明未涂蜡时 $\nu_2>\nu_1$，故待校正的音叉原来的频率为

$$\nu_2=\nu_1+1.5=257.5(\text{Hz})$$

3.1.20　画出在互相垂直的两个方向振动的合成运动的轨道，并在图上标明运动方向．

(1) $x=A\sin\omega t,y=B\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(2) $x=A\sin\omega t, y=B\sin\left(2\omega t+\frac{5}{4}\pi\right)$.

解　(1)如图 3.16 所示.

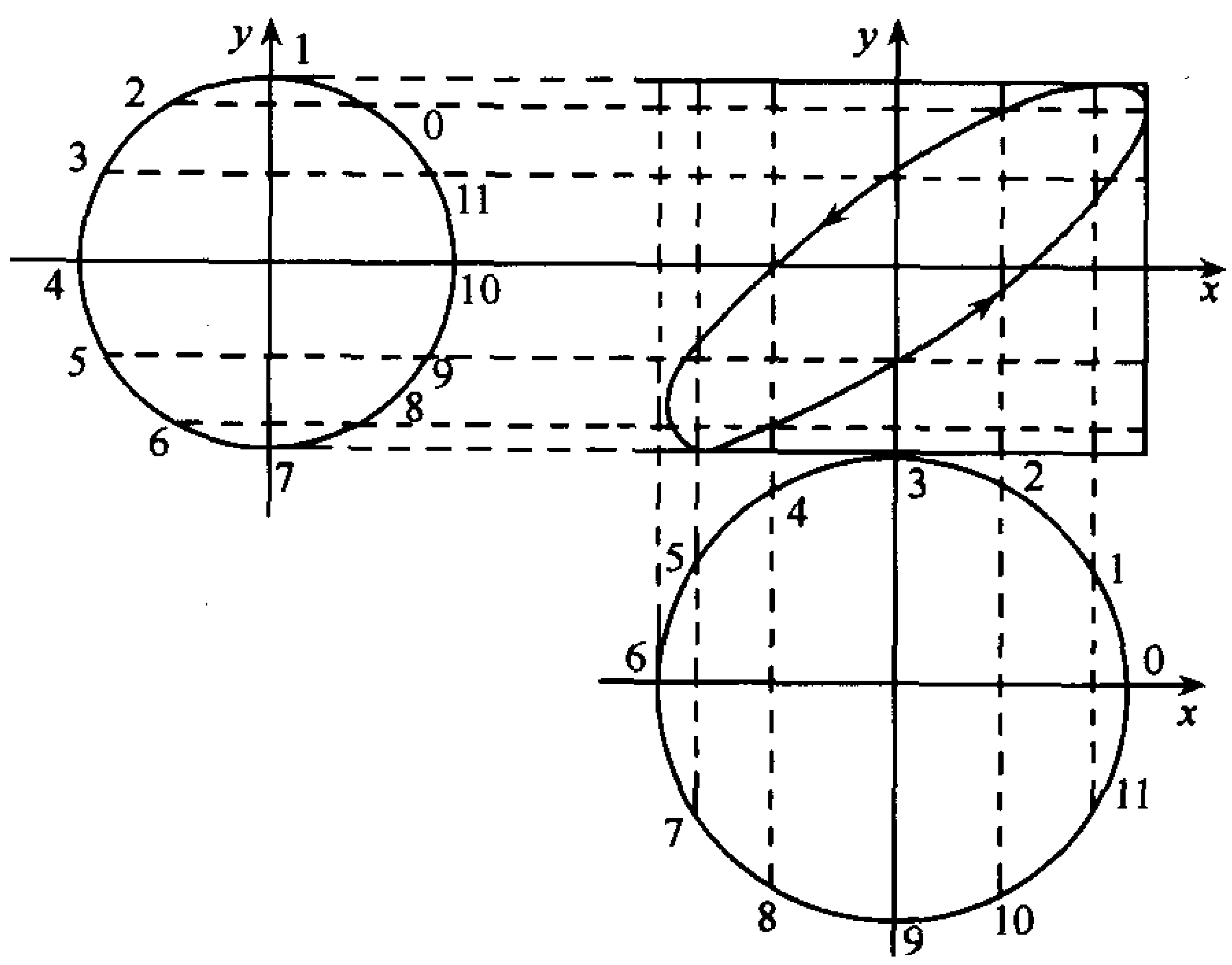


图 3.16

注意:图 3.16 中标的"0"、"1"等是对 $x=A\cos\omega t, y=B\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$ 情况标的,不影响沿轨道的运行方向. 如按 $x=A\sin\omega t, y=B\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$ 情况标号,则图中"9"、"10"、"11"分别改为"0"、"1"、"2",依次类推. 差别仅在于时间零点的选取有所不同而已.

(2) 如图 3.17 所示.

注意:x 方向与 y 方向的两个简谐振动的角频率不同,图 3.17 中的标号"0"、"1"、"2"

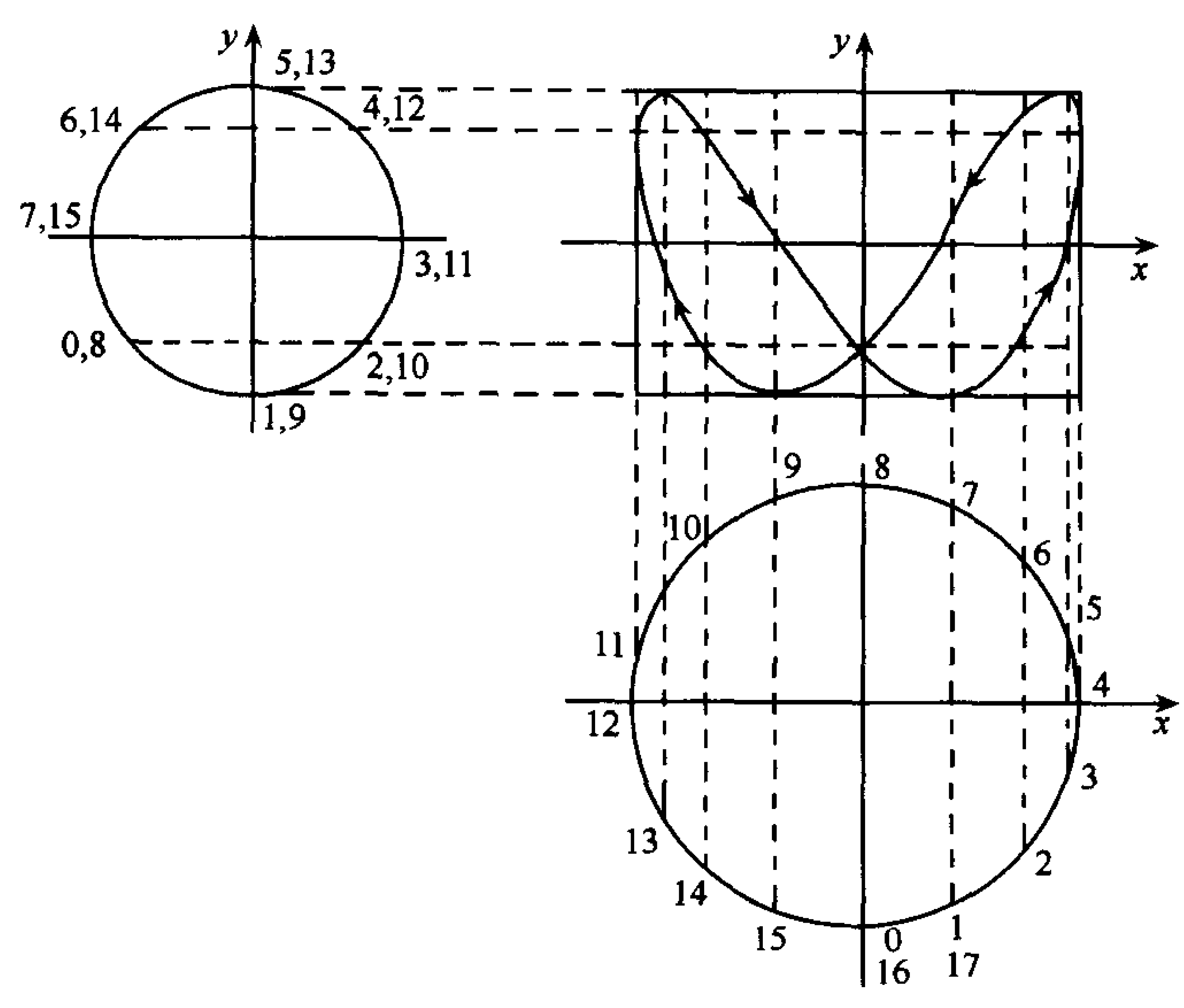


图 3.17

等必须按 $x=A\sin\omega t, y=B\sin\left(2\omega t+\frac{5}{4}\pi\right)$ 标出，因为两者的差别不是时间的零点的选取问题．

3.1.21 图 3.18 中的各图是在相互垂直的两个方向振动合成的利萨如图形：已知水平方向的振动的角频率为 ω，求竖直方向的振动的角频率．

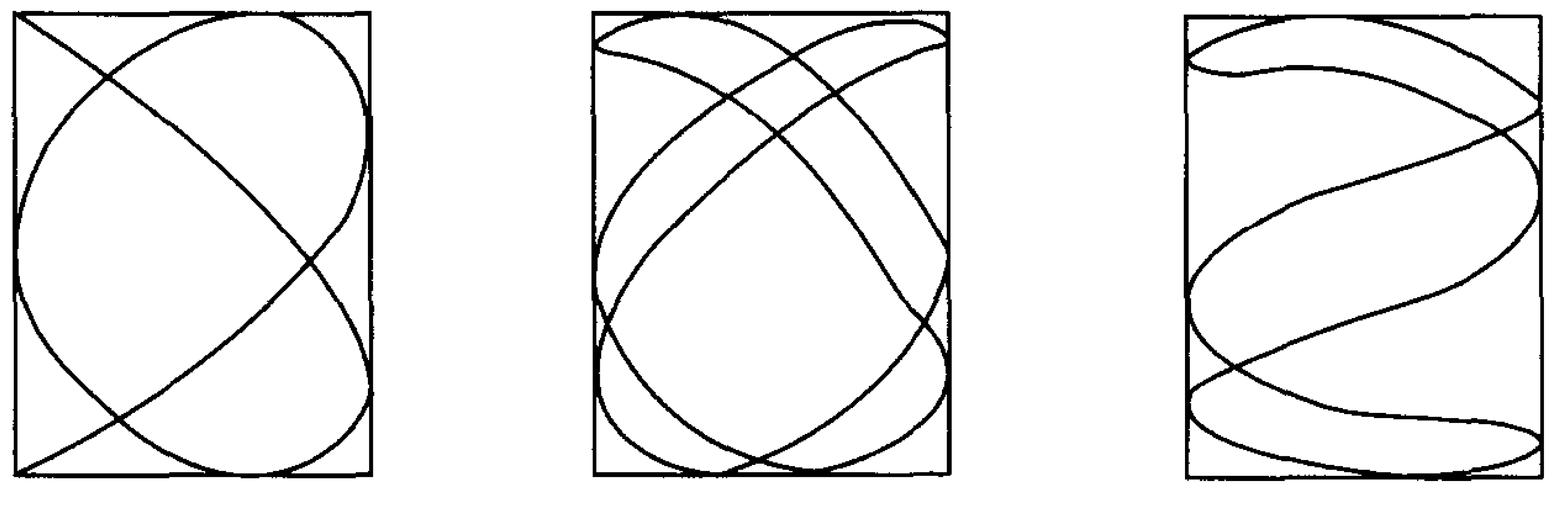


图 3.18

解 取 x 轴沿水平方向，y 轴沿竖直方向．

(a)
$$2T_x=1.5T_y,\frac{\omega_y}{\omega_x}=\frac{T_x}{T_y}=\frac{1.5}{2}$$
$$\omega_y=\frac{1.5}{2}\omega_x=\frac{3}{4}\omega$$

(b)
$$3T_x=2T_y,\omega_y=\frac{T_x}{T_y}\omega_x=\frac{2}{3}\omega$$

(c)
$$3T_x=T_y,\omega_y=\frac{T_x}{T_y}\omega_x=\frac{1}{3}\omega$$

3.1.22 在图 3.19 所示的示波器荧光屏上显示的利萨如图形中，已知水平偏转讯号的频率为 100Hz，若运行方向如图中箭头所示，且 $t=0$ 时位于 S 点．试写出水平偏转讯号和竖直偏转讯号的表示式，并求出 P、Q 两点的 x 坐标．

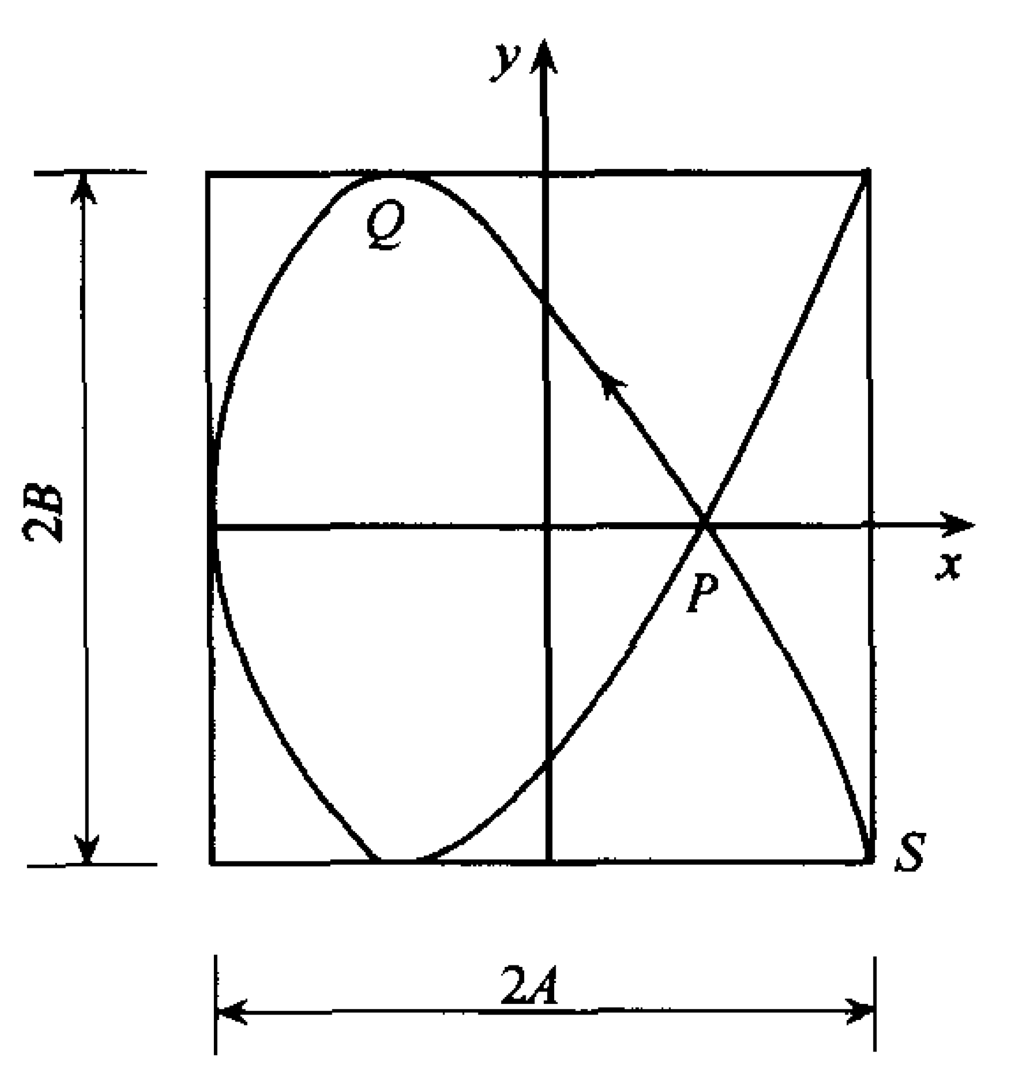


图 3.19

解 $x=A\cos(2\pi\cdot 100t)=A\cos(200\pi t)$

$$T_x=1.5T_y,\omega_y=\frac{T_x}{T_y}\omega_x=300\pi$$

所以 $$y=B\cos(300\pi t-\pi)$$

在 P 点，$y=0$，$300\pi t-\pi=-\frac{\pi}{2}$，$t=\frac{1}{600}\text{s}$，

$x=A\cos\left(200\pi\cdot\frac{1}{600}\right)=\frac{1}{2}A.$

在 Q 点，$y=B$，$300\pi t-\pi=0$，$t=\frac{1}{300}\text{s}$，$x=A\cos\left(200\pi\cdot\frac{1}{300}\right)=-\frac{1}{2}A.$

3.1.23 上题中，若 $t=0$ 时位于 P 点，写出水平、竖直两方向偏转讯号的表示式．

解　方法一:在 P 点,$y=0$,$\dot{y}>0$ 故 y 方向振动的初相位为 $-\frac{\pi}{2}$,y 方向振动的表示式为

$$y=B\cos\left(300\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

在 S 点,x、y 坐标都是已知的,相位也是已知的,

$$-B=B\cos\left(300\pi t_s-\frac{\pi}{2}\right)=B\cos(-\pi)$$

$$300\pi t_s-\frac{\pi}{2}=-\pi,t_s=-\frac{1}{600}\mathrm{s}$$

$$A=A\cos(200\pi t_s+\alpha)=A\cos 0$$

$$200\pi\left(-\frac{1}{600}\right)+\alpha=0,\qquad \alpha=+\frac{\pi}{3}$$

所以

$$x=A\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

方法二:利用上题结果:在 P 点的时刻为 $t_P=\frac{1}{600}\mathrm{s}$. 把时间的零点从上题的 S 点改为本题的 P 点,把上题的表示式中的 t 改为 $t+\frac{1}{600}$ 即得本题所求的表示式.

$$x=A\cos\left[200\pi\left(t+\frac{1}{600}\right)\right]=A\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y=B\cos\left[300\pi\left(t+\frac{1}{600}\right)-\pi\right]=B\cos\left(300\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

3.1.24　对图 3.20 所示的各周期运动进行谐波分析.

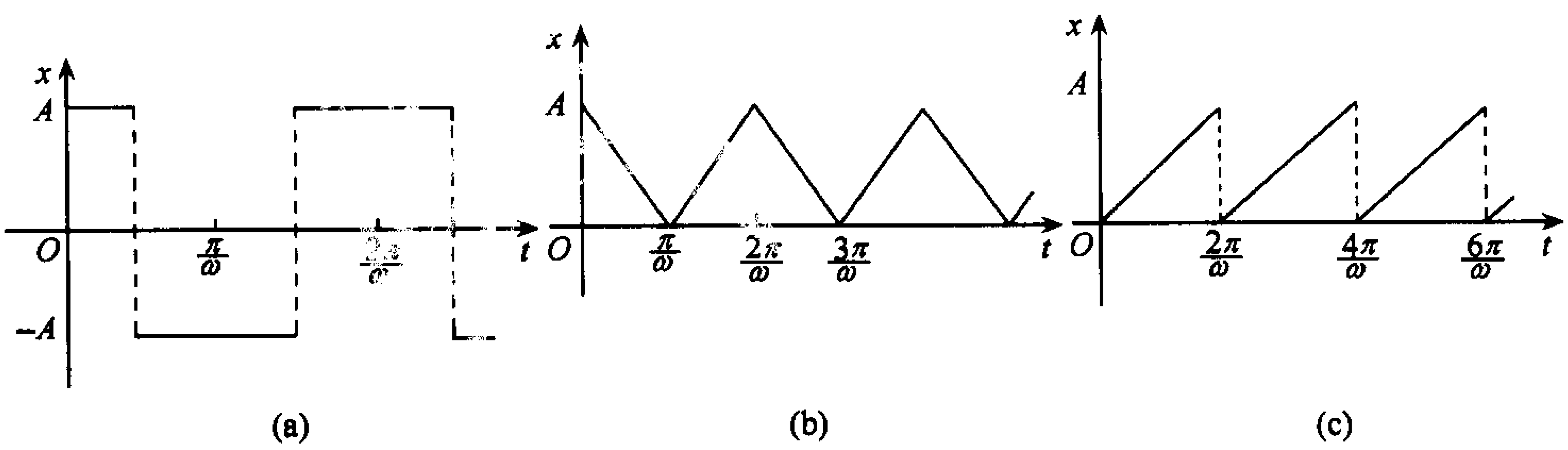


图 3.20

解　一个周期函数可展成傅里叶级数,

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right]$$

其中

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

(a)只写一个周期内的 $x(t)$.

$$x(t)=\begin{cases} A & 0\leqslant t<\dfrac{T}{4} \\ -A & \dfrac{T}{4}<t<\dfrac{3T}{4} \\ A & \dfrac{3T}{4}<t\leqslant T \end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}}A\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}(-A)\mathrm{d}t+\int_{\frac{3T}{4}}^{T}A\mathrm{d}t\right]=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}}A\cos(n\omega t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}(-A)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{3T}{4}}^{T}A\cos(n\omega t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2A}{n\omega T}\left[\sin(n\omega t)\Big|_0^{\frac{T}{4}}-\sin(n\omega t)\Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}+\sin(n\omega t)\Big|_{\frac{3T}{4}}^{T}\right]$$

$$=\frac{4A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

上述运算中用了 $\omega T=2\pi,\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$b_n=0\text{(因为 }x(t)\text{ 是 }t\text{ 的偶函数)}$$

所以
$$x(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\omega t)\right]$$

(b) $t=0$ 至 $t=T$ 一个周期内的 $x(t)$ 为

$$x(t)=\begin{cases} A\left(1-\dfrac{\omega}{\pi}t\right) & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{T}{2} \\ A\left(-1+\dfrac{\omega}{\pi}t\right) & \dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant T \end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}A\left(1-\frac{\omega}{\pi}t\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T}A\left(-1+\frac{\omega}{\pi}t\right)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2A}{T}\left[\left(t-\frac{\omega}{2\pi}t^2\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}+\left(-t+\frac{\omega}{2\pi}t^2\right)\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\right]=A$$

$$a_n=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}A\left(1-\frac{\omega}{\pi}t\right)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T}A\left(-1+\frac{\omega}{\pi}t\right)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2A}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\qquad(n=1,2,\cdots)$$

因为
$$1-(-1)^n=2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n=\frac{4A}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

因为　　$x(t)$ 是 t 的偶函数，$b_n=0$

所以
$$x(t)=\frac{A}{2}+\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\omega t)$$

(c)$t=0$ 至 $t=T$ 一个周期内的 $x(t)$ 为

$$x(t)=\frac{A\omega}{2\pi}t \qquad 0\leqslant t<T$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{A\omega}{2\pi}t\mathrm{d}t=\frac{A\omega}{\pi T}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^T=A$$

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^T\frac{A\omega}{2\pi}t\cos(n\omega t)\mathrm{d}t\\&=\frac{A}{\pi T}\left[\frac{1}{n}t\sin(n\omega t)\Big|_0^T-\frac{1}{n}\int_0^T\sin(n\omega t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{A}{\pi n^2\omega T}\cos(n\omega t)\Big|_0^T=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{A\omega}{2\pi}t\sin(n\omega t)\mathrm{d}t=-\frac{A}{n\pi} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

所以

$$x(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin(n\omega t)\right]$$

3.2 阻尼振动和受迫振动

3.2.1 一质量为 m 的质点在恢复力 $-kx$ 和阻力 $-r\dot{x}$(k 和 r 均为正的常量)的作用下运动,其中 x 是质点偏离平衡位置的位移.对于固定的 k 和一般的初始条件,$r=r_0$ 为何值时回到平衡位置所需的时间最短.如果 $r>r_0$,是否可能对于特定的初始条件,比 $r=r_0$ 能更快回到平衡位置?如果 $r<r_0$ 呢?

解 $m\ddot{x}=-kx-r\dot{x}$

与这个常系数线性齐次微分方程相应的特征方程为

$$mr^2+rr+k=0$$

$$r=\frac{-r\pm\sqrt{r^2-4mk}}{2m}$$

当 $r=r_0$ 时,$r_0^2-4mk=0$,即 $r_0=2\sqrt{mk}$,此时为临界阻尼情况,对于一般的初始条件,处于临界阻尼的情况,回到平衡位置所需时间最短.

当 $r>r_0$ 时为过阻尼情况,其通解为

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\frac{-r+\sqrt{r^2-4mk}}{2m}t}+B\mathrm{e}^{\frac{-r-\sqrt{r^2-4mk}}{2m}t}$$

如初始条件:$t=0$ 时,$x=x_0$,$\dot{x}=x_0$ 满足

$$\dot{x}_0=\frac{x_0}{2m}(-r-\sqrt{r^2-4mk})$$

时,$A=0$,$B=x_0$,

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-\frac{r+\sqrt{r^2-4mk}}{2m}t}$$

将比临界阻尼情况在此初始条件下的解

$$x(t)=\left(x_0-\frac{x_0\sqrt{r^2-4mk}}{2m}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{r_0}{2m}t}$$

更快回到平衡位置，因为指数衰减比线性衰减快得多，而 $r>r_0$，$r+\sqrt{r^2-4mk}$ 比 r 更大．

当 $r<r_0$ 时，是弱阻尼情况，一般解为

$$x(t)=Ae^{-\frac{r}{2m}t}\cos(\omega_d t+\alpha)$$

其中

$$\omega_d=\sqrt{mk-\left(\frac{r}{2m}\right)^2}$$

因为 $r<r_0$，在任何初始条件下都不可能比临界阻尼情况更快回到平衡位置．

3.2.2 如图3.21所示，质量为 $m=2000\text{kg}$ 的重物以 $v=3\text{cm/s}$ 的速度匀速运动，与质量可以忽略不计的弹簧及阻尼器相碰撞后一起做自由阻尼振动．已知弹簧的劲度系数 $k=48020\text{N/m}$，阻尼器的阻尼系数 $\gamma=1960\text{N s/m}$. 问重物在碰撞后多少时间达到最大位移？最大位移多大？

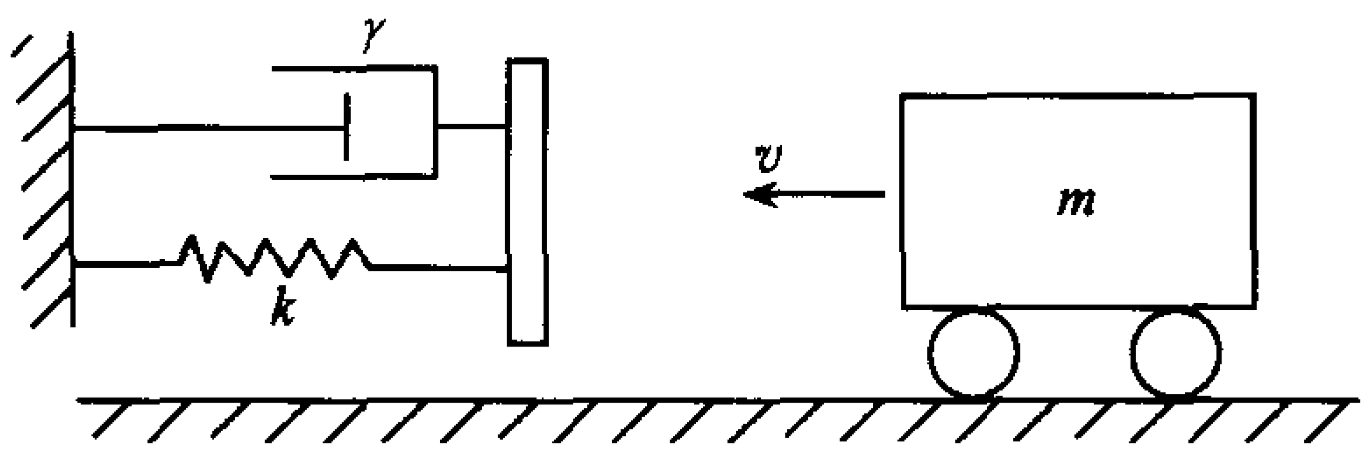


图 3.21

解　沿 v 的方向取 x 轴，与阻尼器刚碰撞处取为 $x=0$，此时 $t=0$，

$$m\ddot{x}=-kx-\gamma\dot{x}$$

令 $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$，$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$，上式可改写为

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

相应的特征方程为

$$r^2+2\beta r+\omega_0^2=0$$

$$r=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{48020}{2000}}=4.9\text{s}^{-1}$$

$$\beta=\frac{\gamma}{2m}=\frac{1960}{2\times2000}=0.49\text{s}^{-1}$$

$\beta<\omega_0$，为弱阻尼情况，通解为

$$x=Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\alpha)$$

初始条件：$t=0$ 时，$x=0$，$\dot{x}=v$.

$$\dot{x}=-\beta Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\alpha)$$

$$-A\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}e^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\alpha)$$

$$A\cos\alpha=0$$

$$-\beta A\cos\alpha-A\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\sin\alpha=v$$

解得

$$\alpha=-\frac{\pi}{2},A=\frac{v}{\sqrt{w_0^2-\beta^2}}$$

$$x=\frac{v}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}e^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t)$$

$$\dot{x}=-\frac{\beta v}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}e^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t)+ve^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t)$$

重物达到最大位移时，$\dot{x}=0$，此时 $t=t_1$，

$$-\frac{\beta v}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t_1)+v\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t_1)=0$$

$$t_1=\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}{\beta}\right)=0.30\text{s}$$

最大位移为

$$x(t_1)=\frac{v}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}e^{-\beta t_1}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t_1)=5.28\times10^{-3}\text{m}$$

3.2.3　一个有阻尼的弹簧振子系统，$m=100\text{kg}$，$k=10000\text{N/m}$，处于临界阻尼情况，由 $t=0$ 时，$x_0=2.5\text{cm}$、$\dot{x}_0=-30\text{cm/s}$ 开始运动．问质量块将于几秒后到达平衡位置？达到平衡位置后最远能移动多大距离？

解　由临界阻尼可知

$$\beta=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{10000}{100}}=10\text{s}^{-1}$$

临界阻尼情况的通解为

$$x=(A+Bt)e^{-\beta t}$$

满足初始条件：$t=0$ 时，$x=x_0$、$\dot{x}=\dot{x}_0$ 的解为

$$x=[x_0+(\dot{x}_0+\beta x_0)t]e^{-\beta t}$$

$t=t_1$ 时到达平衡位置，$x(t_1)=0$.

$$[x_0+(\dot{x}_0+\beta x_0)t_1]e^{-\beta t_1}=0$$

$$t_1=-\frac{x_0}{\dot{x}_0+\beta x_0}=-\frac{0.025}{-0.30+10\times0.025}=0.5(\text{s})$$

设达到最远距离时 $t=t_2$，此时 $\dot{x}(t_2)=0$.

即

$$\dot{x}(t_2)=-\beta[x_0+(\dot{x}_0+\beta x_0)t_2]e^{-\beta t_2}+(\dot{x}_0+\beta x_0)e^{-\beta t_2}=0$$

$$t_2=\frac{x_0}{\beta(\dot{x}_0+\beta x_0)}=0.6\text{s}$$

$$x(t_2)=[x_0+(\dot{x}_0+\beta x_0)t_2]e^{-\beta t_2}=-1.24\times10^{-5}\text{m}$$

达到平衡位置 $x=0$ 后最远能移动的距离为 $1.24\times10^{-5}\text{m}$.

3.2.4　如图 3.22 所示，质量为 m 的薄板挂在弹簧的下端，若空气的阻力可以不计，

在空气中的振动周期为 T_1，在某液体中的振动周期为 T_2，液体的阻力可表示为 $-2\eta Av$，其中 A 为薄板的面积，v 为速度，η 为液体的黏度，试证 $\eta=\frac{2\pi m}{AT_1T_2}\cdot\sqrt{T_2^2-T_1^2}$.

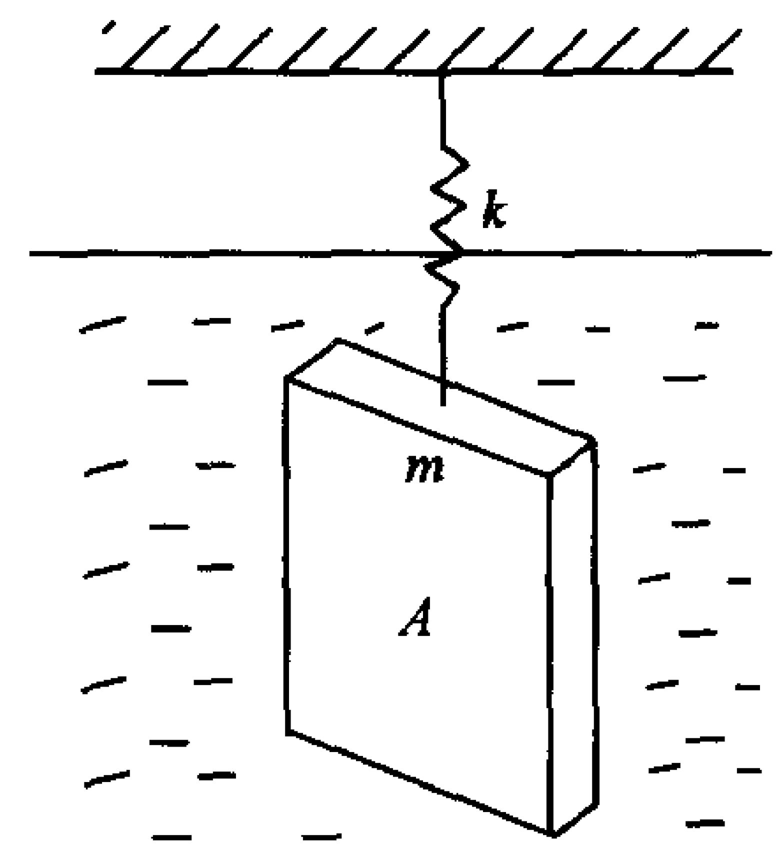


图 3.22

证明　　$m\ddot{x}=-kx-2\eta A\dot{x}$

与　　$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$

相比较，可得 $\beta=\frac{\eta A}{m}$，

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_0},\qquad T_2=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

$$\omega_0^2-\beta^2=\frac{4\pi^2}{T_2^2}$$

将 β、ω_0 用 η、T_1 等的关系式代入上式，解出 η，即得

$$\eta=\frac{2\pi m}{AT_1T_2}\sqrt{T_2^2-T_1^2}$$

3.2.5　在图 3.23 所示系统中，刚杆质量可忽略不计，图中质量 m、弹簧的劲度系数 k、阻尼器阻尼系数 γ 以及距离 a、b、l 均为已知．写出运动微分方程．由此求出做弱阻尼振动的角频率 ω_d 以及临界阻尼时 $\gamma=\gamma_{cr}$ 与其余各量间必须满足的关系．

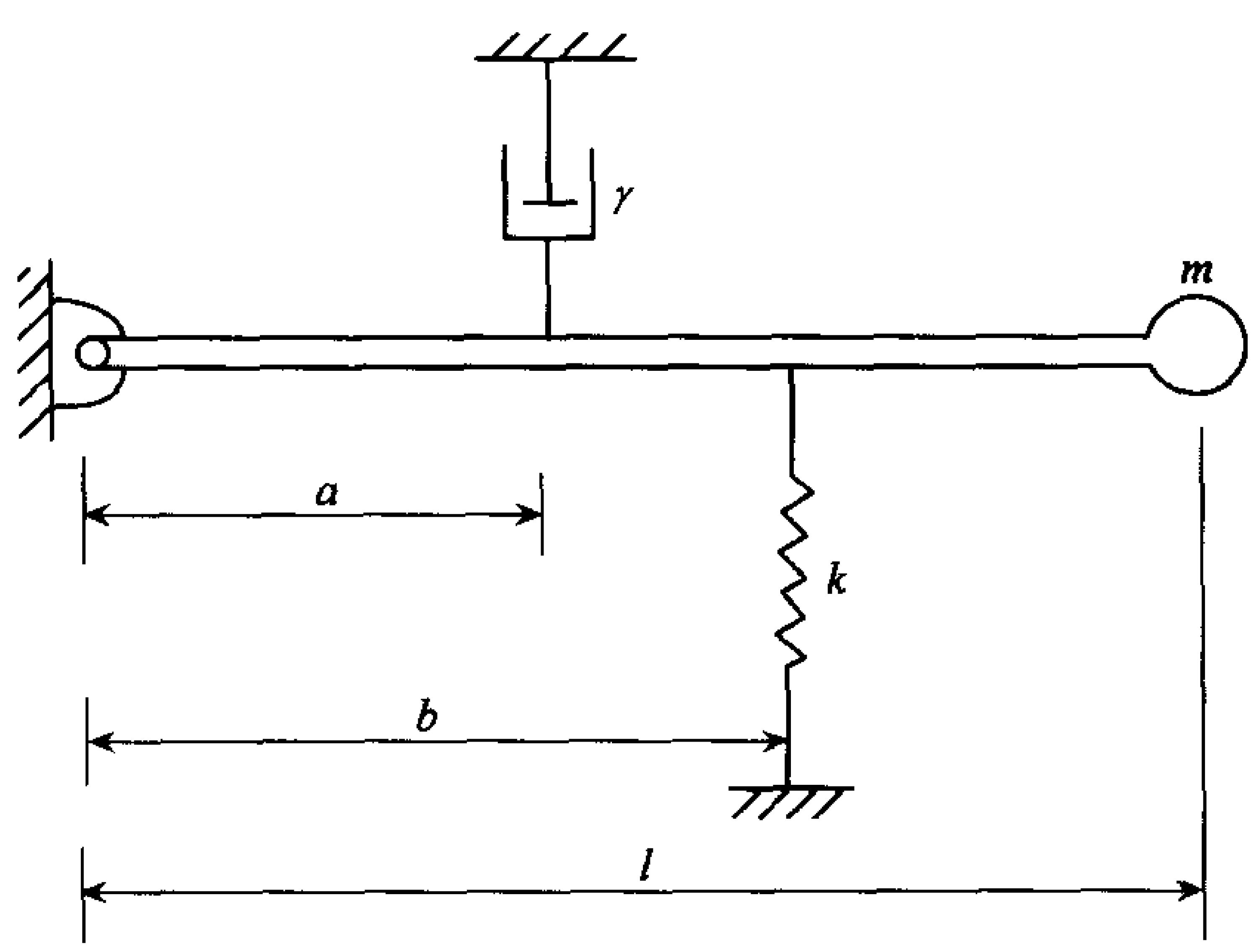


图 3.23

解　用对固定轴的角动量定理，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\dot{\theta})=-mgl-kb^2\theta-\gamma a^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\gamma a^2}{ml^2}\dot{\theta}+\frac{kb^2}{ml^2}\theta=-\frac{mgl}{ml^2}=-\frac{g}{l}$$

与 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ 比较可得

$$\omega_0^2=\frac{kb^2}{ml^2},\quad \beta=\frac{\gamma a^2}{2ml^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{kb^2}{ml^2} - \left(\frac{\gamma a^2}{2ml^2}\right)^2} = \frac{1}{2ml}\sqrt{4mkl^2b^2 - \gamma^2 a^4}$$

临界阻尼时，$\beta_{cr}=\omega_0$，即

$$\frac{\gamma_{cr}a^2}{2ml^2} = \sqrt{\frac{kb^2}{ml^2}}, \gamma_{cr} = \frac{2bl}{a^2}\sqrt{mk}$$

3.2.6 质量为 0.2kg 的物体，悬于劲度系数为 80N/m 的弹簧下，此物体还受到阻力 $-\gamma v$ 的作用，v 是物体的速度．若阻尼振动的频率为无阻尼振动频率的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍，阻尼系数 γ 多大？此系统 Q 值多大？振动经 10 个整周后，振幅减弱到原振幅的几分之几？

解 $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \frac{3}{4}\omega_0^2, \beta = \frac{1}{2}\omega_0$$

$$\gamma = 2m\beta = 2m \cdot \frac{1}{2}\omega_0 = m\omega_0 = \sqrt{mk} = 4\text{Ns/m}$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T_d}}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0}, \beta T_d = \frac{1}{2}\omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - \exp\left(-2 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)} = 6.29$$

经过 10 个整周后，振幅 A 为

$$A = A_0 e^{-\beta \cdot 10 T_d} = A_0 e^{-10 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{A}{A_0} = e^{-10 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}}} = 1.8 \times 10^{-16}$$

振幅减弱到原振幅的 $\frac{2}{10^{16}}$ 还小些．

3.2.7 演奏钢琴上频率为 256Hz 的音键时，1s 后振动能量减至初始值的一半．问系统的 Q 值多大？若高八度的音调(512Hz)也在 1s 后振动能量减至初始值的一半，其 Q 值多大？

解 $\left(\frac{A}{A_0}\right)^2 = e^{-2\beta \cdot 1} = \frac{1}{2}, e^{2\beta} = 2.$

$$\beta = \frac{1}{2}\ln 2 = 0.347$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 256 = 1608\text{s}^{-1}, \beta \ll \omega_0$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T_d}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1608}{2 \times 0.347} = 2.32 \times 10^3$$

对于 $\nu=512\text{Hz}$，因为 $\left(\frac{A}{A_0}\right)^2 = \frac{1}{2} = e^{-2\beta \cdot 1}$，所以也有上述的 β 值，也有 $\beta \ll \omega_0$，故也有

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi \cdot 512}{2 \times 0.347} = 4.64 \times 10^3$$

3.2.8 根据经典电磁理论，一个加速运动的电子在单位时间内辐射的能量为 ke^2a^2/c^3，其中 $k=6\times10^9\text{N m}^2/\text{C}^2$，$e=1.60\times10^{-19}\text{C}$（注意 k、e 的单位中的 C 是库仑，勿与光速 c 混淆）$c=3.0\times10^8\text{m/s}$，$a$ 为电子的瞬时加速度．

(1) 若一电子沿一直线以频率 ν 及振幅 A 进行振荡，假定每一周的运动可用 $x=A\cos(2\pi\nu t)$ 描述，问在振荡一周的时间内，它辐射了多少能量？

(2) 此振子之 Q 值多大？

(3) 在电子的运动的能量降至初始值的一半以前，振荡已经历了多少个周期？

解 (1) $x=A\cos(2\pi\nu t)$

$$a = -A(2\pi\nu)^2\cos(2\pi\nu t)$$

电子在振动一周期内辐射的能量为

$$\begin{aligned}E &= \int_0^T ke^2\frac{1}{c^3}A^2(2\pi\nu)^4\cos^2(2\pi\nu t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{c^3}ke^2A^2\cdot16\pi^4\nu^4\int_0^T\frac{1}{2}[1+\cos(4\pi\nu t)]\mathrm{d}t \\ &= 8k\pi^4e^2\nu^3A^2/c^3.\end{aligned}$$

(2) $Q=2\pi\dfrac{E(t)}{E(t)-E(t+T_d)}$

分子上是振子的能量

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2 \\ &= \frac{1}{2}m(2\pi\nu)^2A^2 = 2\pi^2m\nu^2A^2\end{aligned}$$

分母是在一周期内因辐射损失的能量，即(1)问计算的 E.

$$\therefore \quad Q=2\pi\frac{2\pi^2m\nu^2A^2}{8k\pi^4e^2\nu^3A^2/c^3}=\frac{mc^3}{2k\pi e^2\nu}$$

(3)
$$Q\approx\frac{\omega_0}{2\beta},\quad 2\beta=\frac{\omega_0}{Q}$$

电子能量降至初始值一半所经历的时间 t，

$$\mathrm{e}^{-2\beta t} = \frac{1}{2},$$

$$t = \frac{\ln 2}{2\beta} \approx \frac{\ln 2}{\omega_0}Q$$

所经历的周期数为

$$\frac{t}{T_d} = \frac{\ln 2}{\omega_0 T_d}Q \approx \frac{\ln 2}{2\pi}Q = \frac{mc^3}{4\pi^2ke^2\nu}\ln 2$$

3.2.9 有一阻尼振子，质量 $m=0.2\text{kg}$，$k=80\text{N/m}$，$\gamma=4\text{N s/m}$，受到强迫力 $F=F_0\cos\Omega t$ 作用，$F_0=2\text{N}$，$\Omega=30\text{s}^{-1}$，求：

(1) 稳态运动 $x=B\cos(\Omega t-\phi)$ 中的 B 和 ϕ；

(2) 一周内反抗阻力耗散的机械能；

(3) 输入的平均功率.

解 (1)

$$m\ddot{x}=-kx-\gamma\dot{x}+F_0\cos\Omega t$$

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

$$x=B\cos(\Omega t-\phi)$$

$$\dot{x}=B\Omega\cos\left(\Omega t-\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}=B\Omega^2\cos(\Omega t-\phi+\pi)$$

$$2\beta=\frac{\gamma}{m},\beta=\frac{\gamma}{2m}=\frac{4}{2\times0.2}=10(\mathrm{s}^{-1})$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}=\frac{80}{0.2}=400(\mathrm{s}^{-2})$$

$$\frac{F_0}{m}=\frac{2}{0.2}=10(\mathrm{N/kg})$$

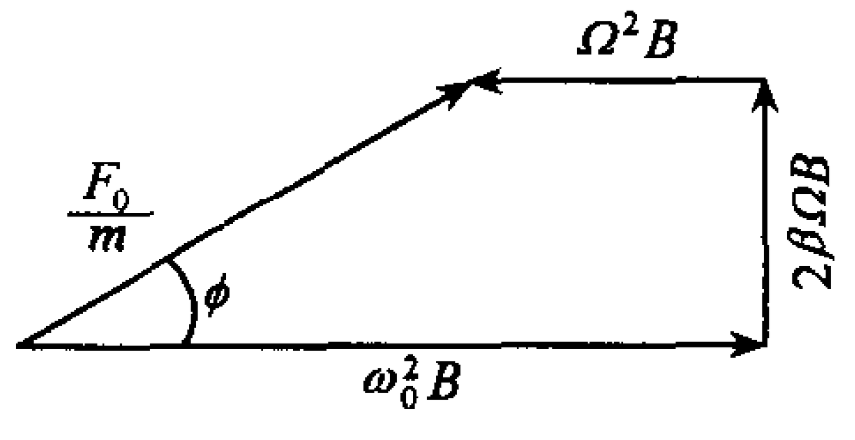


图 3.24

由图 3.24 所示的振幅矢量关系,

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2B^2+(2\beta\Omega B)^2=\left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

$$B=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}=0.0128\mathrm{m}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)=\arctan(-1.2)=0.721\pi$$

ϕ 为钝角是因为 $\Omega>\omega_0$ 的缘故.

(2) 反抗阻力消耗的机械能等于阻力做的功的绝对值.

$$|W_d|=\int_0^T\gamma\dot{x}\cdot\dot{x}\,\mathrm{d}t=\int_0^T\gamma\dot{x}^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\gamma[-B\Omega\sin(\Omega t-\phi)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\gamma B^2\Omega^2T=\frac{1}{2}\gamma B^2\Omega\cdot2\pi=0.0618\mathrm{J}$$

(3) 方法一:直接计算强迫力所作的平均功率

$$\overline{P}_F=\frac{1}{2\pi/\Omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}F_0\cos\Omega t\cdot\dot{x}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{m\beta\Omega^2(F_0/m)^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}=0.295\mathrm{W}$$

方法二:达到稳态运动后,一周内反抗阻力消耗的机械能正好等于强迫力一周内所做的功.

$$\overline{P}_F=\frac{|W_d|}{2\pi/\Omega}=\frac{|W_d|\Omega}{2\pi}=0.295\mathrm{W}$$

3.2.10 如图 3.25 所示,作用于质量块上的强迫力 $F(t)=F_0\sin\Omega t$,弹簧支承端有运动,$x_s=a\cos\Omega t$,$\Omega\neq\sqrt{\frac{k}{m}}$,$k$ 为弹簧的劲度系数,m 为质量块的质量,求稳态振动.

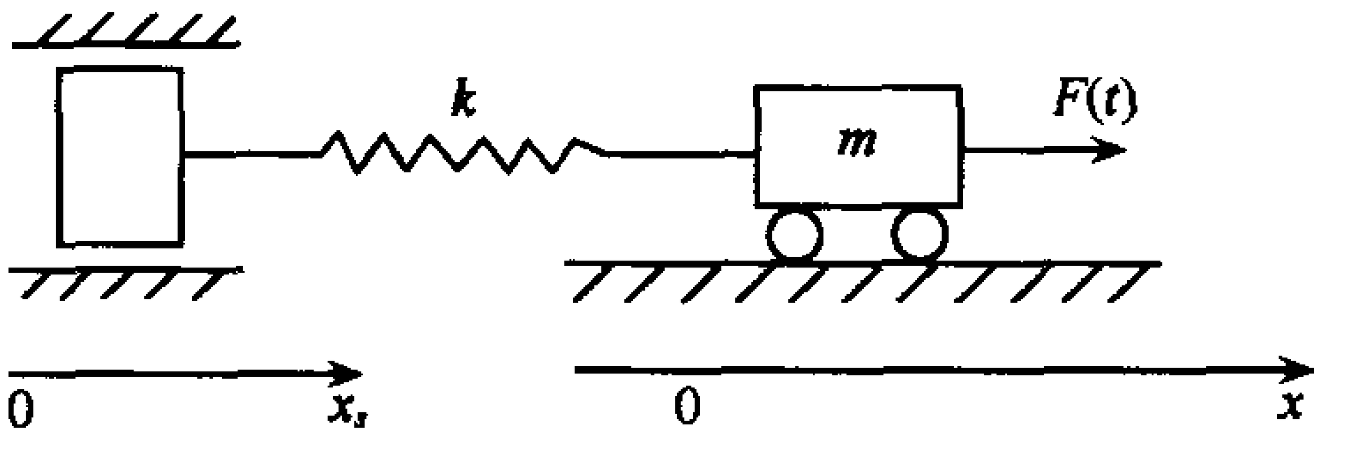


图 3.25

解

$$m\ddot{x} = -k(x-x_s)+F(t)$$
$$= -kx + ka\cos\Omega t + F_0\sin\Omega t$$
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{ka}{m}\cos\Omega t + \frac{F_0}{m}\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{ka}{m}\cos\Omega t + \frac{F_0}{m}\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = f_0\cos(\Omega t - \alpha)$$

将上述关系可画成图 3.26 的矢量关系

$$f_0 = \sqrt{\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{ka}{m}\right)^2} = \frac{1}{m}\sqrt{F_0^2 + k^2a^2}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{F_0/m}{ka/m}\right) = \arctan\left(\frac{F_0}{ka}\right)$$
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\Omega t - \alpha)$$

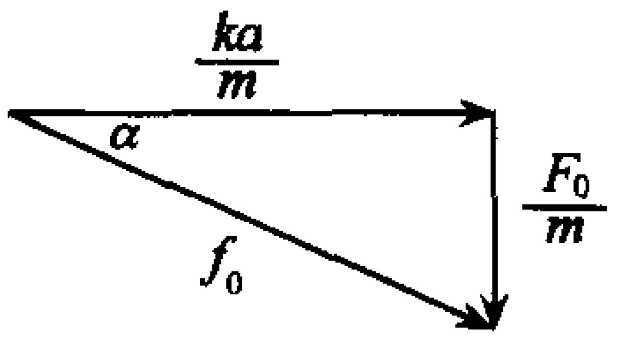


图 3.26

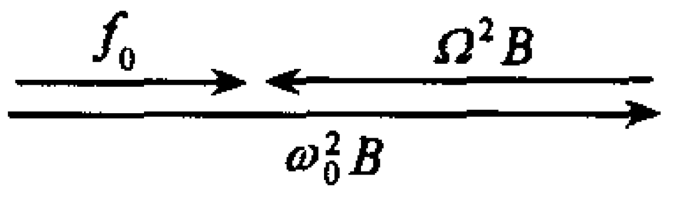


图 3.27

由振幅矢量法求稳态振动，由图 3.27

$$\omega_0^2 B - \Omega^2 B = f_0$$
$$B = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{\sqrt{F_0^2 + k^2a^2}}{k - m\Omega^2}$$
$$x = B\cos(\Omega t - \alpha) = \frac{\sqrt{F_0^2 + k^2a^2}}{k - m\Omega^2}\cos\left[\Omega t - \arctan\left(\frac{F_0}{ka}\right)\right]$$

3.2.11　图 3.28 所示的系统中，弹簧悬点上下做简谐振动，$x_s = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$，初始条件为 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=v_0$，弹簧的劲度系数为 k，质量块的质量为 m，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. 求质量块的运动学方程．

解

$$m\ddot{x} = -k(x-x_s)$$

其中 $x=0$ 取在 $x_s=0$ 时的平衡位置

$$m\ddot{x} + kx = k\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

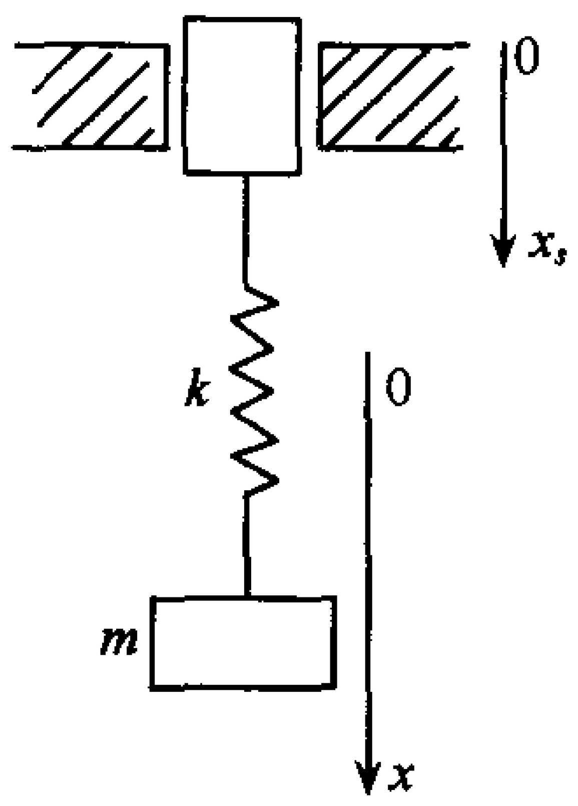


图 3.28

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\omega^2\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t=v_0\omega\sin\omega t \tag{1}$$

这是一个常系数线性非齐次方程.

相应的齐次方程有两个独立的解:

$$x_1=\cos\omega t,\quad x_2=\sin\omega t$$

设 x^* 是非齐次方程的一个特解,用《经典力学》上册,p.51 式(2.2.1)*

$$x^*=-x_1\int_0^t\frac{x_2 f}{x_1\dot{x}_2-\dot{x}_1x_2}\mathrm{d}t+x_2\int_0^t\frac{x_1 f}{x_1\dot{x}_2-\dot{x}_1x_2}\mathrm{d}t$$

其中 $f=v_0\omega\sin\omega t$.

经计算可得

$$x^*=-\frac{1}{2}v_0t\cos\omega t$$

(1) 式的通解为

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t-\frac{1}{2}v_0t\cos\omega t$$

初始条件:$t=0$ 时,$x=x(0)=0,\dot{x}=\dot{x}(0)=v_0$,定出 $A=0,B=\frac{3v_0}{2\omega}$,

$$x=\frac{3v_0}{2\omega}\sin\omega t-\frac{1}{2}v_0t\cos\omega t$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

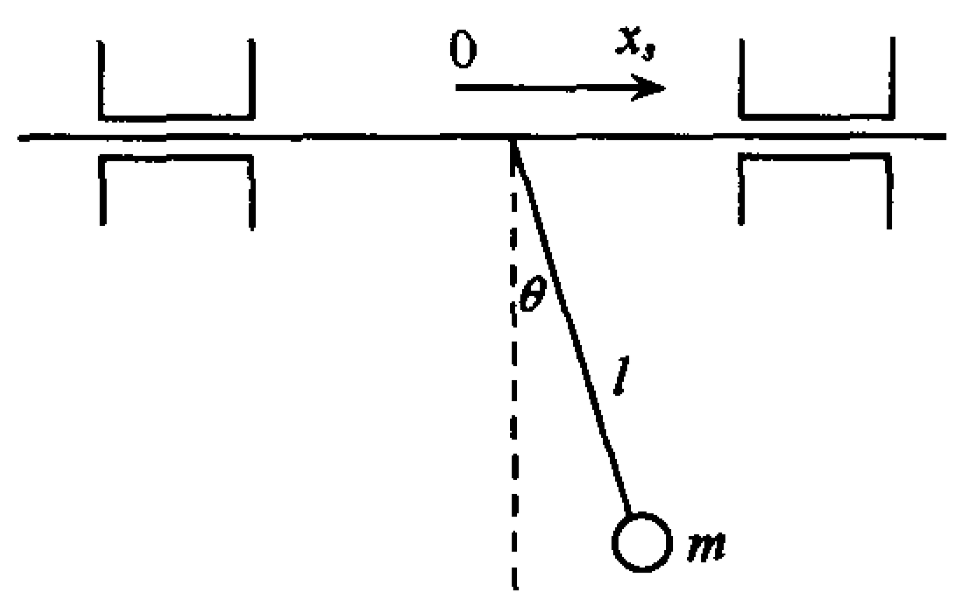


图 3.29

3.2.12 如图 3.29 所示,单摆悬点沿水平方向做简谐振动,$x_s=a\sin\omega t$,已知摆长为 l,摆锤质量为 m,求微幅稳态振动中 θ 随时间的变化规律.

解

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta-m\ddot{x}_sl\cos\theta,$$

$$x_s=a\sin\omega t,\quad \ddot{x}_s=-a\omega^2\sin\omega t$$

微幅振动 θ 很小,$\sin\theta\approx 0,\cos\theta\approx 1$,

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\theta=ma\omega^2l\sin\omega t$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=\frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t$$

$$\omega_0^2=\frac{g}{l},f_0=\frac{a\omega^2}{l},\beta=0$$

设稳态振动的解为

$$x=B\sin(\omega t-\phi)$$

用振幅矢量法可得

---

* 强元棨. 经典力学. 北京:科学出版社,2003.

$$B=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\frac{\frac{a\omega^2}{l}}{\frac{g}{l}-\omega^2}=\frac{a\omega^2}{g-l\omega^2}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)=0$$

所以

$$x=\frac{a\omega^2}{g-l\omega^2}\sin\omega t$$

说明：如 $\omega^2=\frac{g}{l}$，则将得到像上题那样含有 $t\cos\omega t$ 项的解，不可能做微幅稳态振动，故在题中已暗示了 $\omega\neq\sqrt{\frac{g}{l}}$.

3.2.13　图 3.30 所示系统中，刚性杆 AB 的质量可忽略不计，B 端作用的强迫力 $F(t)=F_0\sin\omega t$，图中 m、k、γ、l 均为已知量．写出系统的运动微分方程，并求下列情况下质量 m 做上下稳态振动的振幅：

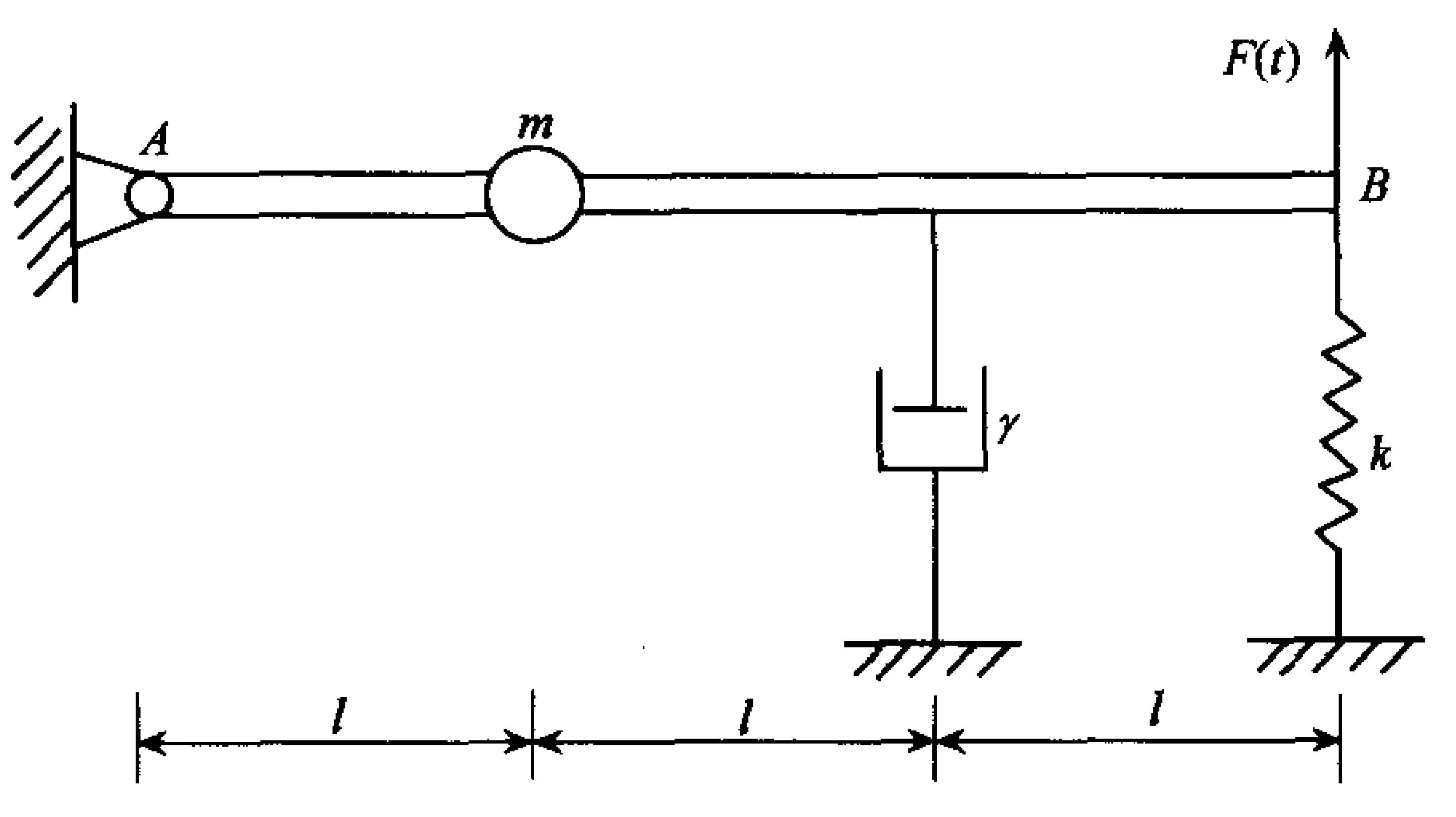


图 3.30

(1)系统发生共振；

(2) ω 等于固有频率 ω_0 的一半．

解　用对固定轴的角动量定理．

$$ml^2\ddot{\theta}=-\gamma\cdot 2l\dot{\theta}\cdot 2l-k\cdot 3l\theta\cdot 3l+F(t)\cdot 3l$$

$$\ddot{\theta}+\frac{4\gamma}{m}\dot{\theta}+\frac{9k}{m}\theta=\frac{3F_0}{ml}\sin\omega t$$

与

$$\dot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\sin\omega t$$

比较可得

$$\beta=\frac{2\gamma}{m},\omega_0=3\sqrt{\frac{k}{m}},f_0=\frac{3F_0}{ml}$$

稳态运动

$$\theta=B\cos(\omega t-\phi)$$

$$B=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

(1) 系统发生共振的情况，

$$\omega=\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

$$B=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=\frac{F_0}{4\gamma l\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{4\gamma^2}{9m^2}}}$$

(2) $w=\frac{1}{2}\omega_0$ 的情况，

$$B=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\frac{1}{4}\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\cdot\frac{1}{4}\omega_0^2}}=\frac{4F_0}{9kl\sqrt{1+\frac{64\gamma^2}{81mk}}}$$

3.2.14 图 3.31 中所有刚性杆质量均可忽略不计，m、k、γ 和 l 均为已知，弹簧支承端有运动，$x_s=a\sin\omega t$. 求系统的固有频率 ω_0、阻尼比 $\zeta\left(=\frac{\beta}{\omega_0}\right)$ 及微幅稳态振动的振幅．

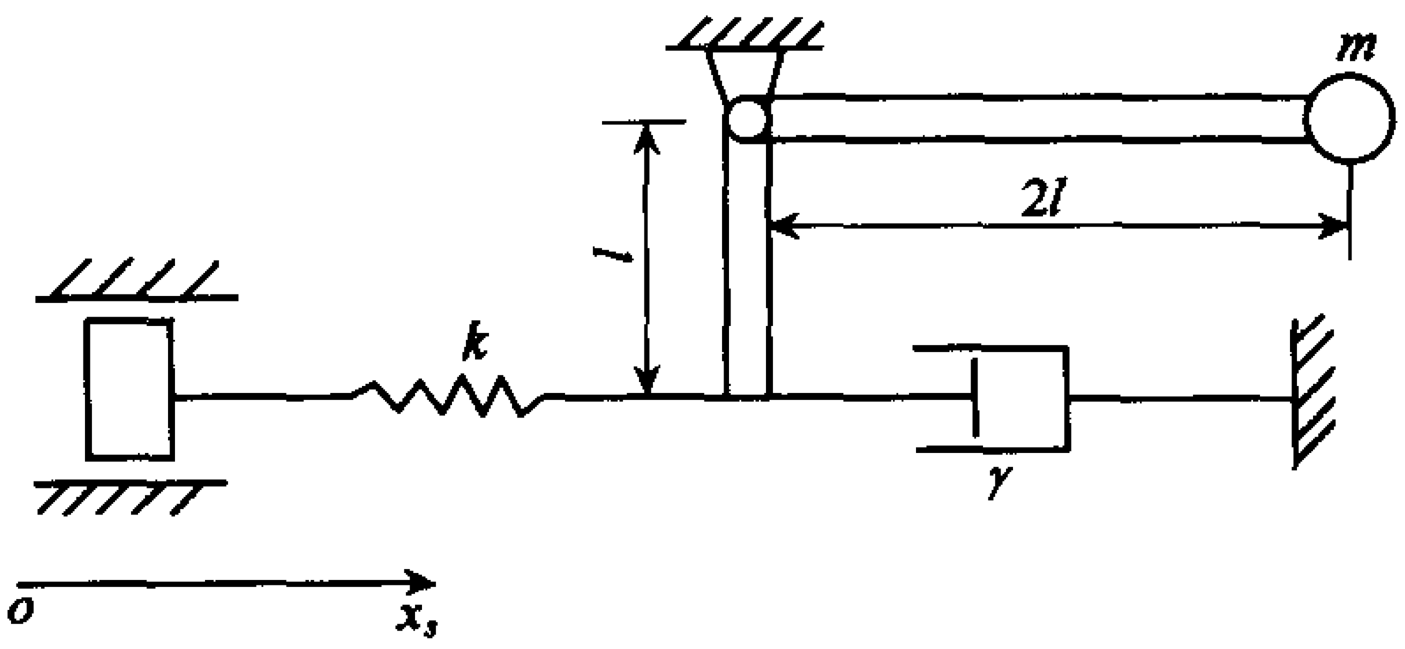


图 3.31

解　用对固定轴的角动量定理，

$$m(2l)^2\ddot{\theta}=-k(l\theta-x_s)l-\gamma l^2\dot{\theta}-mg\cdot 2l$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\gamma}{4m}\dot{\theta}+\frac{k}{4m}\theta=\frac{ka}{4ml}\sin\omega t-\frac{g}{2l}$$

常数项 $-\frac{g}{2l}$ 只影响平衡位置，并不影响稳态振动的振幅．

与 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\sin\omega t$ 比较得

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{4m}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}},\beta=\frac{\gamma}{8m},f_0=\frac{ka}{4ml}$$

阻尼比

$$\zeta=\frac{\beta}{\omega_0}=\frac{\gamma/8m}{\frac{1}{2}\sqrt{k/m}}=\frac{\gamma}{4\sqrt{mk}}$$

稳态振动的振幅

$$B=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^4(1-r^2)^2+4\omega_0^4\zeta^2r^2}}$$

$$=\frac{ka/4ml}{\frac{k}{4m}\sqrt{(1-r^2)^2+4\zeta^2r^2}}=\frac{a}{l\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

其中 $r=\frac{\omega}{\omega_0}=2\omega\sqrt{\frac{m}{k}}$.

3.2.15　一个无阻尼的弹簧振子的受迫振动，若强迫力的角频率 $\Omega=5\mathrm{s}^{-1}$ 时发生共振，给质量块增加 1kg 的质量，当 $\Omega=4.8\mathrm{s}^{-1}$ 时发生共振．求弹簧振子原来的质量块的质量及弹簧的劲度系数．

解　无阻尼的弹簧振子发生共振时，强迫力的角频率 Ω 等于振子的固有频率 ω_0. 由此可写出对原来的质量块和增加了质量的质量块的两个式子：

$$\frac{k}{m}=5^2,\qquad \frac{k}{m+1}=(4.8)^2$$

$$\frac{m+1}{m}=\left(\frac{5}{4.8}\right)^2$$

可得 $m=11.8\mathrm{kg}$, $k=294\mathrm{N/m}$

3.2.16　如图 3.32 所示，一台自由运行的马达，为了减少其振动被放置在一块薄的橡皮垫上，马达埋入橡皮垫 10cm. 估算马达出现最大竖直振动时的转速(每分钟转数).

解　这是一个受迫振动发生共振的问题，振动系统由马达的不转动部分(质量块)和橡皮垫(弹簧)组成，马达的转子难免不够理想，其质心有少许偏离转轴，马达运转时转子对振动系统施以强迫力，强迫力的角频率等于转子的转速．马达出现最大的竖直振动说明振动系统处在共振的状态．橡皮垫作为理想的弹簧处理，不计空气阻力，则共振频率等于固有频率，

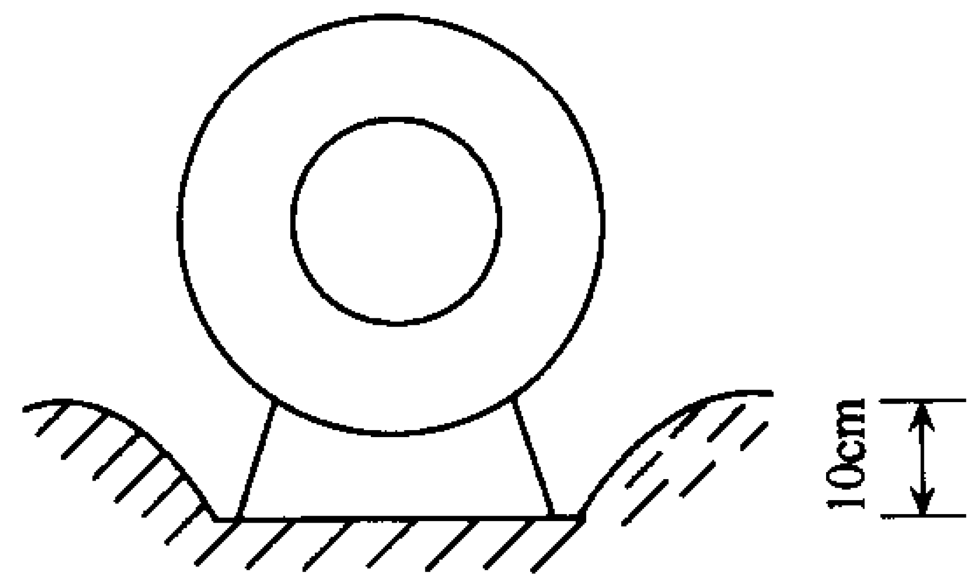


图 3.32

$$\omega_r\approx\omega_0$$

设马达不转动部分质量为 m，略去转子质量，则橡皮垫的劲度系数

$$k=\frac{mg}{x_0}$$

其中 x_0 为马达处于平衡时埋入橡皮垫的深度，即 $x_0=10\mathrm{cm}$.

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{x_0}}$$

每分钟转数

$$n=\frac{\omega}{2\pi}\times 60=\frac{\omega_r}{2\pi}\times 60=\frac{\omega_0}{2\pi}\times 60=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}}=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.10}}=94.5$$

3.2.17　如图 3.33 所示，一辆汽车沿 x 方向行驶并保持不变的水平速度 v，汽车经过一个隆起部分，其形状为

$$y_0=A\left(1-\cos\frac{\pi x}{l}\right)$$

$(0\leqslant x\leqslant 2l)$，其他地方 $y_0=0$. 求汽车在经过隆起部分时在竖直方向的运动．将汽车简化

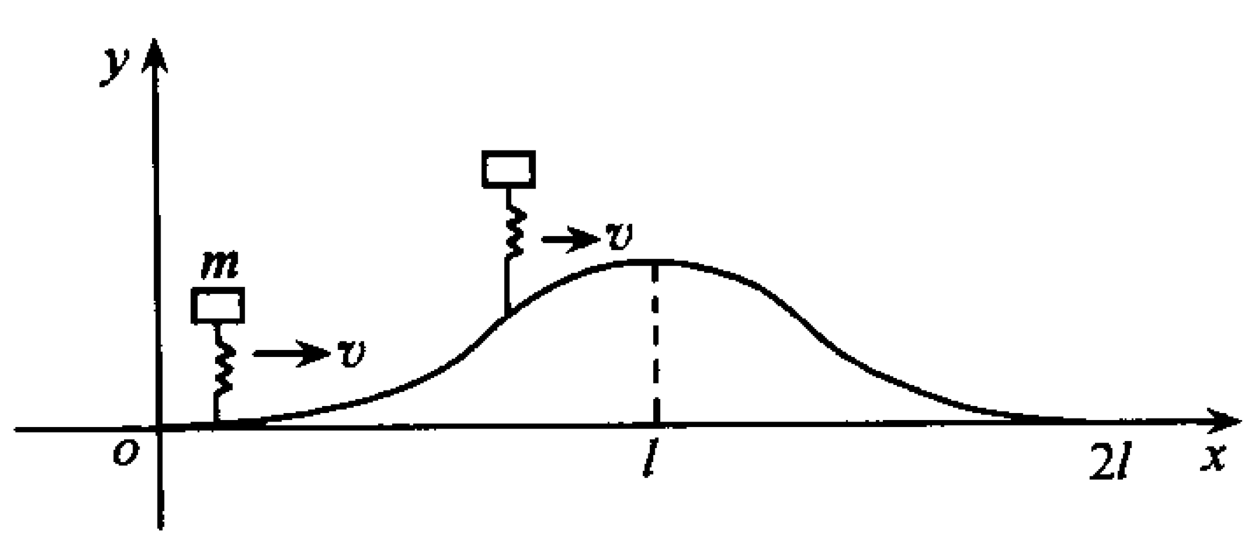


图 3.33

为一个质量为 m 的质点放在一个原长为 l_0、劲度系数为 k 的弹簧上．忽略一切阻力并假定弹簧始终保持竖直．

解　设 t 时刻 m 的位置为 (x,y)，$t=0$ 时，位于 $\left(0,l_0-\frac{mg}{k}\right)$，质点 m 在 x 方向的运动是已知的，

$$x = vt$$

质点 m 在 y 方向的运动微分方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -k(y-y_0-l_0)-mg \\ &= -k\left(y-A-l_0+\frac{mg}{k}\right)-kA\cos\left(\frac{\pi v}{l}t\right) \end{aligned}$$

写上式时已用了 $x=vt$，并代入了在 $0\leqslant x\leqslant 2l$ 段成立的 y_0，故只在汽车经过隆起部分时成立．

作坐标变换，令 $Y=y-A-l_0+\frac{mg}{k}$，方程化为

$$m\ddot{Y}+kY=-kA\cos\left(\frac{\pi v}{l}t\right)$$

先求此非齐次方程的一个特解．设特解为

$$Y^* = B\cos\left(\frac{\pi v}{l}t\right)$$

代入方程得

$$-mB\left(\frac{\pi v}{l}\right)^2+kB=-kA$$

$$B=\frac{kl^2}{m\pi^2v^2-kl^2}A$$

$$Y^*=\frac{kl^2}{m\pi^2v^2-kl^2}A\cos\left(\frac{\pi v}{l}t\right)$$

通解为

$$Y=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+Y^*,\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{aligned} y &= Y+A+l_0-\frac{mg}{k} \\ &= c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\frac{kl^2}{m\pi^2v^2-kl^2}A\cos\left(\frac{\pi v}{l}t\right)+A+l_0-\frac{mg}{k} \end{aligned}$$

初始条件为：$t=0$ 时，$y=l_0-\frac{mg}{k}$，$\dot{y}=0$，定出

$$c_1=\frac{m\pi^2v^2}{kl^2-m\pi^2v^2}A,c_2=0$$

所以　$$y=\frac{m\pi^2v^2}{kl^2-m\pi^2v^2}A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\frac{kl^2}{m\pi^2v^2-kl^2}A\cos\left(\frac{\pi v}{l}t\right)+A+l_0-\frac{mg}{k}$$

3.2.18　一个由凸轮激励的、有阻尼的弹簧振子，如图 3.34 所示，凸轮使顶杆 A 在铅垂方向按锯齿波规律做周期性运动，凸轮的升程为 h，周期为 T，顶杆又通过劲度系数

为 k_1 的弹簧使有阻尼的弹簧振子振动．弹簧振子的弹簧的劲度系数为 k，质量块质量为 m，阻尼系数为 γ．求质量块的稳态振动．

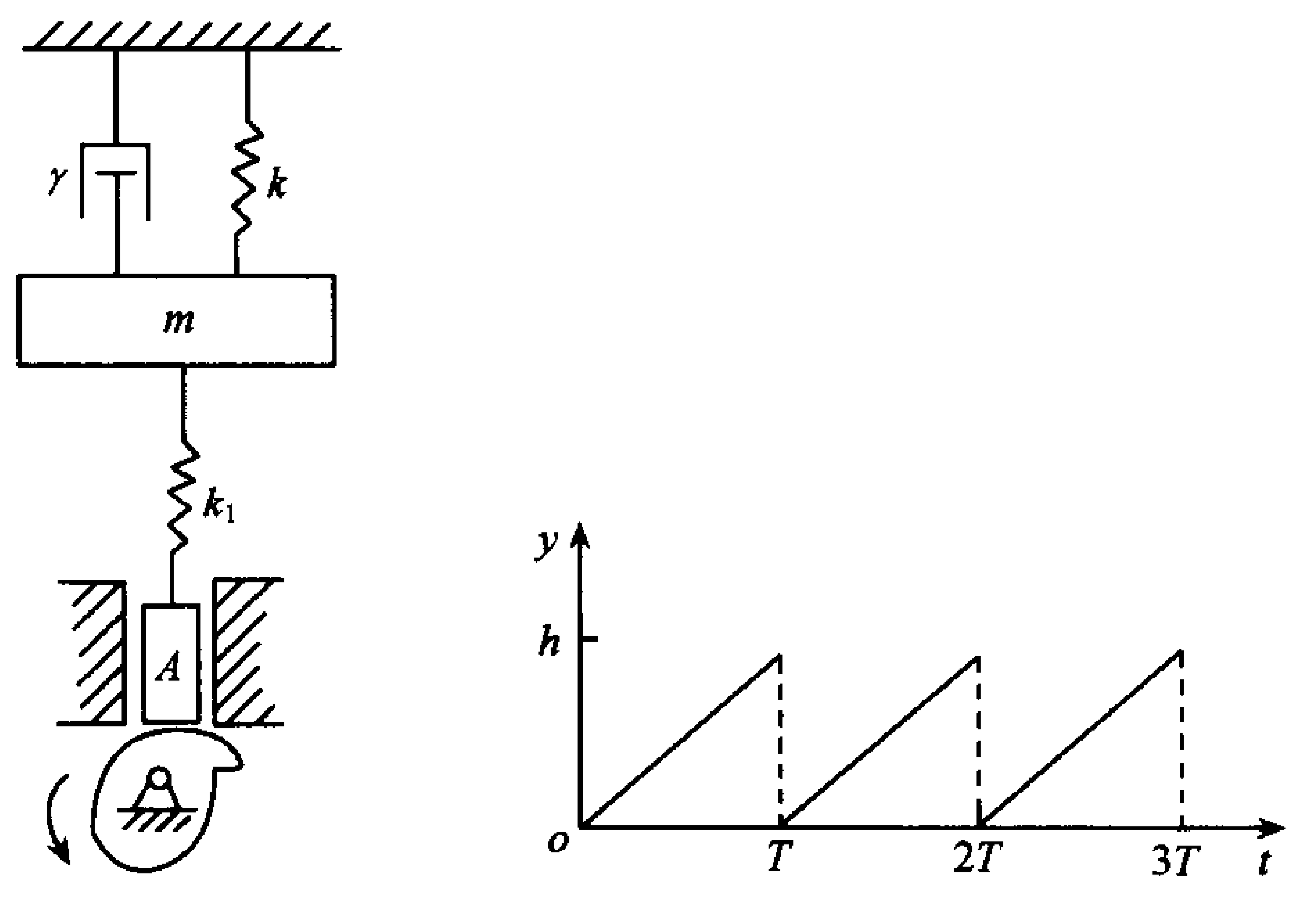


图 3.34

解　用向上为正的 x 轴表示质量块的位置，零点取在没有劲度系数为 k_1 的弹簧及以下装置情况下的平衡位置．

$$m\ddot{x} = -kx - k_1(x-y) - \gamma\dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{k_1}{m}y$$

其中 $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$，$\omega_0^2=\dfrac{k+k_1}{m}$，$f=\dfrac{k_1}{m}y$，$y$ 是 t 的周期函数，在 $t=0$ 至 $t=T$ 一个周期内

$$y = \frac{h}{T}t \quad (0<t<T)$$

由 3.1.24 题(c)已解得的结果有

$$f(t) = \frac{k_1 h}{m}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin(n\omega t)\right]\right\}$$

其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.

非齐次项中的第一项 $\dfrac{k_1 h}{2m}$ 为常量，只影响稳态运动的平衡位置，令 $x'=x-\dfrac{k_1 h}{2m\omega_0^2}=x-\dfrac{k_1 h}{2(k+k_1)}$，即将平衡位置 $x=\dfrac{k_1 h}{2(k+k_1)}$ 取为 x' 的零点，运动微分方程(关于 x' 的)中无此常量项，其余各项与关于 x 的微分方程无异．

对于 $f(t)$ 中第二项级数的第 n 项，

$$f_n(t) = -\frac{k_1 h}{m\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

引起的稳态运动为

$$x_n'(t) = B_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t - \phi_n\right)$$

其中
$$B_n=-\frac{k_1h}{m\pi n}\Bigg/\sqrt{\left(\frac{k+k_1}{m}-\frac{4\pi^2n^2}{T^2}\right)^2+4\frac{\gamma^2}{4m^2}\cdot\frac{4\pi^2n^2}{T^2}}$$
$$=-\frac{k_1h}{\pi n}\left[\left(k+k_1-\frac{4\pi^2n^2m}{T^2}\right)^2+\frac{4\pi^2\gamma^2n^2}{T^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\phi_n=\arctan\left[\frac{2\cdot\frac{\gamma}{2m}\cdot\frac{2\pi n}{T}}{\frac{k+k_1}{m}-\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2}\right]=\arctan\left[\frac{2\pi n\gamma T}{(k+k_1)T^2-4\pi^2n^2m}\right]$$

根据叠加原理,质量块的稳态振动为
$$x=x'+\frac{k_1h}{2(k+k_1)}=\frac{k_1h}{2(k+k_1)}+\sum_{n=1}^{\infty}x'_n(t)$$
$$=\frac{k_1h}{2(k+k_1)}-\frac{k_1h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left\{\frac{2\pi n}{T}t-\arctan\left[\frac{2\pi n\gamma T}{(k+k_1)T^2-4\pi^2n^2m}\right]\right\}}{n\sqrt{\left(k+k_1-\frac{4\pi^2m}{T^2}n^2\right)^2+4\pi^2\gamma^2n^2/T^2}}$$

3.2.19 (1)一个有阻尼的受迫谐振子,它的运动微分方程为
$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x-\gamma\dot{x}+A\cos\omega t$$
它的平均能量损耗率多大?

(2)一个非谐振子的运动微分方程为
$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x+\alpha x^2+A\cos\omega t$$
其中 α 为一个小的常量,$t=0$ 时,$x=0$,$\dot{x}=0$,求此后的运动到 α 的一次项.

解 (1)
$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x-\gamma\dot{x}+A\cos\omega t$$
$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{A}{m}\cos\omega t$$

其中 $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$.

稳态振动解为
$$x=B\cos(\omega t-\phi)$$

其中
$$B=\frac{A/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\frac{A}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$$
$$\phi=\arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)=\arctan\left[\frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right]$$

强迫力所作的平均功率为
$$\overline{P}_1=\frac{1}{T}\int_0^T A\cos\omega t\cdot\dot{x}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{T}(-AB)\int\cos\omega t\sin(\omega t-\phi)\mathrm{d}(\omega t)$$
$$=-\frac{AB}{2T}\int[\sin(2\omega t-\phi)-\sin\phi]\mathrm{d}(\omega t)$$
$$=\frac{AB}{2T}\cdot\sin\phi\cdot\omega T=\frac{1}{2}AB\omega\sin\phi$$

因为
$$\sin\phi=\frac{\gamma\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$$

所以
$$\overline{P}_1=\frac{1}{2}\gamma\omega^2B^2$$

阻力所作的平均功率为

$$\begin{aligned}\overline{P}_2&=\frac{1}{T}\int_0^T(-\gamma\dot{x})\dot{x}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{\gamma}{T}\int_0^T[-B\omega\sin(\omega t-\phi)]^2\mathrm{d}t\\&=-\frac{\gamma\omega^2B^2}{2T}\int_0^T[1-\cos2(\omega t-\phi)]\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\gamma\omega^2B^2\end{aligned}$$

如果平均能量损耗率仅指克服阻力所作的平均功率，则它等于$\frac{1}{2}\gamma\omega^2B^2$.

如果平均能量损耗率是指系统能量的损耗率，则它等于$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-(\overline{P}_1+\overline{P}_2)=0$.

(2) $m\ddot{x}=-m\omega_0^2x+\alpha x^2+A\cos\omega t$

用微扰法，要求准确到 α 的一级近似解，可设

$$x(t)=x_0(t)+\alpha x_1(t)$$

代入微分方程．

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_0+m\alpha\ddot{x}_1&=-m\omega_0^2x_0-m\omega_0^2\alpha x_1\\&\quad+\alpha(x_0+\alpha x_1)^2+A\cos\omega t\\&\approx-m\omega_0^2x_0-m\omega_0^2\alpha x_1+\alpha x_0^2+A\cos\omega t\end{aligned}$$

作上述近似时，只保留 α 的一次项．

$x_0(t)$、$x_1(t)$分别满足的微分方程为

$$m\ddot{x}_0=-m\omega_0^2x_0+A\cos\omega t \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_1=-m\omega_0^2x_1+x_0^2 \tag{2}$$

$x_0(t)$需满足初始条件即 $x(t)$需满足的初始条件：

$$t=0\text{ 时},x_0=0,\dot{x}_0=0$$

$x_1(t)$需满足的初始条件与 $x(t)$需满足的初始条件无关，总是 $t=0$ 时，$x_1=0$，$\dot{x}_1=0$.

设式(1)的特解为

$$x_0^*=B\cos\omega t$$

代入式(1)，定出 $B=\frac{A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$

式(1)的通解为

$$x_0=c_{10}\cos\omega_0t+c_{20}\sin\omega_0t+\frac{A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

由初始条件：$t=0$ 时，$x_0=0$，$\dot{x}_0=0$ 定 c_{10}、c_{20}，得

$$x_0=\frac{A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_0t) \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)

$$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 + \frac{A^2}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)^2$$
$$= -m\omega_0^2 x_1 + \frac{A^2}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cdot\frac{1}{2}[1+\cos 2\omega t + 1 + \cos 2\omega_0 t$$
$$-2\cos(\omega+\omega_0)t - 2\cos(\omega-\omega_0)t] \tag{4}$$

可解得式(4)的通解为

$$x_1 = c_{11}\cos\omega_0 t + c_{21}\sin\omega_0 t + \frac{A^2}{m^3(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$
$$\times\left[\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2\omega t}{2(\omega_0^2-4\omega^2)} - \frac{\cos 2\omega_0 t}{6\omega_0^2} + \frac{\cos(\omega+\omega_0)t}{\omega(\omega+2\omega_0)} + \frac{\cos(\omega-\omega_0)t}{\omega(\omega-2\omega_0)}\right]$$

由初始条件:$t=0, x_1=0$,可定出

$$c_{11} = -\frac{10A^2}{3m^3\omega_0^2(\omega_0^2-4\omega^2)(\omega^2-4\omega_0^2)}$$

由 $t=0, \dot{x}_1=0$ 可定出 $c_{21}=0$.

$$x_1 = -\frac{10A^2}{3m^3\omega_0^2(\omega_0^2-4\omega^2)(\omega^2-4\omega_0^2)}\cos\omega_0 t$$
$$+\frac{A^2}{m^3(\omega_0^2-\omega^2)^2}\left[\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2\omega t}{2(\omega_0^2-4\omega^2)} - \frac{\cos 2\omega_0 t}{6\omega_0^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos(\omega+\omega_0)t}{\omega(\omega+2\omega_0)} - \frac{\cos(\omega-\omega_0)t}{\omega(\omega-2\omega_0)}\right] \tag{5}$$

所以
$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t)$$

其中 $x_0(t)$ 由式(3)给出,$x_1(t)$ 由式(5)给出.

3.2.20 无阻尼的非线性自由振动,质量为 m 的振子受力

$$F(x) = -kx + m\lambda x^2$$

其中 λ 是小常量,求振子满足初始条件 $t=0$ 时 $x(0)=A, \dot{x}(0)=0$ 的一级和二级近似解.

解 $m\ddot{x} = -kx + m\lambda x^2$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \lambda x^2 = 0 \tag{1}$$

其中 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

要求准确到二级的近似解,

$$x(t) = x_0(t) + \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),

$$\ddot{x}_0 + \lambda\ddot{x}_1 + \lambda^2\ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2)$$
$$-\lambda(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2)^2 = 0$$

略去 λ^3 及 λ 的更高次幂的项,

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \lambda(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^2) + \lambda^2(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - 2x_0 x_1) = 0$$

λ 的各次幂的系数为零,

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \tag{3}$$
$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^2 = 0 \tag{4}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - 2x_0 x_1 = 0 \tag{5}$$

x_0 需满足初始条件：$t=0$ 时，$x_0=A$，$\dot{x}_0=0$.

x_1 需满足初始条件：$t=0$ 时，$x_1=0$，$\dot{x}_1=0$.

x_2 需满足初始条件：$t=0$ 时，$x_2=0$，$\dot{x}_2=0$.

立即可写出满足初始条件的式(3)的解为

$$x_0 = A\cos\omega_0 t \tag{6}$$

将式(6)代入式(4)

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = A^2\cos^2\omega_0 t = \frac{1}{2}A^2(1+\cos 2\omega_0 t) \tag{7}$$

找此非齐次方程的特解．

设
$$x_1^* = \frac{A^2}{2\omega_0^2} + B\cos 2\omega_0 t$$

代入式(7)，可定出

$$B = -\frac{1}{6\omega_0^2}A^2$$

故式(7)的通解可写成

$$x_1 = c_{11}\cos\omega_0 t + c_{12}\sin\omega_0 t + \frac{A^2}{2\omega_0^2} - \frac{A^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t$$

初始条件：$t=0$ 时，$x_1=0$，$\dot{x}_1=0$，定 c_{11}、c_{12}，得

$$x_1 = -\frac{A^2}{3\omega_0^2}\cos\omega_0 t + \frac{A^2}{2\omega_0^2} - \frac{A^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t \tag{8}$$

一级近似解为

$$x = x_0 + \lambda x_1 = A\cos\omega_0 t + \frac{\lambda A^2}{6\omega_0^2}(3 - 2\cos\omega_0 t - \cos 2\omega_0 t)$$

下面求二级近似解．将式(6)、(8)代入式(5)，

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= 2A\cos\omega_0 t\left[\frac{A}{6\omega_0^2}(3 - 2\cos\omega_0 t - \cos 2\omega_0 t)\right] \\
&= \frac{A^3}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{2A^3}{3\omega_0^2}\cos^2\omega_0 t - \frac{A^3}{3\omega_0^2}\cos\omega_0 t\cos 2\omega_0 t \\
&= \frac{A^3}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{A^3}{3\omega_0^2}(1+\cos 2\omega_0 t) - \frac{A^3}{6\omega_0^2}(\cos 3\omega_0 t + \cos\omega_0 t) \\
&= -\frac{A^3}{3\omega_0^2} + \frac{5A^3}{6\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{A^3}{3\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t - \frac{A^3}{6\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t
\end{aligned}$$

其中非齐次项$\frac{5A^3}{6\omega_0^2}\cos\omega_0 t$ 是引发共振的力项，而 x_2 应是有限的，$\lambda^2 x_2$ 为二级小量，可见此题求二级近似解不能用通常的微扰法．

下面改用处理长期项的办法* 求满足初始条件 $t=0$ 时，$x=A$，$\dot{x}=0$ 的一级和二级近似解．

* 可参看强元棨，《经典力学》上册第 67 页，科学出版社，2003.

将 ω_0^2 也展成 λ 的幂级数.

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 \tag{9}$$

将式(2)、(9)代入式(1),得

$$\ddot{x}_0 + \lambda\ddot{x}_1 + \lambda^2\ddot{x}_2 + (\omega^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2)$$
$$- \lambda(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2)^2 = 0$$
$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + \lambda(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + \alpha_1 x_0 - x_0^2)$$
$$+ \lambda^2(\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_0 - 2x_0 x_1) + \cdots = 0$$

λ 的各次幂的系数分别为零,

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \tag{10}$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^2 - \alpha_1 x_0 \tag{11}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_0 + 2x_0 x_1 \tag{12}$$

$x_0(t)$满足 $t=0$ 时 $x_0=A$、$\dot{x}_0=0$ 的解为

$$x_0(t) = A\cos\omega t \tag{13}$$

将式(13)代入式(11)

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = A^2\cos^2\omega t - \alpha_1 A\cos\omega t$$
$$= \frac{1}{2}A^2(1 + \cos 2\omega t) - \alpha_1 A\cos\omega t$$

$x_1(t)$必须有限,要引起共振的项的系数必须为零,即 $\cos\omega t$ 项的系数必须为零,$\therefore \alpha_1=0$,

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2\cos 2\omega t \tag{14}$$

作一级近似时,$\omega_0^2=\omega^2+\alpha_1\lambda$,令 $\alpha_1=0$,有 $\omega^2=\omega_0^2$,$\omega=\omega_0$,将式(14)中的 ω 改成 ω_0,式(14)就变成式(7),前已得到 $x_1(t)$满足 $t=0$ 时 $x_1=0$、$\dot{x}_1=0$ 的解式(8),零级近似时 $\omega=\omega_0$,式(13)中的 ω 可改成 ω_0,这样一级近似解与前面用通常的微扰法得到的完全相同.

下面求 $x_2(t)$,式(12)中的 $\omega^2\neq\omega_0^2$,代入 x_0、x_1 时仍需保留原来的 ω,不能用 ω_0,代入 x_0、x_1 和 $\alpha_1=0$,式(12)变成

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\alpha_2 A\cos\omega t + 2A\cos\omega t\left(-\frac{A^2}{3\omega^2}\cos\omega t + \frac{A^2}{2\omega^2} - \frac{A^2}{6\omega^2}\cos 2\omega t\right)$$
$$= -\alpha_2 A\cos\omega t - \frac{A^3}{3\omega^2}(1 + \cos 2\omega t) + \frac{A^3}{\omega^2}\cos\omega t$$
$$- \frac{A^3}{6\omega^2}(\cos 3\omega t + \cos\omega t)$$
$$= \left(-\alpha_2 A + \frac{5A^3}{6\omega^2}\right)\cos\omega t - \frac{A^3}{3\omega^2}(1 + \cos 2\omega t) - \frac{A^3}{6\omega^2}\cos 3\omega t$$

$x_2(t)$必须是有限的,不可能有出现共振的力项.由此,$\cos\omega t$ 的系数必须为零.

$$-\alpha_2 A + \frac{5A^3}{6\omega^2} = 0, \qquad \alpha_2 = \frac{5A^2}{6\omega^2}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{A^3}{3\omega^2} - \frac{A^3}{3\omega^2}\cos 2\omega t - \frac{A^3}{6\omega^2}\cos 3\omega t$$

可得其特解为

$$x_2^* = -\frac{A^3}{3\omega^4} + \frac{2A^3}{9\omega^4}\cos 2\omega t + \frac{A^3}{48\omega^4}\cos 3\omega t$$

通解为

$$x_2 = c_{21}\cos\omega t + c_{22}\sin\omega t + \frac{A^3}{144\omega^4}(-48 + 32\cos 2\omega t + 3\cos 3\omega t)$$

由 $t=0$ 时 $x_2=0$、$\dot{x}_2=0$ 定 c_{21}、c_{22}，得

$$x_2 = \frac{A^3}{144\omega^4}(-48 + 13\cos\omega t + 32\cos 2\omega t + 3\cos 3\omega t)$$

二级近似解为

$$x(t) = A\cos\omega t + \lambda\frac{A^2}{6\omega^2}(3 - 2\cos\omega t - \cos 2\omega t)$$

$$+ \lambda^2\frac{A^3}{144\omega^4}(-48 + 13\cos\omega t + 32\cos 2\omega t + 3\cos 3\omega t)$$

其中 $\omega^2=\omega_0^2-\alpha_1\lambda-\alpha_2\lambda^2=\omega_0^2-\dfrac{5A^2}{6\omega_0^2}\lambda^2$

3.2.21　已知一个单摆的悬挂点做强迫竖直小振动 $\eta(t)=\eta_0\cos\omega t$，此单摆由长为 L 的无质量杆和杆端的质点组成.

(1) 假设单摆摆角振幅很小，$\eta_0\ll L$，求摆角 φ 满足的运动微分方程；

(2) 求满足初始条件 $t=0$ 时 $\varphi=a$、$\dot{\varphi}=0$ 的一级近似解；

(3) w 为何值时发生共振，写出共振时满足式(2)给的初始条件的一级近似解.

解　(1)设质点质量为 m，取随悬挂点做平动的非惯性参考系，由对悬挂点的角动量定理

$$mL^2\ddot{\varphi} = -mgL\sin\varphi - m\ddot{\eta}L\sin\varphi$$

$$\eta = \eta_0\cos\omega t, \sin\varphi \approx \varphi$$

φ满足的微分方程为

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{L} - \frac{\eta_0\omega^2}{L}\cos\omega t\right)\varphi = 0 \tag{1}$$

(2) 令 $\lambda=\dfrac{\eta_0}{L}\ll 1$，$\dfrac{g}{L}=\omega_0^2$

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，

$$\ddot{\varphi}_0 + \lambda\ddot{\varphi}_1 + (\omega_0^2 - \lambda\omega^2\cos\omega t)(\varphi_0 + \lambda\varphi_1) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 + \lambda(\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 - \omega^2\varphi_0\cos\omega t) + \cdots = 0$$

λ的各次幂的系数分别为零

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = 0 \tag{3}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 - \omega^2\varphi_0\cos\omega t = 0 \tag{4}$$

式(3)满足初始条件：$t=0$ 时，$\varphi_0=a$，$\dot{\varphi}_0=0$ 的解为

$$\varphi_0 = a\cos\omega_0 t \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 &= \omega^2 \cdot a\cos\omega_0 t\cos\omega t \\ &= \frac{1}{2}a\omega^2[\cos(\omega+\omega_0)t + \cos(\omega-\omega_0)t]\end{aligned}$$

对两项非齐次项分别用振幅矢量法或待定系数法，可得其特解，进而写通解，可得

$$\begin{aligned}\varphi_1 = {} & c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t - \frac{a\omega}{2(2\omega_0+\omega)}\cos(\omega+\omega_0)t \\ & + \frac{a\omega}{2(2\omega_0-\omega)}\cos(\omega-\omega_0)t\end{aligned}$$

满足 $t=0$ 时，$\varphi_1=0$，$\dot{\varphi}_1=0$ 的解为

$$\begin{aligned}\varphi_1 = {} & \frac{a\omega^2}{\omega^2-4\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{aw}{2(2\omega_0+\omega)}\cos(\omega+\omega_0)t \\ & + \frac{a\omega}{2(2\omega_0-\omega)}\cos(\omega-\omega_0)t\end{aligned}$$

所以满足初始条件：$t=0$ 时，$\varphi=a$，$\dot{\varphi}=0$ 的一级近似解为

$$\begin{aligned}\varphi = {} & a\cos\omega_0 t + \frac{\eta_0}{L}\left[-\frac{a\omega^2}{(2\omega_0+\omega)(2\omega_0-\omega)}\cos\omega_0 t\right. \\ & \left. - \frac{a\omega}{2(2\omega_0+\omega)}\cos(\omega+\omega_0)t + \frac{1}{2(2\omega_0-\omega)}\cos(\omega-\omega_0)t\right]\end{aligned}$$

其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

(3) 当 $\omega=2\omega_0=2\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ 时发生共振，由于引起共振的是微扰项，振动幅度仍然应是有限的，需用处理长期项的办法.

将 $\omega=2\omega_0$ 代入式(1)，仍用 $\lambda=\dfrac{\eta_0}{L}$，

$$\ddot{\varphi} + (\omega_0^2 - 4\lambda\omega_0^2\cos 2\omega_0 t)\varphi = 0$$

将

$$\varphi=\varphi_0+\lambda\varphi_1,\quad \omega_0^2=\omega^2+\alpha_1\lambda$$

代入上式，得

$$\begin{aligned}& \ddot{\varphi}_0 + \lambda\ddot{\varphi}_1 + (\omega^2+\alpha_1\lambda)(\varphi_0+\lambda\varphi_1) - 4\lambda(\omega^2+\alpha_1\lambda) \\ & \times \cos(2\sqrt{\omega^2+\alpha_1\lambda}t)(\varphi_0+\lambda\varphi_1) = 0\end{aligned}$$

由 λ 的各次幂的系数分别为零

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega^2\varphi_0 = 0 \tag{6}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega^2\varphi_1 + \alpha_1\varphi_0 - 4\omega^2\varphi_0\cos 2\omega t = 0 \tag{7}$$

注意：这里的 ω 已不是题中 $\eta(t)=\eta_0\cos\omega t$ 中的 ω，这里 $\eta(t)=\eta_0\cos 2\omega_0 t$，而 $\omega\approx\omega_0$.

式(6)满足 $t=0$ 时，$\varphi_0=a$，$\dot{\varphi}_0=0$ 的解为

$$\varphi_0 = a\cos\omega t \tag{8}$$

将式(8)代入式(7),

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega^2\varphi_1 &= -\alpha_1 a\cos\omega t + 4\omega^2 a\cos\omega t\cos 2\omega t \\ &= -\alpha_1 a\cos\omega t + 2\omega^2 a(\cos 3\omega t + \cos\omega t) \\ &= (-\alpha_1 a + 2\omega^2 a)\cos\omega t + 2\omega^2 a\cos 3\omega t\end{aligned}$$

$\varphi_1(t)$是有限的,必须 $\cos\omega t$ 项的系数等于零,

$$-\alpha_1 a + 2\omega^2 a = 0,\quad \alpha_1 = 2\omega^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha_1\lambda = \omega_0^2 - 2\omega^2\frac{\eta_0}{L}$$

$$\omega^2\left(1+\frac{2\eta_0}{L}\right) = \omega_0^2,\quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1+\frac{2\eta_0}{L}} = \omega_0^2\left(1-\frac{2\eta_0}{L}\right)$$

$$\omega = \sqrt{1-\frac{2\eta_0}{L}}\,\omega_0 \approx \left(1-\frac{\eta_0}{L}\right)\omega_0$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega^2\varphi_1 = 2\omega^2 a\cos 3\omega t \tag{9}$$

设上述非齐次方程的特解为

$$\varphi_1^* = A\cos 3\omega t$$

$$-9\omega^2 A + \omega^2 A = 2\omega^2 a,\quad A = -\frac{1}{4}a$$

式(9)的通解为

$$\varphi_1 = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t - \frac{1}{4}a\cos 3\omega t$$

满足 $t=0$ 时,$\varphi_1=0$,$\dot{\varphi}_1=0$ 的解为

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}a(\cos\omega t - \cos 3\omega t)$$

$\varphi(t)$满足初始条件 $t=0$ 时,$\varphi=a$、$\dot{\varphi}=0$ 的一级近似解为

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\eta_0}{L}\varphi_1 = a\cos\omega t + \frac{\eta_0}{4L}a(\cos\omega t - \cos 3\omega t)$$

其中
$$\omega = \left(1-\frac{\eta_0}{L}\right)\omega$$

3.3 简 谐 波

3.3.1 一平面简谐波

$$y = 0.2\sin[\pi(0.5x - 30t)]$$

x、y 的单位为厘米,t 的单位为秒.求波的振幅、波长、频率、波速以及 $x=1\text{cm}$ 处质元振动的初相位.

解
$$y = 0.2\sin[\pi(0.5x - 30t)]$$

$$=0.2\cos\left[\frac{\pi}{2}-\pi(0.5x-30t)\right]$$

$$=0.2\cos\left[30\pi\left(t-\frac{x}{60}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

与 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right]$,$\omega=2\pi\nu$ 相比较,可得 $A=0.2\text{cm}$,$\nu=15\text{s}^{-1}$,$v=60\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$,

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{60}{15}=4\text{cm}$$

$x=1\text{cm}$ 处质元振动的初相位为

$$-\frac{30\pi}{60}\times1+\frac{\pi}{2}=0$$

3.3.2 一波的频率为 20s^{-1},波速为 $80\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,振幅为 0.02m,求:

(1) 波的相位相差 45°的两个点间的距离;

(2) 在一给定点处,时间相隔 0.01s 的两位移之相位差;

(3) 在一给定点处,时间相隔 0.01s 的质元的两个位置的最大距离;

(4) 在一给定点处,质元的振动相位相差 45°的质元的两个位置的最大距离.

解 $y=0.02\cos\left[40\pi\left(t-\frac{x}{80}\right)\right]$

(1) $\left|40\pi\left(t-\frac{x_1}{80}\right)-40\pi\left(t-\frac{x_2}{80}\right)\right|=\frac{\pi}{4}$

$|x_2-x_1|=0.5\text{m}$

(2) $\left|40\pi\left(t_1-\frac{x}{80}\right)-40\pi\left(t_2-\frac{x}{80}\right)\right|$

$=40\pi|t_1-t_2|=40\pi\times0.01=\frac{2}{5}\pi$

(3) $y(x,t+0.01)-y(x,t)$

$=0.02\cos\left[40\pi\left(t+0.01-\frac{x}{80}\right)\right]-0.02\cos\left[40\pi\left(t-\frac{x}{80}\right)\right]$

$=0.02\cos\left[40\pi\left(t-\frac{x}{80}\right)+\frac{2}{5}\pi\right]+0.02\cos\left[40\pi\left(t-\frac{x}{80}\right)-\pi\right]$

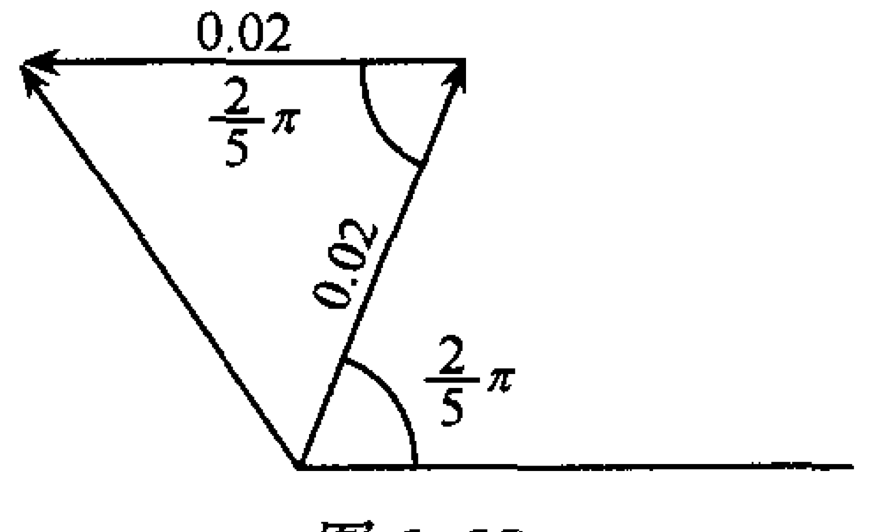


图 3.35

可用振幅矢量法求合振动的振幅,即任一质元在时间相隔 0.01s 的两个位置的最大距离.

$$|y(x,t+0.01)-y(x,t)|$$

$$=2\times0.02\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\pi\right)=0.04\sin\frac{\pi}{5}=0.0235m$$

(4) $|y(x,t+\Delta t)-y(x,t)|$

$=\left|0.02\cos\left[40\pi\left(t+\Delta t-\frac{x}{80}\right)\right]-0.02\cos\left[40\pi\left(t-\frac{x}{80}\right)\right]\right|$

$=\left|0.02\cos\left[40\pi\left(t-\frac{x}{80}\right)+\frac{\pi}{4}\right]+0.02\cos\left[40\pi\left(t-\frac{x}{80}\right)-\pi\right]\right|$

$=0.04\sin\frac{\pi}{\delta}=0.0153\text{m}$

3.3.3　一列沿长弦线向 x 正方向传播的平面简谐波，位于 $x=x_1=0$ 及 $x=x_2=1\text{m}$ 处两质元的简谐振动如下：

$$y_1=0.2\sin 3\pi t,y_2=0.2\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)$$

y 的单位为米，t 的单位为秒．求：

(1) 频率；

(2) 波长 λ；

(3) 波速 v；

(4) 该两质元的相对速率的最大值．

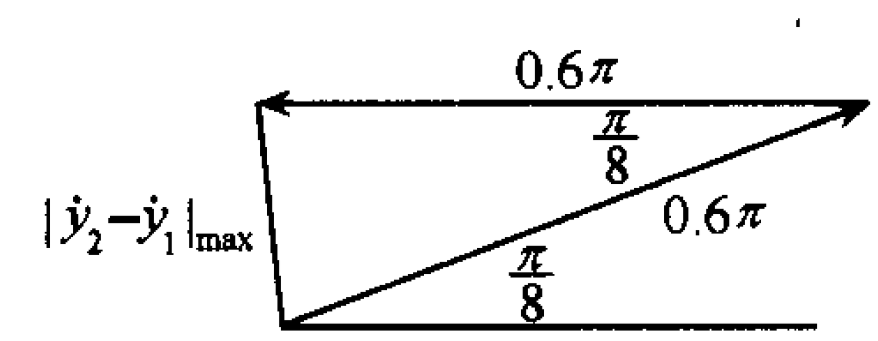


图 3.36

解　由 $x=x_1=0$ 处质元的振动方程

$$y_1=0.2\sin 3\pi t$$

可把此向 x 正方向传播的平面简谐波表达为

$$y=0.2\sin\left[3\pi\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

由 $x=x_2=1\text{m}$ 处质元的振动方程

$$y_2=0.2\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)$$

可知

$$-\frac{3\pi\cdot 1}{v}=\frac{\pi}{8}-2n\pi=-\frac{16n-1}{8}\pi$$

$$v=\frac{24}{16n-1},\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$w=3\pi\text{s}^{-1},\quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=1.5\text{s}^{-1}$$

$$\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{16}{16n-1}(\text{m})\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$y_2-y_1=0.2\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)-0.2\sin^3\pi t$$

$$\dot{y}_2-\dot{y}_1=0.6\pi\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)-0.6\pi\cos 3\pi t$$

$$=0.6\pi\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)+0.6\pi\cos(3\pi t-\pi)$$

$$|\dot{y}_2-\dot{y}_1|_{\max}=2\times 0.6\pi\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=1.2\pi\sin\frac{\pi}{16}=0.234\text{m/s}$$

3.3.4　一平面简谐波以 50m/s 的速率沿 x 负方向传播，在 $t=1\text{s}$ 时的波形如图3.37所示，写出此波的运动学方程，并画出 $t=1\text{s}$ 时各质元的 $\frac{\partial y}{\partial t}$-$x$ 图．

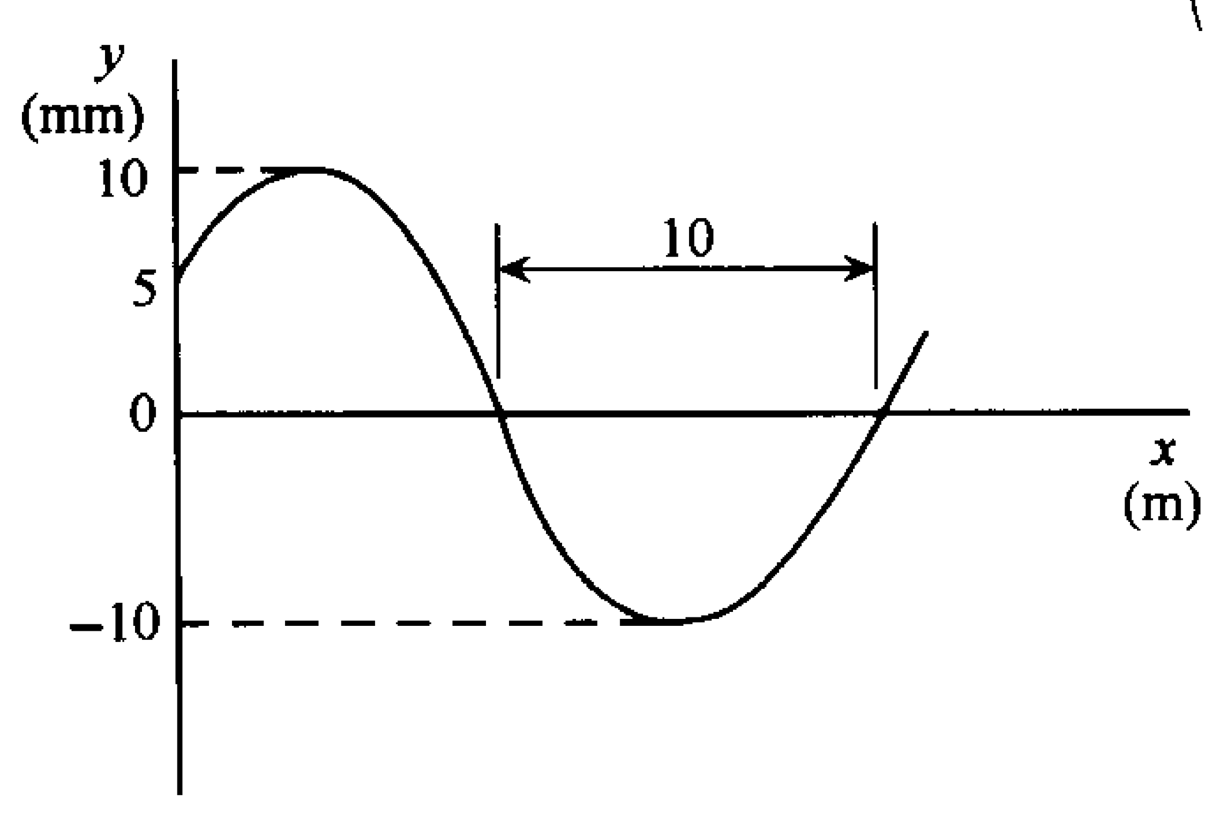


图 3.37

解　从图 3.37 上可看出,

$$A = 10\text{mm} = 0.01\text{m}, \lambda = 2 \times 10 = 20\text{m}$$

已知 $v=50\text{m/s}$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = 2.5\text{s}^{-1}, \quad \omega = 2\pi\nu = 5\pi\text{s}^{-1}$$

波的运动学方程为

$y=0.01\cos\left[5\pi\left(t+\frac{x}{50}\right)+\alpha\right]$,$\alpha$ 待定. $t=1\text{s}$ 时,在 $x=0$ 处,$y=0.005\text{m}$,$\frac{\partial y}{\partial t}>0$

$$0.01\cos(5\pi+\alpha) = 0.005$$

$$5\pi + \alpha = \arccos\frac{0.005}{0.01} = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

因为
$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{\substack{x=0\\t=1}} = -0.05\pi\sin(5\pi+\alpha) > 0$$

可见,$5\pi+\alpha$ 在第四象限

$$5\pi + \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

此波的运动学方程为

$$y = 0.01\cos\left[5\pi\left(t+\frac{x}{50}\right)+\frac{2}{3}\pi\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0.05\pi\cos\left[5\pi\left(t+\frac{x}{50}\right)+\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi\right]$$

$$= 0.05\pi\cos\left[5\pi\left(t+\frac{x}{50}\right)+\frac{7}{6}\pi\right]$$

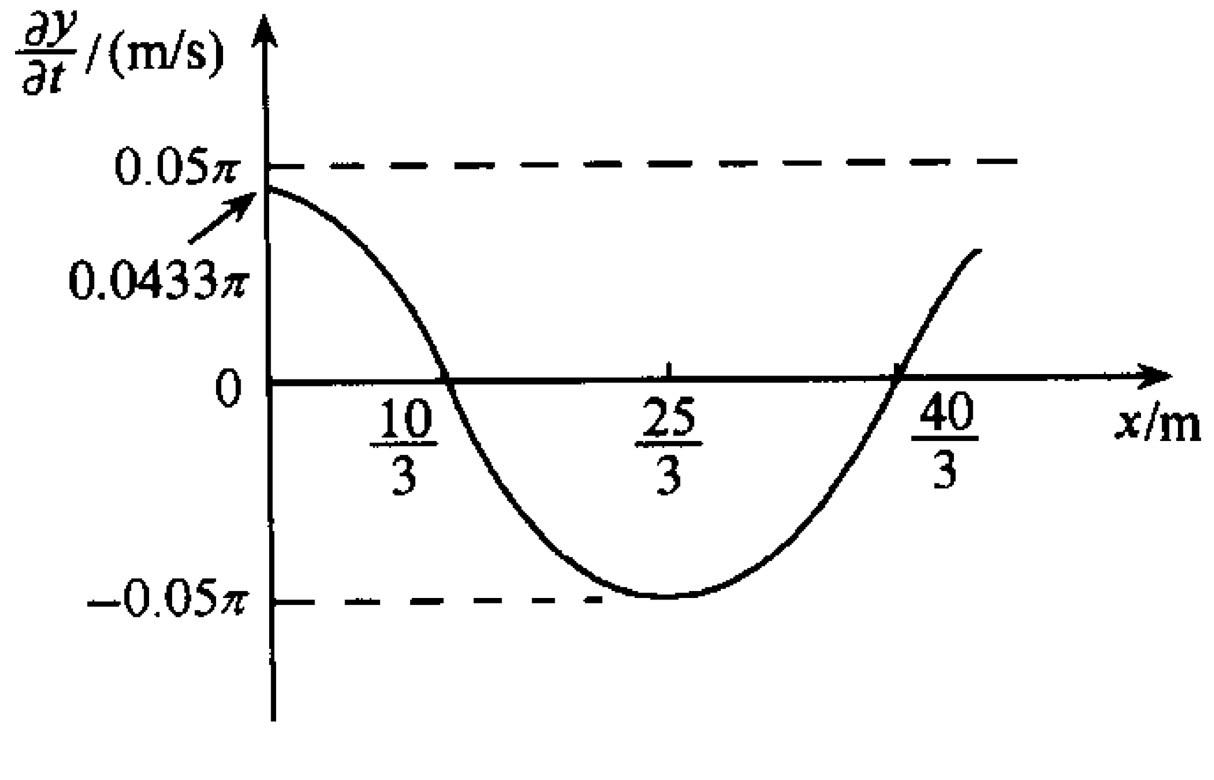


图 3.38

$t=1\text{s}$ 时,各处质元的$\frac{\partial y}{\partial t}$为

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0.05\pi\cos\left(\frac{\pi}{10}x+5\pi+\frac{7}{6}\pi\right)$$

$$= 0.05\pi\cos\left(\frac{\pi}{10}x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$\frac{\partial y}{\partial t}$-$x$ 的示意图如图 3.38 所示.

3.3.5　一根均匀的长弦线,线密度为 0.02kg/m,被 50N 的力拉紧,弦线的一端 $x=0$ 做简谐振动,振幅为 0.02m,周期为 1s,$t=0$ 时,位移 y 为0.01m,$\frac{\partial y}{\partial t}$为负值. 写出向 x 正方向传播的简谐波的运动学方程.

解　$\eta=0.02\text{kg/m}, T_0=50\text{N}$

$$A = 0.02\text{m}, T = 1\text{s}, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\text{s}^{-1}$$

$$v=\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}=50\text{ms}^{-1}$$

$$y=0.02\cos\left[2\pi\left(t-\frac{x}{50}\right)+\alpha\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-0.02\cdot 2\pi\sin\left[2\pi\left(t-\frac{x}{50}\right)+\alpha\right]$$

由 $t=0$ 时 $x=0$ 处 $y=0.01\text{m}$，$\frac{\partial y}{\partial t}<0$，可写出下列两式：

$$0.02\cos\alpha=0.01$$

$$-0.04\pi\sin\alpha<0$$

α 在第一象限，$\alpha=\frac{\pi}{3}$

所以 $$y=0.02\cos\left[2\pi\left(t-\frac{x}{50}\right)+\frac{\pi}{3}\right]\quad(\text{m})$$

3.3.6 一脉冲从长弦线的一端行进至另一端，需时 0.1 秒，弦线跨过一滑轮后悬一质量为弦线质量 100 倍的重物，问弦线的长度多大？

解 设重物质量为 m，弦线长度为 l，

$$T_0=mg,m=100\eta l,\eta=\frac{m}{100l}$$

$$v=\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}=\sqrt{mg/\frac{m}{100l}}=\sqrt{100gl}$$

$$l=vt=\sqrt{100gl}t,l^2=100gl\cdot t^2$$

所以 $$l=100gt^2=100\times 9.8\times(0.1)^2=9.8\text{m}$$

3.3.7 在拉紧的弦线上传播一个脉冲：

$$y(x,t)=\frac{b^3}{b^2+(ax+ut)^2}$$

其中 a、b、u 均为正值常量，问：

(1) 此介质是色散介质吗？说明理由；

(2) 该脉冲速率多大？方向如何？

(3) 弦线上 $x=0$ 处质元在 $t=1$ 时的振动速度．

解 (1)此介质是无色散介质，对于色散介质，不同频率的波在其中传播时有不同的波速．一个脉冲是由频率连续变化的无数不同频率的简谐波叠加而成的，由于不同频率的波波速不同，随着时间的推移，脉冲形状将发生变化．而在无色散介质中传播，脉冲的形状是不随时间变化的．

今 t 时刻脉冲的形状为

$$y(x,t)=\frac{b^3}{b^2+(ax+ut)^2}$$

在 $t=0$ 时，脉冲的形状为

$$y(x,0)=\frac{b^3}{b^2+(ax)^2}$$

$x=0$ 处，　　$y(0,0)=b,\quad x=\pm a,\quad y=\dfrac{b^3}{a^2+b^2}$

在 t 时，　　$y(x,t)=\dfrac{b^3}{b^2+(ax+ut)^2}$

$x=-\dfrac{ut}{a}$处，　　$y\left(-\dfrac{ut}{a},t\right)=b=y(0,0)$

$x=-\dfrac{ut}{a}\pm a$ 处，

$$y\left(-\frac{ut}{a}\pm a,t\right)=\frac{b^3}{b^2+\left[a\left(-\dfrac{ut}{a}\pm a\right)+ut\right]^2}=\frac{b^3}{a^2+b^2}=y(\pm a,0)$$

同样，可以更一般的证明

$$y\left(-\frac{ut}{a}\pm c,t\right)=y(\pm c,0)$$

这就说明了在传播过程中，脉冲的形状保持不变，介质是无色散的．群速 u_g 与相速 u_p 是相同的．

（2）相速是相位的传播速度，

$$ax+ut=常量$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{u}{a}$$

负号说明脉冲是向 x 负方向传播的，速率为$\dfrac{u}{a}$. 其实在(1)的解答中已能得出此结论．在 $t=0$时，脉冲的极大值位于 $x=0$ 处，在 t 时刻，脉冲的极大值位于 $x=-\dfrac{u}{a}t$ 处，脉冲是以$\dfrac{u}{a}$的速率向 x 负方向传播的．

（3）弦线上 $x=0$ 处质元的振动速度为

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0}=\frac{\mathrm{d}y(0,t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{b^3}{b^2+u^2t^2}\right)=-\frac{2b^3u^2t}{(b^2+u^2t^2)^2}$$

$t=1$ 时，

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0}=-\frac{2b^3u^2}{(b^2+u^2)^2}$$

3.3.8　在两端固定、长度为 100m 的弦线上，有一如图 3.39 所示的脉冲以 40m/s 的速率向右行进，且保持其形状不变．

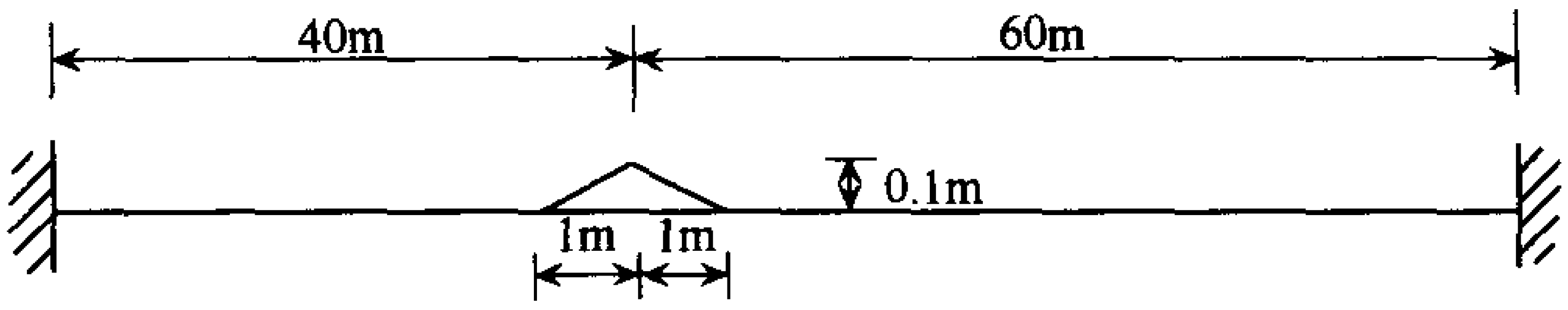


图 3.39

（1）定性地画出在脉冲处于图示位置时弦线各质元的振动速度的轮廓图；

（2）近似地估算弦线质元的最大振动速度；

(3) 若弦线总质量为 2kg,弦线中的张力有多大?

解 (1)在图示时刻,弦线各质元的振动速度为

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 39\\ -v & 39<x\leqslant 40\\ v & 40<x\leqslant 41\\ 0 & x>41\end{cases}$$

其中 $v>0$,轮廓图如图 3.40 所示.

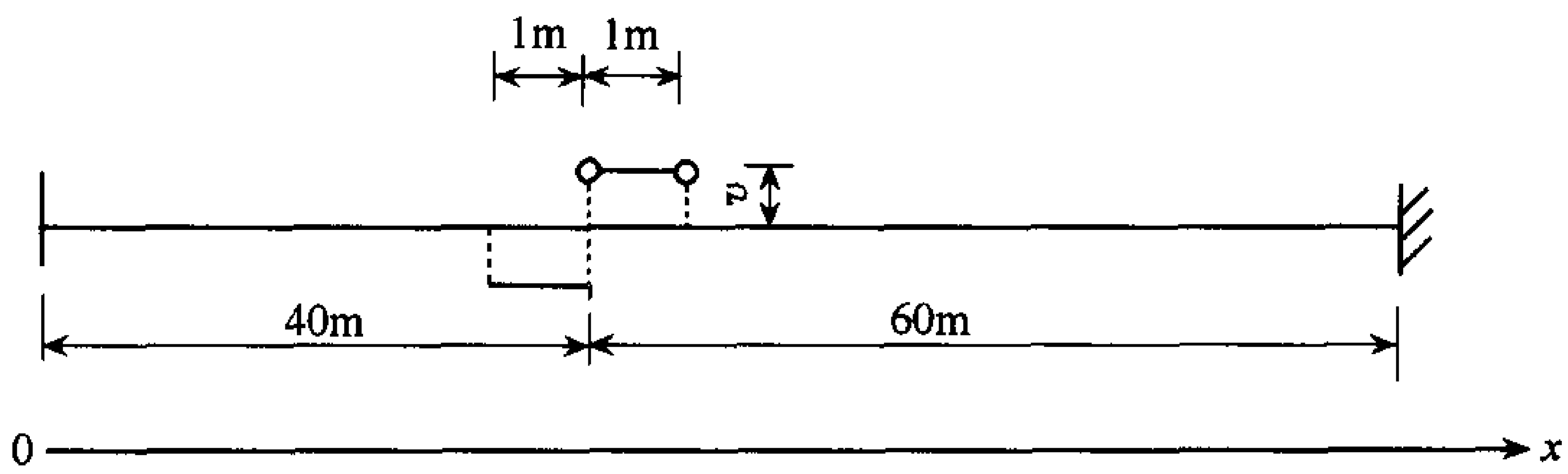


图 3.40

(2)弦线质元最大振动速度就是(1)问解答中的 v,图 3.41 用实线和虚线分别表示 t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻脉冲的位置.

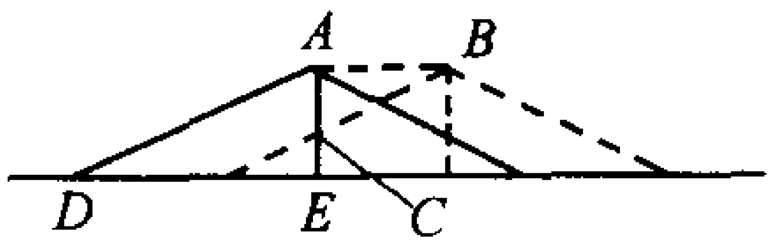


图 3.41

脉冲传播的速率为 40m/s,$AB=40\cdot\Delta t$

$$AC=v\Delta t$$

$$\Delta ABC\sim\Delta ADE\qquad \frac{AC}{AB}=\frac{AE}{DE}$$

即$\dfrac{v\Delta t}{40\Delta t}=\dfrac{0.1}{1}$,$\therefore v=40\times 0.1=4\text{m/s}$

(3) $v_g=v_p=\sqrt{\dfrac{T_0}{\eta}}$,$\eta=\dfrac{m}{l}$

$$T_0=v_g^2\eta=v_g^2\frac{m}{l}=(40)^2\cdot\frac{2}{100}=32\text{N}$$

3.3.9 一个对称的三角形脉冲在弦线上沿 x 正方向运动,其最大高度为 0.4m,全长为 1.0m,波速为 24m/s,在 $t=0$ 时,整个脉冲位于 $x=0$ 至 $x=1$m 之间. 画出 $x=1$m 处质元振动速度随时间变化的曲线.

解 根据题意,$t=0$ 时,脉冲的波形图如图 3.42 所示.

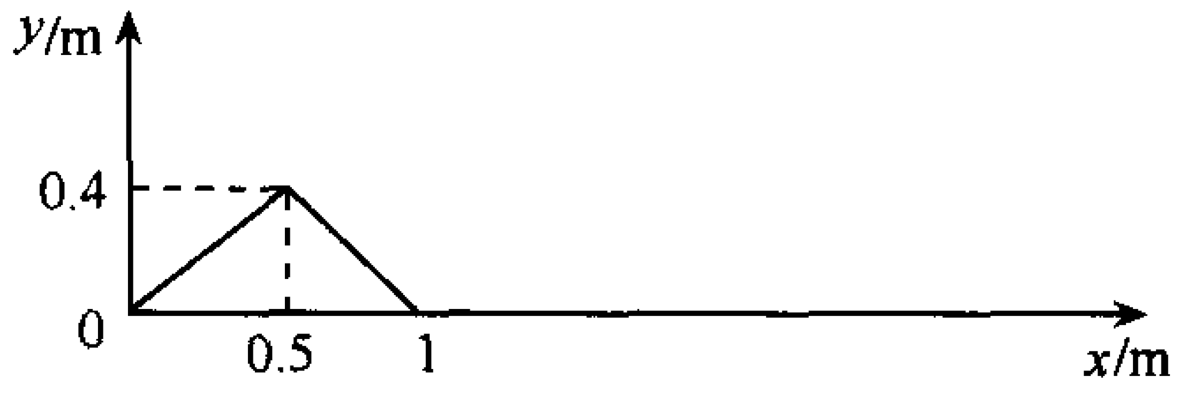


图 3.42

在 $t=0$ 至 $t=\dfrac{0.5}{24}=0.0208\text{s}$ 期间,$x=1$m 处质元的振动速度为$\dfrac{\partial y}{\partial t}$,

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{0.4}{0.5}\times 24=19.2\text{m/s}$$

在 $0.0208\text{s}\leqslant t<0.0417\text{s}$ 期间

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-19.2\text{m/s}$$

在 $t<0$ 及 $t\geqslant 0.0417\text{s}$ 期间

$$\frac{\partial y}{\partial t}=0$$

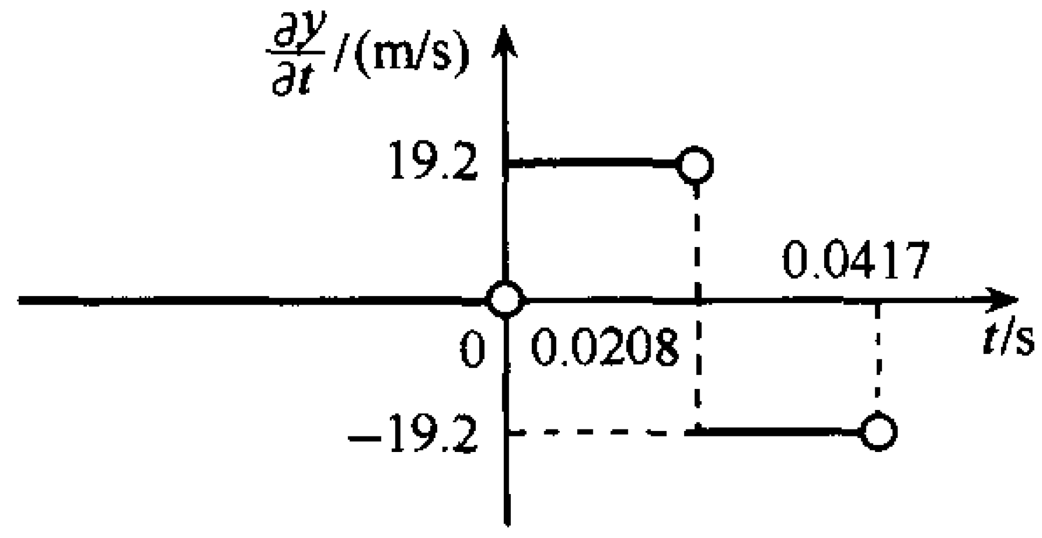


图 3.43

$x=1\text{m}$ 处质元的振动速度随时间的变化曲线为不连续的四段直线，如图 3.43 所示．

3.3.10 气体或液体的压缩系数定义为 $k=-\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$，这里 $-\mathrm{d}V$ 是压强增加 $\mathrm{d}p$ 时的体积减小量，标准状态下空气的压缩系数比水约大 15000 倍．

(1) 推导声波速度公式 $v=\dfrac{1}{\sqrt{k\rho}}$，其中 ρ 是质量密度；

(2) 在标准状态下，空气中的声速约为 330m/s，水中的声速约为 1470m/s，假设水是充满了微小气泡的混合物，微小气泡仅占总体积的 1%(忽略由气泡引起的混合物的密度和纯水的密度之间的差异)，求混合物的压缩系数 k，再求混合物中的声速 v 值，并与纯水或空气中的声速 v 值相比较．

解 (1)考虑一维问题，考虑 $x\sim x+\mathrm{d}x$ 段质元，传播声波时，两端分别位移到 $x+y$ 和 $x+\mathrm{d}x+y+\mathrm{d}y$，两端压强分别为 $p_0+(\mathrm{d}p)_x$ 和 $p_0+(\mathrm{d}p)_{x+\mathrm{d}x}$，其中 p_0 是平衡时的压强，设截面积为 S.

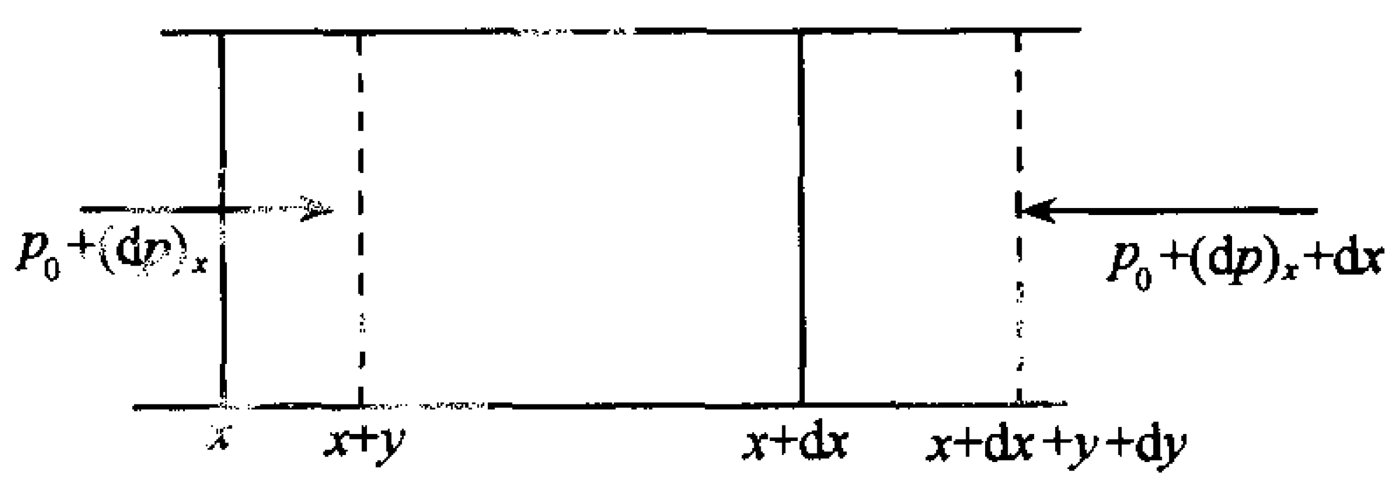


图 3.44

该质元受到向右的力为

$$\begin{aligned}&[p_0+(\mathrm{d}p)_x]S-[p_0+(\mathrm{d}p)_{x+\mathrm{d}x}]S\\ =&-\frac{1}{k}\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}\right)_x S-\left[-\frac{1}{k}\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}\right)_{x+\mathrm{d}x}\right]S\\ =&-\frac{1}{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x S+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x}S=\frac{1}{k}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}S\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中用了压缩系数的定义：$k=-\dfrac{1}{V}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$，$\mathrm{d}p=-\dfrac{1}{k}\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$.

该质元的加速度为 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$，由牛顿运动定律

$$\rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}S\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\rho k\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

可见声波速度为

$$v=\frac{1}{\sqrt{k\rho}}$$

注意：这里定义的压缩系数是体积弹性模量的倒数．

(2) 对于混合物

$$k=-\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}=-\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V_1+\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}p}=-\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}p}+\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}p}\right)$$

$$=\frac{1}{V}\left[V_1\left(-\frac{1}{V_1}\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}p}\right)+V_2\left(-\frac{1}{V_2}\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}p}\right)\right]=\frac{1}{V}(V_1k_1+V_2k_2)$$

设 V_1 是混合物中气泡的体积，V_2 为混合物中纯水的体积，$\frac{V_1}{V}=0.01$，$\frac{V_2}{V}=0.99$，$k_1=15000k_2$．

$$k=0.01k_1+0.99k_2=(0.01\times15000+0.99\times1)k_2=151k_2$$

在混合物中的声速

$$v=\frac{1}{\sqrt{k\rho}}=\frac{1}{\sqrt{151k_2\rho}}=\frac{1}{\sqrt{151}}\times1470=120\mathrm{m/s}$$

比在水中的声速 1470m/s 和在标准状态下空气中的声速 330m/s 都小．

3.3.11 (1)写出在弦中传播基波的频率与弦的物理性质、几何性质的关系；

(2) 从牛顿运动定律出发，分析一小段弦所发生的变化导出上述关系．

解 (1)设 ν 为在弦中传播的基波频率，

$$\nu=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\eta}}$$

其中 l 为弦线长度，T 为弦的张力，η 为弦的线密度．

(2) 考虑弦线位于 $x\sim x+\mathrm{d}x$ 段质元，如图 3.45 所示，受到的外力有 T_1、T_2，分别是 x 左方和 $x+\mathrm{d}x$ 右方弦线对该质元的作用力，重力与 $\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$ 的合力相比可忽略不计．

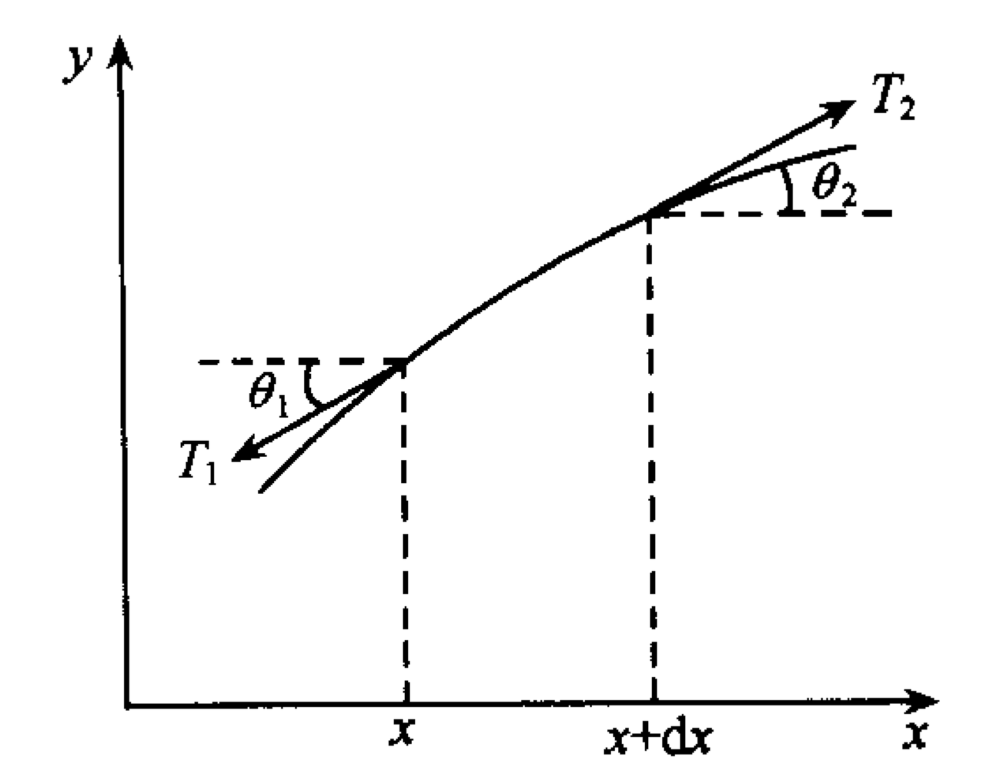


图 3.45

$$T_1\cos\theta_1=T_2\cos\theta_2=T_0\cos0^\circ=T_0$$

其中 T_0 是弦线处于平衡时的张力．

在 y 方向，质元所受的合力为

$$T_2\sin\theta_2-T_1\sin\theta_1=T_2\cos\theta_2\tan\theta_2-T_1\cos\theta_1\tan\theta_1$$

$$=T_0(\tan\theta_2-\tan\theta_1)$$

$$=T_0\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\mathrm{d}x}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\bigg|_{x}\right]$$

$$\approx T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

由牛顿运动定律

$$\eta\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{T_0}{\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

在弦线中传播波(只能是横波)的波速

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$$

在长度为 l 的弦线中传播频率最低的波(基波)的波长 $\lambda=2l$,

$$v = \lambda\nu$$

基波频率 $\nu=\frac{v}{\lambda}=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$,即(1)中的$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\eta}}$.

3.3.12 声音在气体中的速度由下式计算:$v=\sqrt{\text{绝热体积模量/密度}}$.

(1) 证明此公式的量纲是对的;

(2) 此公式隐含着认为声音在空气中的传播是准静态过程,但从另一方面,在空气分子的方均根速率大致为 500m/s 的温度下,空气中的声速大致为 340m/s,那么这种过程为什么能够是准静态的?

解 (1)体积模量 k 的定义为

$$\Delta p = -k\frac{\Delta v}{v}$$

准静态绝热过程的过程方程为 $pv^{\gamma}=c$,其中 γ 是定压摩尔比热容与定容摩尔比热容之比,是无量纲的量,c 为常量.

可得准静态绝热体积弹性模量为 $k=\gamma p$. 由此或直接由体积弹性模量的定义可见,k 的量纲与压强的量纲相同.

$$[k] = [p] = \mathrm{MLT^{-2}/L^2} = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{\rho}} = \left(\frac{\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}}{\mathrm{ML^{-3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{LT^{-1}} = [v]$$

(2) 是否能用准静态过程近似,要看恢复平衡所需的弛豫时间 τ 是否比此过程中外界变化经历的时间小得多. 今在空气中传播声波这个过程当然不是严格的平衡态,但在局部可以看作近似处于平衡态. 声波频率从 20Hz 至 20000Hz,就变化最快的 $\nu=$ 20000Hz 的声波而言,其周期 $T=5\times10^{-5}$s,在方均根速率为 500ms^{-1}的温度下,分子碰撞频率很高,平均自由程大致为 10^{-7}m,波长 $\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{340}{20000}=1.7\times10^{-2}$m,约为平均自由程的 10^5 倍. 在发生传播声波的变化一个周期时间内发生了这么多次碰撞,可以说,恢复平衡的弛豫时间 $\tau\ll$声波的周期 T,因此可近似认为声音在空气中传播是个准静态过程.

3.3.13 若有下述两列波在介质中传播:

$$y_1 = A\sin(5x - 10t), y_2 = A\sin(4x - 9t)$$

式中 x、y 以米为单位,t 以秒为单位.

(1) 写出合成波的方程;

(2) 求群速度 v_g;

(3) 求出合成波中振幅为零的两相邻点间的距离;

(4) 说明此介质是否是色散介质,说明理由.

解 (1)

$$y=y_1+y_2$$

$$= A\sin(5x - 10t) + A\sin(4x - 9t)$$
$$= 2A\sin\left[\frac{1}{2}(9x - 19t)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(x - t)\right]$$
$$= 2A\cos\left[\frac{1}{2}(x - t)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(9x - 19t)\right]$$

(2) 群速 v_g 是振幅的包络波

$$2A\cos\left[\frac{1}{2}(t - x)\right]$$

的传播速度，$v_g = 1\text{m/s}$.

(3) 合成波中振幅为零的两相邻点间的距离计算如下：设同一时刻 t，相邻的振幅为零的两点分别为 x_1、x_2，则

$$\frac{1}{2}(x_1 - t) = \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}(x_2 - t) = \frac{3\pi}{2}$$
$$\frac{1}{2}(x_2 - t) - \frac{1}{2}(x_1 - t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2\pi$$

合成波振幅为零的点的位置是随时间变化的，可两相邻的振幅为零的点间距离不随时间变化．

(4) 此介质是色散介质，因为在其中传播的两列波 y_1、y_2 是具有不同频率的两列波：$\omega_1 = 10\text{s}^{-1}$，$\omega_2 = 9\text{s}^{-1}$．它们的传播速度不同：$v_1 = \dfrac{10}{5} = 2\text{ms}^{-1}$，$v_2 = \dfrac{9}{4} = 2.25\text{ms}^{-1}$．合成波的波形随时间发生变化．从(1)问所得的表达式也可作出此结论．

3.3.14 两个不同的音叉在完全相同的两段长绳上产生稳定的简谐波，振幅 $A_1 = 2A_2$，波长 $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}\lambda_2$．设绳子除了与音叉交换能量外，不与其他物体交换能量．求两音叉给予绳子的平均功率之比．

解 设绳子的截面积为 S，体密度为 ρ，线密度为 η，则 $\eta = \rho S$.

$$\overline{P} = IS = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 vS = \frac{1}{2}\eta\omega^2 A^2 v$$

两绳完全相同意味着 η 相同，绳子张力 T 相同，因而波的传播速度 v 相同．

今两音叉产生的两列简谐波，波长不同，而波速相同，可见频率是不同的：

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{v/\lambda_1}{v/\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_2} = \frac{\frac{1}{2}\eta\omega_1^2 A_1^2 v}{\frac{1}{2}\eta\omega_2^2 A_2^2 v} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = 2^2 \cdot 2^2 = 16$$

3.3.15 一正弦式空气波沿直径为 0.14m 的圆柱形管子的轴向传播，波的强度为 $9.0\times10^{-3}\text{J/m}^2\cdot\text{s}$，频率为 300Hz，波速为 300m/s，求：

(1) 波中平均能量密度和最大能量密度；

(2) 每两个相邻质元同振动相位面间的区域中含有的机械能．

解 (1) $$\bar{\varepsilon}=\frac{I}{v}=\frac{9.0\times10^{-3}}{300}=3.0\times10^{-5}(\mathrm{J/m^3})$$

最大能量密度 $\varepsilon_{\max}=2\bar{\varepsilon}=6.0\times10^{-5}\mathrm{J/m^3}$

(2) 相邻的质元振动同相位面间区域的总机械能为

$$E=\bar{\varepsilon}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2\lambda=\bar{\varepsilon}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2\frac{v}{\nu}$$

$$=3.0\times10^{-5}\cdot\frac{1}{4}\pi(0.14)^2\frac{300}{300}=4.62\times10^{-7}(\mathrm{J})$$

3.3.16 一波源以 $3.5\times10^4\mathrm{W}$ 的功率发射球面电磁波,在某处测得该波的平均能量密度为 $7.8\times10^{-15}\mathrm{J/m^3}$. 求该处离波源的距离 . 电磁波的传播速度为 $3.0\times10^8\mathrm{m/s}$.

解 $\overline{P}=4\pi r^2\bar{\varepsilon}(r)v$

$$r=\sqrt{\frac{\overline{P}}{4\pi\bar{\varepsilon}(r)v}}=\sqrt{\frac{3.5\times10^4}{4\pi\times7.8\times10^{-15}\times3.0\times10^8}}$$
$$=3.45\times10^4(\mathrm{m})$$

3.3.17 两列平面简谐波

$$y_1=A_1\cos\left[\omega_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]$$

$$y_2=A_2\cos\left[\omega_2\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]$$

同时在同一介质中传播,分别讨论 $\omega_1\neq\omega_2$ 及 $\omega_1=\omega_2$ 两种情况下波强是否等于两波分别单独传播时的波强之和 .

解
$$y=y_1+y_2$$
$$=A_1\cos\left[\omega_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]+A_2\cos\left[\omega_2\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-A_1\omega_1\sin\left[\omega_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]-A_2\omega_2\sin\left[\omega_2\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=A_1^2\omega_1^2\sin^2\left[\omega_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]+A_2^2\omega_2^2\sin^2\left[\omega_2\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]$$
$$+2A_1A_2\omega_1\omega_2\sin\left[\omega_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]\sin\left[\omega_2\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]$$
$$=\frac{1}{2}A_1^2\omega_1^2\left\{1-\cos2\left[\omega_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{2}A_2^2\omega_2^2\left\{1-\cos2\left[\omega_2\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]\right\}$$
$$-A_1A_2\omega_1\omega_2\left\{\cos\left[(\omega_1+\omega_2)\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1+\alpha_2\right]\right.$$
$$\left.-\cos\left[(\omega_1-\omega_2)\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1-\alpha_2\right]\right\}$$

$\bar{\varepsilon}=\rho\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}t$,其中 τ 是 T_1、T_2 的最小公倍数 .

当 $\omega_1\neq\omega_2$ 时,

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos 2\left[\omega_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]dt=0$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos 2\left[\omega_2\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]dt=0$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\left[(\omega_1+\omega_2)\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1+\alpha_2\right]dt=0$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\left[(\omega_1-\omega_2)\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1-\alpha_2\right]dt=0$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega_1^2+\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega_2^2$$

$$I=\bar{\varepsilon}v=\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega_1^2 v+\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega_2^2 v=I_1+I_2$$

当 $\omega_1=\omega_2$ 时，上述四个余弦函数的积分中，前三个仍为零，第四个不为零．

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos(\alpha_1-\alpha_2)dt=\cos(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega_1^2+\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega_2^2+A_1A_2\omega^2\cos(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$I=\bar{\varepsilon}v=I_1+I_2+A_1A_2\omega^2 v\cos(\alpha_1-\alpha_2)\neq I_1+I_2$$

另一种计算法：

$$y=A_1\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]+A_2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_2\right]$$
$$=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right]$$

由振幅矢量法（参看图 3.46）求 A，

$$A=[A_1^2+A_2^2 2A_1A_2\cos(\alpha_1+\pi-\alpha_2)]^{1/2}$$
$$=[A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)]^{1/2}$$
$$I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v$$
$$=I_1+I_2+A_1A_2\omega^2 v\cos(\alpha_1-\alpha_2).$$

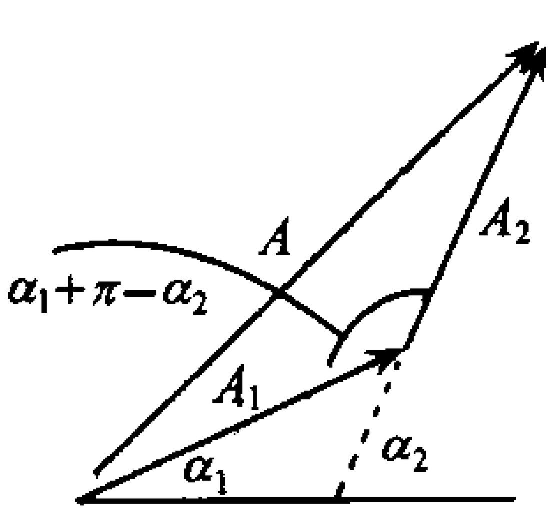


图 3.46

3.4 边界效应和干涉

3.4.1 设反射波的振动方向仍保持入射波的振动方向，若介质的杨氏模量值为切变模量值的 3 倍，试用惠更斯原理求出一列纵波的反射波是一列横波的入射角以及一列在入射面内振动的横波的反射波为一列纵波的入射角．（不考虑这样的入射波、反射波能否遵从波的叠加原理的问题）．

解 纵波波速 $v_l=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$，横波波速 $v_t=\sqrt{\dfrac{N}{\rho}}$，其中 Y、N 分别是杨氏模量和切变模量．

$$Y=3N,\quad v_l=\sqrt{3}\,v_t$$

先考虑入射波是纵波、反射波是横波的情况．由于按题设，入射波的振动方向在反射时保持不变，则入射线必须与反射线相垂直．考虑图 3.47 中两条入射线 1 和 2，当入射线 1 到达两种介质的界面(图中 A 点)时，入射线 2 到达 B 点，尚未反射．当入射线 2 到达界面(图中 C 点)时，在 A 点先行反射的反射线 1 到达图中 B 点．

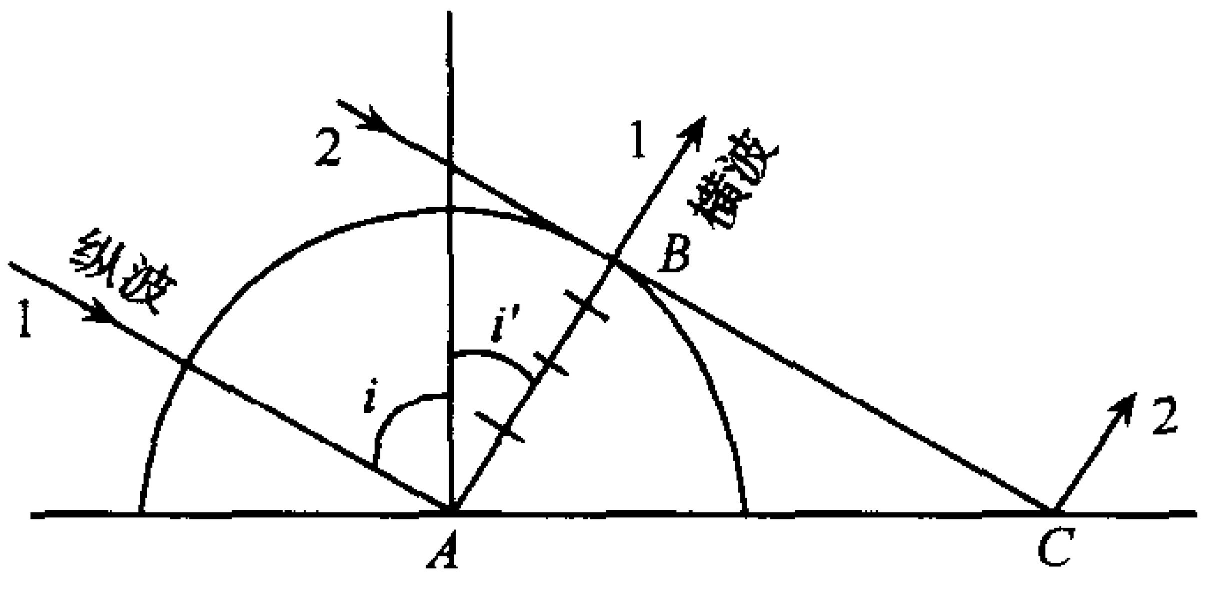


图 3.47

AB 与入射线垂直，BC 与反射线垂直，入射线要与反射线垂直，$\therefore AB \perp BC$，由惠更斯原理，BC 是反射线 1 到达 B 点那时刻在界面上从 A 点到 C 点先后发生的子波的波前的包迹，BC 与图中所画的圆相切．

反射线从 A 至 B 经历的时间也是入射线 2 从 B 至 C 经历的时间．设此时间为 Δt，则

$$AB = v_t \Delta t, \quad BC = v_l \Delta t$$

因为 $v_l = \sqrt{3}\, v_t$，所以 $BC = \sqrt{3}\, AB$

入射角

$$i = \angle BAC = \arctan \frac{BC}{AB} = \arctan \sqrt{3} = 60°$$

用同样的方法考虑入射波是横波、反射波是纵波的情况，可得入射角 $i = 30°$.

3.4.2　有一稀奇的现象，当风从声源向观察者吹时，人们偶而听到来自远方的声音，惊人的清楚．

(1) 说明这个现象不能用“随风而来”来解释，即均匀的风速不能说明这个现象；

(2) 吹遍地面的风，有一垂直的速度梯度，在地面附近可近似表示为 $v = ky^2$，这里 y 是离地面的高度，k 是常数．对于给定的 k 值和声速 v_s，计算顺风时出现声强最大增强处离声源的距离 s；

提示：可以假定声波线遵循下列轨道：$y = h\sin \frac{\pi x}{s}$.

(3) 人们还注意到，甚至在无风时，声音在湖面上传播也有增强现象．在这种情况下，将发生什么？

解　(1)若是声音“随风而来”，则在风经过的地方都应能清楚地听到声音，不可能出现只在某处特别清楚的现象．这一现象可用声波的折射得到解释．由惠更斯原理可知，当波遇到不同波速的分界面时，波线的走向要发生变化．这种情况也可以在单一介质内发生，例如：气体中的声速与温度有关，$v_s \propto \sqrt{T}$，如气体中存在温度梯度，在气体中传播声音，波线可能发生弯曲；再如：介质处于运动之中，不同部分具有不同的速度，也会发生折射．在地球表面附近的空气中，温度梯度、速度梯度都可能存在．梯度的正负号不同，

声波可能向上弯曲远离地面，也可能向下弯曲，先远离地面后又转向地面，在后一种情况下，就会出现声音在相当远处可闻度比别处（稍近或稍远处）更高的现象．

（2）设 v_s 表示无风时的声速，也是地面处（$y=0$）的声速，v 表示风速，则 v_s 也是在 v 的运动的介质参考系中的声速，对静参考系，声速为 v_s+v. 由折射定律，

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}$$

其中 v_1, v_2 分别是从介质 1 进入介质 2 的波在介质 1 和介质 2 中的波速，i 和 r 分别是入射角和折射角．

这里只有一种介质，但由于介质是运动的，在地面以上，有一垂直的速度梯度 $v=ky^2$、y 为离地面的高度．

根据提示，画出波线的轨道如图 3.48 所示，由折射定律，

$$\frac{v_s+v\sin\theta}{v_s+(v+\mathrm{d}v)\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)}=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)}$$

注意：风速是沿 x 方向的，$v_s+v\sin\theta$ 是以 θ 角入射时对静参考系的声速，其中 v_s 是相对声速，$v\sin\theta$ 是牵连声速．$\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)=\sin\theta+\cos\theta\mathrm{d}\theta+\cdots$，只保留一级小量，可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v_s}=\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\sin^2\theta}$$

由 $v=ky^2$，$\mathrm{d}v=2ky\mathrm{d}y$，将上式改成

$$\frac{2ky\mathrm{d}y}{v_s}=\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\sin^2\theta}$$

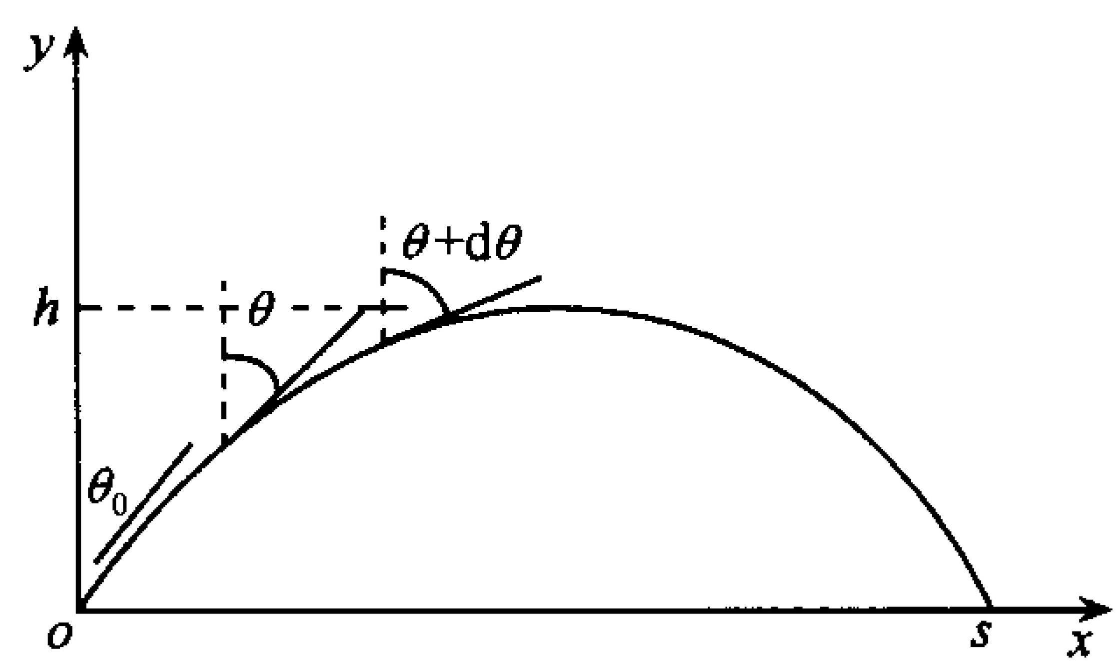


图 3.48

设在 $y=0$ 处入射角为 θ_0. 显然，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=h$，达到最高点

$$\int_0^h\frac{2ky\mathrm{d}y}{v_s}=\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{k}{v_s}h^2=\frac{1}{\sin\theta_0}-1$$

由提示的假设，波线轨道方程为

$$y=h\sin\frac{\pi x}{s}$$

$$\cot\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\pi h}{s}\cos\frac{\pi x}{s}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}=\sqrt{1+\cot^2\theta}=\sqrt{1+\left(\frac{\pi h}{s}\right)^2\cos^2\frac{\pi x}{s}}$$

$y=0$ 时，$x=0$，$\theta=\theta_0$，代入上式，

$$\frac{1}{\sin\theta_0}=\sqrt{1+\left(\frac{\pi h}{s}\right)^2}$$

$$\frac{k}{v_s}h^2=\sqrt{1+\left(\frac{\pi h}{s}\right)^2}-1$$

解出
$$s=\frac{\pi v_s}{\sqrt{k(2v_s+kh^2)}}$$

或
$$s=\frac{\pi v_s}{\sqrt{kv_s\left(1+\frac{1}{\sin\theta_0}\right)}}=\frac{\pi v_s}{\sqrt{kv_s(1+\csc\theta_0)}}$$

(3) 由于水的比热容比空气的大，在白天，湖面以上在一定范围内温度是递增的，气体中的声速与温度的平方根成正比，因此声速也是由湖面向上递增的，这样的速度梯度，声波连续折射导致波线向下弯曲，将发生与(2)问所述的类似现象．在夜晚，情况相反，波线向上弯曲，不会出现与(2)问类似的现象．

3.4.3 当平面简谐波垂直入射于两种介质的界面时，证明：对于没有耗散和吸收的无色散介质，在任何时刻，入射波的波强等于反射波的波强和透射波的波强之和．

证明 以分段均匀的、沿 x 轴放置的长弦线为例，$x<0$ 处，线密度为 η_1；$x>0$ 处，线密度为 η_2. 在 $x=0$ 处相接，弦线张力为 T_0，横截面积均为 S.

入射波：$y_1=A\cos(\omega t-k_1x)$，　$k_1=\dfrac{\omega}{v_1}$

反射波：$y'_1=B\cos(\omega t+k_1x+\alpha_1)$

透射波：$y_2=C\cos(\omega t-k_2x+\alpha_2)$，　$k_2=\dfrac{\omega}{v_2}$

$$v_1=\sqrt{\frac{T_0}{\eta_1}},\quad v_2=\sqrt{\frac{T_0}{\eta_2}}$$

在 $x=0$ 处，满足边界条件：

$$y_1+y'_1=y_2\text{(弦线连续)}$$

$$-T_0\frac{\partial(y_1+y'_1)}{\partial x}+T_0\frac{\partial y_2}{\partial x}=0\text{(作用于 }x_0\text{ 点的合力为零)}$$

即
$$A+B=C$$
$$-\frac{A}{v_1}+\frac{B}{v_1}+\frac{C}{v_2}=0$$

可解出
$$B=\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}A,\quad C=\frac{2v_2}{v_1+v_2}A$$

$$I_1=\frac{1}{2}\rho_1\omega^2A^2v_1,\quad I'_1=\frac{1}{2}\rho_1\omega^2B^2v_1$$

$$I_2=\frac{1}{2}\rho_2\omega^2c^2v_2$$

其中 $\rho_1=\dfrac{\eta_1}{s}$，$\rho_2=\dfrac{\eta_2}{s}$.

$$I_1=I'_1+I_2$$

要成立，必须有
$$\rho_1B^2v_1+\rho_2C^2v_2=\rho_1A^2v_1$$

因为 $v=\sqrt{\dfrac{T_0}{\eta}}$，两段弦线，$T_0$，$S$ 相同，

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}},\quad \text{或}\quad \rho_1v_1^2=\rho_2v_2^2$$

$$\rho_1 B^2 v_1 + \rho_2 C^2 v_2 = \rho_1\left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right)^2 A^2 v_1 + \rho_2 \frac{4v_2^2}{(v_1 + v_2)^2} A^2 v_2$$

$$= \rho_1 A^2 v_1 \left[\left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right)^2 + \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} \cdot \frac{4v_2^2}{(v_1 + v_2)^2}\right]$$

$$= \rho_1 A^2 v_1 \left[\left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right)^2 + \frac{\rho_1 v_1^2}{\rho_1 v_1 v_2} \cdot \frac{4v_2^2}{(v_1 + v_2)^2}\right]$$

$$= \rho_1 A^2 v_1 \left[\frac{(v_2 - v_1)^2}{(v_1 + v_2)^2} + \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}\right] = \rho_1 A^2 v_1$$

所以
$$I_1 = I'_1 + I_2$$

3.4.4　两根连在一起的弦线，线密度分别为 η_1 和 η_2，设想有一波从弦线 2 向弦线 1 传播，设入射波方程为

$$y_2 = A\cos(\omega t - k_2 x) \qquad (x < 0)$$

边界位于 $x=0$ 处．试分别求出$\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{1}{4}$和$\frac{\eta_2}{\eta_1}=9$ 时的反射波、透射波的数学表达式．

解　上题从介质 1 向介质 2 入射，这里相反，因此用上题结果时，脚标 1、2 需对调，

反射波：$y'_2=B\cos(\omega t+k_2x)(x<0)$

透射波：$y_1=C\cos(\omega t-k_1x)(x>0)$

其中
$$B=\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}A=\frac{\sqrt{\eta_2}-\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{\eta_1}+\sqrt{\eta_2}}A$$

$$C = \frac{2v_1}{v_1 + v_2}A = \frac{2\sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\eta_2}}A$$

$\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{1}{4}$的情况，$B=-\frac{1}{3}A$，$C=\frac{2}{3}A$

$y'_2=-\frac{1}{3}A\cos(\omega t+k_2x)$或$\frac{1}{3}A\cos(\omega t+k_2x-\pi)$

$y_1=\frac{2}{3}A\cos(\omega t-k_1x)$

$\frac{\eta_2}{\eta_1}=9$ 的情况，$B=\frac{1}{2}A$，$C=\frac{3}{2}A$

$y'_2=\frac{1}{2}A\cos(\omega t+k_2x)$

$y_1=\frac{3}{2}A\cos(\omega t-k_1x)$

3.4.5　一列波从线密度为 η_1 的弦线传向线密度为 η_2 的弦线，在连接点处反射波和透射波振幅之比 r、相位关系与 η_1、η_2 间有何关系？

解　可用 3.4.3 题中得到的结果：

$$B = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}A = \frac{\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\eta_2}}A$$

$$C = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}A = \frac{2\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\eta_2}}A$$

$$r = \left|\frac{B}{C}\right| = \frac{|\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\eta_2}|}{2\sqrt{\eta_1}} = \frac{1}{2}\left|1 - \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}\right|$$

当 $\eta_2 > \eta_1$ 时，

$$r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}} - 1\right)$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = (1 + 2r)^2$$

此时两波相位相反；

当 $\eta_2 < \eta_1$ 时，

$$r = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}\right)$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = (1 - 2r)^2$$

此时两波相位相同．

3.4.6 平面声波自空气中垂直入射到水面上，求振幅反射系数$\frac{B}{A}$和振幅透射系数$\frac{C}{A}$

提示：空气和水的体积弹性模量不同，在界面处，$\frac{\partial(y_1 + y'_1)}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}$的边界条件需作修改．

解　　入射波：$y_1 = A\cos(\omega t - k_1 x)$

反射波：　　$y'_1 = B\cos(\omega t + k_1 x + \alpha_1)$

透射波：　　$y_2 = C\cos(\omega t - k_2 x + \alpha_2)$

边界条件 $x = 0$ 处，波位移连续和波压强连续．

$$y_1 + y'_1 = y_2 \tag{1}$$

$$p_1 + p'_1 = p_2, \qquad \because p = K\frac{\partial y}{\partial x}$$

其中 K 为介质的体积弹性模量．

第二个边界条件改写为

$$K_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + K_1\frac{\partial y'_1}{\partial x} = K_2\frac{\partial y_2}{\partial x} \tag{2}$$

由式(1)，

$$A\cos\omega t + B\cos(\omega t + \alpha_1) = C\cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$A\cos\omega t + B\cos\omega t\cos\alpha_1 - B\sin\omega t\sin\alpha_1$$

$$= C\cos\omega t\cos\alpha_2 - C\sin\omega t\sin\alpha_1$$

任何时刻均成立，两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等，

$$A + B\cos\alpha_1 = C\cos\alpha_2 \tag{3}$$

$$B\sin\alpha_1 = C\sin\alpha_2 \tag{4}$$

由式(2)，

$$K_1k_1A\sin\omega t - K_1k_1B\sin(\omega t + \alpha_1) = K_2k_2C\sin(\omega t + \alpha_2)$$

$$K_1k_1A\sin\omega t - K_1k_1B\sin\omega t\cos\alpha_1 - K_1k_1B\cos\omega t\sin\alpha_1$$

$$= K_2k_2C\sin\omega t\cos\alpha_2 + K_2k_2C\cos\omega t\sin\alpha_2$$

两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等，

$$K_1k_1(A - B\cos\alpha_1) = K_2k_2C\cos\alpha_2 \tag{5}$$

$$-K_1k_1B\sin\alpha_1 = K_2k_2C\sin\alpha_2 \tag{6}$$

式(4)、(6)是关于 B、C 的联立方程组，B、C 有非零解，必须系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & -\sin\alpha_2 \\ -K_1k_1\sin\alpha_1 & -K_2k_2\sin\alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-K_2k_2 - K_1k_1)\sin\alpha_1\sin\alpha_2 = 0$$

因为

$$K_1k_1 + K_2k_2 \neq 0$$

必有 $\sin\alpha_1=0$ 或 $\sin\alpha_2=0$.

再有式(4)或式(6)，因为 B、C 均不为零(既有反射波，又有透射波)，则 $\sin\alpha_1$ 与 $\sin\alpha_2$ 中一个为零的话，另一个也一定为零．所以两者均为零．

可取 α_1、α_2 为 0、$\pm\pi$. 不同取法，影响 B、C 的正负号，任何一种取法都可以，今取 $\alpha_1=\alpha_2=0$.

也可以换个讲法作出上述结论，把式(4)、(6)看作关于 $\sin\alpha_1$、$\sin\alpha_2$ 的联立方程，因为其系数行列式

$$\begin{vmatrix} B & -C \\ -K_1k_1B & -K_2k_2C \end{vmatrix} = (-K_2k_2 - K_1k_1)BC \neq 0$$

(因为三个因子：$-K_2k_2-K_1k_1$、B、C 均不为零)这个 $\sin\alpha_1$、$\sin\alpha_2$ 的齐次方程只能有零解，

$$\sin\alpha_1 = 0,\quad \sin\alpha_2 = 0$$

将 $\alpha_1=0$、$\alpha_2=0$ 代入式(3)、(5)，得

$$A + B = C$$

$$K_1k_1(A - B) = K_2k_2C$$

解得

$$\frac{B}{A} = \frac{K_1k_1 - K_2k_2}{K_1k_1 + K_2k_2},\ \frac{C}{A} = \frac{2K_1k_1}{K_1k_1 + K_2k_2}$$

用波速 $v=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ 或 $K=\rho v^2$ 及 $k=\dfrac{\omega}{v}$，

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_1v_1^2\dfrac{\omega}{v_1} - \rho_2v_2^2\dfrac{\omega}{v^2}}{\rho_1v_1^2\dfrac{\omega}{v_1} + \rho_2v_2^2\dfrac{\omega}{v_2}} = \frac{\rho_1v_1 - \rho_2v_2}{\rho_1v_1 + \rho_2v_2}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2\rho_1v_1^2\dfrac{\omega}{v_1}}{\rho_1v_1^2\dfrac{\omega}{v_1} + \rho_2v_2^2\dfrac{\omega}{v_2}} = \frac{2\rho_1v_1}{\rho_1v_1 + \rho_2v_2}$$

3.4.7　一长列振幅为 A 的波包，主要由角频率很接近 ω_0 的波组成，它在一根无限长的线密度为 η、张力为 T 的弦上传播．波包碰到弦上一个质量为 m 的小珠，设 $mg \ll T$.

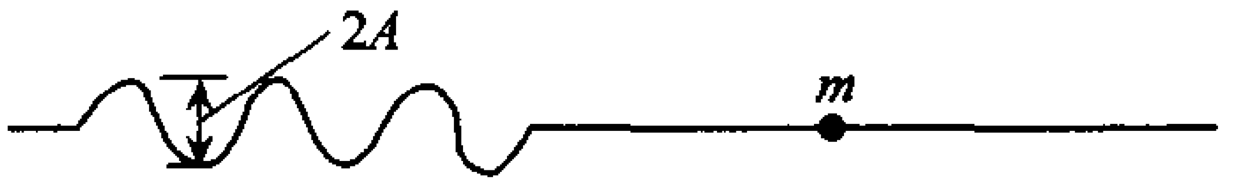


图 3.49

(1)求透射波振幅；

(2) 在 m、ω_0 很大的极限下，透射波振幅与 ω_0 有何关系？

解　(1)沿弦传播的波满足波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{T}{\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

波速 $v=\sqrt{\frac{T}{\eta}}$，波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega_0}{v}=\omega_0\sqrt{\frac{\eta}{T}}$.

频率接近于 ω_0 的波接近于平面简谐波，取弦线为 x 轴，小珠所在点为 $x=0$. 波从 $x<0$ 入射，波动方程的解可写为

$$y_1=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega_0 t)}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega_0 t)}\qquad (x<0)$$

$$y_2=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega_0 t)}\qquad (x>0)$$

其中 A、B、C 分别为入射波、反射波和透射波的“振幅”(允许为复数，还包含有相位关系)，$|B|$、$|C|$ 是反射波、透射波的振幅．

由小珠所在的 $x=0$ 处位移连续，即 $y_1|_{x=0}=y_2|_{x=0}$ 得

$$A+B=C \tag{1}$$

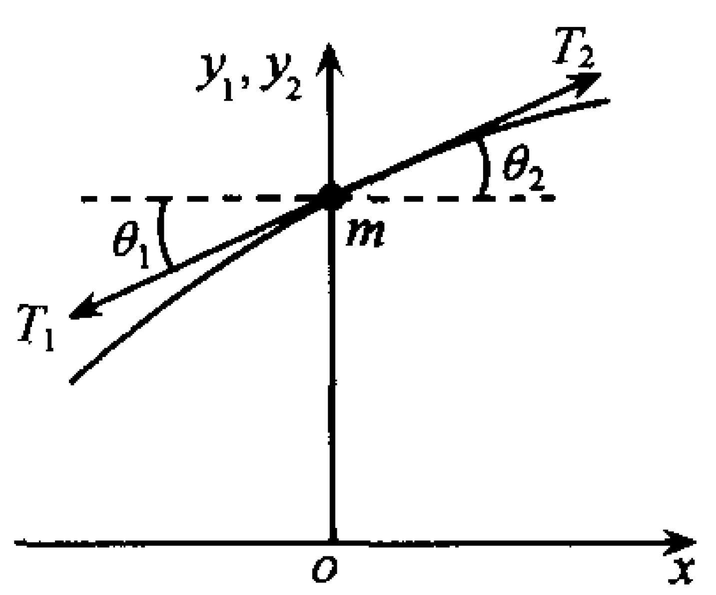


图 3.50

对小珠用牛顿运动第二定律，可写出第二个边界条件(参看右图).

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} &= -T_1\sin\theta_1+T_2\sin\theta_2 \\ &= -T_1\cos\theta_1\tan\theta_1+T_2\cos\theta_2\tan\theta_2 \\ &= -T\frac{\partial y_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}+T\frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} \end{aligned}$$

得

$$-m\omega_0^2 C=-\mathrm{i}kT(A-B)+\mathrm{i}kTC$$

$$A-B=\left(1+\frac{m\omega_0^2}{\mathrm{i}kT}\right)C \tag{2}$$

式(1)、(2)相加，解出

$$C=\frac{2A}{2+\frac{m\omega_0^2}{\mathrm{i}kT}}$$

$$|C|=\frac{2A}{\sqrt{4+\left(\frac{m\omega_0^2}{kT}\right)^2}}=\frac{2A}{\sqrt{4+\frac{m^2\omega_0^2}{\eta T}}}$$

(2) 当 m、ω_0 很大时，$|C|\approx\frac{2A}{m\omega_0}\sqrt{\eta T}$.

3.4.8 一列简谐波沿线密度为 η、张力为 T_0 的弦线从右入射，被套在竖直棒上的无质量小环反射，如图 3.51 所示，环受到的摩擦力的大小与速率成正比，比例系数为 γ. 求振幅的反射系数 $\frac{B}{A}$，并讨论 $\gamma\to\infty$ 和 $\gamma\to 0$ 的两极限情况．

解 入射波：$y_1=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right]$

反射波：$y'_1=B\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]$

小环的运动学方程为 $y=C\cos(\omega t+\alpha)$

边界条件，$x=0$ 处，

$$y=y_1+y'_1 \tag{1}$$

$$-T_0\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial y'_1}{\partial x}\right)=F \tag{2}$$

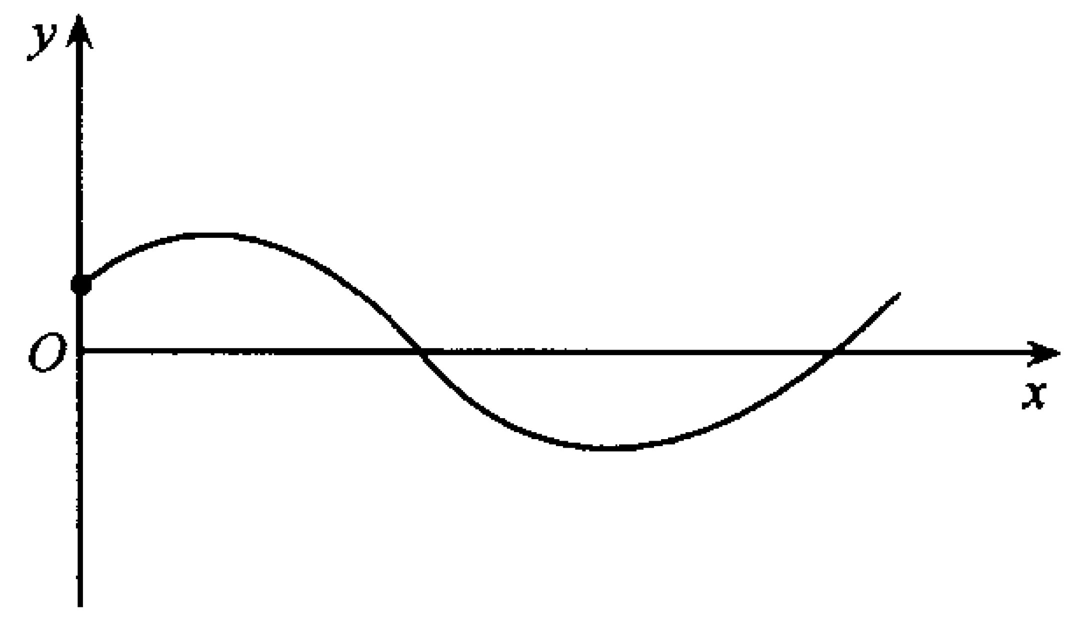


图 3.51

其中 F 是小环对弦线在 y 方向的作用力．

对于小环，因小环无质量，小环所受合力为零，用 F_μ 表示小环受到竖直棒的摩擦力，

$$F_\mu=-\gamma\frac{\partial y}{\partial t}$$

弦线对小环的在 y 方向的作用力为 $-F$，

$$-F+F_\mu=0$$

所以

$$F=F_\mu=-\gamma\frac{\partial y}{\partial t}$$

式(2)可改写为

$$T_0\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial y'_1}{\partial x}\right)=\gamma\frac{\partial y}{\partial t} \tag{3}$$

由式(1)可得

$$A\cos\omega t+B\cos(\omega t+\alpha_1)=C\cos(\omega t+\alpha)$$

$$A\cos\omega t+B\cos\omega t\cos\alpha_1-B\sin\omega t\sin\alpha_1$$
$$=C\cos\omega t\cos\alpha-C\sin\omega t\sin\alpha$$

两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等，

$$A+B\cos\alpha_1=C\cos\alpha \tag{4}$$

$$B\sin\alpha_1=C\sin\alpha \tag{5}$$

由式(3)可得

$$-T_0\frac{\omega}{v}A\sin\omega t+T_0\frac{\omega}{v}B\sin(\omega t+\alpha_1)=-\gamma\omega C\sin(\omega t+\alpha)$$

$$-T_0\frac{\omega}{v}A\sin\omega t+T_0\frac{\omega}{v}B\sin\omega t\cos\alpha_1+T_0\frac{\omega}{v}B\cos\omega t\sin\alpha_1$$
$$=-\gamma\omega C\sin\omega t\cos\alpha-\gamma\omega C\cos\omega t\sin\alpha$$

两边 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$ 的系数分别相等，

$$-T_0\frac{\omega}{v}A+T_0\frac{\omega}{v}B\cos\alpha_1=-\gamma\omega C\cos\alpha \tag{6}$$

$$T_0\frac{\omega}{v}B\sin\alpha_1=-\gamma\omega C\sin\alpha \tag{7}$$

式(5)、(7)两式作为 $\sin\alpha$、$\sin\alpha_1$ 的齐次方程，其系数行列式不等于零，只能有零解，

$$\sin\alpha=0,\qquad \sin\alpha_1=0$$

取 $\alpha=0$,$\alpha_1=0$，代入式(4)、(6)得

$$A+B=C$$

$$-\frac{T_0}{v}A+\frac{T_0}{v}B=-\gamma C$$

解得

$$\frac{B}{A}=\frac{T_0-\gamma\omega}{T_0+\gamma\omega},\ \frac{C}{A}=\frac{2\gamma\omega}{T_0+\gamma\omega}$$

当 $\gamma\to\infty$ 时，$\frac{B}{A}=-1$，这是固定端的情况；当 $\gamma\to 0$ 时，$\frac{B}{A}=1$，这是自由端的情况．

3.4.9 若上题的小环具有质量 m，环与竖直棒间无摩擦，有一列角频率为 ω 的简谐波被小环反射，求振幅的反射系数 $\frac{B}{A}$ 及与入射波的相位差．(设 $mg\ll T_0$).

解 入射波：

$$y_1=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right]$$

反射波：

$$y'_1=B\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]$$

小环的运动：

$$y=C\cos(\omega t+\alpha)$$

设 F 为小环对弦线在 y 方向的作用力．

$$F=-T_0\left(\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0}+\left.\frac{\partial y'_1}{\partial x}\right|_{x=0}\right)$$

$$m\ddot{y}=-F$$

由上述两式可得一个边界条件

$$-T_0\frac{\omega}{v}A\sin\omega t+T_0\frac{\omega}{v}B\sin(\omega t+\alpha_1)=-m\omega^2C\cos(\omega t+\alpha)$$

$$-T_0\frac{\omega}{v}A\sin\omega t+T_0\frac{\omega}{v}B\sin\omega t\cos\alpha_1+T_0\frac{\omega}{v}B\cos\omega t\sin\alpha_1$$

$$=-m\omega^2C\cos\omega t\cos\alpha+m\omega^2C\sin\omega t\sin\alpha$$

两边 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$ 的系数相等，

$$-T_0\frac{\omega}{v}(A-B\cos\alpha_1)=m\omega^2C\sin\alpha \tag{1}$$

$$T_0\frac{\omega}{v}B\sin\alpha_1=-m\omega^2C\cos\alpha \tag{2}$$

另一个边界条件是

$$y=y_1|_{x=0}+y'_1|_{x=0}$$

$$A\cos\omega t+B\cos(\omega t+\alpha_1)=C\cos(\omega t+\alpha)$$

$$A\cos\omega t+B\cos\omega t\cos\alpha_1-B\sin\omega t\sin\alpha_1=C\cos\omega t\cos\alpha-C\sin\omega t\sin\alpha$$

两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等，

$$A+B\cos\alpha_1=C\cos\alpha \tag{3}$$

$$-B\sin\alpha_1=-C\sin\alpha \tag{4}$$

由式(1)、(4)消去 $C\sin\alpha$,得

$$-T_0\frac{\omega}{v}(A-B\cos\alpha_1)=m\omega^2 B\sin\alpha_1 \tag{5}$$

由式(2)、(3)消去 $C\cos\alpha$,得

$$T_0\frac{\omega}{v}B\sin\alpha_1=-m\omega^2(A+B\cos\alpha_1) \tag{6}$$

式(5)、(6)可改写为

$$\frac{T_0}{v}A-\left(\frac{T_0}{v}\cos\alpha_1-m\omega\sin\alpha_1\right)B=0 \tag{7}$$

$$m\omega A+\left(\frac{T_0}{v}\sin\alpha_1+m\omega\cos\alpha_1\right)B=0 \tag{8}$$

$A\neq0$、$B\neq0$,关于 A、B 的齐次方程有非零解,其系数行列式必为零,即

$$\begin{vmatrix}\frac{T_0}{v} & -\left(\frac{T_0}{v}\cos\alpha_1-m\omega\sin\alpha_1\right)\\ m\omega & \frac{T_0}{v}\sin\alpha_1+m\omega\cos\alpha_1\end{vmatrix}=0$$

$$\frac{T_0}{v}\left(\frac{T_0}{v}\sin\alpha_1+m\omega\cos\alpha_1\right)+m\omega\left(\frac{T_0}{v}\cos\alpha_1-m\omega\sin\alpha_1\right)=0$$

解出

$$\tan\alpha_1=\frac{2T_0m\omega v}{m^2\omega^2v^2-T_0^2}$$

由式(7)得

$$\frac{B}{A}=\frac{\frac{T_0}{v}}{\frac{T_0}{v}\cos\alpha_1-m\omega\sin\alpha_1}=\frac{1}{\cos\alpha_1\left(1-\frac{m\omega v}{T_0}\tan\alpha_1\right)}$$

$$\sec^2\alpha_1=1+\tan^2\alpha_1=1+\frac{4T_0^2m^2\omega^2v^2}{(m^2\omega^2v^2-T_0^2)^2}=\frac{(m^2\omega^2v^2+T_0^2)^2}{(m^2\omega^2v^2-T_0^2)^2}$$

$$\cos\alpha_1=\frac{m^2\omega^2v^2-T_0^2}{m^2\omega^2v^2+T_0^2}$$

将 $\cos\alpha_1$、$\tan\alpha_1$ 代入$\frac{B}{A}$的式子,经计算可得

$$\frac{B}{A}=-1$$

$$\alpha_1=\arccos\left(\frac{m^2\omega^2v^2-T_0^2}{m^2\omega^2v^2+T_0^2}\right)=\arccos\left(\frac{m^2\omega^2-T_0\eta}{m^2\omega^2+T_0\eta}\right)$$

或

$$\alpha_1=\arctan\left(\frac{2T_0m\omega v}{m^2\omega^2v^2-T_0^2}\right)=\arctan\left(\frac{2m\omega\sqrt{T_0\eta}}{m^2\omega^2-T_0\eta}\right)$$

小环质量不为零时,虽有 $mg\ll T_0$,仍不同于自由端(自由端的结果是$\frac{B}{A}=1$,$\alpha_1=0$).

3.4.10 线密度为 η 的一根长弦处在张力 T_0 下,一点质量 m 附着在弦上某一点,从

左边入射一角频率为 ω 的波沿这弦传播,设 $mg \ll T_0$.

(1) 计算被点质量 m 反射的那部分能量与入射能量之比;

(2) 假定点质量 m 被一线密度为 $\eta'(\gg\eta)$、长度 $l=\frac{m}{\eta'}$ 的短弦代替,固定 m 值不变,变 l 和 η',l 满足什么条件,上述结果能近似成立?

解 沿弦线方向取 x 轴,点质量所在位置为原点,向右为正,则入射波的表达式为

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

设反射波和透射波表达式分别为

$$y_1' = B\cos(\omega t + kx + \alpha_1)$$

$$y_2 = C\cos(\omega t - kx + \alpha_2)$$

边界条件为在 $x=0$ 处,

$$y_1 + y_1' = y_2$$

$$-T_0\frac{\partial(y_1 + y_1')}{\partial x} + T_0\frac{\partial y_2}{\partial x} = m\ddot{y}_2$$

$$A\cos\omega t + B\cos(\omega t + \alpha_1) = C\cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$-T_0kA\sin\omega t + T_0kB\sin(\omega t + \alpha_1) + T_0kC\sin(\omega t + \alpha_2) = -m\omega^2C\cos(\omega t + \alpha_2)$$

由 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等,得

$$A + B\cos\alpha_1 = C\cos\alpha_2$$

$$B\sin\alpha_1 = C\sin\alpha_2$$

$$T_0kB\sin\alpha_1 + T_0kC\sin\alpha_2 = -m\omega^2C\cos\alpha_2$$

$$-T_0kA + T_0kB\cos\alpha_1 + T_0kC\cos\alpha_2 = m\omega^2C\sin\alpha_2$$

用前两式消去后两式的 $C\cos\alpha_2$、$C\sin\alpha_2$

$$T_0kB\sin\alpha_1 + T_0kB\sin\alpha_1 = -m\omega^2(A + B\cos\alpha_1)$$

$$-T_0kA + T_0kB\cos\alpha_1 + T_0k(A + B\cos\alpha_1) = m\omega^2B\sin\alpha_1$$

由后式可解出

$$\tan\alpha_1 = \frac{2T_0k}{m\omega^2}$$

$$\sec^2\alpha_1 = \frac{m^2\omega^4 + 4T_0^2k^2}{m^2\omega^4},\quad \cos\alpha_1 = \frac{m\omega^2}{\sqrt{m^2\omega^4 + 4T_0^2k^2}}$$

由前式得

$$\frac{B}{A} = -\frac{m\omega^2}{\cos\alpha_1(m\omega^2 + 2T_0k\tan\alpha_1)}$$

代入 $\cos\alpha_1$、$\tan\alpha_1$,经计算可得

$$\frac{B}{A} = -\frac{m\omega^2}{\sqrt{m^2\omega^4 + 4T_0^2k^2}}$$

用 $k=\frac{\omega}{v}$,$v=\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$,

$$\frac{B}{A} = -\frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2 + 4T_0\eta}}$$

$$\frac{I'}{I}=\frac{B^2}{A^2}=\frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2+4T_0\eta}$$

当质量 m 被线密度为 $\eta'(\gg\eta)$、长度为 $l=\frac{m}{\eta'}$ 的短弦代替时，只要 $l\ll\lambda$，上述结果能近似成立．

因为
$$\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{2\pi}{\omega}v=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$$

所以 l 需满足的条件是 $l\ll\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$.

3.4.11 一个点质量 m 附在线密度为 η、张力为 T 的无限长的弦上，同时和一个劲度系数为 k 的弹簧相连，并受到一个外加的力 $F(t)$，如图 3.52 所示．点质量运动时，它在弦上产生一个起始波．

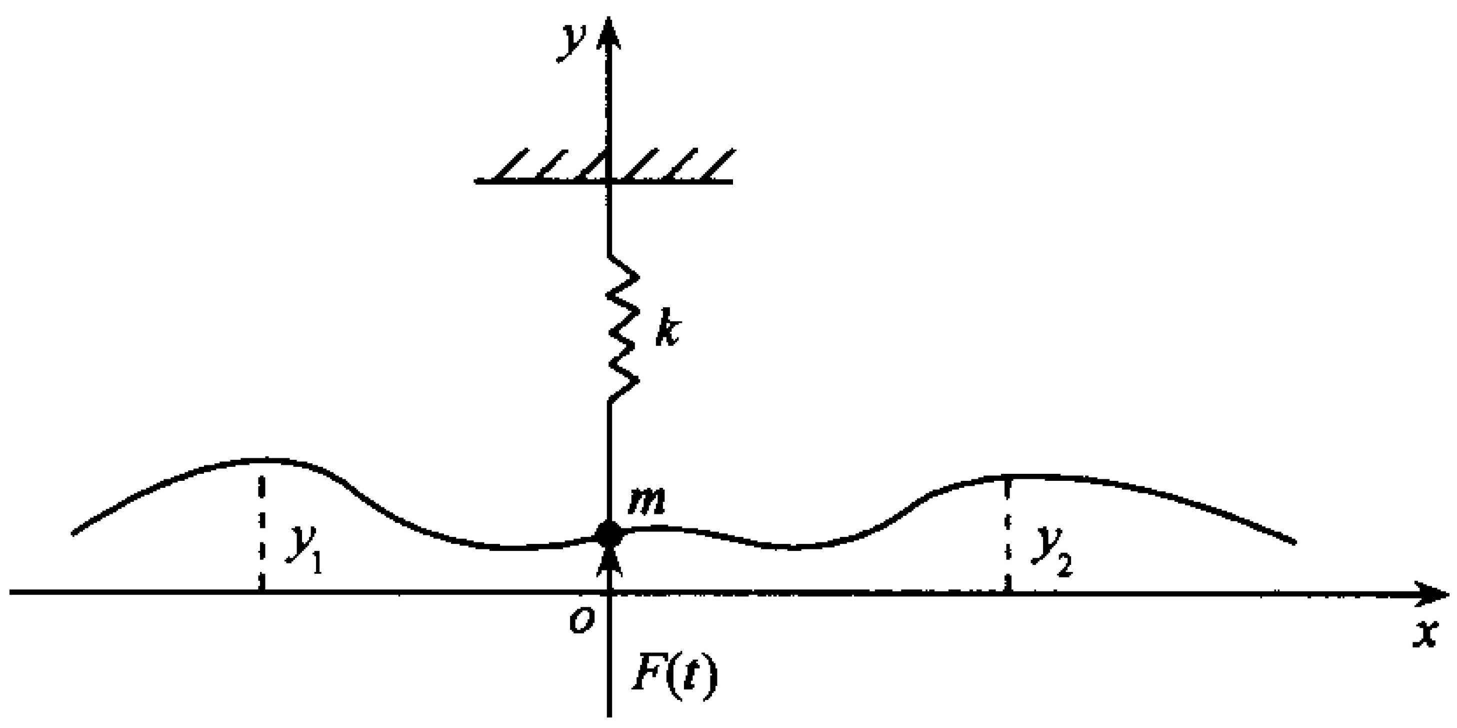


图 3.52

(1)求质点的运动微分方程和弦的运动方程；

(2) 若 $F(t)=F_0\cos\omega t$，求辐射到弦上的平均功率(不考虑瞬变过程)；

(3) 如果没有驱动力，点质量的振动将衰减掉，证明它与弦耦合引起的阻尼等同于一个摩擦阻力 $\boldsymbol{f}=-\gamma\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}$ 是点质量的速度，求 γ 与弦的参数之间的关系．

解 (1)弦的振动由下列波动方程及边界条件确定：

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}-\frac{T}{\eta}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}=0\qquad -\infty<x<0$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}-\frac{T}{\eta}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}=0\qquad 0<x<\infty$$

边界条件：$y_1(0,t)=y_2(0,t)$

$$m\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial t^2}=T\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x}-T\frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}-ky+F(t)$$

这里设处于平衡位置时弦是水平的，y_1、y_2 和 y 均以平衡位置为零点，y 既可以是 y_1，也可以是 y_2，$-ky$ 是作用于点质量的弹簧力和重力的合力．$T\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x}$ 和 $-T\frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}$ 分别是右方和左方的弦对点质量在 y 方向的作用力．

$y_1(x,t)$、$y_2(x,t)$ 可以包含各种频率成分，对于其中任一个角频率 ω，设

$$y_1(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)+\alpha_1\right]$$

$$y_2(x,t) = B\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha_2\right]$$

由 $y_1(0,t)=y_2(0,t)$，$A=B$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$.

$$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \alpha\right], y_2 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]$$

其中 $v=\sqrt{\dfrac{T}{\eta}}$.

在回答(2)问前，先回答(3)问．

(3)
$$f(t)= T\,\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} - T\,\frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}$$

$$= T\,\frac{A\omega}{v}\sin(\omega t + \alpha) + T\,\frac{A\omega}{v}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$= 2T\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{T}{\eta}}}A\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

$$=- 2\sqrt{\eta T}\,\frac{\partial y_1}{\partial t} =- 2\sqrt{\eta T}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} =- \gamma\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

所以
$$\gamma=2\sqrt{\eta T}$$

(2) 当 $F(t)=F_0\cos\omega t$ 时，

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} =- ky - \gamma\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F_0\cos\omega t$$

为了用有阻尼的受迫振动达到稳态运动的公式，令 $\gamma=2m\beta$，即 $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$，稳态运动为

$$y = A\cos(\omega t - \varphi)$$

其中
$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2-\dfrac{k}{m}\right)^2+4\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2\omega^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{(m\omega^2-k)^2+4\eta T\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\dfrac{\gamma}{m}\omega}{\dfrac{k}{m} - \omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\sqrt{\eta T}\,\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

这个 A 也就是它在两边弦上激发的波的振幅，向左、右两边传播的波在 $x=0$ 的初相位 $\alpha=-\varphi$.

左、右两边的弦对点质量的作用力为 $-2\sqrt{\eta T}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$；反之点质量对两边弦的总作用力为 $2\sqrt{\eta T}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 在 t 时刻，点质量对两边弦所做的功率之和为

$$P(t)2\sqrt{\eta T}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

达到稳态运动时，辐射到弦上的平均功率为

$$\overline{P} = \frac{1}{\dfrac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t)\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 2\sqrt{\eta T}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\sqrt{\eta T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A^2\omega^2\sin^2(\omega t-\varphi)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\sqrt{\eta T}\cdot\frac{1}{2}A^2\omega^2\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\sqrt{\eta T}A^2\omega^2=\frac{\sqrt{\eta T}F_0^2\omega^2}{(m\omega^2-k)^2+4\eta T\omega^2}$$

$P(t)$也可以用下列式子计算：

$$P(t)=T\frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_1(0,t)}{\partial t}-T\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x}\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial t}$$

显然这方法不如上述方法简单．

3.4.12　由劲度系数为 k、原长为 a 的非常多相同的弹簧连结的非常长的珠子链，如图 3.53 所示，每个珠子沿 x 方向做无阻尼振动，除一个珠子质量为 m_0 外，其余的质量均为 $m(>m_0)$，不计弹簧质量．

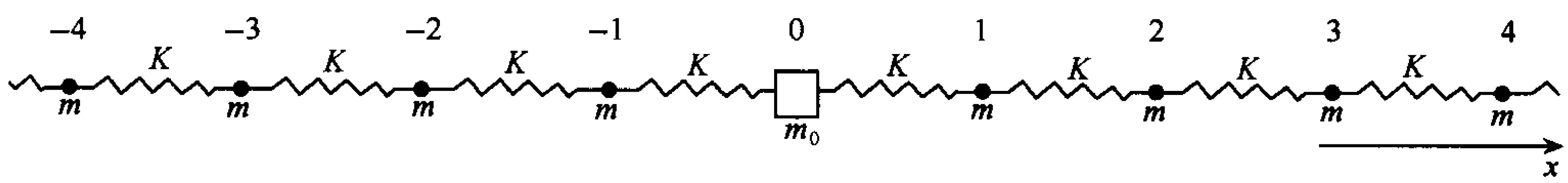


图 3.53

(1)求在远离那个特殊的珠子处传播的波的波矢和角频率之间的关系；

(2) 当一个波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的波碰到这个特殊珠子时，反射概率多大？

解　(1)题图中给每个珠子标了号，$n=0$ 是那个质量为 m_0 的特殊珠子，用 y_n 表示第 n 个珠子偏离平衡位置的位移；则对于 $n\neq 0$ 的各个珠子，运动微分方程为

$$m\ddot{y}_n=k(y_{n+1}-y_n)-k(y_n-y_{n-1})=k(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1})$$

在远离特殊珠子传播的波，可表示为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx)(\text{向 }x\text{ 正向传播})$$

或
$$y(x,t)=A\cos(\omega t+kx)(\text{向 }x\text{ 负向传播})$$

该波是由各珠子的振动的全体组成的，x 为各珠子处于平衡时的 x 坐标，第 n 个珠子，$x=na$(取 $n=0$ 的那个珠子的平衡位置为 $x=0$)，今考虑向 x 正向传播的波．

$$y_n(t)=A\cos(\omega t-kna)$$

将它代入 y_n 满足的微分方程，得

$$-m\omega^2A\cos(\omega t-kna)=K[A\cos[\omega t-k(n+1)a]$$
$$-2A\cos(\omega t-kna)+A\cos[\omega t-k(n-1)a]$$
$$=K[2A\cos(\omega t-kna)\cos ka-2A\cos(\omega t-kna)]$$
$$-m\omega^2=2K(\cos ka-1)$$
$$\omega^2=\frac{2K}{m}(1-\cos ka)$$

如考虑向 x 负向传播的波，也得上述关系．

(2) 方法一：现考虑一列波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的波从左边射向 m_0.

入射波：　$y_{n1}=A\cos(\omega t-kna)n\leqslant 0$

反射波：　$y'_{n1}=B\cos(\omega t+kna+\alpha_1)n\leqslant 0$

透射波: $y_{n2}=C\cos(\omega t-kna+\alpha_2)n\geqslant 0$

合起来写成

$$y_n=\begin{cases}A\cos(\omega t-kna)+B\cos(\omega t+kna+\alpha_1) & n\leqslant 0\\ C\cos(\omega t-kna+\alpha_2) & n\geqslant 0\end{cases}$$

边界条件:在 $n=0$ 连续,即

$$A\cos\omega t+B\cos(\omega t+\alpha_1)=C\cos(\omega t+\alpha_2)$$

$$A\cos\omega t+B\cos\omega t\cos\alpha_1-B\sin\omega t\sin\alpha_1$$

$$=C\cos\omega t\cos\alpha_2-C\sin\omega t\sin\alpha_2$$

由两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等,

$$A+B\cos\alpha_1=C\cos\alpha_2 \tag{1}$$

$$B\sin\alpha_1=C\sin\alpha_2 \tag{2}$$

另一个边界条件来自关于特殊珠子的运动微分方程,

$$m_0\ddot{y}_0=K(y_1-y_0)-K(y_0-y_{-1})=K(y_1-2y_0+y_{-1})$$

将 $$y_0=C\cos(\omega t+\alpha_2)$$

$$y_1=C\cos(\omega t-ka+\alpha_2)$$

$$y_{-1}=A\cos(\omega t+ka)+B\cos(\omega t-ka+\alpha_1)$$

代入上式,得

$$-m_0\omega^2C\cos(\omega t+\alpha_2)=K[C\cos(\omega t-ka+\alpha_2)$$

$$-2C\cos(\omega t+\alpha_2)+A\cos(\omega t+ka)+B\cos(\omega t-ka+\alpha_1)]$$

将 $\cos(\omega t+\alpha_2)$ 改写为 $\cos\omega t\cos\alpha_2-\sin\omega t\sin\alpha_2$,

$\cos(\omega t-ka+\alpha_2)$ 改写为 $\cos\omega t\cos(ka-\alpha_2)+\sin\omega t\sin(ka-\alpha_2)$

依次类推,将改写后的上式两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等,可得

$$-m_0\omega^2C\cos\alpha_2=K[C\cos(ka-\alpha_2)-2C\cos\alpha_2+A\cos ka+B\cos(ka-\alpha_1)]$$

$$m_0\omega^2C\sin\alpha_2=K[C\sin(ka-\alpha_2)+2C\sin\alpha_2-A\sin ka+B\sin(ka-\alpha_1)]$$

也将 $\cos(ka-\alpha_2)$ 等作上述那样改写,并用式(1)、(2),可由上述两式得到

$$\tan\alpha_1=\frac{2K\sin ka}{m_0\omega^2-2K(1-\cos ka)}$$

$$\tan\alpha_2=\frac{2K(1-\cos ka)-m_0\omega^2}{2K\sin ka}$$

用(1)问得到的 $\omega^2=\frac{2K}{m}(1-\cos ka)$,上述两式可改写为

$$\tan\alpha_1=\frac{2K\sin ka}{(m_0-m)\omega^2}$$

$$\tan\alpha_2=\frac{(m-m_0)\omega^2}{2K\sin ka}$$

$$\cos\alpha_1=(1+\tan^2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(m_0-m)\omega^2}{\sqrt{(m_0-m)^2\omega^4+4K^2\sin^2 ka}}$$

$$\sin\alpha_1=\cos\alpha_1\cdot\tan\alpha_1=\frac{2K\sin ka}{\sqrt{(m_0-m)^2\omega^4+4K^2\sin^2 ka}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{2K\sin ka}{\sqrt{(m-m_0)^2\omega^4 + 4K^2\sin^2 ka}}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{(m-m_0)\omega^2}{\sqrt{(m-m_0)^2\omega^4 + 4K^2\sin^2 ka}}$$

将它们代入式(1)、(2),可解出

$$\frac{B}{A} = \frac{(m-m_0)\omega^2}{\sqrt{(m-m_0)^2\omega^4 + 4K^2\sin^2 ka}}$$

反射概率为

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(m-m_0)^2\omega^4}{(m-m_0)^2\omega^4 + 4K^2\sin^2 ka}$$

代入 $\omega^2=\dfrac{2K}{m}(1-\cos ka)$

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(m-m_0)^2(1-\cos ka)^2}{(m-m_0)^2(1-\cos ka)^2 + m^2\sin^2 ka}$$

方法二:用复数形式表示波.

入射波: $y_{n1}=Ae^{i(\omega t-kna)}$ $n\leqslant 0$

反射波: $y'_{n1}=Be^{i(\omega t+kna)}$ $n\leqslant 0$

透射波: $y_{n2}=Ce^{i(\omega t-kna)}$ $n\geqslant 0$

合起来写成

$$y_n = \begin{cases} Ae^{i(\omega t-kna)} + Be^{i(\omega t+kna)} & n\leqslant 0 \\ Ce^{i(\omega t-kna)} & n\geqslant 0 \end{cases}$$

注意:这里的 A、B、C 可以是复数,与方法一中的不相同,B、C 中把 α_1、α_2 分别包含在内.这种方法更简单也在于此.

边界条件,在 $n=0$ 连续,有

$$Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = Ce^{i\omega t}$$

即

$$A+B=C$$

另一个边界条件是由

$$m_0\ddot{y}_0 = K(y_1 - 2y_0 + y - 1)$$

及

$$y_0=Ce^{i\omega t}, y_1=Ce^{i(\omega t-ka)}$$

$$y_{-1} = Ae^{i(\omega t+ka)} + Be^{i(\omega t-ka)}$$

获得,

$$-m_0\omega^2Ce^{i\omega t} = K[Ce^{i(\omega t-ka)} - 2Ce^{i\omega t} + Ae^{i(\omega t+ka)} + Be^{i(\omega t-ka)}]$$

将 $\omega^2=\dfrac{2K}{m}(1-\cos ka)$ 及 $C=A+B$ 代入,经整理后解得

$$\frac{B}{A} = \frac{(m_0-m)(1-\cos ka)}{m(1-e^{-ika}) - m_0(1-\cos ka)}$$

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{(m_0-m)(1-\cos ka)}{m(1-\cos ka + i\sin ka) - m_0(1-\cos ka)}\right|^2$$

$$= \frac{(m-m_0)^2(1-\cos ka)^2}{(m-m_0)^2(1-\cos ka)^2+m^2\sin^2 ka}$$

如波从右方入射,也同样可以得到相同的反射概率.

3.4.13 一质量为 m、原长为 l 的弹簧,其劲度系数为 k. 弹簧的一端固定,另一端系一质量为 M 的物体,水平放置. M 在光滑的水平面上运动.

(1) 导出该系统纵向振动的波动方程;

(2) 求出作为 m 的函数的最小简正频率. 这里 M 和 k 都是有限的,且 $m \ll M$.

解 (1)设弹簧的截面积为 S,弹簧伸长量为 Δl 时,两端作用力为 F,则

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

其中 Y 是弹簧的杨氏模量.

又

$$F = k\Delta l$$

两式比较,可得杨氏模量与劲度系数的关系为

$$\frac{YS}{l} = k, \quad Y = \frac{kl}{S}$$

沿弹簧纵向振动的方向取 x 轴,弹簧的固定端为原点,考虑位于 $x \sim x+\mathrm{d}x$ 的弹簧质元,振动时,发生形变,x 端位移 y,$x+\mathrm{d}x$ 端位移 $y+\mathrm{d}y$,x 端和 $x+\mathrm{d}x$ 端分别受力为

$$F(x) = -YS\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x = -kl\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x$$

$$F(x+\mathrm{d}x) = YS\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x} = kl\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x}$$

该质元受到的合力为

$$F(x)+F(x+\mathrm{d}x) = -kl\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x + kl\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x}$$

$$= -kl\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x + kl\left(\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\bigg|_x\mathrm{d}x + \cdots\right) \approx kl\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\bigg|_x\mathrm{d}x$$

由牛顿运动定律,

$$\frac{m}{l}\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = kl\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

波动方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{kl^2}{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

波速

$$v = \sqrt{\frac{kl^2}{m}} = l\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(2) 用分离变量法求上面导出的波动方程的解,令 $y(x,t) = X(x)T(t)$,代入波动方程得:

$$X\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} - v^2T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

两边除以 XT,

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} - v^2\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

第一项只与 t 有关，第二项只与 x 有关，上式要对任何 x、t 都成立，只能两项都等于常数．设第一项等于 $-\mu$，μ 为常数，得到两个常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mu}{v^2}X=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+\mu T=0$$

μ 由边界条件确定，因 $x=0$ 处 $y(x,t)=0$，$X(0)=0$，μ 不能等于零，也不能为负值，既然 $\mu>0$，可令 $\mu=\omega^2$.

可得波动方程的通解为

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sin\left(\frac{\omega_n}{v}x\right)+B_n\cos\left(\frac{\omega_n}{v}x\right)\right]\cos(\omega_nt+\alpha_n)$$

由边界条件：$x=0$ 处 $y(x,t)=0$，得 $B_n=0$

$$\therefore\qquad y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\omega_n}{v}x\right)\cos(\omega_nt+\alpha_n)\qquad(1)$$

再考虑另一个边界条件，在 $x=l$ 处，由牛顿运动定律得物体的运动微分方程为

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-kl\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l}\qquad(2)$$

将式(1)代入式(2)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[M\omega_n\sin\left(\frac{\omega_n}{v}l\right)-\frac{kl}{v}\cos\left(\frac{\omega_n}{v}l\right)\right]=0$$

ω_n 是振动系统的振动频率(可称为简正频率)，也是在弹簧中传播的波的角频率，各简正频率相应的振动方式是相互独立的．因此对各 ω_n 均有

$$M\omega_n\sin\left(\frac{\omega_n}{v}l\right)-\frac{kl}{v}\cos\left(\frac{\omega_n}{v}l\right)=0$$

$$M\omega_n\tan\left(\frac{\omega_n}{v}l\right)=\frac{kl}{v}$$

因为 $v=l\sqrt{\frac{k}{m}}$，$k=\frac{mv^2}{l^2}$，上式可改写为

$$\frac{\omega_nl}{v}\tan\left(\frac{\omega_nl}{v}\right)=\frac{m}{M}$$

令 $x=\frac{\omega_nl}{v}$，$\tan x=\frac{m}{M}\frac{1}{x}$用作图法(如图 3.54 所示)，横坐标为 x 轴，纵坐标为 y 轴，画两条曲线$y=\tan x$和 $y=\frac{m}{M}\frac{1}{x}$，其交点可得 x_n. 今画出两个交点 P、Q，它们的 x 坐标分别为 x_1、x_2.

本题只要求最小的简正频率 ω_1，而且 $m\ll M$，可见$\frac{\omega_1l}{v}$必为小量，可对 $\tan\left(\frac{\omega_1l}{v}\right)$ 作泰勒展开，

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

如只取第一项，$\tan\left(\frac{\omega_1l}{v}\right)\approx\frac{\omega_1l}{v}$

$$\frac{\omega_1 l}{v}\cdot\frac{\omega_1 l}{v}=\frac{m}{M}$$

$$\omega_1^2=\frac{m}{M}\frac{v^2}{l^2}=\frac{m}{M}\frac{\left(l\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}{l^2}=\frac{k}{M},\quad \omega_1=\sqrt{\frac{k}{M}}$$

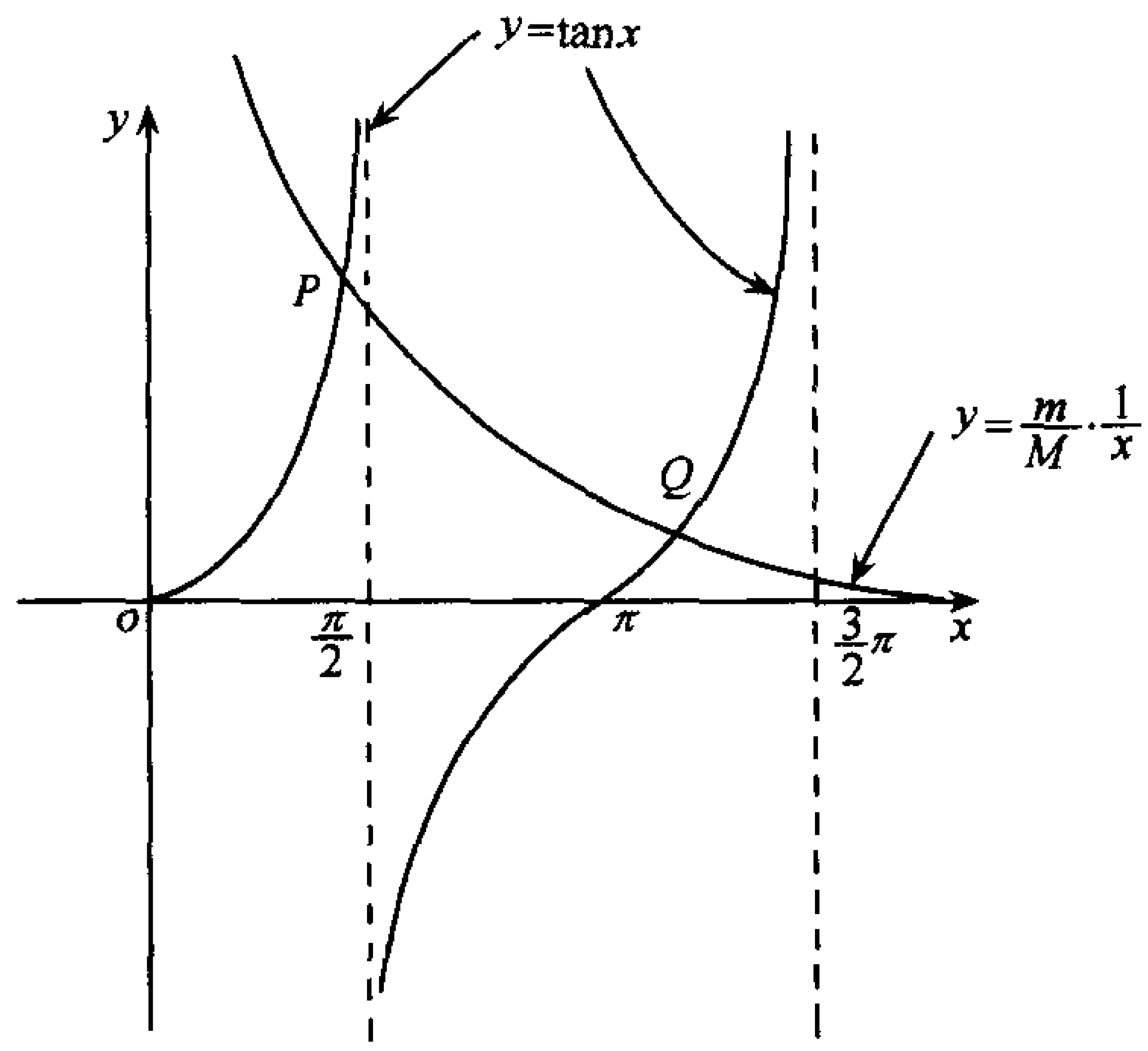


图 3.54

这是弹簧质量不计情况下的振子的角频率．今 m 虽小，但还不能不计，至少还得保留一项．

$$\tan\left(\frac{\omega_1 l}{v}\right)\approx\frac{\omega_1 l}{v}+\frac{1}{3}\left(\frac{\omega_1 l}{v}\right)^3$$

则

$$\frac{\omega_1 l}{v}\left[\frac{\omega_1 l}{v}+\frac{1}{3}\left(\frac{\omega_1 l}{v}\right)^3\right]=\frac{m}{M}$$

令 $r=\left(\frac{\omega_1 L}{v}\right)^2$，上式可改写为

$$r\left(1+\frac{1}{3}r\right)=\frac{m}{M}$$

$$r^2+3r-\frac{3m}{M}=0$$

$$r=\frac{-3+\sqrt{9+\frac{12m}{M}}}{2}=\frac{3}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4m}{3M}}-1\right]$$

（r 必须大于零，另一个根 r 为负值，已舍去.）

∵
$$(1+x)^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\quad(x\ll 1)$$

$$\sqrt{1+\frac{4m}{3M}}\approx 1+\frac{2m}{3M}-\frac{1}{8}\left(\frac{4m}{3M}\right)^2=1+\frac{2m}{3M}-\frac{2m^2}{9M^2}$$

$$\left(\frac{\omega_1 l}{v}\right)^2=r=\frac{3}{2}\left(1+\frac{2m}{3M}-\frac{2m^2}{9M^2}-1\right)=\frac{m}{M}\left(1-\frac{m}{3M}\right)$$

$$\omega_1^2 = \frac{v^2}{l^2}\frac{m}{M}\left(1-\frac{m}{3M}\right) = \frac{k}{M}\left(1-\frac{m}{3M}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}\left(1-\frac{m}{3M}\right)} \approx \sqrt{\frac{k}{M\left(1+\frac{m}{3M}\right)}} = \sqrt{\frac{k}{M+\frac{1}{3}m}}$$

这是 3.1.12 题所得到的结果.

3.4.14　一根无限长的细绳,线密度为 η,张力为 T. 在 $t=0$ 时,绳偏离平衡位置的位移为 $f(x)$. 初始速度为 $g(x)$,求 $t>0$ 时绳子的运动.

解　t 时刻、x 点处绳子的位移 $y(x,t)$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

其中 v 为波速,$v=\sqrt{\frac{T}{\eta}}$.

波动方程是线性的,不超过频率的各种频率、不超过胡克定律成立的限度的各种振幅、各种初相位($x=0$ 处)、两种传播方向.但振动方向都在同一平面上、波速均为 v 的波都是波动方程的解,它们合成的波也是方程的解,平面波(不限于简谐平面波)的表达式可写成

$$y(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt)$$

前者是向 x 正向传播的平面,后者是向 x 负向传播的平面波.

由初始条件:$t=0$ 时,$y(x,t)=f(x)$,$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=g(x)$

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x) \tag{1}$$

$$[-f'_1(x) + f'_2(x)]v = g(x) \tag{2}$$

其中用了

$$\left.\frac{\partial f_1(x-vt)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}f_1(x-vt)}{\mathrm{d}(x-vt)}\right|_{t=0}\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = f'_1(x)(-v)$$

$f'_1(x)$ 即 $\frac{\mathrm{d}f_1(x)}{\mathrm{d}x}$.

式(2)对 x 积分,

$$(-f_1(x) + f_2(x)v = \int^x g(x')\mathrm{d}x' + C$$

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{v}\int^x g(x')\mathrm{d}x' + C \tag{3}$$

由式(1)、(3)得

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{v}\int^x g(x')\mathrm{d}x' - C\right]$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{2}\int^x g(x')\mathrm{d}x' + C\right]$$

$$y(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt)$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x-vt) - \frac{1}{2}\int^{x-vt} g(x')\mathrm{d}x' - C\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[f(x+vt)+\frac{1}{2}\int^{x+vt}g(x')\mathrm{d}x'+C\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x-vt)+f(x+vt)+\frac{1}{2}\int_{x-vt}^{x+vt}g(x')\mathrm{d}x'\right].$$

3.4.15　一根线密度为η、张力为T的绳，$x=0$端固定，$x=l$端终止在一个不计质量的环上，环能在一垂直棒上无摩擦自由滑动、写$x=l$端的边界条件，并求振动的简正模．

解
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{T}{\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

边界条件为
$$y(0,t)=0,\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0$$

关于后一个边界条件，是由对环用牛顿运动定律得到的，环的质量不计，沿棒的方向的力为

$$-T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0,\therefore\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0$$

将$y(x,t)=X(x)T(t)$代入波动方程，可得

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=\frac{T}{\eta}\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}X^2}=-\omega^2$$

(关于等于$-\omega^2$，可参看3.4.13题的论述．)

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2T=0,\quad\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}X^2}+\frac{\eta}{T}\omega^2X=0$$

$$T(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

$$X(x)=C\cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega x\right)+D\sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega x\right)$$

由边界条件$X(0)=0$(来自$y(0,t)=0$)，得$C=0$

$$X(x)=D\sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega x\right)$$

由另一边界条件$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=l}=0\left(来自\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=l}=0\right)$得

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega l\right)=0$$

$$\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega_n l=(2n-1)\frac{\pi}{2}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l}\sqrt{\frac{T}{\eta}}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

3.4.16　若上题环的质量为m，求振动的简正模，并证明：$m\to\infty$时，简正模趋于两端固定的情况．

解　上题解得的

$$T(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

$$X(x)=D\sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega x\right)$$

均适用于本题.

$x=l$ 端的边界条件改为

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l}$$

将 $y(x,t)=D\sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega x\right)(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$代入上式,得

$$-m\omega^2\sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega x\right)\bigg|_{x=l}=-T\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega\cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega x\right)\bigg|_{x=l}$$

$$\tan\left(\sqrt{\frac{n}{T}}\omega l\right)=\frac{\sqrt{\eta T}}{m}\frac{1}{\omega}$$

可用图 3.55 所示的图解法求 ω_1、ω_2、ω_3、…. 横坐标为 ω, 纵坐标为 y, $y=\tan\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}l\omega\right)$ 与 $y=\frac{\sqrt{\eta T}}{m}\frac{1}{\omega}$两条曲线的交点的横坐标,按小到大的次序依次为 ω_1、ω_2、ω_3、…

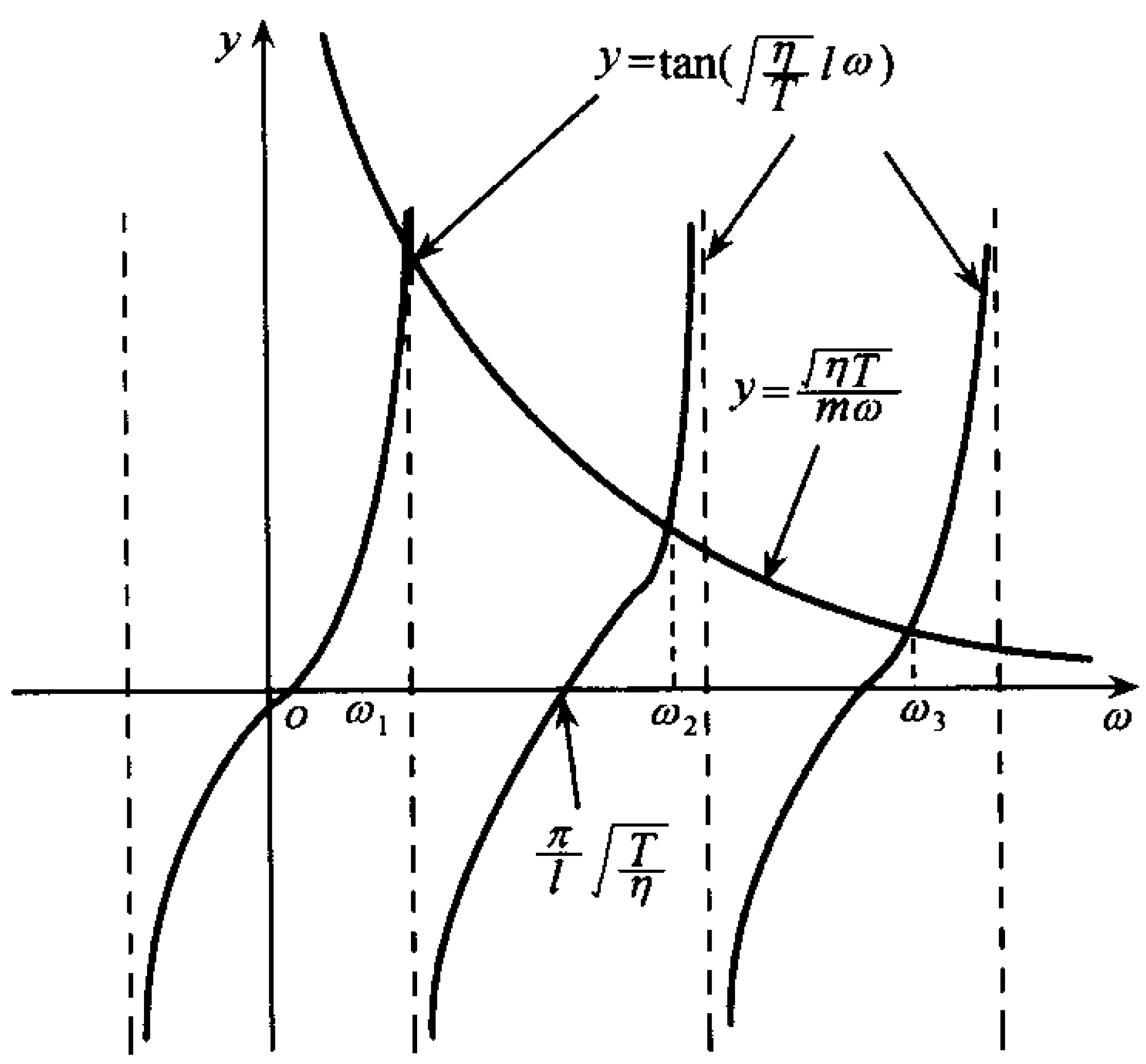


图 3.55

当 $m\to\infty$时,$\tan\left(\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega l\right)=0$,

$$\sqrt{\frac{\eta}{T}}\omega_n l=n\pi,\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\eta}}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

这正是两端固定时应有的结果,两端固定时,两端为驻波的波节.

$$l=n\cdot\frac{\lambda_n}{2},\qquad \lambda_n=\frac{2l}{n}$$

$$\omega_n=2\pi\nu_n=2\pi\frac{v}{\lambda_n}=2\pi\cdot\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\eta}}=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\eta}}$$

3.4.17　两种线密度的弦线在 $x=0$ 处连接,$x>0$ 处,$\eta=\eta_2$,$x<0$ 处,$\eta=\eta_1$,张力为 T. 一列简谐波从弦线 1 入射到连接点. 分别 $\eta_1>\eta_2$ 和 $\eta_1<\eta_2$ 两种情况,讨论反射波、透

$$M\frac{d^2y_n}{dt^2}=T\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{a}\right)-T\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{a}\right)$$

$$=\frac{T}{a}(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1})\qquad n=1,2,\cdots,N$$

其中 $y_0=y_{n+1}=0$.

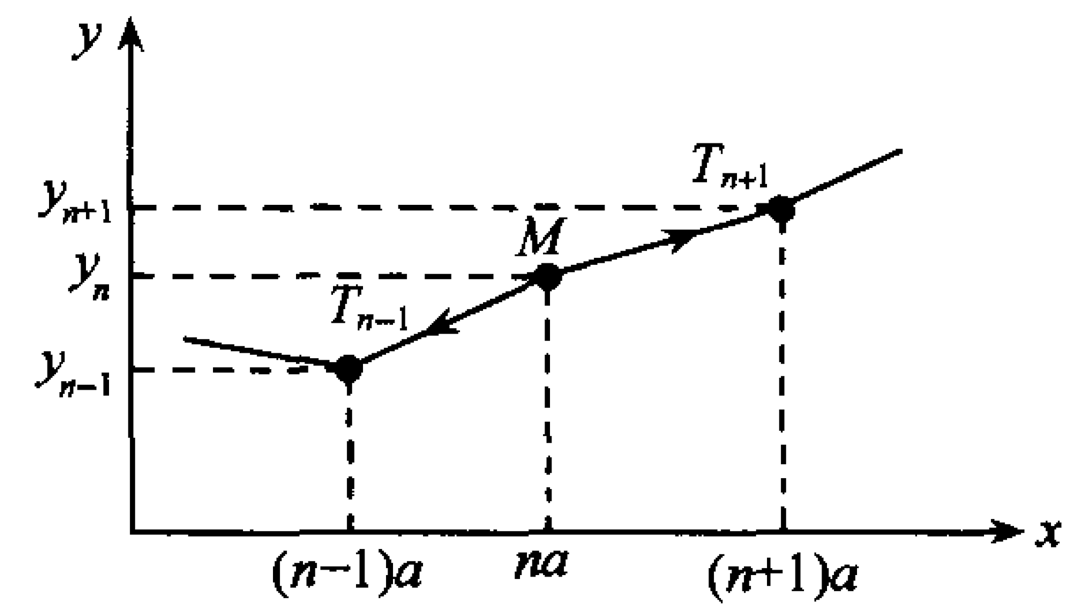


图 3.56

由于 N 相当大，要用第十章求少自由度的小振动的简正模式的办法，解 $N\times N$ 的行列式是困难的．可用求解 3.4.12 的办法．

在同一振动模式中，各珠子有同样的角频率，相位相同或相反，振幅不同，其解可写成

$$y_n=A_n\cos(\omega t+\varphi)\qquad n=1,2,\cdots,N$$

参照两端固定的弦的振动模式是各种驻波，对此珠子链，试用

$$A_n=A\sin kna+B\cos kna\qquad n=0,1,\cdots,N+1$$

由边界条件　$A_0=0$ 得 $B=0$，故

$$A_n=A\sin kna$$

$A_{N+1}=0$，$\sin k(N+1)a=0$，即 $\sin kL=0$

$$k_ml=m\pi,\qquad\qquad k_m=\frac{m\pi}{L},m=1,2,\cdots,N$$

将　　　　$y_n=A\sin kna\cos(\omega t+\varphi)$代入方程组，得

$$-M\omega^2\sin kna=\frac{T}{a}[\sin k(n+1)a-2\sin kna+\sin k(n-1)a]$$

用三角公式　$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

上式化为

$$-M\omega^2=\frac{2T}{a}(\cos ka-1)$$

故　　$$\omega_m^2=\frac{2T}{Ma}\left(1-\cos\frac{m\pi a}{L}\right)m=1,2,\cdots,N$$

作几点附带说明：

1) $y_n=A\sin k_mna\cos(\omega_mt+\varphi_m)$

用 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$可改写为

$$y_n=\frac{1}{2}A[\sin(k_mna+\omega_mt+\varphi_m)+\sin(k_mna-\omega_mt-\varphi_m)]$$

第一项表示向左边传播的波，第二项表示向右边传播的波．

波的传播速度有两种计算方法：考虑向右传播的波

$$\sin(k_mna-\omega_mt-\varphi_n)$$

考虑相邻的两个珠子的振动在紧挨的处于同相位的两个时刻

$$k_mna-\omega_mt_1-\varphi_m=k_m(n+1)a-\omega_mt_2-\varphi_m$$

$$v_m=\frac{a}{t_2-t_1}=\frac{\omega_m}{k_m}$$

令 $\omega_m^2=\frac{2T}{Ma}(1-\cos k_ma)$，$\frac{\omega_m}{k_m}\neq$常量(对于不同的 ω_m)．说明对于不同角频率的振动，其相

位的传播速度是不同的.

波速的另一种计算方法是把 y_n 改成 $y(x)$的形式:$\sin(k_m na-\omega_m t-\varphi_m)$改成 $\sin(k_m x-\omega_m t-\varphi_m)=-\sin\left[\omega_m\left(t-\frac{k_m}{\omega_m}x\right)+\varphi_m\right]$,即可看出 $v_m=\frac{\omega_m}{k_m}$.

2)考虑连续的极限情况.保持 L 不变,令 $N\to\infty,a\to 0,\frac{M}{a}=\eta$

$$\omega_m^2=\frac{2T}{Ma}(1-\cos k_m a)=\frac{4T}{Ma}\sin^2\frac{1}{2}k_m a$$

$$=\frac{4T}{Ma}\cdot\left(\frac{1}{2}k_m a\right)^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}k_m a}{\frac{1}{2}k_m a}\right)^2$$

$$\to\frac{4T}{Ma}\cdot\frac{1}{4}k_m a^2=\frac{T}{\eta}k_m^2=\frac{T}{\eta}\frac{m^2\pi^2}{L^2}$$

$$\omega_m\to\frac{m\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\eta}}$$

与两端固定的连续弦的情况完全相同.

3)对于有 N 个珠子的珠子链,$k_m=\frac{m\pi}{L}$,m 可取 $1,2,\cdots,N$,为什么不再往下取值?这是因为这个系统具有 N 个自由度,由第十章讲的小振动理论可知,它至多有 N 个简正频率.这里也可以看到,当 $n=N+1$ 时,L 等于 $N+1$ 个半波长,所有珠子在此"振动模式"中都保持不动,这是没有意义的.

3.4.19 S_1、S_2 是两相干波源,相距$\frac{1}{4}$波长,S_1 比 S_2 相位超前$\frac{\pi}{2}$.设两波在 S_1、S_2 连线上的强度相同,均为 I_0,且不随距离变化,问 S_1、S_2 连线上在 S_1 外侧各点处的强度 I_1 多大?在 S_2 外侧各点处的强度 I_2 多大?

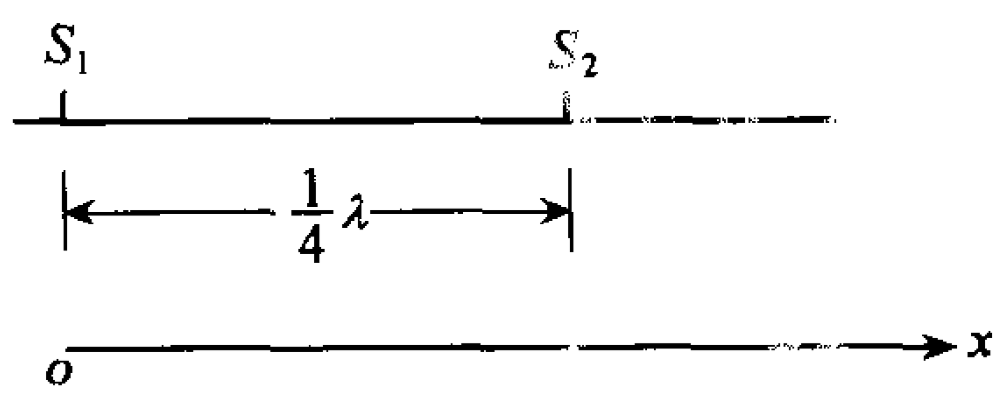


图 3.57

解 取 S_1、S_2 连线方向为 x 轴正向,原点取在 S_1 处,如图 3.57 所示.

S_1 发出的波的表达式为

$$y_1=\begin{cases}A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] & x>0\\ A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right] & x<0\end{cases}$$

S_2 发出的波的表达式为

$$y_2=\begin{cases}A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x-\frac{1}{4}\lambda}{v}\right)-\frac{\pi}{2}\right] & x>\frac{1}{4}\lambda\\ A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x-\frac{1}{4}\lambda}{v}\right)-\frac{\pi}{2}\right] & x<\frac{1}{4}\lambda\end{cases}$$

用 $v=\frac{\lambda}{T}$,$\omega T=2\pi$,y_2 的表达式可改写为

$$y_2=\begin{cases}A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{v}\right)\right] & x>\dfrac{1}{4}\lambda\\ A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x}{v}\right)-\pi\right] & x<\dfrac{1}{4}\lambda\end{cases}$$

在 S_1 外侧，$x<0$

$$y=y_1+y_2=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right]+A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)-\pi\right]=0$$

所以合成波的强度 $I_1=0$.

在 S_2 外侧，$x>\frac{1}{4}\lambda$

$$y=y_1+y_2=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]+A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

$$=2A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

$$I_2=\frac{1}{2}\rho(2A)^2\omega^2v=4\cdot\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2v=4I_0$$

3.4.20 S_1、S_2 是两相干波源，相距 30m，S_1、S_2 的相位相反，频率$\nu=100\text{Hz}$，波速 $v=400\text{m/s}$，在 S_1、S_2 连线上两波振幅相同，不随距离变化，求 S_1、S_2 连线上因干涉而静止的点的位置.

解 取 x 轴如图 3.58 所示.

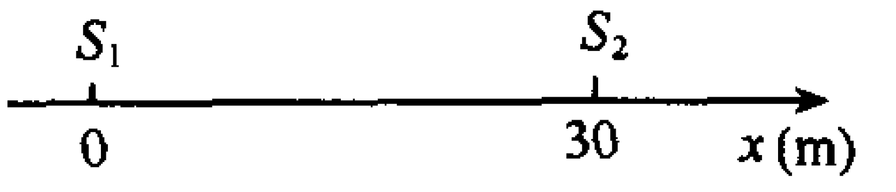


图 3.58

$$y_1=A\cos\left[200\pi\left(t-\frac{x}{400}\right)\right]$$

设
$$y_2=A\cos\left[200\pi\left(t+\frac{x}{400}\right)+\alpha\right]$$

S_1 在 $x=0$ 处的振动相位与 S_2 在 $x=30\text{m}$ 处的振动相位相反，

$$200\pi\left(t+\frac{30}{400}\right)+\alpha=200\pi\left(t-\frac{0}{400}\right)+(2n+1)\pi$$

$$15\pi+\alpha=(2n+1)\pi,\alpha=0$$

$$y_2=A\cos\left[200\pi\left(t+\frac{x}{400}\right)\right]$$

$$y=y_1+y_2=A\cos\left[200\pi\left(t-\frac{x}{400}\right)\right]+A\cos\left[200\pi\left(t+\frac{x}{400}\right)\right]$$

$$=2A\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\cos(200\pi t)$$

满足 $\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)=0$ 的 x 那些点因干涉而静止，

$$\frac{1}{2}\pi x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\quad x=2n+1$$

在 $0\leqslant x\leqslant 30$ 间，$x=1,3,5,\cdots,29(\text{m})$这些点静止.

3.4.21 图中 O 处有一波源，沿 x 轴向两边发射振幅为 A、角频率为 ω 的简谐波，波速为 v. BC 为波密介质的反射面，入射波在此被完全反射，BC 位于 $x=-d$ 处，若 $d=\frac{5}{4}\lambda$，λ 为波长，求出 $x>-d$ 各处波动的数学表达式. 设波源的初相位为零.

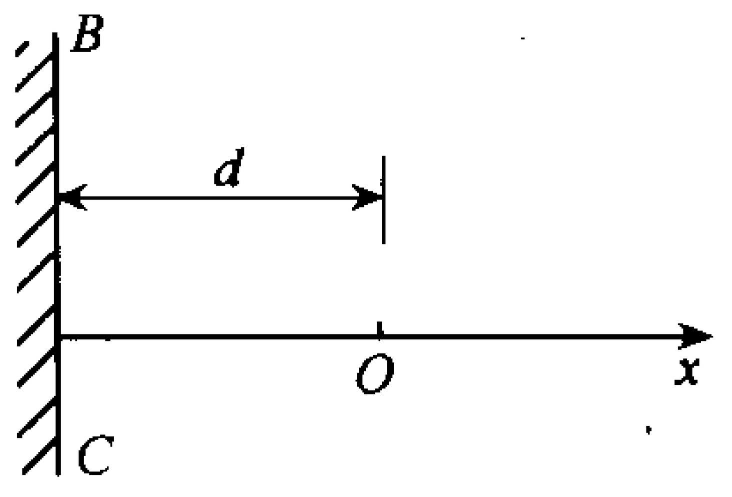


图 3.59

解 O 处波源发出的波的数学表达式为

$$y_1=\begin{cases}A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{v}\right)\right] & x\geqslant 0\\ A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x}{v}\right)\right] & -d\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

设被 BC 反射的反射波的表达式为

$$y_2=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right]\qquad x\geqslant -d$$

(因完全反射,故振幅与入射波的相同.)

因入射波自波疏介质射向波密介质,在反射面处有半波损失,入射波、反射波在此的振动相位相反,

$$\omega\left(t-\frac{-d}{v}\right)+\alpha-\omega\left(t+\frac{-d}{v}\right)=(2n+1)\pi$$

$$\alpha=(2n+1)\pi-\frac{2\omega d}{v}=(2n+1)\pi-\frac{2\omega\cdot\frac{5}{4}\lambda T}{\lambda}$$

$$=(2n+1)\pi-5\pi=0\quad(取\ n=2)$$

所以 $$y_2=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]\qquad x\geqslant -d$$

在$-d\leqslant x\leqslant 0$处,

$$y=y_1+y_2=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right]+A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]=2A\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right)\cos\omega t$$

在 $x\geqslant 0$ 处,

$$y=y_1+y_2=2A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

3.4.22 在弦线上传播的波,其表达式为

$$y=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}-\frac{x}{10}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

为在弦线上形成驻波,在 $x=1$ 处为波节

(1) 写出应叠加的波的表达式;

(2) 写出形成的驻波的表达式;

(3) 若弦线的线密度为 1.0g/cm,求相邻两波节之间的总能量.所给的表达式中,x、y 均以米为单位,t 以秒为单位.

解 (1)要形成驻波,叠加的波的表达式应为

$$y'=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}+\frac{x}{10}\right)+\alpha\right]$$

其中 α 待定.

在 $x=1$m 处为波节,两波在此振动相位相反,

$$2\pi\cdot\frac{1}{10}+\alpha-\left(-2\pi\cdot\frac{1}{10}-\frac{\pi}{2}\right)=(2n+1)\pi$$

$$\alpha=(2n+1)\pi-\frac{2}{5}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{10}\pi(取\ n=0)$$

所以
$$y' = 3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1} + \frac{x}{10}\right) + \frac{1}{10}\pi\right]$$

(2) $y+y'=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}-\frac{x}{10}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}+\frac{x}{10}\right)+\frac{\pi}{10}\right]$

$$=6\cos\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{3}{10}\pi\right)\cos\left(20\pi t-\frac{1}{5}\pi\right)$$

(3) 由所给的波的表达式可知波长 $\lambda=10\text{m}$，相邻两个波节之间的距离为 $\frac{1}{2}\lambda=5\text{m}$，今 $x=1\text{m}$ 处为波节，$x=6\text{m}$ 处是相邻的波节．在相邻两波节间驻波的总能量保持不变．当弦线各点处于平衡位置时，势能为零，各点速度的大小达到它的最大值．相邻两波节间的总能量等于这时这段弦线的总动能．

x 处质元的最大速率为

$$\left[\frac{\partial(y+y')}{\partial t}\right]_{\max} = 6.20\pi\cos\left(\frac{\pi}{5}x + \frac{3}{10}\pi\right)$$

$$E = \int_1^6 \frac{1}{2}\eta\left[\frac{\partial(y+y')}{\partial t}\right]_{\max}^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1.0\times10^{-3}}{10^{-2}}(6.20\pi)^2\int_1^6\cos^2\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{3}{10}\pi\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\times10^{-1}\times36\times400\pi^2\times\frac{1}{2}\times5 = 1.78\times10^4\text{J}$$

3.4.23　在位于 x 轴的弦线上有一驻波，测得 $x=n+\frac{5}{6}(\text{m})$（$n=0、\pm1、\pm2、\cdots$）处为波节，在波腹处，最大位移 $y_{\max}$ 为 5m，从平衡位置到最大位移历时 0.5s，以弦线上所有质元均处于平衡位置时开始计时，写出该驻波的表达式．

解　由波腹处 $y_{\max}=5\text{m}$，可知 $2A=5\text{m}$.

由所有质元均处于平衡位置时开始计时，可知驻波与 t 有关的因子可写成 $\sin\omega t$.

从平衡位置到最大位移历时 0.5s，可见 $\frac{T}{4}=0.5\text{s}$，$T=2\text{s}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\text{s}^{-1}$.

由两个相邻波节的距离为 1m，可知 $\lambda=2\text{m}$，

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2}{2} = 1\text{ms}^{-1},\ \frac{\omega}{v} = \pi\text{m}^{-1}$$

根据以上各物理量值，驻波的方程表为

$$y = 2A\cos\left(\frac{\omega}{v}x + \alpha\right)\sin\omega t = 5\cos(\pi x + \alpha)\sin\pi t$$

尚待确定的是 α，由波节位置可定义 α 值．

将 $x=n+\frac{5}{6}$ 代入 $\pi x+\alpha$，应得 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$，（$k$ 为整数）

$$\pi\left(n+\frac{5}{6}\right)+\alpha = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$$

取 $k=n$，$\alpha=\frac{1}{2}\pi-\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{3}\pi$.

驻波的表达式为

$$y = 5\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\pi t$$

3.4.24　设平面横波 1 沿 BP 方向传播，它在 B 点的振动方程为

$$y_1 = 0.2 \times 10^{-2}\cos 2\pi t(\mathrm{m})$$

平面横波 2 沿 CP 方向传播，它在 C 点的振动方程为

$$y_2 = 0.2 \times 10^{-2}\cos(2\pi t + \pi)(\mathrm{m})$$

t 以秒计．P 与 B、C 分别相距 0.40m 和 0.50m，BP、CP 的夹角 $\theta=60°$，波速为 $0.20\mathrm{ms}^{-1}$，求：

(1) 两波传到 P 处时引起质元振动的相位差；

(2) 分别考虑横波的振动方向均垂直于纸面和均平行于纸面两种情况，P 处质元合振动的振幅．

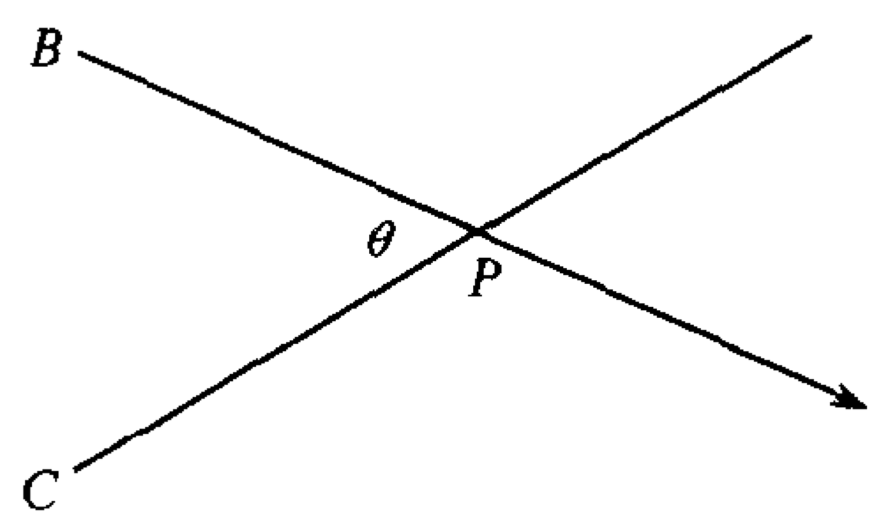


图 3.60

解　(1)$\omega=2\pi\mathrm{s}^{-1}$，$\nu=1\mathrm{Hz}$，$v=0.20\mathrm{ms}^{-1}$，

$\therefore \lambda=\dfrac{v}{\nu}=\dfrac{0.20}{1}=0.20\mathrm{m}$.

横波 1 在 P 点的振动方程为

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.2 \times 10^{-2}\cos\left(2\pi t - \frac{0.40}{0.20} \times 2\pi\right) \\ &= 0.2 \times 10^{-2}\cos(2\pi t) \end{aligned}$$

横波 2 在 P 点的振动方程为

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.2 \times 10^{-2}\cos\left(2\pi t - \frac{0.50}{0.20} \times 2\pi + \pi\right) \\ &= 0.2 \times 10^{-2}\cos(2\pi t) \end{aligned}$$

两波传到 P 处时引起质元振动的相位差为零．

(2) 如两横波振动方向均垂直于纸面，P 处质元合振动的振幅为 $0.4\times10^{-2}\mathrm{m}$.

如两横波振动方向均平行于纸面，P 处质元合振动的振幅为 $2\times0.20\times10^{-2}\times\cos\left(\dfrac{1}{2}\cdot60°\right)=0.346\times10^{-2}\mathrm{m}$.

3.4.25　图 3.61 中画的是演示声波的干涉的仪器的示意图，S 为声源，D 为耳朵或其他声音探测器，路径 SAD 的长度是固定的，路径 SBD 的长度可以变化．干涉仪内是空气，空气中声速为 $330\mathrm{ms}^{-1}$. 现测得声音强度在 B 的第一位置时为极小值 100 单位，渐增至 B 距第一位置为 $1.65\times10^{-2}\mathrm{m}$ 的第二位置时，有极大值 900 单位，求：

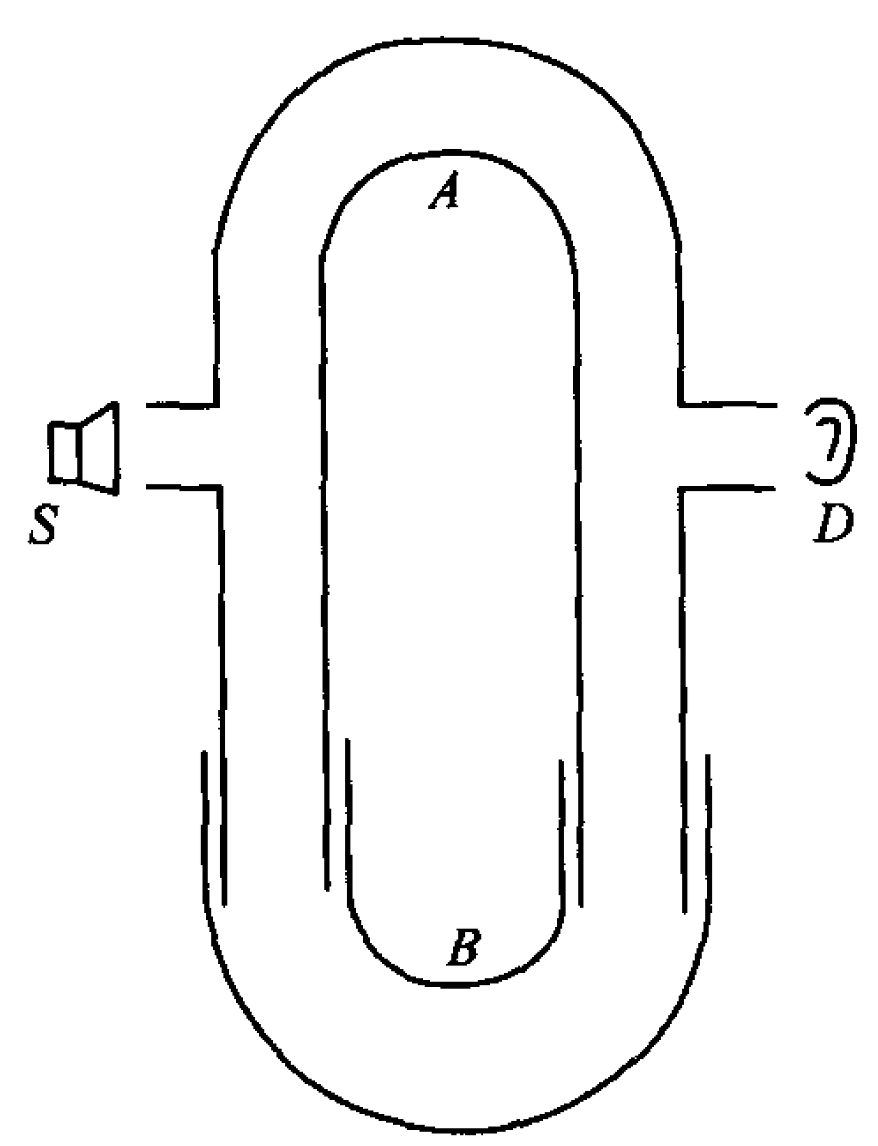


图 3.61

(1)声波频率；

(2) 抵达探测器 D 经 A 和经 B 的两波的振幅之比(SBD 路程长于 SAD)；

(3) 解释为什么同一声源发出的这两个波会有不同的振幅．

解　(1)在 B 的第一位置，至 D 时，两波的相位差为$(2n+1)\pi$(n 为某个整数)，在 B

的第二位置时，相位差为 $2n\pi$ 或$(2n+2)\pi$，相差 π，可见增加的路程是$\frac{1}{2}\lambda$.

$$\frac{1}{2}\lambda = 2 \times 1.65 \times 10^{-2}\text{m}$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{330}{2 \times 2 \times 1.65 \times 10^{-2}} = 5000\text{Hz}$$

(2) 设经 A 到达 D 的声波的振动方程为

$$y_1 = A_1\cos 2\pi\nu t$$

B 在第一位置时，经 B 到达 D 处的声波的振动方程为

$$y_2 = A_2\cos(2\pi\nu t + \pi) = -A_2\cos 2\pi\nu t$$

B 在第二位置时，经 B 到达 D 处的声波的振动方程为

$$y_2 = A_2\cos 2\pi\nu t$$

由波强公式 $I=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2v$(公式中的 A 与上述的 A 不要混淆)，今两波 ρ、ω、v 均相同，声强之比＝振幅平方之比.

设 I_1、I_2 分别是 B 在第一位置、第二位置时在 D 处听到的合成波的声强，则

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{900}{100} = 9$$

即

$$\frac{(A_1+A_2)^2}{(A_1-A_2)^2} = 9, \frac{A_1+A_2}{A_1-A_2} = 3$$

$$\frac{A_1+A_2+(A_1-A_2)}{A_1+A_2-(A_1-A_2)} = \frac{3+1}{3-1} = \frac{2}{1}, \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1}$$

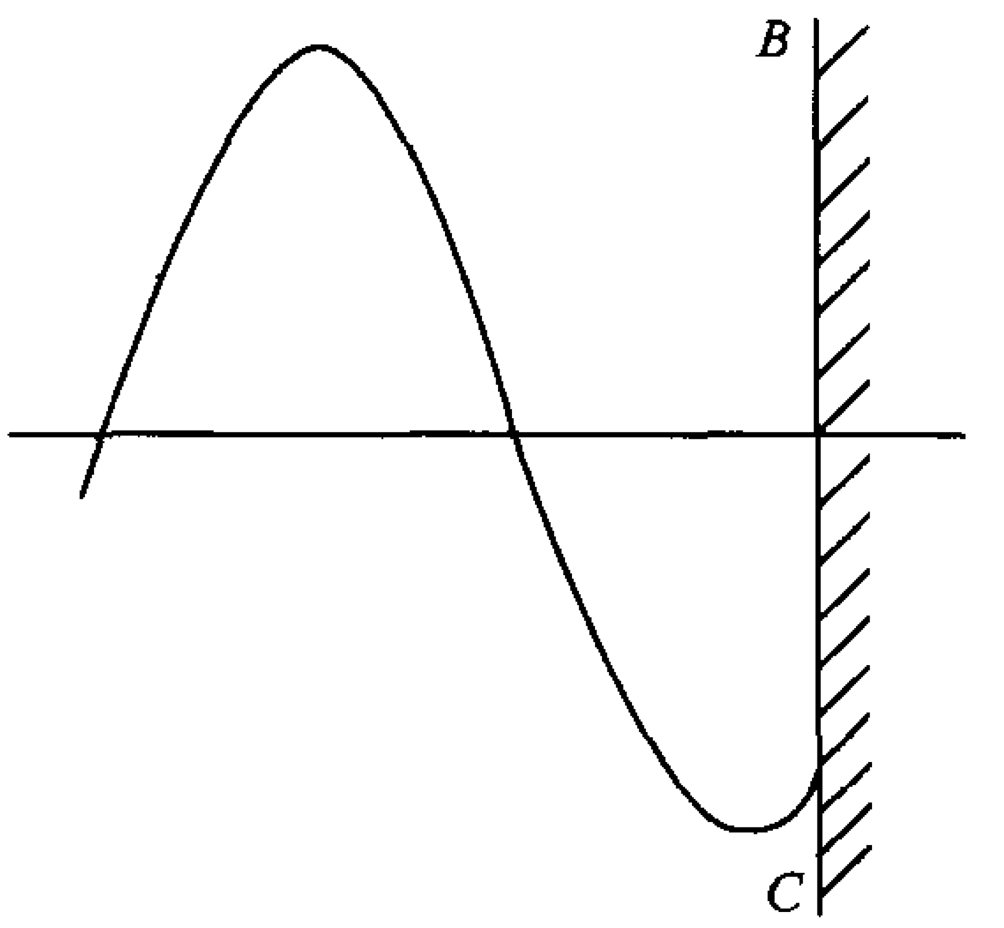


图 3.62

(3) 经两条路径到达 D 的两波振幅不同的原因是两路程长度不同，途中能量有损耗. 在 B 的第一位置和在 B 的第二位置，SBD 的路程差别不大，可以忽略到达 D 点时振幅 A_2 的差别.

3.4.26 图 3.62 中所示的是某一时刻入射波的波形图，分别就 BC 是波密介质和波疏介质的反射面的两种情况，画出此刻反射波波形的示意图(注意未说做完全反射，反射波振幅一般应小于入射波振幅).

解 图 3.63 画出了入射波射向波密介质的情况，虚线画的是完全反射的反射波形，振幅较小的标有向左箭头的实线波形是所求的反射波形. 同样，图 3.64 画出了入射波射向波疏介质的情况，虚线是完全反射的反射波形，标有向左箭头、振幅较小的实线波形是所求的反射波形. 当然都是画的示意图.

3.4.27 一根线密度为 0.15g/cm 的弦线，其一端与频率为 50Hz 的音叉相连，另一端跨过一定滑轮后悬一质量为 M 的重物，音叉到滑轮的距离为 1m. 音叉振动时，为使弦线上形成一个、二个、三个波腹，重物的质量 M 应各取何值？音叉振动的振幅很小，近似认为处于波节.

解 音叉处近似认为处于波节，滑轮处为波节. 音叉到滑轮的距离 l 是半波长的整数倍，

$$l = \frac{1}{2}n\lambda, \qquad \lambda = \frac{2l}{n}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\eta}}, \qquad v = \lambda\nu, \qquad T = Mg$$

$$M = \frac{T}{g} = \frac{1}{g}\eta v^2 = \frac{1}{g}\eta(\lambda\nu)^2 = \frac{1}{g}\eta\left(\frac{2l}{n}\right)^2\nu^2$$

$$= \frac{1}{9.8} \times \frac{0.15 \times 10^{-3}}{10^{-2}}\left(\frac{2 \cdot 1}{n}\right)^2(50)^2 = \frac{15.3}{n^2}(\text{kg})$$

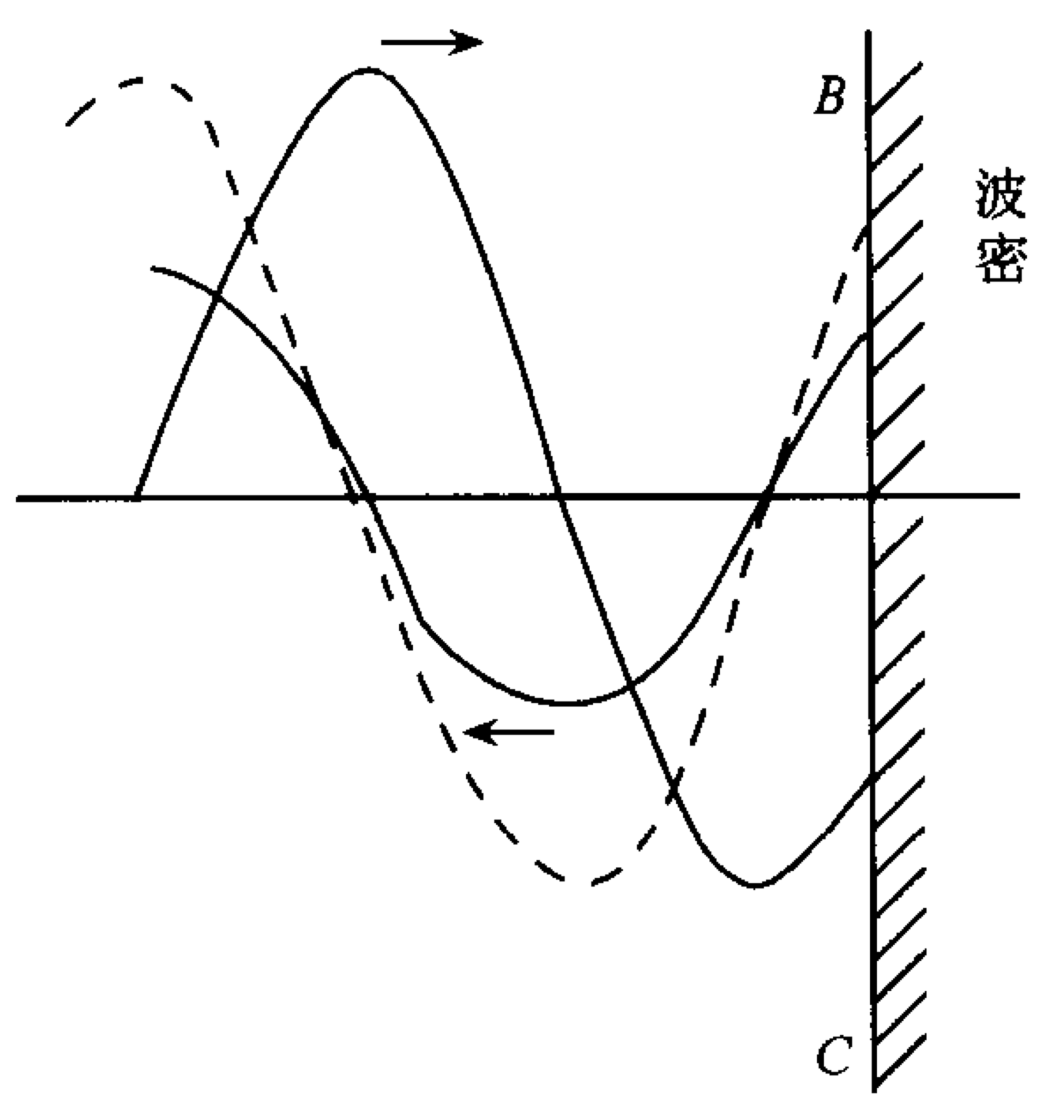


图 3.63

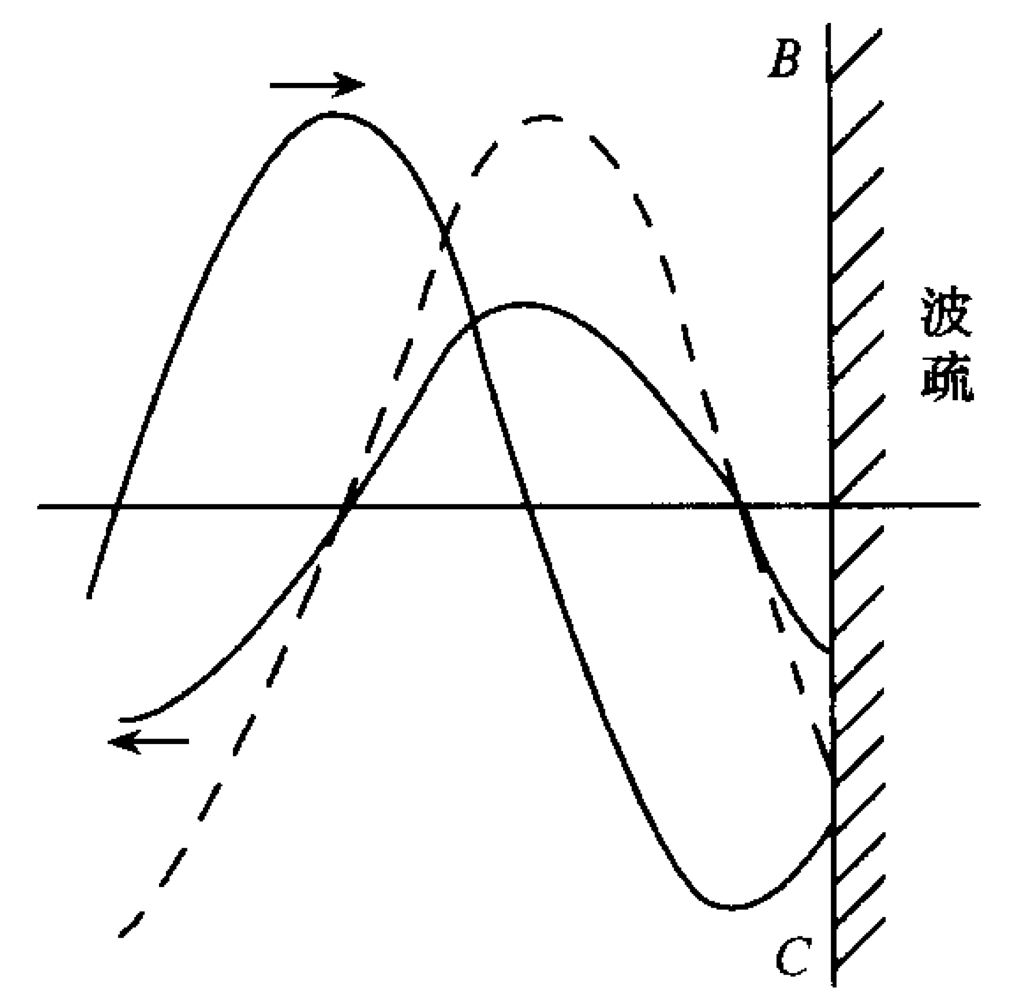


图 3.64

$n=1$ 时，$M=15.3\text{kg}$；$n=2$ 时，$M=3.8\text{kg}$；$n=3$ 时，$M=1.7\text{kg}$.

3.4.28 两个同频率、同响度的音叉在某一点 A 处是节点，即两音叉同时发声，在 A 点听到的强度为零，可任何一个音叉单独发声时，在 A 点听到的强度都为 I_0，这与能量守恒定律有矛盾吗？

解 不矛盾．在波节处，两音叉同时发声时，听到的强度为零，可在波腹处，听到的强度却是一个音叉单独发声的 4 倍，就整个波场而论，能量是守恒的．

为了看清这一点，不妨就弦线上形成的驻波作定量计算．任何时刻，相邻的两波节之间具有的机械能总等于形成驻波的两个行波具有的机械能之和．

两个行波分别为

$$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \qquad y_2 = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right]$$

形成的驻波为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{\omega x}{v}\cos\omega t$$

$x=0$ 处，为波腹点，与之相邻的波节点为 $x=-\frac{1}{4}\lambda$ 和 $x=\frac{1}{4}\lambda$.

为避免与张力 T 发生混淆，我们用 E_k 表示动能，E_p 表示势能．

在 $x \sim x+\mathrm{d}x$ 段质元的动能和势能分别为

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

对于驻波，

$$dE_k = \frac{1}{2}\eta(-2A\omega)^2\cos^2\frac{\omega x}{v}\sin^2\omega t dx$$

$$dE_p = \frac{1}{2}T\left(-2A\frac{\omega}{v}\right)^2\sin^2\frac{\omega x}{v}\cos^2\omega t dx$$

$$dE = dE_k + dE_p = 2\eta A^2\omega^2\left(\cos^2\frac{\omega x}{v}\sin^2\omega t + \sin^2\frac{\omega x}{v}\cos^2\omega t\right)dx$$

其中用了 $v^2=\dfrac{T}{\eta}$.

相邻两波节间总机械能为

$$E=\int_{-\frac{1}{4}\lambda}^{\frac{1}{4}\lambda}2\eta A^2\omega^2\left(\cos^2\frac{\omega x}{v}\sin^2\omega t + \sin^2\frac{\omega x}{v}\cos^2\omega t\right)dx$$

$$= 2\eta A^2\omega^2\cdot\frac{1}{2}x\Big|_{-\frac{1}{4}\lambda}^{\frac{1}{4}\lambda}(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = \frac{1}{2}\eta A^2\omega^2\lambda$$

计算中用了 $\cos^2\dfrac{\omega x}{v}=\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{2\omega x}{v}\right)$

$$\sin^2\frac{\omega x}{v} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\omega x}{v}\right)$$

$$\int_{-\frac{1}{4}\lambda}^{\frac{1}{4}\lambda}\cos\frac{2\omega x}{v}dx = \frac{v}{2\omega}\sin\frac{2\omega x}{v}\Big|_{x=-\frac{1}{4}\lambda}^{x=\frac{1}{4}\lambda} = 0$$

现计算两个行波在半个波长段内具有的机械能，

$$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

$$dE_{k1} = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial y^1}{\partial t}\right)^2dx = \frac{1}{2}\eta\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]dx$$

$$dE_{p1} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2dx = \frac{1}{2}T\frac{\omega^2}{v^2}A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]dx$$

$$dE_1 = dE_{k1} + dE_{p1} = \eta\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]dx$$

$$E_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\lambda}\eta\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\eta\omega^2A^2\int_0^{\frac{1}{2}\lambda}\left\{1-\cos\left[2\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]\right\}dx = \frac{1}{4}\eta\omega^2A^2\lambda$$

同样可计算，$E_2=\dfrac{1}{4}\eta\omega^2A^2\lambda$

$$E = E_1 + E_2$$

3.4.29 长 l、线密度 η 的均质弦线两端固定，在强大张力 T_0 作用下处于直线平衡位置，在离一端距离 a 处作用一个简谐力 $F=F_0\cos\omega t$，其中 F_0、ω 为常量，若 $\sin\left(\omega\sqrt{\dfrac{\eta}{T_0}}l\right)\neq 0$，求弦线的运动学方程．

解 沿弦线取 x 轴，在 $x=0$ 至 $x=a$ 段弦线质元的位移用 y_1 表示，在 $x=a$ 至 $x=l$ 段弦线质元的位移用 y_2 表示，y_1、y_2 遵从波动方程：

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0$$

边界条件：$y_1(0,t)=0, y_2(l,t)=0$

$$y_1(a,t) = y_2(a,t)$$

$$T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}\bigg|_{x=a} - T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=a} = F(t)$$

(来自 a 点所受合力为零，其 y 分量为 $-T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}\Big|_{x=a} + T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}\Big|_{x=a} + F(t) = 0$)

设 $y_1(x,t)=X_1(x)T_1(t)$，代入波动方程

$$X_1 \frac{\mathrm{d}^2 T_1}{\mathrm{d}t^2} - v^2 T_1 \frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

分离变量，$\frac{v^2}{X_1}\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{T_1}\frac{\mathrm{d}^2 T_1}{\mathrm{d}t^2}$

等式要在一切 x、t 值都成立，只能是两边的量均为常量，此常量只能是负值，因为正值或零，y_1 将趋于无穷或趋于零或与 t 无关，都是不符实际情况的，实际情况是一种振动，令此常量为 $-\omega^2$，可得到合理的解．

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 T_1 = 0$$

$$T_1 = A'_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 X_1 = 0$$

$$X_1 = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) + D_1 \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)$$

由边界条件：$x=0, X_1(0)=0$ 得 $C_1=0$ 令 $k=\frac{\omega}{v}$.

$$y_1(x,t) = (A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\sin kx$$

设　　$y_2(x,t)=X_2(x)T_2(t)$

同样可得

$$T_2 = A'_2\cos\omega t + B'_2\sin\omega t$$

$$X_2 = C_2\cos kx + D_2\sin kx$$

由边界条件：$x=l, x_2(l)=0$，得

$$C_2\cos kl + D_2\sin kl = 0$$

$$C_2 = -\frac{D_2\sin kl}{\cos kl}$$

$$X_2 = -\frac{D_2\sin kl}{\cos kl}\cos kx + D_2\sin kx$$

$$= -\frac{D_2}{\cos kl}\sin k(l-x) = D'_2\sin k(l-x)$$

$$y_2(x,t) = (A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t)\sin k(l-x)$$

再用边界条件：$y_1(a,t)=y_2(a,t)$

$$(A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\sin ka$$

$$= (A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t)\sin k(l-a)$$

两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等，

$$A_1\sin ka - A_2\sin k(l-a) = 0 \tag{1}$$

$$B_1\sin ka - B_2\sin k(l-a) = 0 \tag{2}$$

由边界条件：
$$T_0\frac{\partial y_1}{\partial x}\bigg|_{x=a} - T_0\frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=a} = F(t)$$

$$kT_0\cos ka(A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)$$
$$+ kT_0\cos k(l-a)(A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t) = F_0\cos\omega t$$

两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等，得

$$A_1kT_0\cos ka + A_2kT_0\cos k(l-a) = F_0 \tag{3}$$

$$B_1kT_0\cos ka + B_2kT_0\cos k(l-a) = 0 \tag{4}$$

式(2)、(4)B_1、B_2 的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sin ka & -\sin k(l-a) \\ kT_0\cos ka & kT_0\cos k(l-a) \end{vmatrix}$$

$$= kT_0[\sin ka\cos k(l-a) + \cos ka\sin k(l-a)] = kT_0\sin kl \neq 0$$

故只能有零解，即 $B_1=0, B_2=0$.

式(1)$\times kT_0\cos k(l-a)$+式(3)$\times\sin k(l-a)$，

$$A_1kT_0[\sin ka\cos k(l-a) + \cos ka\sin k(l-a)] = F_0\sin k(l-a)$$

$$A_1kT_0\sin kl = F_0\sin k(l-a)$$

$$A_1 = \frac{F_0\sin k(l-a)}{kT_0\sin kl}$$

由式(1)，
$$A_2 = \frac{\sin ka}{\sin k(l-a)}A_1 = \frac{F_0\sin ka}{kT_0\sin kl}$$

∴
$$y_1(x,t) = \frac{F_0\sin k(l-a)}{kT_0\sin kl}\sin kx\cos\omega t \qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$y_2(x,t) = \frac{F_0\sin ka}{kT_0\sin kl}\sin k(l-x)\cos\omega t \qquad a\leqslant x\leqslant l$$

其中
$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{T_0}{\eta}}} = \omega\sqrt{\frac{\eta}{T_0}}$$

$$\sin kl = \sin\left(\omega\sqrt{\frac{\eta}{T_0}}l\right) \neq 0$$

故上述关于 A_1、A_2 的计算是有效的.

说明：T_2、X_2 的式子中的 ω 与 X_1、T_1 中的 ω 相同，如果不相同，是无法满足边界条件，$y_1(a,t)=y_2(a,t)$的. 从受迫振动考虑，两个 ω 也应相同，下题将作为受迫振动重解此题.

3.4.30 试用分离变量法作为受迫振动重解上题，并证明所得结果是一致的.

解 弦线无阻尼的受迫振动遵从下列偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{1}$$

其中 $f(x,t)$是单位质量弦线受到的强迫力，

$$f(x,t) = \frac{1}{\eta}F(x,t)$$

$F(x,t)$是在 x 附近单位长度弦线所受的力．

这里，

$$F(x,t)=F_0\delta(x-a)\cos\omega t$$

$$f(x,t) = \frac{F_0}{\eta}\delta(x-a)\cos\omega t$$

与(1)式相应的齐次偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

用分离变量法，设 $y_0(x,t)=X(x)T(t)$，代入式(2)，得

$$X(x)\frac{\mathrm{d}^2T(t)}{\mathrm{d}t^2} - v^2T(t)\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = \frac{v^2}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$$

左边只能是 t 的函数或常量，右边只能是 x 的函数或常量，两边相等，只能都是常量．设常量为 $-\mu$，

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mu}{v^2}X = 0$$

要得到有物理意义的非零解，一定有 $\mu>0$，

$$X(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\mu}}{v}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{\mu}}{v}x\right)$$

由边界条件 $X(0)=0$ 得 $A=0$

由 $X(l)=0$ 得

$$\frac{\sqrt{\mu}}{v}l=n\pi,\ \frac{\sqrt{\mu}}{v}=\frac{n\pi}{l}.$$

满足边界条件的特解为

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad n = 1,2,\cdots$$

非齐次偏微分方程式(1)的通解用 $X_n(x)$展开，可写成

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{3}$$

将 $f(x,t)$也展成 $X_n(x)$的级数．

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

上式两边乘 $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$，对 x 从 0 到 l 积分，可得

$$f_m(t) = \frac{\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x}{\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x}$$

分母中各项积分，只有 $n=m$ 的一项积分不为零，

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l\left[1-\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}l$$

$$f_m(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{F_0}{\eta}\delta(x-a)\cos\omega t\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2F_0}{\eta l}\sin\left(\frac{m\pi}{l}a\right)\cos\omega t$$

$$f(x,t) = \frac{2F_0}{\eta l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\omega t \tag{4}$$

将式(3)、(4)代入式(1)，约去各项的共同因子 $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$，得到 $T_n(t)$满足的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2T_n}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 T_n = \frac{2F_0}{\eta l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right)\cos\omega t \qquad n = 1,2,\cdots \tag{5}$$

用振幅矢量法求稳态解．由图 3.65 可得

$$T_n = A_n\cos(\omega t - \phi_n)$$

中的 A_n 和 ϕ_n 分别为

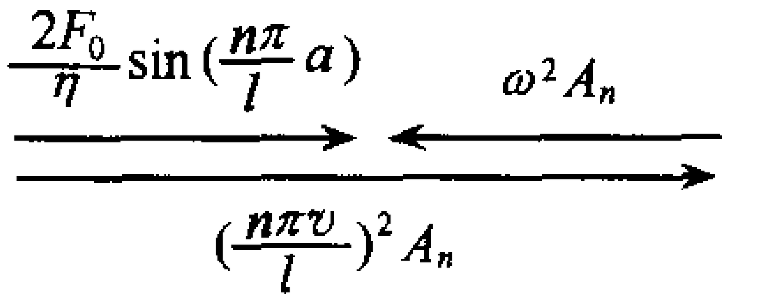


图 3.65

$$A_n = \frac{\frac{2F_0}{\eta l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right)}{\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 - \omega^2}$$

$$\phi_n = 0$$

∴

$$T_n(t) = \frac{2F_0}{\eta l}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right)}{\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 - \omega^2}\cos\omega t \tag{6}$$

将式(6)代入式(3)，即得式(1)的稳态解

$$y(x,t) = \frac{2F_0}{\eta l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right)}{\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\omega t \tag{7}$$

其中 $v=\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$.

下面证明这解与上题解得的结果是一致的．

上题解得的结果可写为

$$y(x,t) = \begin{cases} \dfrac{F_0 v}{\omega T_0\sin\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left[\frac{\omega}{v}(l-a)\right]\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)\cos\omega t & 0\leqslant x\leqslant a \\ \dfrac{F_0 v}{\omega T_0\sin\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left(\frac{\omega}{v}a\right)\sin\left[\frac{\omega}{v}(l-x)\right]\cos\omega t & a\leqslant x\leqslant l \end{cases} \tag{8}$$

将它展成 $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 的级数，

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{9}$$

式(9)两边乘 $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$，并对 x 从 0 到 l 积分，

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \int_0^l y(x,t)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

$$a_m = \frac{2}{l}\left\{\int_0^a \frac{F_0 v}{\omega T_0 \sin\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left[\frac{\omega}{v}(l-a)\right]\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)\cos\omega t\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x\right.$$

$$\left. + \int_a^l \frac{F_0 v}{\omega T_0 \sin\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left(\frac{\omega}{v}a\right)\sin\left[\frac{\omega}{v}(l-x)\right]\cos\omega t\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \frac{2F_0 v}{l\omega T_0 \sin\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\cos\omega t\left\{\sin\left[\frac{\omega}{v}(l-a)\right]B_1 + \sin\left(\frac{\omega}{v}a\right)B_2\right]$$

其中

$$B_1 = \int_0^a \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

$$B_2 = \int_a^l \sin\left[\frac{\omega}{v}(l-x)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

用

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\int_0^a\left[\cos\left(\frac{\omega-\omega_m}{v}x\right) - \cos\left(\frac{\omega+\omega_m}{v}x\right)\right]\mathrm{d}x$$

其中 $\omega_m = \dfrac{m\pi v}{l}$,

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{v}{\omega-\omega_m}\sin\left(\frac{\omega-\omega_m}{v}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} - \frac{v}{\omega+\omega_m}\sin\left(\frac{\omega+\omega_m}{v}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{v}{\omega-\omega_m}\sin\left(\frac{\omega-\omega_m}{v}a\right) - \frac{v}{\omega+\omega_m}\sin\left(\frac{\omega+\omega_m}{v}a\right)\right]$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\int_a^l\left[\cos\left(\frac{-\omega-\omega_m}{v}x + \frac{\omega}{v}l\right) - \cos\left(\frac{-\omega+\omega_m}{v}x + \frac{\omega}{v}l\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{v}{-\omega-\omega_m}\sin\left(-\frac{\omega_m}{v}l\right) - \frac{v}{-\omega-\omega_m}\sin\left(\frac{-\omega-\omega_m}{v}a + \frac{\omega}{v}l\right)\right.$$

$$\left. - \frac{v}{\omega_m-\omega}\sin\left(\frac{\omega_m}{v}l\right) + \frac{v}{\omega_m-\omega}\sin\left(\frac{\omega_m-\omega}{v}a + \frac{\omega}{v}l\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{v}{\omega+\omega_m}\sin\left(-\frac{\omega+\omega_m}{v}a + \frac{\omega}{v}l\right)\right.$$

$$\left. + \frac{v}{\omega_m-\omega}\sin\left(\frac{\omega_m-\omega}{v}a + \frac{\omega}{v}l\right)\right]$$

在上述计算中用了 $\sin\left(\pm\frac{\omega_m}{v}l\right) = \sin\left(\pm\frac{m\pi v}{l}\cdot\frac{l}{v}\right) = 0$

$$\sin\left[\frac{\omega}{v}(l-a)\right]B_1 + \sin\left(\frac{\omega}{v}a\right)B_2$$

$$= \sin\left[\frac{\omega}{v}(l-a)\right]\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{v}{\omega-\omega_m}\sin\left(\frac{\omega-\omega_m}{v}a\right) - \frac{v}{\omega+\omega_m}\sin\left(\frac{\omega+\omega_m}{v}a\right)\right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\omega}{v}a\right)\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{v}{\omega+\omega_m}\sin\left(-\frac{\omega+\omega_m}{v}a + \frac{\omega}{v}l\right) + \frac{v}{\omega_m-\omega}\sin\left(\frac{\omega_m-\omega}{v}a + \frac{\omega}{v}l\right)\right]\right.$$

再用 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$，经计算可得

$$\sin\left[\frac{\omega}{v}(1-a)\right]B_1+\sin\left(\frac{\omega}{v}a\right)B_2=-\frac{v\omega}{\omega^2-\omega_m^2}\sin\left(\frac{\omega}{v}l\right)\sin\left(\frac{\omega_m}{v}a\right)$$

$$a_m=\frac{2F_0v}{l\omega T_0\sin\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\cos\omega t\,\frac{v\omega}{\omega_m^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega l}{v}\right)\sin\left(\frac{\omega_m a}{v}\right)$$

$$=\frac{2F_0v^2}{T_0l(\omega_m^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{\omega_m a}{v}\right)\cos\omega t$$

代入 $v=\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}, \omega_m=\frac{m\pi v}{l}$，

$$a_m=\frac{2F_0}{\eta l\left[\left(\frac{m\pi v}{l}\right)^2-\omega^2\right]}\sin\left(\frac{m\pi}{l}a\right)\cos\omega t$$

$$y(x,t)=\frac{2F_0}{\eta l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right)}{\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2-\omega^2}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\omega t$$

与式(7)完全相同．

3.4.31 一作用于单位长度的强迫力 $f(x,t)=f_0\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\omega t$（其中 f_0、n、ω 均为常量，n 为正整数）加于两端固定的、长 l、张力为 τ、线密度为 η 的绳上，绳子受到与速度成正比的阻力，单位长度绳所受阻力的阻尼系数为 γ，求绳子的稳态运动．

解 $$\eta\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\gamma\frac{\partial y}{\partial t}-\tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f(x,t) \tag{1}$$

$y(x,t)$ 用满足同样的边界条件的无阻尼情况的本征函数组 $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ $(m=1,2,3,\cdots)$ 来展开，*

$$y(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{d^2T_m}{dt^2}+\frac{\gamma}{\eta}\frac{dT_m}{dt}+\frac{m^2\pi^2}{l^2}\frac{\tau}{\eta}T_m\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\right]=\frac{1}{\eta}f(x,t) \tag{3}$$

$f(x,t)$ 已展成 $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ $(m=1,2,\cdots)$ 的级数，只有 $m=n$ 的一项，即

$$f(x,t)=f_0\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\omega t$$

将 $f(x,t)$ 代入式(3)，得

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+\frac{\gamma}{\eta}\frac{dT_n}{dt}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{\tau}{\eta}T_n=\frac{f_0}{\eta}\cos\omega t$$

---

* 导出式(2)、(3)的过程可写得更详细些，其办法参看 3.4.32 题的解．

$$\frac{d^2T_m}{dt^2}+\frac{\gamma}{\eta}\frac{dT_m}{dt}+\frac{m^2\pi^2}{l^2}\frac{\tau}{\eta}T_m=0 \qquad m\neq n$$

对于 $m\neq n$ 的微分方程，不论$\frac{\gamma}{2\eta}$与$\frac{m\pi}{l}\sqrt{\frac{\tau}{\eta}}$的大小关系如何，经过足够长时间，所有 $T_m(t)\to 0$，稳态解中只含 $T_n(t)$.

用受迫振动的稳态运动公式，

$$T_n(t)=B\cos(\omega t-\phi)$$

其中

$$B=\frac{\frac{f_0}{\eta}}{\sqrt{\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{\tau}{\eta}-\omega^2\right)^2+4\left(\frac{\gamma}{2\eta}\right)^2\omega^2}}$$

$$=\frac{f_0}{\sqrt{\eta^2\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{\tau}{\eta}-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{\frac{\gamma}{\eta}\omega}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{\tau}{\eta}-\omega^2}\right)=\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau-\eta\omega^2}\right)$$

所以

$$y(x,t)=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\frac{n^2\pi^2\tau}{l^2}-\eta\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos(\omega t-\phi)$$

其中

$$\phi=\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau-\eta\omega^2}\right)$$

3.4.32　一均匀细绳长度为 l，单位长度质量为 η，在平面 (x,y) 内做横向小振动，它的端点 $(0,0)$ 和 $(l,0)$ 分别固定，张力为 τ，振动时，受到与速度有关的摩擦力，如微元长 δl，有横向速度 v，则摩擦力为 $-\gamma v\delta l$，小振动 $y(x,t)$ 满足下列偏微分方程和边界条件：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a\frac{\partial y}{\partial t}=b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y(0,t)=0,y(l,t)=0$$

(1) 写出常量 a 和 b；

(2) 假定 $a^2<\frac{b}{l^2}$，求 $y(x,t)$(通解)；

(3) 设 $y(x,0)=0$，$\dot{y}(x,0)=A\sin(3\pi x/l)+B\sin(5\pi x/l)$，其中 A、B 为常量，求 $y(x,t)$；

(4) 假设改为 $a=0$，$\dot{y}(x,0)=0$，

$$y(x,0)=\begin{cases}Ax & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}l\\ A(l-x) & \frac{1}{2}l\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

求 $y(x,t)$.

解　(1)对 $x\sim x+\mathrm{d}x$ 段绳子用牛顿运动定律

$$\eta\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\tau\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}-\tau\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}-\gamma\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}x$$

$$=\tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x-\gamma\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{\eta}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\tau}{\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

所以

$$a=\frac{\gamma}{\eta},\qquad b=\frac{\tau}{\eta}$$

(2) 用分离变量法,令 $y(x,t)=X(x)T(t)$,代入$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a\frac{\partial y}{\partial t}=b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$,得

$$X\ddot{T}+aX\dot{T}=bX''T$$

$$\frac{\ddot{T}}{T}+a\frac{\dot{T}}{T}=\frac{bX''}{X}$$

等号两边均为常量,此常量必为负值,否则将得到 $X=0$,无意义,令此常量为$-b\lambda^2$,

$$X''+\lambda^2X=0\tag{1}$$

$$\ddot{T}+a\dot{T}+b\lambda^2T=0\tag{2}$$

式(1)的边界条件:由 $y(0,t)=0,y(l,t)=0$

得 $X(0)=0,X(l)=0$,

$$X(x)=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$$

由 $X(0)=0$ 得 $B=0$,由 $X(l)=0$ 得

$$\lambda l=n\pi,\qquad \lambda=\frac{n\pi}{l}\qquad n=1,2,\cdots$$

满足边界条件的特解为

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\qquad n=1,2,\cdots$$

将 λ 代入式(2),

$$\ddot{T}_n+a\dot{T}_n+\frac{n^2\pi^2}{l^2}bT_n=0$$

相应的特征方程为

$$\gamma^2+a\gamma+\frac{n^2\pi^2}{l^2}b=0$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(-a\pm\sqrt{a^2-\frac{4n^2\pi^2}{l^2}b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-a\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{4n^2\pi^2b}{l^2}-a^2}\right)$$

这里用了 $a^2<\frac{b}{l}$.

$$T_n=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at}(C_{1n}\cos\omega_nt+C_{2n}\sin\omega_nt)$$

其中 $\omega_n=\sqrt{\frac{n^2\pi^2b}{l^2}-\frac{a^2}{4}}$.

通解为

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\frac{1}{2}at}(C_{1n}\cos\omega_n t+C_{2n}\sin\omega_n t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\frac{\gamma}{2\eta}t}(C_{1n}\cos\omega_n t+C_{2n}\sin\omega_n t)$$

其中　$\omega_n=\sqrt{\frac{n^2\pi^2\tau}{nl^2}-\frac{\gamma^2}{4\eta^2}}$.

(3) 初始条件，$y(x,0)=0,\dot{y}(x,0)=A\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)+B\sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right)$.

由 $y(x,0)=0$，得 $C_{1n}=0,n=1,2,\cdots$

$$\dot{y}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\left(-\frac{\gamma}{2\eta}\right)e^{-\frac{\gamma}{2\eta}t}C_{2n}\sin\omega_n t+e^{-\frac{\gamma}{2\eta}t}\cdot C_{2n}\omega_n\cos\omega_n t\right]$$

由 $\dot{y}(x,0)=A\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)+B\sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot C_{2n}\omega_n=A\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)+B\sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right)$$

得

$$C_{23}=\frac{A}{\omega_3},\qquad C_{25}=\frac{B}{\omega_5}$$
$$C_{2n}=0\qquad(n\neq 3,5)$$

所以

$$y(x,t)=\left[\frac{A}{\omega_3}\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)\sin\omega_3 t+\frac{B}{\omega_5}\sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right)\sin\omega_5 t\right]e^{-\frac{\gamma}{2\eta}t}$$

其中

$$\omega_3=\sqrt{\frac{9\pi^2\tau}{\eta l^2}-\frac{\gamma^2}{4\eta^2}},\qquad \omega_5=\sqrt{\frac{25\pi^2\tau}{\eta l^2}-\frac{\gamma^2}{4\eta^2}}$$

(4) $a=0$，即 $\gamma=0$，通解为

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(C_{1n}\cos\omega_n t+C_{2n}\sin\omega_n t)$$

其中 $\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\tau}{\eta}}$.

$$\dot{y}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(-C_{1n}\omega_n\sin\omega_n t+C_{2n}\omega_n\cos\omega_n t)$$

由 $\dot{y}(x,0)=0$ 得 $C_{2n}=0$

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\omega_n t$$
$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

将所给的初始条件

$$y(x,0)=\begin{cases}Ax & 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ A(l-x) & \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

用本征函数组 $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ $(n=1,2,\cdots)$展成级数，

$$C_{1n}=\frac{2}{l}\int_0^l y(x,0)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}Ax\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}A(l-x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{4Al}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$$

所以
$$y(x,t)=\frac{4Al}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\omega_n t$$

其中 $\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\tau}{\eta}}$.

3.4.33 一条长 l、线密度为 η 的软绳，上端固定，下端自由，在一个平面内做微小横振动.

(1) 导出偏微分方程，并由此导出关于振动模式的微分方程；

(2) 用幂级数解法求解此微分方程(不把方程变为贝塞尔方程求解)，然后用数值解法近似算出最低简正频率.

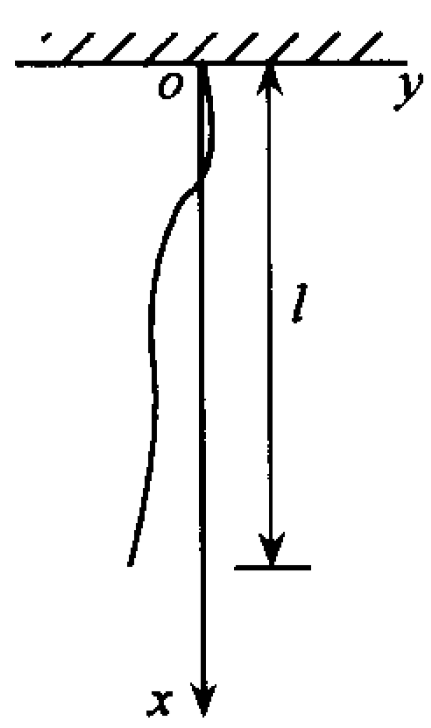


图 3.66

解 (1)取图 3.66 的 x、y 坐标，绳中张力与重力平衡，是 x 的函数，

$$\tau(x)=\int_x^l \eta g\mathrm{d}x=\eta g(l-x)$$

由牛顿运动定律，$x\sim x+\mathrm{d}x$ 段质元做微小横振动的偏微分方程为

$$\eta\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\tau(x+\mathrm{d}x)\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x}-\tau(x)\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x$$

或写成

$$\eta\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\left(\tau\frac{\partial y}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\mathrm{d}x}-\left(\tau\frac{\partial y}{\partial x}\right)\bigg|_x$$

代入 $\tau(x)=\eta g(l-x)$，可得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=0 \tag{1}$$

边界条件：$y(0,t)=0$，$y(l,t)$有限.

下端自由，$\left(\tau\frac{\partial y}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}=0$，因 $\tau(l)=0$，不能要求$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}=0$.

用分离变量法. 令 $y(x,t)=X(x)T(t)$，代入式(1)，得

$$X\ddot{T}-gT\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(l-x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]=0$$

$$\frac{1}{g}\frac{\ddot{T}}{T}=\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(l-x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]=-\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(l-x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda X=0 \tag{2}$$

$$\ddot{T}+\lambda gT=0 \tag{3}$$

边界条件：$X(0)=0$，$X(l)$有限.

式(2)及其边界条件将决定振动模式,因此式(2)是关于振动模式的微分方程.

(2) 由上述式(3)关于 T 的微分方程可知,$\lambda=0$ 及 $\lambda<0$,T 将趋于无穷或趋于零,没有强迫力,不可能趋于无穷;没有阻力,也不可能趋于零.故必有 $\lambda>0$. 式(2)也可写成

$$X'' \frac{1}{l-x}X' + \frac{\lambda}{l-x}X = 0 \tag{4}$$

可见,$x=l$ 是正则奇点,令

$$X(x) = (x-l)^s\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-l)^n$$

代入式(4),

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(x-l)^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(x-l)^{n+s-2}$$
$$-\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-l)^{n+s-1} = 0$$

指标方程:$s(s-1)+s=0$,$\therefore s=0$

令 $a_0=1$,

$$(s+1)sa_1 + (s+1)a_1 - \lambda a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{\lambda}{(s+1)^2}a_0 = \lambda$$

$$(s+2)(s+1)a_2 + (s+2)a_2 - \lambda a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{(s+2)^2}a_1 = \frac{\lambda^2}{2^2}$$

$$(s+3)(s+2)a_3 + (s+3)a_3 - \lambda a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{\lambda}{(s+3)^2}a_2 = \frac{\lambda}{3^2}\cdot\frac{\lambda^2}{2^2} = \frac{\lambda^3}{(3!)^2}$$

依次类推,可得 $a_n=\frac{\lambda^n}{(n!)^2}$

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n!)^2}(x-l)^n$$

由 $X(0)=0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda l)^n}{(n!)^2}=0 \tag{5}$$

用牛顿法做数值计算,将式(5)写成

$$f(p) = 1 - p + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{36}p^3 + \frac{1}{576}p^4 - \frac{1}{14400}p^5 \approx 0$$

其中 $p=\lambda l$.

$$f'(p) \approx -1 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{12}p^2 + \frac{1}{144}p^3 - \frac{1}{2880}p^4$$

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

取 $p_1=1$,$f(p_1)=0.224$,$f'(p_1)=-0.58$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 1 - \frac{0.224}{(-0.58)} = 1.39$$

$$f(p_2)=f(1.39)=0.0245,f'(p_2)=-0.449$$

$$p_3=1.39-\frac{0.0245}{(-0.449)}=1.445$$

$$f(p_3)=7.64\times10^{-4},f'(p_3)=-1.4355$$

$$p_4=1.445-\frac{7.64\times10^{-4}}{(-1.4355)}=1.447$$

取三位有效数字，$p=1.45$ 即 $\lambda_{\min}l=1.45$.

由关于 T 的微分方程式(3)的解，

$$T(t)=C_1\cos(\sqrt{\lambda g}t)+C_2\sin(\sqrt{\lambda g}t)$$

$$\omega_{\min}=\sqrt{\lambda_{\min}g}=\sqrt{1.45}\sqrt{\frac{g}{l}}=1.20\sqrt{\frac{g}{l}}$$

为了说明上述计算的确是最小的简正频率，我们取 $p_1=0.5$，算出 $p_2=1.067$，而用 $p_1=0.1$，算出 $p_2=1.047$，所以不可能找到比 $p=1.45$ 更小的 $f(p)=0$ 的根.

3.4.34　一根长度为 l、线密度为 η 的细绳以角速度 Ω 绕一根垂直的轴在水平面内转动，同时细绳在竖直方向做小振动，如图 3.67 所示. 求简正频率(重力可忽略不计).

提示：勒让德多项式 $p_l(\cos\theta)$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}\left(\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}\cos\theta}\right)=-l(l+1)p_l\qquad l=0,1,2,\cdots$$

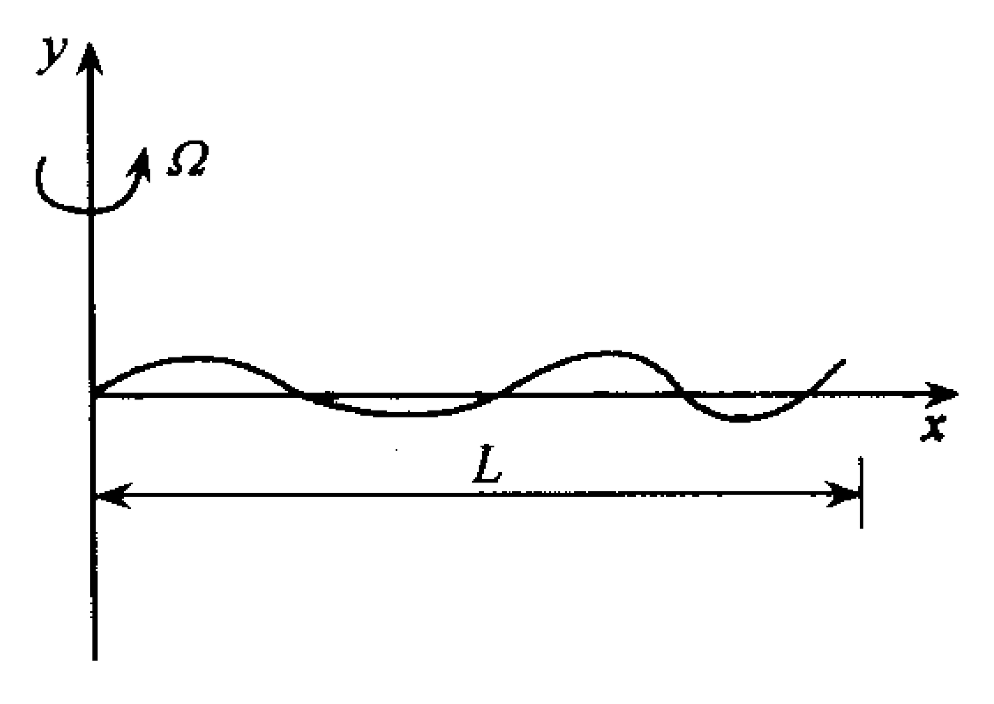


图 3.67

解　x 轴以角速度 Ω 绕 y 轴转动，考虑转动参考系，无振动时，细绳处于平衡状态，绳中张力与惯性离轴力平衡，由此可计算绳中张力.

$x\sim x+\mathrm{d}x$ 段质元受到的惯性离轴力为

$$\Omega^2x\cdot\eta\mathrm{d}x$$

张力 $\tau(x)$ 应与从 x 至 L 段所受惯性离轴力相等，

$$\tau(x)=\int_x^L\Omega^2x\eta\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\eta\Omega^2(L^2-x^2)$$

对 $x\sim x+\mathrm{d}x$ 段质元用牛顿运动定律，

$$\eta\mathrm{d}x\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=\left(\tau\frac{\partial y}{\partial t}\right)\bigg|_{x+\mathrm{d}x}-\left(\tau\frac{\partial y}{\partial t}\right)\bigg|_x$$

$$\eta\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\eta\Omega^2(L^2-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right]\tag{1}$$

边界条件：$y(0,t)=0$，$y(L,t)$有限.

和上题所述一样，因为 $\tau(L)=0$，不要求$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L}=0$.

用分离变量法

$$y(x,t)=X(x)T(t)$$

令 $\omega_0^2=\frac{1}{2}\Omega^2$，代入式(1)，得

$$X\ddot{T}=T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\omega_0^2(L^2-x^2)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$\frac{1}{\omega_0^2 T}\ddot{T}=\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(L^2-x^2)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]=-\lambda$$

$$\ddot{T}+\lambda\omega_0^2 T=0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(L^2-x^2)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda X=0 \tag{3}$$

令 $\xi=\frac{x}{L}$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$,式(3)改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}\right]+\lambda X=0$$

再令 $\xi=\cos\theta$,上式又可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}\left(\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\cos\theta}\right)=-\lambda X \tag{4}$$

与勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}\left(\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\cos\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

相比较,可知式(4)是一个 $m=0$ 的勒让德方程.

由式(3)可见,$x=L$ 为正则奇点,要使 $x=L$ 处的 $X(L)$ 有限,λ 必须为

$$\lambda=l(l+1)\qquad l=0,1,2,\cdots$$

将式(4)与提示所述勒让德多项式 $P_l(\cos\theta)$ 满足的方程相比较,也可得到 λ 的上述限制.

所以

$$X=P_l(\cos\theta)$$

即

$$X(x)=P_l\left(\frac{x}{L}\right)$$

要满足边界条件:$y(0,t)=0$,即 $X(0)=0$,l 只能取奇数,即

$$l=2n-1,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

则

$$\lambda=2n(2n-1)\qquad n=1,2,3,\cdots$$

将上述 λ 代入式(2),

$$\ddot{T}+2n(2n-1)\omega_0^2 T=0$$

简正频率为

$$\omega_n=\sqrt{2n(2n-1)}\omega_0=\sqrt{2n(2n-1)}\frac{\Omega}{\sqrt{2}}=\sqrt{n(2n-1)}\Omega\qquad n=1,2,3,\cdots$$

3.5 声　　波

3.5.1 一开管风琴管(两端开口)的基频为 300Hz,一闭管风琴管(一端封闭)的第二泛音和该开管风琴管的第二泛音频率相同,问两根管子的长度各是多少?空 气中声速为 330m/s.

解 开管风琴管的长度与波长的关系为 $l=\frac{\lambda_n}{2}n$.

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2l}$$

基频为　　$\nu_1=\frac{v}{2l}, \therefore l=\frac{v}{2\nu_1}=\frac{330}{2\times 300}=0.55(\text{m})$

第二泛音：　　$\nu_3=\frac{3v}{2l}=3\nu_1=900\text{Hz}$

闭管风琴管的长度与波长的关系为

$$l = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

第二泛音：　　$\nu_3=\frac{v}{\lambda_2}=\frac{5v}{4l}=900\text{Hz}$

所以　　$l=\frac{5.330}{4.900}=0.458(\text{m})$

3.5.2　一小提琴的弦的质量为 2.0g，它的两固定点之间的距离为 50cm，不按手指演奏时发出的声音是 A 调 440Hz. 试问要奏出 C 调 528Hz，手指应按在什么位置？弦线张力多大？

解　两端固定，弦长 l 与波长有关系为

$$l = n\cdot\frac{\lambda_n}{2}, \nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2l}$$

不按手指演奏的是基频，

$$\nu_1 = \frac{v}{2l} = 440\text{Hz}$$

按手指使琴弦长度缩短，奏出的仍是基频

$$\nu'_l = \frac{v}{2l'}, \qquad \frac{\nu'_1}{\nu_1} = \frac{l}{l'}$$

$$l' = \frac{\nu_1}{\nu'_1}l = \frac{440}{528}\times 0.50 = 0.417(\text{m})$$

离较近一端的距离

$$l - l' = 0.50 - 0.417 = 0.083(\text{m})$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\eta}}, \qquad v = 2l\nu_1, \qquad \eta = \frac{m}{l}$$

$$T = \eta v^2 = \frac{m}{l}\cdot(2l\nu_1)^2 = 4ml\nu_1^2$$

$$= 4\times 2.0\times 10^{-3}\times 0.50\times(440)^2 = 774(\text{N})$$

3.5.3　有一口井，侧面是竖直的，井中有水，它可与 7Hz 和 7Hz 以上的某些频率发生共鸣，井内的空气密度为 1.1kg/m^3，压强为 9.5×10^4Pa，比热容比为 $\frac{7}{5}$. 试问这井水的水面有多深？比 7Hz 高的多大频率也能发生共鸣？

解　在一端开口一端封闭的井中形成驻波时发生共鸣，此时强迫力的角频率等于振动系统的简正频率，发生共振，故发生共鸣形成驻波时，

$$l = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4}, \quad \nu_n = \frac{v}{4l}(2n-1)$$

其中 l 是水面的深度,即水面到井口的距离.

发生共鸣的最低频率 $\nu_1=\frac{v}{4l}$,

$$l=\frac{v}{4\nu_1}=\frac{1}{4\nu_1}\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\frac{1}{4.7}\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\times 9.5\times 10^4}{1.1}}=12(\text{m})$$

比 ν_1 高的能发生共鸣的频率有

$$\nu_n=(2n-1)\nu_1,\qquad n=2,3,\cdots$$

它们是 21Hz,35Hz,49Hz,….

3.5.4 一小提琴的弦长 31.6cm,线密度为 0.65g/m,将此弦放在扬声器附近,扬声器由一频率可变的音频振荡器来策动.当振荡器的频率从 500Hz 到 1500Hz 连续改变时,发现小提琴的弦只在 880Hz 与 1320Hz 这两个频率发生振动.试问弦中的张力有多大?

解

$$l=n\cdot\frac{\lambda_n}{2},\quad \nu_n=\frac{v}{\lambda_n}=\frac{v}{2l}n$$

$$880=\frac{v}{2l}n,\qquad 1320=\frac{v}{2l}(n+1)$$

$$\frac{n+1}{n}=\frac{1320}{880}$$

解得 $n=2$

$$v=\frac{880\cdot 2l}{2},\qquad v=\sqrt{\frac{T}{\eta}}$$

$$T=\eta v^2=0.65\times 10^{-3}\times(0.316\times 880)^2=50.3(\text{N})$$

3.5.5 一直立圆柱形管子,上端开口,可以往里灌水,当管中水面离管口距离为 15.95cm、48.45cm 和 80.95cm 时,相继地观察到一个频率为 512Hz 的音叉发生的空气柱共振,如图 3.68 所示.

(1) 求出在空气中的声速;

(2) 精确地指出该管邻近顶端波腹的位置;

(3) 如果上述测量是二年级大学生所做,你如何评价他的工作.

解 (1)

$$48.45-15.95=32.50$$

$$80.95-48.45=32.50$$

$$\lambda=2\times 32.50=65(\text{cm})$$

$$v=\lambda\nu=0.65\times 512=333(\text{m/s})$$

(2)

$$\lambda=65\text{cm},\ \frac{1}{4}\lambda=16.25\text{cm}$$

$$16.25-15.95=0.30$$

波腹的位置在管口外 0.30cm 处.

(3) 因为人耳对于声音强度的变化不十分灵敏,用此法测量空气中的声速难于精确.不过未用什么仪器设备,测量结果还相当精确,工作值得称赞.

3.5.6 小提琴上的琴弦长 L,可认为两端是固定的,空弦的基频为 ν_0,提琴手在离一

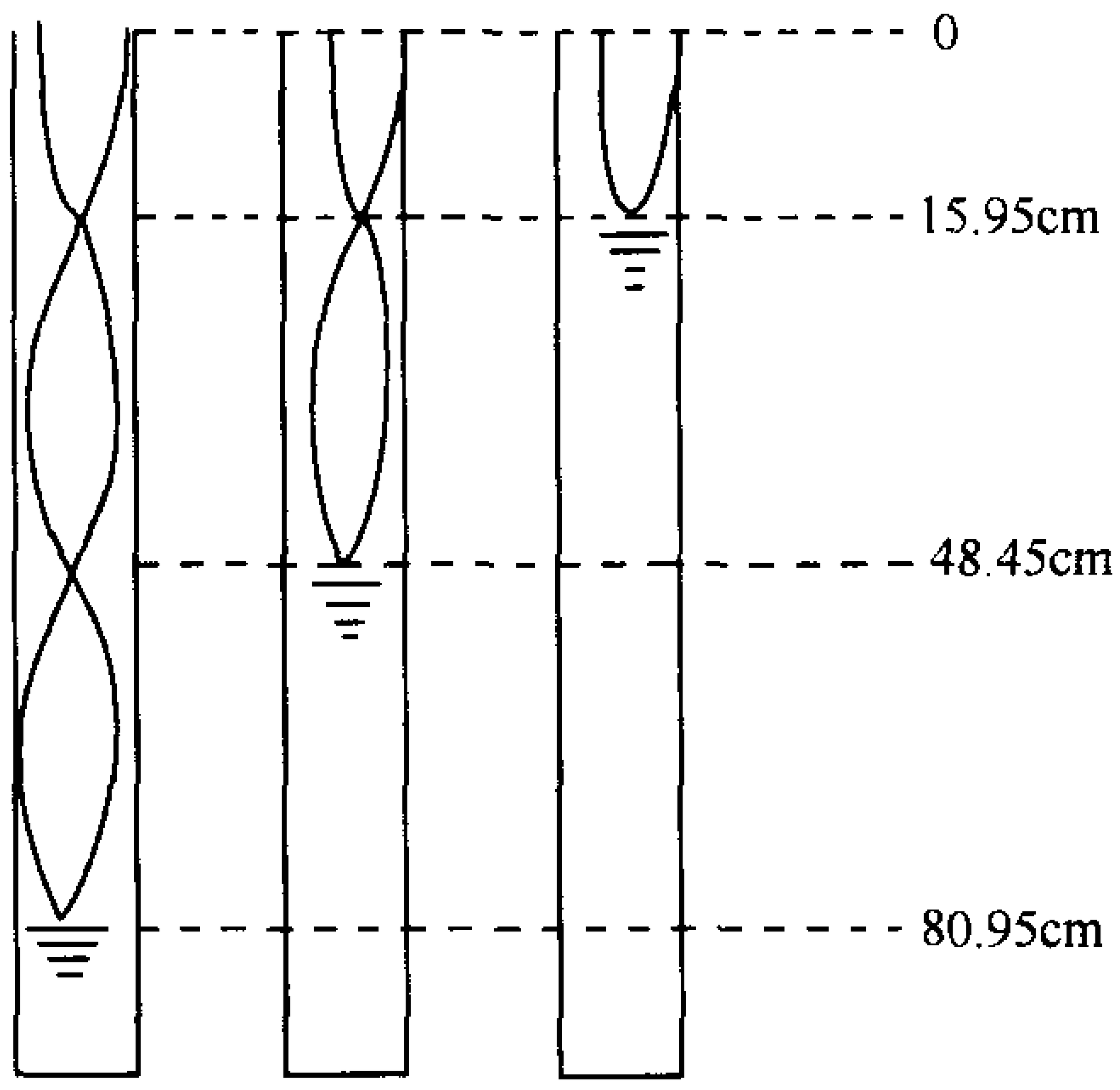


图 3.68

端$\frac{L}{4}$距离处用弓拉弦，另外用手轻轻按在弦的中点．

(1) 问在这些条件下，他能激发的最低频率多大？示意地画出弦振动时的形状；

(2) 在此条件下，一次谐波的频率多大？

解　(1)在此情况下，弦参与振动的实际长度为$\frac{L}{2}$，考虑到离端点$\frac{L}{4}$处只能是波腹，

$$\frac{L}{2}=(2n-1)\frac{\lambda_n}{2}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

能激发的最低频率的波长

$$\lambda_1=L$$

最低频率

$$\nu_1=\frac{v}{\lambda_1}=\frac{\lambda_0\nu_0}{\lambda_1}=\frac{2L\nu_0}{L}=2\nu_0$$

其中 ν_0、λ_0 分别是空弦的基频及其波长．

激发最低频率振动时某时刻弦的形状如图 3.69 所示．

(2)在此情况下，一次谐波的频率为

$$\nu_2=\frac{v}{\lambda_2}=\frac{\lambda_0\nu_0}{\frac{1}{3}L}=\frac{2L\nu_0}{\frac{1}{3}L}=6\nu_0$$

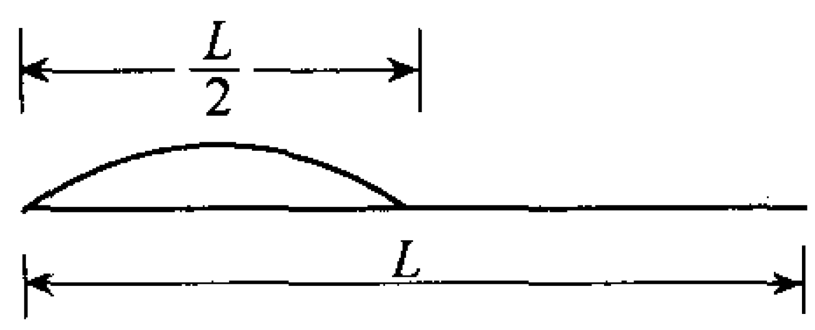


图 3.69

3.5.7　一长为 0.5m 的小提琴弦，其基频为 200Hz.

(1) 横向脉冲在此弦上的传播速度多大？

(2) 画出一脉冲在弦的端点反射前后的图形；

(3) 画出此弦比基频较高的两种振动模式的草图，并给出它们的频率．

解　(1)$\lambda_1=2L$，$v=\lambda_1\nu_1=2L\nu_1=2\times0.5\times200=200$ m/s.

(2) 反射时，波遇波密介质，有半波损失，脉冲反射前后的波形如图 3.70 所示．

(3) 图 3.71 画了比基频较高的两种振动模式，并标出每种模式的频率．

3.5.8　在两个相距为 100cm 的固定点之间张紧一根弦，在 100Hz～350Hz 的频率范

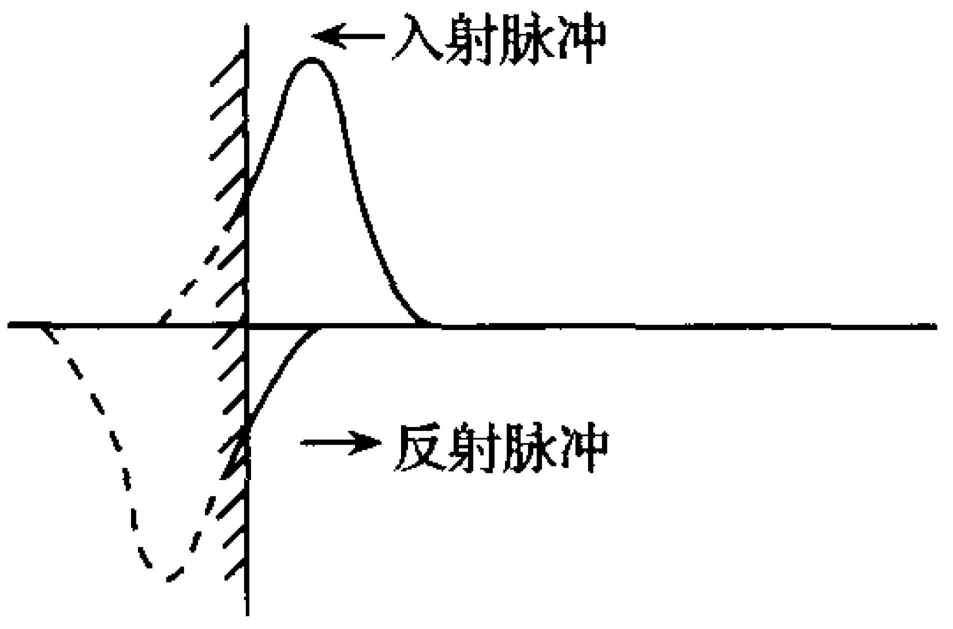


图 3.70

围内,仅有以下频率能被激发:160Hz、240Hz、320Hz,这些振动模式的波长各是多少?

解　$l=n\cdot\frac{\lambda_n}{2},\nu_n=\frac{v}{\lambda_n}=\frac{v}{2l}n$

设 $\nu_n=160\text{Hz},\nu_{n+1}=240\text{Hz},\nu_{n+2}=320\text{Hz}$,则

$$160=\frac{v}{2\times1}n,240=\frac{v}{2\times1}(n+1)$$

两式相减,$\frac{v}{2}=80,v=160\text{m/s}$.

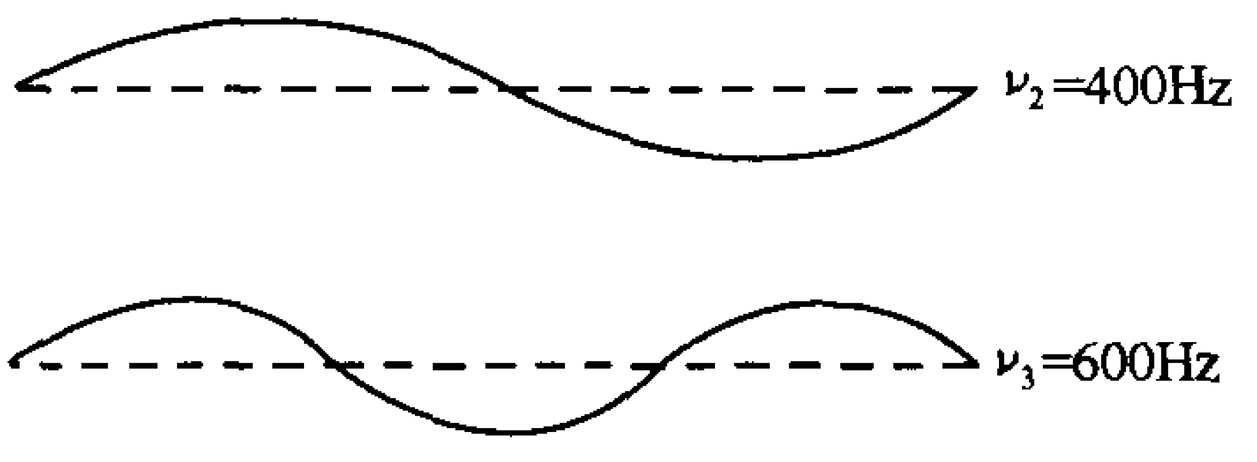


图 3.71

将 v 代入上述两式任何一式,可得 $n=2$,

$$\lambda_n=\frac{2l}{n}=\frac{2\times1}{2}=1(\text{m})$$

$$\lambda_{n+1}=\frac{2l}{n+1}=\frac{2}{3}=0.667(\text{m}),\quad \lambda_{n+2}=\frac{2l}{n+2}=0.5(\text{m})$$

所以 160Hz、240Hz、320Hz 这些振动模式的波长分别为 1m、0.667m 和 0.5m.

3.5.9　抓住或夹住细铝杆的中点,铝杆长 1m,沿着杆的轴线纵向用锤子打击杆的一端,产生 2500Hz 的声波.

(1) 求铝杆中的声速;

(2) 要激发 3750Hz 的声波,手应抓在杆的什么地方?打击不同端有差别吗?

(3) 假如像原来那样,手握杆的中点,但在端点横向而不是纵向打击杆,定性解释为什么合成的声波频率比原来的低.

解　(1)杆的中点是波节,打击的端点为波腹,故产生的声波主要是基波,波长与杆长的关系为

$$\frac{1}{4}\lambda=\frac{1}{2}l,\qquad \lambda=2l$$

声速　$v=\lambda\nu=2l\nu=2\times1\times2500=5000(\text{m/s})$

(2) 要激发频率为 3750Hz 的声波,设其波长为 λ,

$$v=\lambda\times3750,\qquad \lambda=\frac{v}{3750}=\frac{5000}{3750}=\frac{4}{3}(\text{m})$$

手抓的点离打击点的距离等于$\frac{1}{4}\lambda$,为$\frac{1}{3}$m,即手抓住离打击点三分之一杆长处.

打击两端,激发的声波频率是不同的,打击另一端,$\frac{1}{4}\lambda=\frac{2}{3}$m,$\lambda=\frac{8}{3}$m,声速一定,波

长为两倍,频率为一半,激发的声波频率为$\frac{1}{2}\times3750=1875(\text{Hz})$.

(3) 在铝杆中传播纵波的波速$v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$,其中Y是杨氏模量,ρ为密度,传播横波的波速$v=\sqrt{\frac{N}{\rho}}$,其中N为切变模量,$N<Y$,因此传播横波的声速小于纵波声速,手都是握杆的中点,两波的波长相同,$\nu=\frac{v}{\lambda}$,$v_t<v_l$,$\lambda_t=\lambda_l$,$\therefore\nu_t<\nu_l$,以上脚标“t”表示横波,“l”表示纵波,这就解释了为什么横向打击激发的合成声波频率比纵向打击的低.

3.5.10 在温度为300K的空气中,假设频率为10^3Hz的平面驻声波引起压强变化的幅值为1dyn/cm^2(周围压强为10^6dyn/cm^2).试估计此波动引起空气分子位移振幅的量值.

解 驻波的表达式为

$$y=A\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right)\cos\omega t$$

压强的增量

$$\Delta p=-K\frac{\partial y}{\partial x}=KA\frac{\omega}{v}\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right)\cos\omega t$$

其中K是气体的体积弹性模量,

$$v=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

所以

$$K=\rho v^2$$

压强变化的幅值

$$p_m=KA\frac{\omega}{v}=\rho v^2A\frac{\omega}{v}=\rho\omega vA$$

其中ρ为空气密度.

设空气摩尔质量为μ,体积为V的空气质量为M,

$$pV=\frac{M}{\mu}RT$$

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{p\mu}{RT}$$

上述写的驻波表达式,位移振幅$y_m=A$,

$$y_m=A=\frac{p_m}{\rho\omega v}=\frac{p_mRT}{2\pi\nu vp\mu}$$

代入$p_m=1\text{dyn/cm}^2=10^{-1}\text{Pa}$,$R=8.31\text{J/(mol}\cdot\text{K)}$,$T=300\text{K}$,$\nu=10^3\text{Hz}$,$v=340\text{m/s}$,$p=10^6\text{dyn/cm}^2=10^5\text{Pa}$,$\mu=29\times10^{-3}\text{kg/mol}$,

$$y_m=4\times10^{-8}\text{m}$$

3.5.11 (1)对于一端封闭的管子,画出其第二振动模式的空气位移图和压强变化图;

(2) 上述第二振动模式的频率与基频有何关系?

解　(1)设管子长 L,$x=0$ 端封闭,$x=L$ 端开口,因为 $x=0$ 端是固定点(波节)的,

$$y_n = A_n \sin\left(\frac{\omega_n x}{v}\right)\cos\omega t$$

$$L = (2n-1)\cdot\frac{\lambda_n}{4} \qquad n=1,2,\cdots$$

对第二振动模式,$n=2$,$L=\frac{3}{4}\lambda_2$,$\lambda_2=\frac{4}{3}L$,

$$y_2 = A_2\sin\left(\frac{2\pi\nu_2}{\lambda_2\nu_2}x\right)\cos\omega t = A_2\sin\left(\frac{3\pi}{2L}x\right)\cos\omega t$$

$$\Delta p = -K\frac{\partial y}{\partial x} = -K\frac{3\pi}{2L}A\sin\left(\frac{3\pi}{2L}x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\omega t$$

$$=\frac{3\pi}{2L}KA\sin\left(\frac{3\pi}{2L}x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\omega t$$

图 3.72 画出了该模式各处位移的“振幅”,打引号标明它不单是通常的振幅,还包含了相互间的相位关系．图 3.73 画出了该模式各处压强变化的“振幅”.

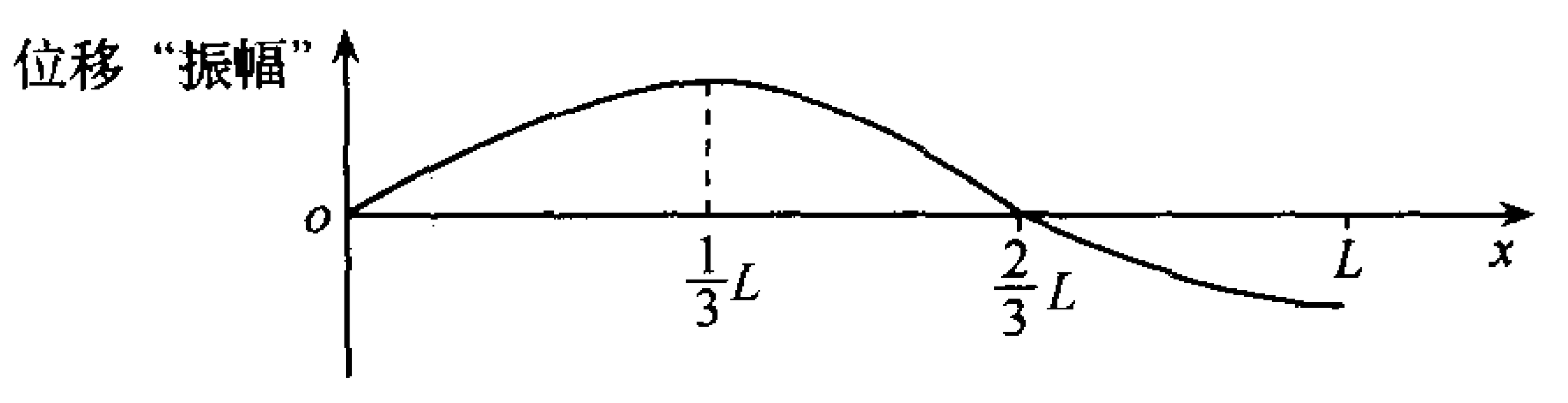


图 3.72

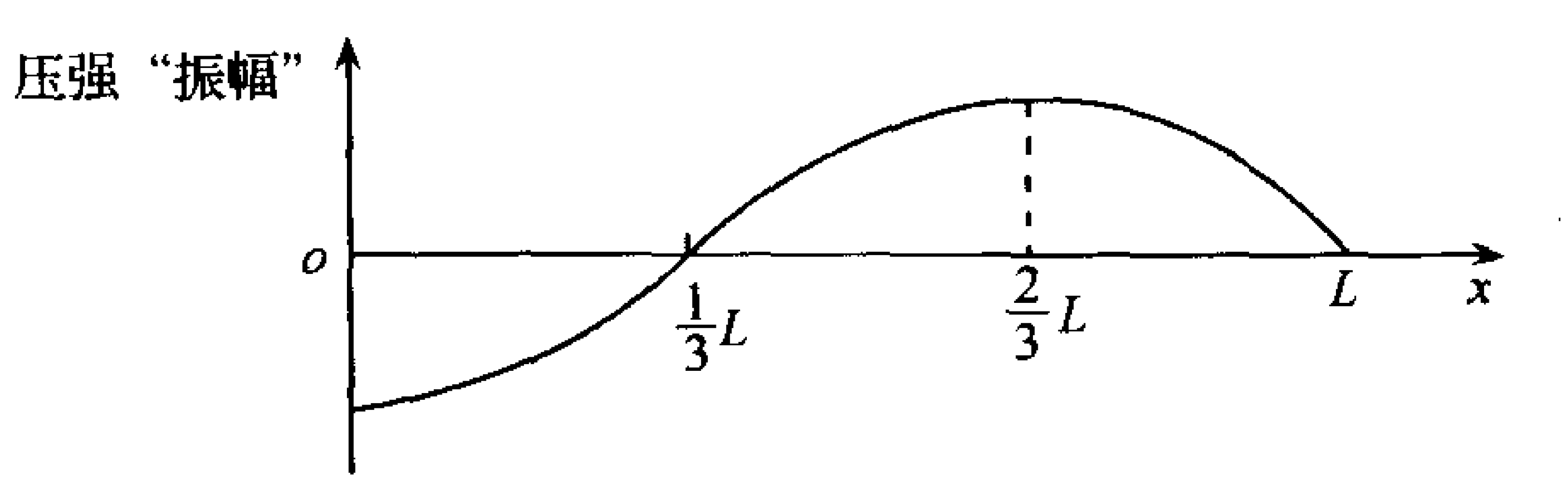


图 3.73

(2)$L=(2n-1)\frac{\lambda_n}{4}$

基频　　　　$L=(2\times1-1)\cdot\frac{\lambda_1}{4}=\frac{1}{4}\lambda_1$

第二振动模式,$L=(2\times2-1)\frac{\lambda_2}{4}=\frac{3}{4}\lambda_2$

$$v=\lambda\nu,\qquad \lambda_1\nu_1=\lambda_2\nu_2$$

$$\nu_2=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\nu_1=\frac{4L}{\frac{4}{3}L}\nu_1=3\nu_1$$

3.5.12　一吉他弦线长 80cm,其基频为 400Hz,做此基频的振动,使弦中点的最大位移为 2cm,如弦中张力 $T_0=10^6$dyn,试问作用于弦支承端点的作用力的垂直于弦平衡位置的分量的最大值有多大?

解　沿弦的平衡位置取 x 轴,$x=0$ 为支承端点,$x=l$ 为固定点,$x=0$ 也近似视为固

定点．

做基频振动，$\nu=400\text{Hz}$，$\lambda=2l=1.6\text{m}$，$\omega=2\pi\nu=800\pi\text{s}^{-1}$，$v=\lambda\nu=640\text{ms}^{-1}$.

弦上形成的驻波方程为

$$y = A\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)\cos\omega t$$

由中点的最大位移知，$A=2\text{cm}=0.02\text{m}$.

作用于支承点的作用力的垂直于弦平衡位置的分量为

$$F = T_0\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=0} = T_0A\frac{\omega}{v}\cos\omega t$$

$$F_{\max} = T_0A\frac{\omega}{v} = \frac{10^6}{10^5}\times 0.02\times\frac{800\pi}{640} = 0.79(\text{N})$$

3.5.13　一根长 L 的弦由两种线密度的弦相连而成，右边$\frac{2}{3}L$ 长的弦线密度为 η，左边$\frac{1}{3}L$ 长的弦线密度为 4η，张力为 T_0，两端固定．求基频和第一、第二、第三、第四泛音频率．

解　弦线的波动方程为

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - \frac{T_0}{4\eta}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < \frac{1}{3}L$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\eta}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{1}{3}L < x < L$$

边界条件为

$$y_1(0,t) = 0, \qquad y_2(L,t) = 0$$

$$y_1\left(\frac{1}{3}L,t\right) = y_2\left(\frac{1}{3}L,t\right)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}L} = \frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}L}$$

$\left(\text{来自} -T_0\frac{\partial y_1}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}L} + T_0\frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}L} = 0\right)$

由前两个边界条件，可以由分离变量法解得

$$y_1(x,t) = (A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\sin\left(\frac{\omega}{v_1}x\right) \qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}L$$

$$y_2(x,t) = (A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t)\sin\left(\frac{\omega}{v_2}(L-x)\right) \qquad \frac{1}{3}L\leqslant x\leqslant L$$

其中
$$v_1=\sqrt{\frac{T_0}{4\eta}},\quad v_2=\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$$

由后两个边界条件，并注意到 $v_2=2v_1$，得

$$(A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right) = (A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t)\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)$$

$$(A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\frac{\omega}{v_1}\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right) = (A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t)\left(-\frac{\omega}{2v_1}\right)\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)$$

由等号两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 的系数分别相等，得

$$A_1\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)-A_2\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$$

$$A_1\frac{\omega}{v_1}\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)+A_2\frac{\omega}{2v_1}\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$$

$$B_1\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)-B_2\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$$

$$B_1\frac{\omega}{v_1}\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)+B_2\frac{\omega}{2v_1}\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$$

由 A_1、A_2 及 B_1、B_2 有非零解的条件：系数行列式等于零，可得

$$\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0\quad 或\quad \cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$$

由 $\sin\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$，$\omega$ 可取

$$\omega=\frac{3n_1\pi v_1}{L}\qquad (n_1=1,2,\cdots)$$

由 $\cos\left(\frac{\omega L}{3v_1}\right)=0$，$\omega$ 可取

$$\omega=\frac{3(2n_2-1)\pi v_1}{2L}\qquad (n_2=1,2,\cdots)$$

基频：　$n_2=1,\omega_1=\frac{3\pi v_1}{2L},\nu_1=\frac{3}{4L}\sqrt{\frac{T_0}{4\eta}}=\frac{3}{8L}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$

第一泛音：　$n_1=1,\omega_2=\frac{3\pi v_1}{L},\nu_2=\frac{3}{4L}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$

第二泛音：　$n_2=2,\omega_3=\frac{9\pi v_1}{2L},\nu_3=\frac{9}{8L}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$

第三泛音：　$n_1=2,\omega_4=\frac{6\pi v_1}{L},\nu_4=\frac{3}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$

第四泛音：　$n_2=3,\omega_5=\frac{15\pi v_1}{2L},\nu_5=\frac{15}{8L}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}$

3.5.14 线密度为 η、长为 l 的琴弦两端固定，受张力 T_0 作用，设在 $t=0$ 时，将弦的中点由平衡位置拨到距离 $s(s\ll l)$ 处，使形成一等腰三角形，然后将弦静止释放．求弦的运动．

解

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{T_0}{\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0\tag{1}$$

满足边界条件和初始条件如下：

$$y(0,t)=0,\qquad y(l,t)=0\tag{2}$$

$$y(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2s}{l}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2}\\[2mm] 2s\left(1-\dfrac{x}{l}\right) & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}\tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

用分离变量法，设 $y(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程(1)，可得

$$X\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} - \frac{T_0}{\eta}T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = \frac{T_0}{\eta}\cdot\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$$

等号两边只能是常量，而且只能是负值，设为 $-\omega^2$.

$$\frac{T_0}{\eta}\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\omega^2$$

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\eta}{T_0}\omega^2X = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2T = 0$$

$$T(t) = A'\cos\omega t + B'\sin\omega t$$

$$X(x) = C'\cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{T_0}}\omega x\right) + D'\sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{T_0}}\omega x\right)$$

由 $y(0,t)=0$，即 $X(0)=0$，定出 $C'=0$. 由 $y(l,t)=0$，即 $X(l)=0$，

$$\sqrt{\frac{\eta}{T_0}}\omega l = n\pi \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$X(x) = D'\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}t\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

由 $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0$，可知 $B_n=0(n=1,2,\cdots)$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}t\right) \tag{5}$$

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{6}$$

将式(3)给的 $y(x,0)$ 展成式(6)型的级数，或者说将式(3)代入式(6)，

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \begin{cases} \dfrac{2s}{l}x & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\ 2s\left(1-\dfrac{x}{l}\right) & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

两边乘 $\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$，并对 x 由 0 到 l 积分，用

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\delta_{mn}$$

$$A_m=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{2s}{l}x\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}2s\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x\right]$$

经计算可得

$$A_m=\frac{8s}{(m\pi)^2}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

所以

$$y(x,t)=\frac{8s}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}t\right)$$

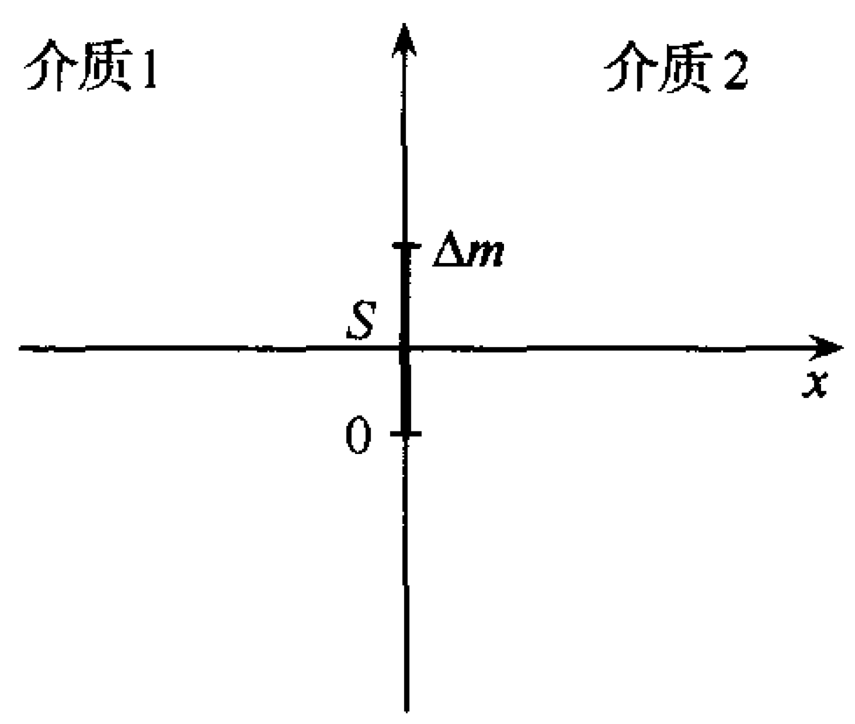


图 3.74

3.5.15 密度为 ρ_1、声速为 v_1 的介质 1，与密度为 ρ_2、声速为 v_2 的介质 2 间有一不可渗透的平面界面，一列压强振幅为 A、频率为 ν 的平面声波自介质 1 垂直射向界面．

(1) 写出在界面上的边界条件；

(2) 用边界条件求出自界面反射回介质 1 的波的压强振幅 A' 和透射到介质 2 的波的压强振幅 B.

解 (1)取入射波的传播方向为 x 轴，两介质的界面位于 $x=0$.

在界面上取一很薄的质元，质元的两个表面分别位于两种介质中，设质元质量为 Δm，表面积为 S，由牛顿运动定律，

$$(p_1-p_2)S=\Delta m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分界面是无限薄的，$\Delta m\to0$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是有限的，因此在界面处有

$$p_1=p_2$$

设平衡时，两边压强为 p_0，$p_1=p_0+\Delta p_1$，$p_2=p_0+\Delta p_2$，因此这个边界条件可写为

$$\Delta p_1|_{x=0}=\Delta p_2|_{x=0}\tag{1}$$

由于界面是不可渗透的，界面两边的介质因声波扰动得到垂直于界面的振动速度 $\frac{\partial y_1}{\partial t}$、$\frac{\partial y_2}{\partial t}$，而两种介质总保持接触(不可渗透)，必有法向速度相等，因此第二个边界条件是

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial t}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial y_2}{\partial t}\right|_{x=0}\tag{2}$$

(2) 我们用波的复数表示法，对于波的压强变化量，可为

入射波：　$\Delta p_1=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_1x)}$，　$(x\leqslant0)$

反射波：　$\Delta p'_1=A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+k_1x)}$，　$(x\leqslant0)$

透射波：　$\Delta p_2=B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_2x)}$，　$(x\geqslant0)$

其中 $k_1=\frac{\omega}{v_1}$，$k_2=\frac{\omega}{v_2}$.

因为

$$\Delta p=-K\frac{\partial y}{\partial x}=-\rho v^2\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\Delta p_1=-\rho_1v_1^2\frac{\partial y_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}=-\frac{1}{\rho v_1^2}\Delta p_1=-\frac{1}{\rho_1v_1^2}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_1x)}$$

对 x 积分(t 视为"常量")

$$y_1=-\frac{1}{\rho_1 v_1^2}A\int e^{i(\omega t-k_1x)}dx$$

$$=\frac{1}{ik_1\rho_1 v_1^2}Ae^{i(\omega t-k_1x)}$$

同样可得反射波和透射波的位移表达式:

$$y'_1=-\frac{1}{ik_1\rho_1 v_1^2}A'e^{i(\omega t+k_1x)}$$

$$y_2=\frac{1}{ik_2\rho_2 v_2^2}Be^{i(\omega t-k_2x)}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}=\frac{\omega}{k_1\rho_1 v_1^2}Ae^{i(\omega t-k_1x)}=\frac{1}{\rho_1 v_1}Ae^{i(\omega t-k_1x)}$$

$$\frac{\partial y'_1}{\partial t}=-\frac{\omega}{k_1\rho_1 v_1^2}A'e^{i(\omega t+k_1x)}=-\frac{1}{\rho_1 v_1}A'e^{i(\omega t-k_1x)}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t}=\frac{\omega}{k_2\rho_2 v_2^2}Be^{i(\omega t-k_2x)}=\frac{1}{\rho_2 v_2}Be^{i(\omega t-k_2x)}$$

在用(1)中给出的两个边界条件时,其中 Δp_1 和$\frac{\partial y_1}{\partial t}$都是入射波和反射波的相应量之和.

由$(\Delta p_1+\Delta p_1')|_{x=0}=\Delta p_2|_{x=0}$,得

$$A+A'=B \tag{3}$$

由$\left(\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial y'_1}{\partial t}\right)\bigg|_{x=0}=\frac{\partial y_2}{\partial t}\bigg|_{x=0}$,得

$$\frac{1}{\rho_1 v_1}A-\frac{1}{\rho_1 v_1}A'=\frac{1}{\rho_2 v_2}B \tag{4}$$

由式(3)、(4)解出

$$A'=\frac{\rho_2 v_2-\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1+\rho_2 v_2}A,\qquad B=\frac{2\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1+\rho_2 v_2}A$$

3.5.16 两根相同的钢琴弦在保持相同的张力时有相同的基频,设基频为 600Hz,试问当这两根弦同时振动时,使其中一根弦增加多大百分比的张力,每秒发生 6 个拍?

解 $\nu_1=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}},\quad \nu_1'=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_0}{\eta}}.$

$$\frac{T'_0}{T_0}=\left(\frac{\nu_1'}{\nu_1}\right)^2,\qquad \nu_{拍}=\nu_1'-\nu_1$$

$$\frac{T'_0-T_0}{T_0}=\frac{\nu_1'^2-\nu_1^2}{\nu_1^2}=\frac{(600+6)^2-(600)^2}{(600)^2}=0.020$$

使其中一根弦增加 2%的张力,每秒可听到 6 个拍.

3.5.17 设有两列声波,一列在空气中,另一列在水中,如果这两列声波的强度相等,水中声波的压强振幅与空气中声波的压强振幅之比多大?若这两列波的压强振幅相等,它们的声强之比多大?

解 声强与声压振幅的关系为

$$I=\frac{1}{2\rho v}p_m^2$$

用脚标 a 表示空气中的物理量，脚标 W 表示水中的物理量．

当 $I_a=I_w$ 时，

$$\frac{1}{2\rho_a v_a}p_{ma}^2=\frac{1}{2\rho_w v_w}p_{mw}^2$$

$$\frac{p_{mw}}{p_{ma}}=\sqrt{\frac{2\rho_w v_w}{2\rho_a v_a}}=\sqrt{\frac{\rho_w v_w}{\rho_a v_a}}$$

当 $p_{ma}=p_{mw}$时，

$$\frac{I_w}{I_a}=\frac{\dfrac{1}{2\rho_w v_w}}{\dfrac{1}{2\rho_a v_a}}=\frac{\rho_a v_a}{\rho_w v_w}$$

3.5.18　两端开口的长为 l 的风琴管可用来测量亚音速风洞中空气的马赫数 v/c，其中 v 是空气的流动速度，c 是在静止空气中的声速．观察到当风琴管固定在洞中不动时，与周期为 T 的基波发生共振．若 $v/c=\frac{1}{2}$，求 T/T_0，T_0 是风琴管置于静止空气中时在基波发生共振的基波周期．

解　方法一：波速公式都是以波在其中传播的介质为参考系的．今风洞中的空气是以速度 v 运动的(对静参考系而言)，以流动的空气为参考系，则对风洞亦即对静系静止的风琴管是以 v 的速率向与空气对静系运动的相反方向运动的．

在基波发生共振，对于两端开口的风琴管，管子长度等于半个波长，可在空气参考系中，管子是逆着空气而运动的，表观长度 l' 小于实际长度 l，其关系为

$$l'=l-v\cdot\frac{T}{2}\tag{1}$$

其中 T 是在流动空气中风琴管的基波周期，$\frac{T}{2}$是此基波通过风琴管所需时间．

$$l'=\frac{\lambda}{2},\qquad l=\frac{\lambda_0}{2}$$

λ、λ_0 分别是风琴管在流动的空气中和在静止的空气中的基波波长．

将上述两式代入式(1)，

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda_0}{2}-v\cdot\frac{T}{2}=\frac{\lambda_0}{2}-\frac{v}{c}\frac{CT}{2}=\frac{\lambda_0}{2}-\frac{v}{c}\frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda=\frac{1}{1+\dfrac{v}{c}}\lambda_0$$

因为

$$\frac{\lambda}{T}=\frac{\lambda_0}{T_0}=C$$

所以

$$\frac{T}{T_0}=\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{1}{1+\dfrac{v}{c}}$$

若$\frac{v}{c}=\frac{1}{2}$，$\frac{T}{T_0}=\frac{2}{3}$.

方法二：此题实际上是多普勒效应问题，用多普勒公式来解．

以空气为参考系，波源不动，发出ν_0频率的波，观察者对风洞是静止的，在空气参考系中是以v的速率向着波源运动的，听到的声波频率为ν，

$$\nu=\frac{c+v}{c}\nu_0$$

其中c为在静止空气中的声速

$$c=\frac{\lambda}{T}=\frac{\lambda_0}{T_0},\qquad c=\lambda\nu=\lambda_0\nu_0$$

$$\frac{T}{T_0}=\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\nu_0}{\nu}=\frac{c}{c+v}=\frac{1}{1+\frac{v}{c}}$$

3.5.19　一汽笛发出频率为1000Hz的声音，该汽笛以10m/s的速率离开你向一悬崖运动，空气中的声速为330m/s．试问：

(1) 你听到的直接从汽笛传来的声波的频率多大？

(2) 你听到从悬崖反射回来的声波频率多大？

(3) 你能否听到拍频？

解　(1)　$\nu=1000\text{Hz}$，　$u_s=-10\text{m/s}$，　$u_0=0$，$v=330\text{m/s}$，

$$\nu'=\frac{v+u_0}{v-u_s}\nu=\frac{330+0}{330-(-10)}\times1000=971(\text{Hz})$$

(2) 悬崖和你之间无相对运动，都对所用的静参考系是静止的，因此你听到悬崖反射回来的声波频率也就是悬崖接收到的声波频率，波源向着悬崖运动．(1)中的ν、u_0、v不变，u_s改为10m/s．

$$\nu'=\frac{330+0}{330-10}\times1000=1030(\text{Hz})$$

(3)　$$1030-971=59(\text{Hz})>7\text{Hz}$$

拍频高于7Hz，难予或说无法分辨声音强弱的变化，因此结论是听不到拍频．

3.5.20　一卡车在其车顶上装有两个扬声器，一个朝前，一个朝后，此卡车以1m/s的速度向你驶来，如果扬声器都以1000Hz的频率振动，问你听到的由直接传来的声音和由汽车后一建筑物反射的回声形成的拍频等于多少？（取声速为330m/s）

解　观察者听到直接从扬声器传来的声音频率

$$\nu_1=\frac{c}{c-v}\nu=\frac{330}{330-1}\times1000=1003(\text{Hz})$$

观察者听到由建筑物反射回来的声音频率

$$\nu_2=\frac{c}{c+v}\nu=\frac{330}{330+1}\times1000=997(\text{Hz})$$

观察者听到的拍频为

$$\nu_{拍}=\nu_1-\nu_2=6\text{Hz}$$

3.5.21　一大学生手持一振动频率为 440Hz 的音叉以 1.2m/s 的速度从一座墙走开．问从墙反射出的回声的音调高于还是低于音叉的音调？大学生听到的拍频多大？声音的速度为 330m/s.

解　由墙反射的回声频率，等于在墙边静止不动的观察者听到的、由走开的大学生持有的音叉传来的声音频率．

$$\nu' = \frac{c}{c - v_s}\nu = \frac{330}{330 - (-1.2)}440 = 438.4(\text{Hz})$$

$\nu' < \nu$，从墙反射的回声的音调低于音叉的音调．可是 ν' 还不是从墙走开的大学生听到的回声的频率，他听到的回声频率为

$$\nu'' = \frac{c + v_0}{c}\nu' = \frac{330 - 1.2}{330}438.4 = 436.8(\text{Hz})$$

走开的大学生听到的回声的音调也是低于音叉的音调的．

走开的大学生听到的拍频

$$\nu_{拍} = \nu - \nu'' = 440 - 436.8 \approx 3(\text{Hz})$$

3.5.22　血液在动脉中流动的速度可以用超声波多普勒频移来测量．假定频率为 1.5×10^6Hz 的超声波被以 1m/s 速度流动的血液反射回来，若超声波在人体组织中的速度为 1500m/s，且超声波以非常小的角度入射，如图 3.75 所示．求入射和反射波之间的频率移动 $\Delta\nu$.

解　反射波的频率为

$$\nu' = \frac{c - v}{c}\nu$$

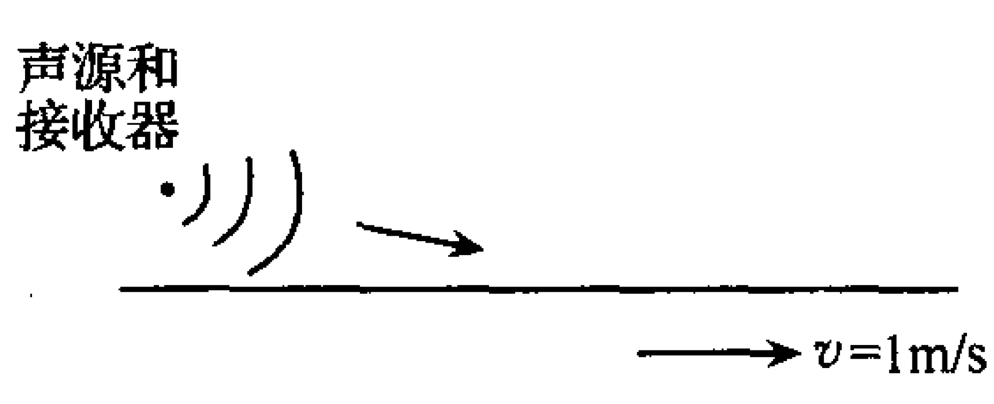


图 3.75

入射波和反射波间的频率移动

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \nu - \frac{c - v}{c}\nu = \frac{v}{c}\nu$$

$$= \frac{1}{1500} \times 1.5 \times 10^6 = 1000(\text{Hz})$$

3.5.23　一站在铁路轨道边的学生听到火车向他驶来和离他而去的汽笛声的频率分别为 250Hz 和 200Hz，假定声音在空气中的速度为 340m/s，问火车的速度多大？

解　设火车汽笛发出的声音频率为 ν_0，学生听到的向他驶来和离他而去的频率分别为 ν_1 和 ν_2，火车速度为 v，

$$\nu_1 = \frac{c}{c - v}\nu_0, \qquad \nu_2 = \frac{c}{c + v}\nu_0$$

$$\nu_1(c - v) = \nu_2(c + v)$$

$$v = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} c = \frac{250 - 200}{250 + 200} \times 340 = 37.8(\text{m/s})$$

3.5.24　一个声学运动探测器发射 50kHz 的信号并接收回声，如果回声有多普勒频移大于 100Hz，运动物体就被记录下来．设空气中的声速为 330m/s，要被探测器记录，运动物体需以多大的速率向着或离开探测器运动？

解　设运动物体向着探测器的速率为 v，空气中声速为 c，探测器发射的频率为 ν，物

体收到的信号频率为 ν'，探测器收到的回声频率为 ν''.

$$\nu' = \frac{c+v}{c}\nu, \qquad \nu'' = \frac{c}{c-v}\nu' = \frac{c+v}{c-v}\nu$$

$$\Delta\nu = \nu'' - \nu = \left(\frac{c+v}{c-v} - 1\right)\nu = \frac{2v}{c-v}\nu$$

$$\frac{\Delta\nu}{2\nu} = \frac{v}{c-v}, \qquad \frac{\Delta\nu}{2\nu+\Delta\nu} = \frac{v}{c}$$

$$v = \frac{\Delta\nu}{2\nu+\Delta\nu}c \approx \frac{\Delta\nu}{2\nu}c = \frac{\pm 100 \times 330}{2 \times 50 \times 10^3} = \pm 0.33(\mathrm{m/s})$$

v 的负值表示物体远离探测器．因此运动物体要能被探测器记录下来，它向着或离开探测器的速率应≥0.33m/s.

3.5.25　火车以 25m/s 的速率行驶，汽笛声的频率为 500Hz，一个人站在离铁轨 100m 处，当人与汽笛的连线与铁轨垂直时取为 $t=0$，问 t 为何值时，人听到的汽笛声的频率比原频率低 25Hz？空气中声速为 330m/s.

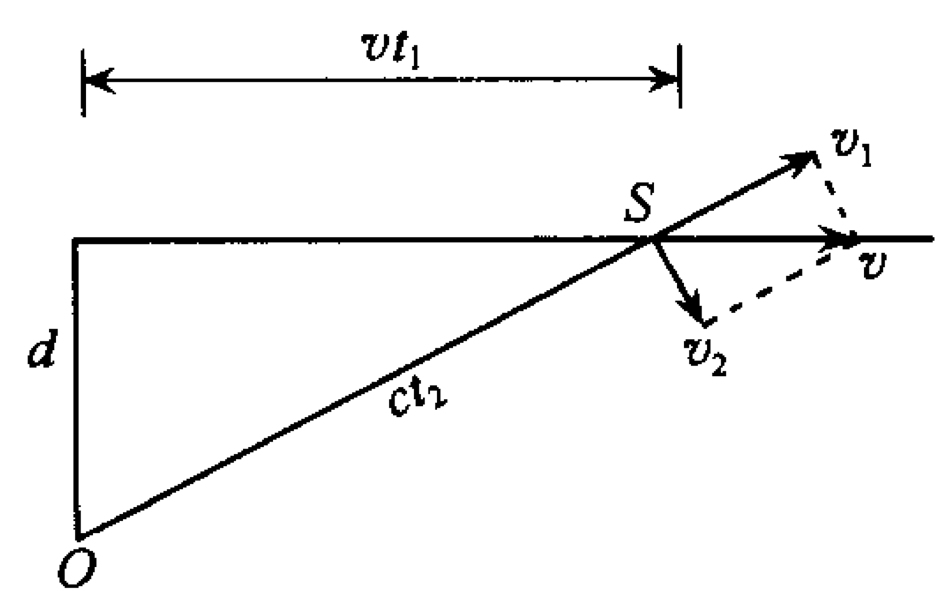


图 3.76

解　听到的频率低于汽笛原发的频率，声源的运动必远离观察者．设观察者听到 t_1 时刻汽笛发出的频率为 $\nu'=500-25=475\mathrm{Hz}$，此时汽笛的速度在汽笛与观察者连线方向的分量为 v_1，如图 3.76 所示．图中 O 为观察者所在位置，v 为火车的速度，c 为空气中的声速，$d=100\mathrm{m}$，t_2 为声音从 S 传到 O 所需时间，

$$\nu' = \frac{c}{c-u_s}\nu = \frac{c}{c+v_1}\nu$$

$$v_1 = c\left(\frac{\nu}{\nu'} - 1\right)$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{vt_1}{\sqrt{d^2+(vt_1)^2}}, \qquad \frac{v_1^2}{v^2} = \frac{v^2t_1^2}{d^2+v^2t_1^2}$$

$$\frac{v_1^2}{v^2-v_1^2} = \frac{v^2t_1^2}{d^2}$$

$$t_1 = \frac{dv_1}{v\sqrt{v^2-v_1^2}}, \qquad t_2 = \frac{\sqrt{d^2+v^2t_1^2}}{c}$$

代入 $c=330\mathrm{m/s}$，$\nu=500\mathrm{Hz}$，$\nu'=475\mathrm{Hz}$，$d=100\mathrm{m}$，$v=25\mathrm{m/s}$，得

$$v_1 = 17.4\mathrm{m/s}, \quad t_1 = 3.86\mathrm{s}, \quad t_2 = 0.42\mathrm{s}$$

观察者听到比原频率低 25Hz 的汽笛声的时刻为

$$t = t_1 + t_2 = 4.28\mathrm{s}$$

3.5.26　声波从波源水平地传向接收器，波源的速率为 u，接收器的速率为 v，向同一方向运动，另有速率为 w 的风也水平地从波源吹向接收器．若波源发射的声波频率为 ν，静止空气中的声速为 V．设风向也与波源、接收器的运动方向一致．试证：接收器收到的频率为

$$\nu' = \frac{V - v + w}{V - u + w}\nu$$

并说明此式的适用范围.

证明　公式 $\nu' = \frac{v+u_0}{v-u_s}\nu$ 中的 v 是波速今有风,以介质为参考系,即以随风运动的空气为参考系,$v=V$(注意:这个 v 是公式中的 v,勿与题目中的 v 发生混淆).

在此参考系中,接收器(观察者)的速度为 $v-w$,波源的速度为 $u-w$,观察者是向远离波源的方向运动,波源是向趋近观察者的方向运动.根据公式中 u_0、u_s 的正负号规定,

$$u_0 = -(v-w), \qquad u_s = u - w$$

将 v、u_0、u_s 代入公式,即得

$$\nu' = \frac{V-(v-w)}{V-(u-w)}\nu = \frac{V-v+w}{V-u+w}\nu$$

公式中 $v<u_s$ 时将出现冲击波,公式不适用,如 $v+u_0<0$,观察者接收不到声波,公式也不适用.因此所证的式子的适用范围是

$$V+w-u>0, \quad V+w-v>0$$

即 $V+w>u$、v.

3.5.27　频率为 ν_0 的声源,在距地面 h 高度处以匀速 u 沿 x 方向做水平运动,一观察者位于地面 $x=0$ 处,$t=0$ 时,声源正经过他的上空,设声速为 v,试证:

(1) t 时刻接收到的信号是声源 t_s 时发出的,

$$t_s = \frac{v^2}{v^2-u^2}\left\{t - \frac{1}{v}\left[h^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)+u^2t^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

(2) t 时刻所接收到的信号的频率作为发出时刻 t_s 的函数为

$$\nu(t_s) = \frac{\nu_0}{1+\frac{u}{v}\frac{ut_s}{(h^2+u^2t_s^2)^{1/2}}}$$

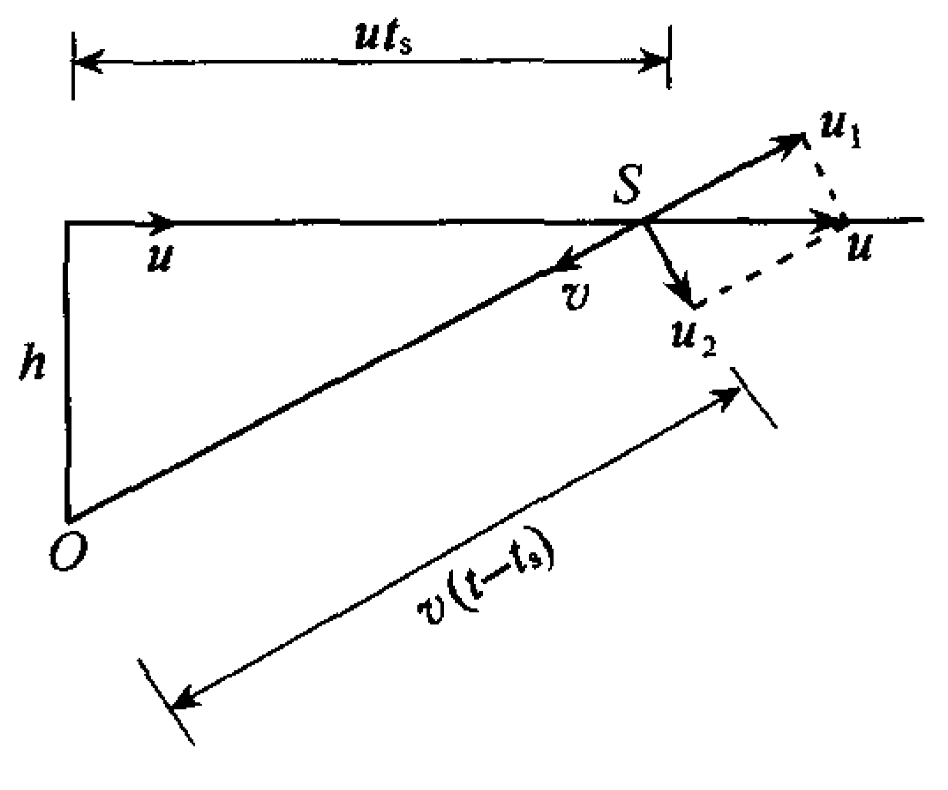


图 3.77

证明　(1)由图 3.77 所示,

$$u^2t_s^2 + h^2 = v^2(t-t_s)^2 = v^2(t^2-2tt_s+t_s^2)$$

$$(v^2-u^2)t_s^2 - 2v^2tt_s + v^2t^2 - h^2 = 0$$

$$t_s = \frac{v^2}{v^2-u^2}\left\{t \pm \frac{1}{v}\left[h^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)+u^2t^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

因 $t-t_s>0$,上式取"+"号的那个解是没有物理意义的,

所以　$$t_s=\frac{v^2}{v^2-u^2}\left\{t-\frac{1}{v}\left[h^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)+u^2t^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

(2) t 时刻听到的声音是声源在 t_s 时刻位于图中 S 处时发出的,在此处,声源有背离观察者的速度分量 u_1.

$$\frac{u_1}{u} = \frac{ut_s}{(h^2+u^2t_s^2)^{1/2}}$$

$$u_1=\frac{u^2t_s}{(h^2+u^2t_s^2)^{1/2}}$$

代入多普勒公式

$$\nu(t_s)=\frac{v}{v-(-u_1)}\nu_0=\frac{\nu_0}{1+\dfrac{u_1}{v}}=\frac{\nu_0}{1+\dfrac{u}{v}\dfrac{ut_s}{(h^2+u^2t_s^2)^{1/2}}}$$

3.5.28 频率为 500Hz 的音叉以 5.0rad/s 的匀角速在半径为 6.0m 的圆周上运动．试求在距圆心 1.2m 处的人听到的最高和最低频率各为多少？设声速为 330m/s.

解 音叉做匀速率圆周运动，速率 u 为

$$u=r\omega=6.0\times5.0=30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

从人所在位置 O 点作圆的两条切线 OA、OB，显然在 A 点 $u_s=u$.

在 A 处音叉发出的频率是听到的最高频率．

$$\nu'_{\max}=\frac{v}{v-u}\nu=\frac{330}{330-30}\times500=550(\text{Hz})$$

在 B 点，$u_s=-u$，在 B 处音叉发出的频率是听到的最低频率，

$$\nu'_{\min}=\frac{v}{v-(-u)}\nu=\frac{330}{330-(-30)}\times500=458(\text{Hz})$$

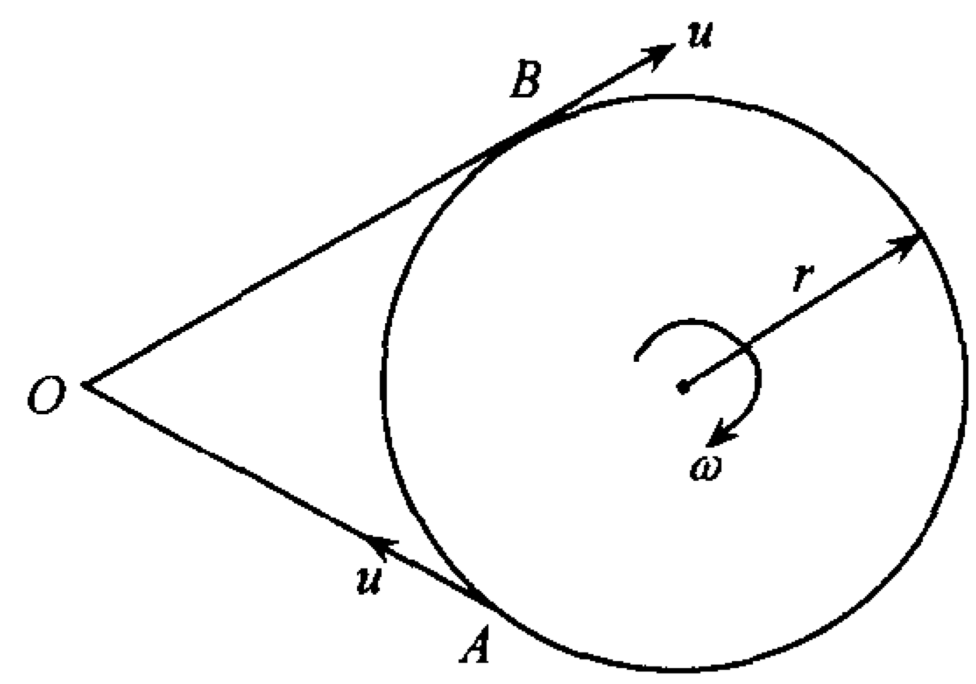


图 3.78

3.5.29 声音在大气中的传播速度为 330m/s，一架飞机以 660m/s 的速度在观察者上方 8000m 高处飞过．问当观察者刚听到飞机隆隆声时，飞机离他的正上方的水平距离有多远？

解 $u_s>v$（声源速度超过声速）是发生冲击波的情况．

如图 3.79 所示，观察者在 A 处听到飞机隆隆声时，飞机已飞到了 S 点．离他的正上方的水平距离为 BS，

$$\because\triangle ABS\sim\triangle OAS,\quad \frac{BS}{h}=\frac{AS}{OA}$$

$$AS=\sqrt{(u_st)^2-(vt)^2},\qquad OA=vt$$

$$BS=h\frac{AS}{OA}=\frac{h}{v}\sqrt{u_s^2-v^2}$$

$$=\frac{8000}{330}\sqrt{(660)^2-(330)^2}=13856(\text{m})$$

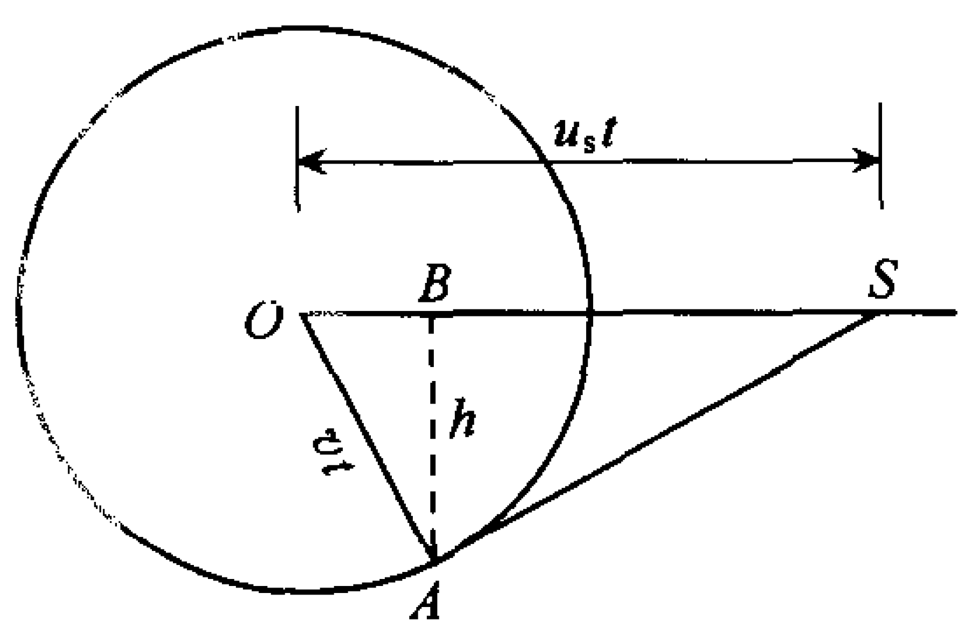


图 3.79

3.5.30 若声音在空气中的速度为 c，声源沿 x 方向运动，运动速度为 v.

(1) $v<c$ 的情况，$t=0$ 时，一个声脉冲由坐标原点发出，画出 t 时刻的波阵面和 t 时刻声源位置之间的关系，仔细地对所作的图加以标记，以 t 时刻波源作为原点，写出波阵面位置的方程；

(2) $v>c$ 的情况，声源发出连续信号，画出由运动声源所产生的波前，说明作图的依据，写下联系波前形

状和其他一些已知量的方程．

解　(1)取两坐标系 $oxyz$ 和 $o'x'y'z'$，$t=0$ 时两坐标系完全重合，x、x' 轴沿声源运动的方向，$oxyz$ 是固定的，o' 固连于声源，$o'x'y'z'$ 为动坐标系．

图 3.80 画了 t 时刻两个坐标系(z,z' 轴垂直纸面向上，图中未画)的位置，声源位于 o' 点，还画出了 t 时刻声脉冲的波阵面，它是以 o 为球心，以 ct 为半径的球面，波阵面位置的方程为

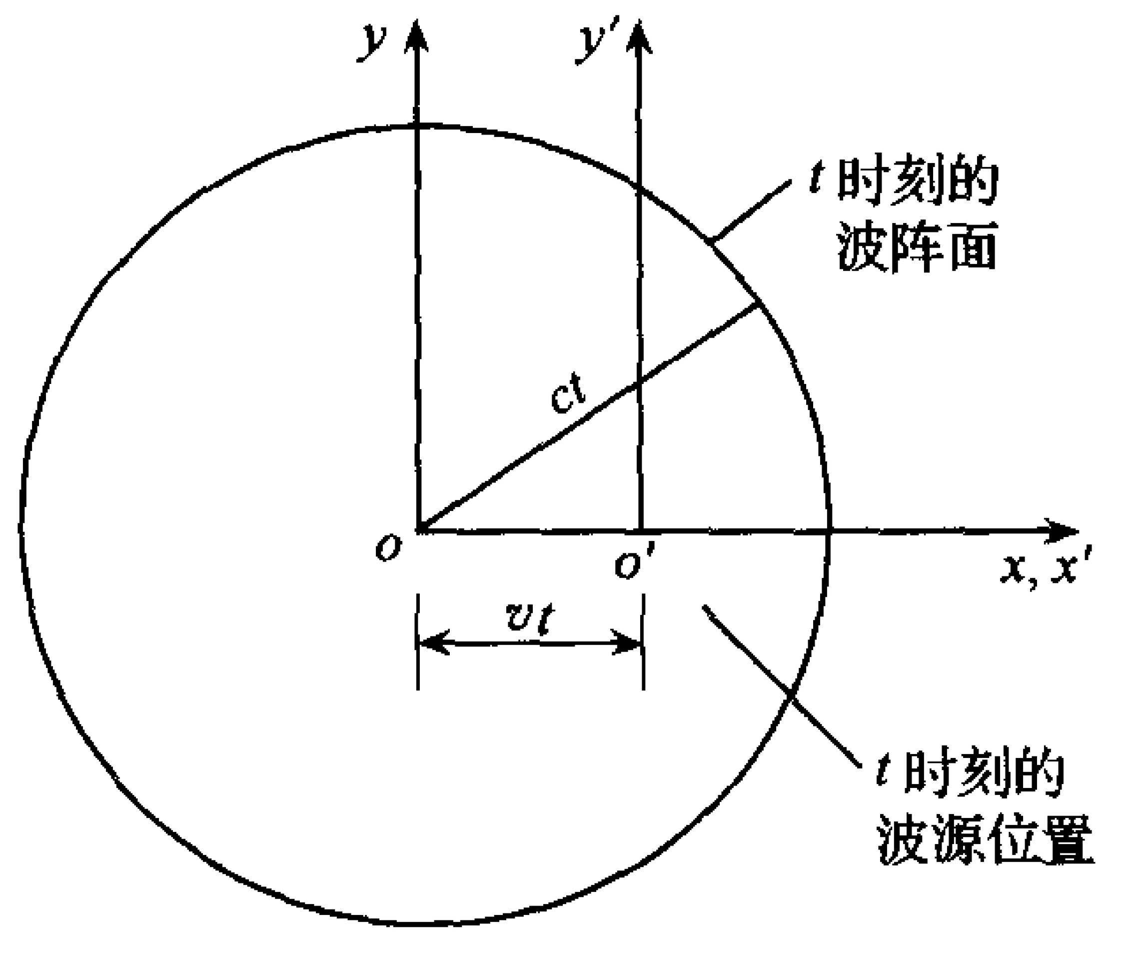


图 3.80

$$x^2+y^2+z^2=(ct)^2$$

题目要求以 t 时刻波源作为原点的坐标系表达，则为

$$(x'+vt)^2+y'^2+z'^2=(ct)^2$$

(2) 如图 3.81 所示．

图 3.81 中，O、S_1、S_2、S 分别是声源在 $t=0$、$t=t_1$、$t=t_2$ 和 t 时刻的位置．

$$OS_1=vt_1,\qquad OS_2=vt_2,\qquad OS=vt$$

在 t 时刻，在 O、S_1、S_2 时声源所发信号的波前均为球面，其半径分别为 ct、$c(t-t_1)$、$c(t-t_2)$，

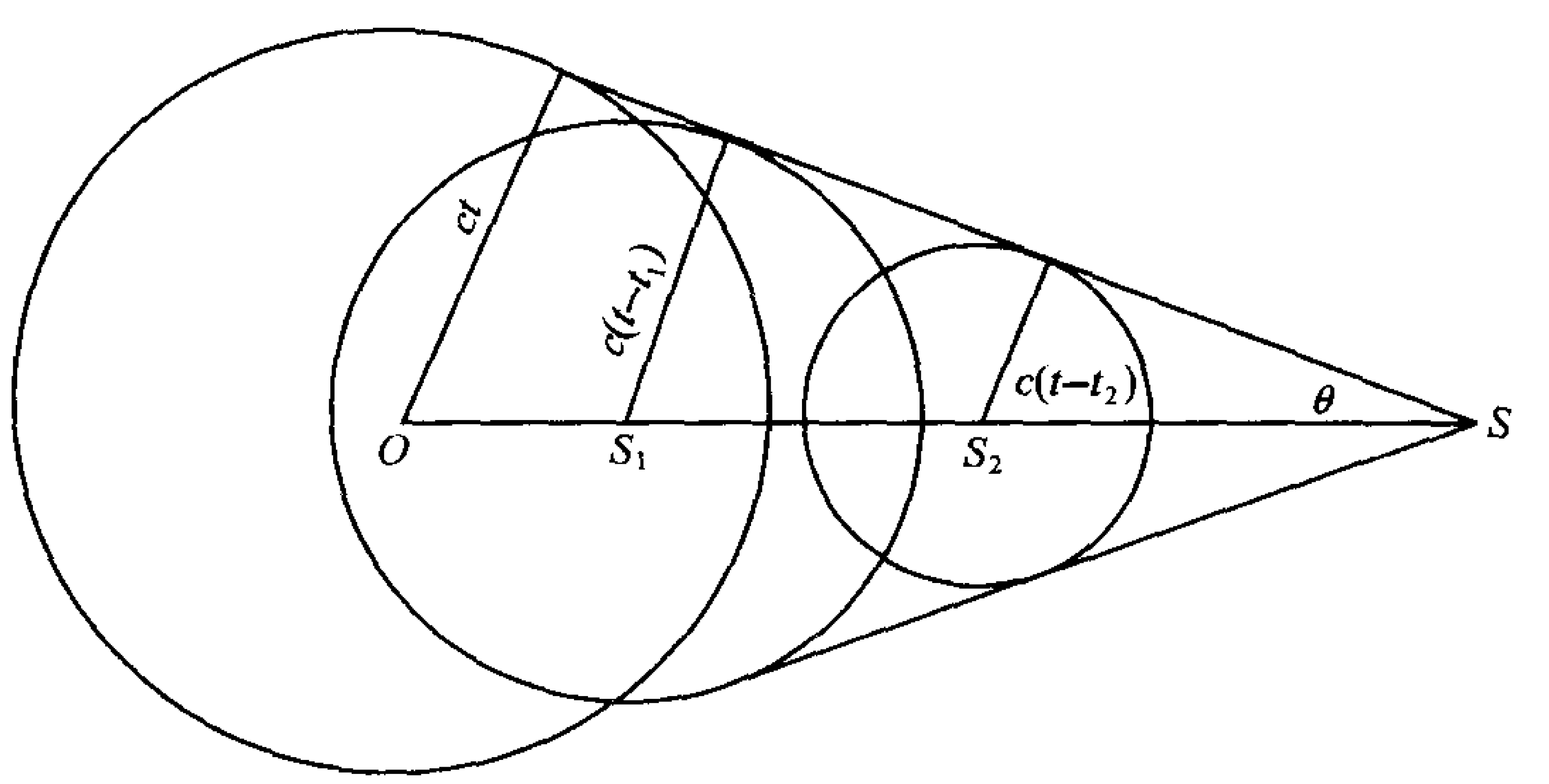


图 3.81

$$\frac{ct}{vt}=\frac{c(t-t_1)}{v(t-t_1)}=\frac{c(t-t_2)}{v(t-t_2)}$$

这些波前的包络是一个以 S 为顶点，θ 为半顶角的圆锥面，如图 3.81 所示．

$$\sin\theta=\frac{ct}{vt}=\frac{c}{v}$$

3.5.31　一架飞机在上空做水平飞行，某时刻，地面上的人同时听到飞机的隆隆声的位置在通过$(2\sqrt{3}\times10^3,\sqrt{2}\times10^2)$点的下述曲线上：

$$x^2-3y^2-2\sqrt{3}\times10^3x+6\times10^4=0$$

x、y 在地面上，均以米为单位. 能否从此曲线求出马赫角 α、飞机飞行的高度 h，并说明飞机航行的方向．

解　某时刻同时听到飞机隆隆声的位置构成的曲线，从方程看是一条双曲线，一个不

通过圆锥的对称轴而又平行于对称轴的平面，截此圆锥面得到的曲线是一条双曲线，可见飞机的隆隆声是冲击波．

假定飞机沿 x 轴飞行，圆锥方程可写成

$$y^2+z^2=a^2(x-x_0)^2$$

$$=a^2(x^2-2x_0x+x_0^2)$$

$$a^2x^2-2a^2x_0x-y^2-z^2+a^2x_0^2=0$$

$$x^2-2x_0x-\frac{1}{a^2}y^2+x_0^2-\frac{1}{a^2}z^2=0 \tag{1}$$

设 z 轴向上为正，飞行高度为 h，地面的 z 坐标为 $z=-h$.

将 $z=-h$ 代入式(1)，

$$x^2-2x_0x-\frac{1}{a^2}y^2+x_0^2-\frac{h^2}{a^2}=0$$

具有所给方程的形式，可见飞机的确沿 x 轴飞行．

比较两个式子可得

$$\frac{1}{a^2}=3,\qquad x_0=\sqrt{3}\times 10^3\text{m}$$

$$x_0^2-\frac{h^2}{a^2}=6\times 10^4$$

解出

$$h=a\sqrt{x_0^2-6\times 10^4}=990\text{m}$$

图 3.82 画出了用 $z=-h$ 平面截圆锥面得到的双曲线，题目所给的是其中的一支．A、B 两点的 x 坐标是

$$\begin{cases}x^2-3y^2-2\sqrt{3}\times 10^3x+6\times 10^4=0\\ y=0\end{cases}$$

的解.

$$x^2-2\sqrt{3}\times 10^3x+6\times 10^4=0$$

$$x=\frac{2\sqrt{3}\times 10^3\pm\sqrt{12\times 10^6-24\times 10^4}}{2}$$

$$=\sqrt{3}\times 10^3\pm\sqrt{3}\times 10^3\times(1-2\times 10^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{3}\times 10^3\pm\sqrt{3}\times 10^3\times(1-10^{-2})$$

$$x_A=2\sqrt{3}\times 10^3-\sqrt{3}\times 10=3.447\times 10^3\text{m}$$

$$x_B=\sqrt{3}\times 10=17.32\text{m}$$

由曲线通过$(2\sqrt{3}\times 10^3,\sqrt{2}\times 10^2)$点可知，同时听到隆隆声的在右边一支双曲线上．由此可以肯定飞机沿 x 轴负方向飞行．

由图 3.83 可求马赫角，

$$\alpha=\arctan\left(\frac{h}{x_A-x_0}\right)$$

$$=\arctan\left(\frac{990}{3.447\times 10^3-1.732\times 10^3}\right)=30^\circ$$

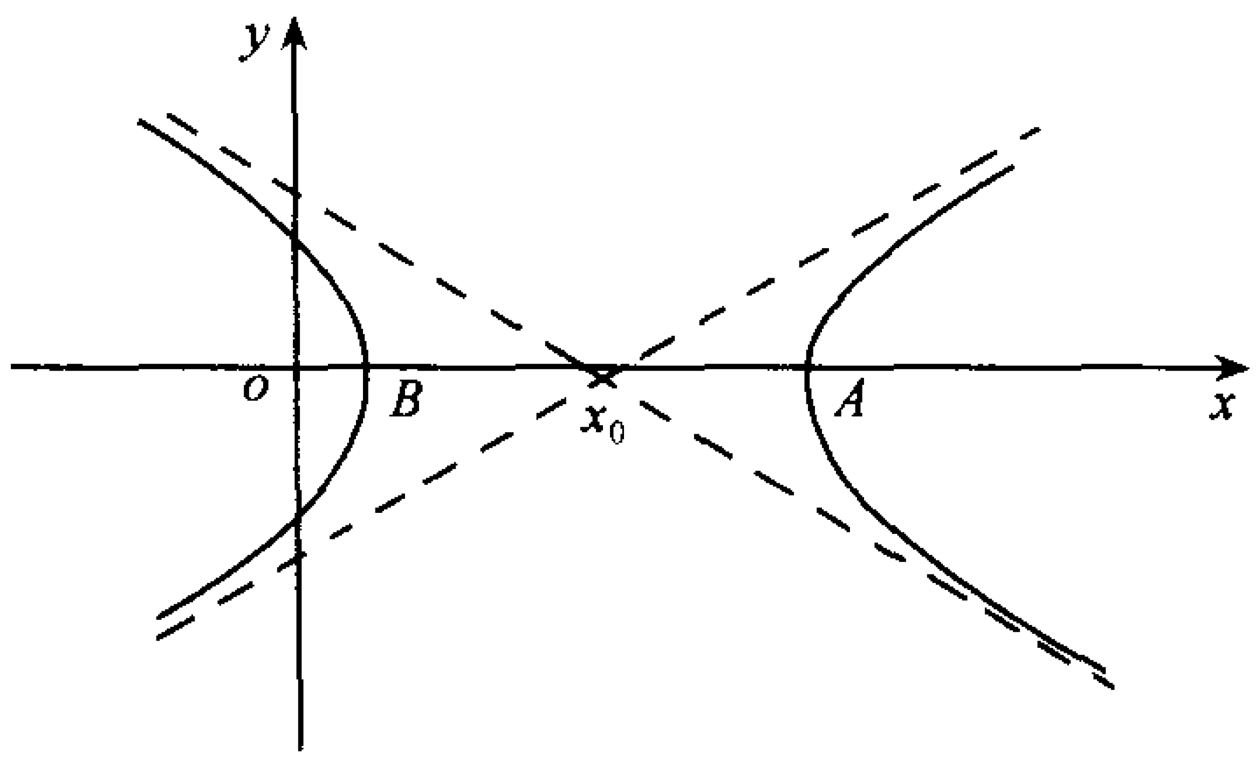


图 3.82

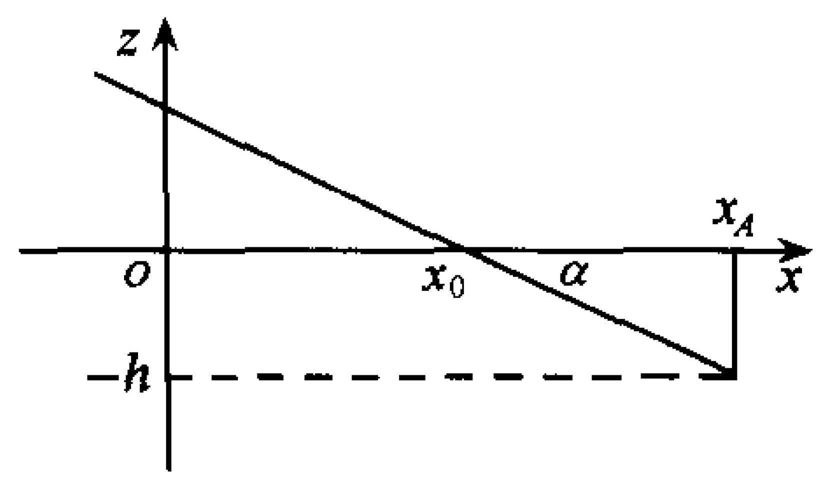


图 3.83

或从 $y^2+z^2=a^2(x-x_0)^2$,

求得 $\alpha=\arctan\dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{x-x_0}=\arctan a=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=30°$

第四章　有 心 运 动

4.1　一般有心力作用下的运动

4.1.1　一质量为 m 的质点沿着由 $x=x_0\cos\omega_1 t, y=y_0\sin\omega_2 t$ 给定的轨道运动．

(1) 求作用力的 x 分量和 y 分量，问在什么情况下这个力是有心力；

(2) 求势能 $V(x,y)$；

(3) 求动能，证明质点的机械能守恒．

解　(1)

$$x=x_0\cos\omega_1 t$$

$$\dot{x}=-x_0\omega_1\sin\omega_1 t,\quad \ddot{x}=-x_0\omega_1^2\cos\omega_1 t$$

$$y=y_0\sin\omega_2 t$$

$$\dot{y}=y_0\omega_2\cos\omega_2 t,\quad \ddot{y}=-y_0\omega_2^2\sin\omega_2 t$$

$$F_x=m\ddot{x}=-mx_0\omega_1^2\cos\omega_1 t$$

$$F_y=m\ddot{y}=-my_0\omega_2^2\sin\omega_2 t$$

$$F_x=-m\omega_1^2 x,\quad F_y=-m\omega_2^2 y$$

如 $\omega_1=\omega_2$，则 $\boldsymbol{F}=-m\omega_1^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=-m\omega_1^2\boldsymbol{r}$，为有心力．

(2)

$$\mathrm{d}V=-F_x\mathrm{d}x-F_y\mathrm{d}y=m\omega_1^2x\mathrm{d}x+m\omega_2^2y\mathrm{d}y$$

$$V=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)$$

(3)

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m(x_0^2\omega_1^2\sin^2\omega_1 t+y_0^2\omega_2^2\cos^2\omega_2 t)$$

$$V=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x_0^2\cos^2\omega_1 t+\omega_2^2y_0^2\sin^2\omega_2 t)$$

$$E=T+V=\frac{1}{2}m(x_0^2\omega_1^2+y_0^2\omega_2^2)=\text{常量}$$

作用于质点的力是保守力，机械能必守恒．

4.1.2　一个质量为 m 的粒子在大小为$\frac{2m}{r^3}$的有心引力作用下运动．$t=0$ 时，$r=2$，速度的径向和横向分量分别为$\frac{\sqrt{3}}{2}$和 1．证明 $\ddot{r}=\frac{2}{r^3}$，并求 $r(t)$．

解

$$m\ddot{r}=F(r)+\frac{mh^2}{r^3}=-\frac{2m}{r^3}+\frac{mh^2}{r^3}$$

由初始条件知 $h=2\times1=2$，代入上式，即得

$$\ddot{r}=-\frac{2}{r^3}+\frac{4}{r^3}=\frac{2}{r^3}$$

用 $\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}\dot{r}$，上式可改写为

$$\dot{r}\,\mathrm{d}\dot{r}=\frac{2}{r^3}\mathrm{d}r$$

积分上式，用初始条件写积分下限，

$$\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\dot{r}}\dot{r}\,\mathrm{d}\dot{r}=\int_2^r\frac{2}{r^3}\mathrm{d}r$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{4}$$

$$\dot{r}=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}$$

$\left(\dot{r}=-\sqrt{2}\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\right.$不符合初始条件，已舍去．$\left.\right)$

$$\int_2^r\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}\mathrm{d}r=\sqrt{2}\int_0^t\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{r^2-1}-\sqrt{3}=\sqrt{2}\,t$$

$$r=\left[2(t^2+\sqrt{6}\,t+2)\right]^{1/2}$$

4.1.3　一质量为 m 的质点以初速率 v 从无穷远沿一直线运动，力心 P 离此直线的最短距离为 a，有心引力使质点在轨道 $r=c\coth\varphi$ 中运动，求 $F(r)$ 和 $\varphi(t)$.

解　用比耐公式　　$F(u)=-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)$

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{c}\mathrm{th}\varphi,\quad\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{c}\mathrm{sech}^2\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=\frac{2}{c}\mathrm{sech}\varphi\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sech}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{2}{c}\mathrm{sech}\varphi\left[-\frac{2(\mathrm{e}^{\varphi}-\mathrm{e}^{-\varphi})}{(\mathrm{e}^{\varphi}+\mathrm{e}^{-\varphi})^2}\right]=-\frac{2}{c}\mathrm{th}\varphi\,\mathrm{sech}^2\varphi$$

$$=-\frac{2}{c}\mathrm{th}\varphi(1-\mathrm{th}^2\varphi)=-2u(1-c^2u^2)$$

$$F(u)=-mh^2u^2[-2u(1-c^2u^2)+u]$$

$$=ma^2v^2(u^3-2c^2u^5)$$

上式计算中用了 $h=av$.

$$F(r)=ma^2v^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{2c^2}{r^5}\right)$$

$$r^2\dot{\varphi}=h=av$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}c^2\coth^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^t av\mathrm{d}t$$

用积分公式 $\int\coth^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\varphi-\coth\varphi$，

$$\varphi-\coth\varphi=\varphi_0-\coth\varphi_0+\frac{av}{c^2}t$$

4.1.4 求使一个粒子在 $r=a(1+\cos\varphi)$ 的轨道上运动的有心力.

解

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{a(1+\cos\varphi)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\sin\varphi}{a(1+\cos\varphi)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}&=\frac{\cos\varphi}{a(1+\cos\varphi)^2}+\frac{2\sin^2\varphi}{a(1+\cos\varphi)^3}\\&=\frac{1+\cos\varphi}{a(1+\cos\varphi)^2}-\frac{1}{a(1+\cos\varphi)^2}+\frac{2(1-\cos\varphi)}{a(1+\cos\varphi)^2}\\&=u-au^2-2u+\frac{4}{a(1+\cos\varphi)^2}\\&=u-au^2-2u+4au^2=-u+3au^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F&=-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)\\&=-mh^2u^2(-u+3au^2+u)=-3mh^2au^4=-\frac{3mah^2}{r^4}\end{aligned}$$

4.1.5 一个质量为 m 的质点在有心力 $F=-\frac{k}{r^3}$(k 为正值常量)作用下运动,选择总能 E 和角动量 J 的什么值时,它的轨道有 $r=ae^{b\varphi}$(a、b 为常量)形式.

解 方法一:

$$F=-\frac{k}{r^3},\quad V(r)=-\frac{k}{2r^2}$$

$$r=ae^{b\varphi}$$

$$\dot{r}=abe^{b\varphi}\dot{\varphi}=br\dot{\varphi}=\frac{bh}{r}$$

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r)\\&=\frac{1}{2}m\left(\frac{b^2h^2}{r^2}+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{k}{2r^2}\end{aligned}$$

用机械能守恒,

$$E=E(r)|_{r\to\infty}=0,$$

所以

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{b^2h^2}{r^2}+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{k}{2r^2}=0$$

解出

$$h=\sqrt{\frac{k}{m(b^2+1)}},\quad J=mh=\sqrt{\frac{mk}{b^2+1}}$$

方法二:用比耐公式求 h,

$$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=F(u)$$

今

$$u=\frac{1}{a}e^{-b\varphi},\quad F(u)=-ku^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{b}{a}e^{-b\varphi},\quad\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=\frac{b^2}{a}e^{-b\varphi}=b^2u$$

$$-mh^2u^2(b^2u+u)=-ku^3$$

$$h^2=\frac{k}{m(b^2+1)},\quad J=mh=\sqrt{\frac{mk}{b^2+1}}$$

E 的计算略.

4.1.6 求质量为 m 的质点在具有势能 $V=\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{r^2}$($\alpha$、$\beta$ 均为正值常量)的有心力场中运动的轨道,并说明在什么运动条件下,质点将通过力心、趋于力心和飞往无限远,有无可能做周期运动?

解

$$V=\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{r^2},\quad F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=\frac{\alpha}{r^2}-\frac{2\beta}{r^3}$$

$$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=\alpha u^2-2\beta u^3$$

$$mh^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=-\alpha+2\beta u$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\left(1-\frac{2\beta}{mh^2}\right)u=-\frac{\alpha}{mh^2}$$

若 $mh^2>2\beta$,令 $k^2=\frac{mh^2-2\beta}{mh^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2u+\frac{\alpha}{mh^2}=0$$

令

$$u'=u+\frac{\alpha}{mh^2k^2}=u+\frac{\alpha}{mh^2-2\beta}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2u'=0$$

选择适当的基轴,

$$u'=A\cos k\varphi$$

$$u=A\cos k\varphi-\frac{\alpha}{mh^2-2\beta}$$

$$r=\frac{1}{-\frac{\alpha}{mh^2-2\beta}+A\cos k\varphi}$$

$$=\frac{\frac{mh^2-2\beta}{\alpha}}{-1+\frac{A(mh^2-2\beta)}{\alpha}\cos\left(\sqrt{\frac{mh^2-2\beta}{mh^2}}\varphi\right)}=\frac{p}{-1+e\cos k\varphi}$$

其中 $p=\frac{mh^2-2\beta}{\alpha}$,$e=Ap=\frac{A(mh^2-2\beta)}{\alpha}$.

为求 e 或 A 与 E、h 的关系,考虑 $\varphi=0$ 处的动能和势能.

$$\dot{r}=\frac{1}{(-1+e\cos k\varphi)^2}(-ek\sin k\varphi)$$

在 $\varphi=0$ 处,$\dot{r}=0$,$r=\frac{p}{e-1}$,

$$E=\frac{mh^2}{2r^2}+\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{r^2}=\frac{mh^2-2\beta}{2r^2}+\frac{\alpha}{r}$$

$$=\frac{\alpha p}{2\left(\frac{p}{e-1}\right)^2}+\frac{\alpha}{\frac{p}{e-1}}=\frac{\alpha}{2p}(e-1)^2+\frac{\alpha}{p}(e-1)$$

$$\alpha(e-1)^2+2\alpha(e-1)-2pE=0$$

$$e-1=-1\pm\sqrt{1+2pE/\alpha}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2pE}{\alpha}}=\sqrt{1+\frac{2(mb^2-2\beta)E}{\alpha^2}}$$

这里我们取了“+”号，取“−”号也可以，两者的差别在于基轴的取向，不影响我们的讨论，当 $E\geqslant 0$ 时，$e\geqslant 1$，质点将飞往无限远．当 $-\frac{\alpha^2}{2(mh^2-2\beta)}<E<0$ 时，$0<e<1$，质点做有界运动，如 k 是有理数，即 $\sqrt{\frac{mh^2-2\beta}{mh^2}}=\frac{l}{n}$，其中 l、n 均为整数，则质点做周期运动，当 $E=-\frac{\alpha^2}{2(mh^2-2\beta)}$ 时，$e=0$，质点做圆周运动，自然是周期运动．

在 $mh^2>2\beta$ 的情况下，不论 E 为何值，质点都不可能通过力心，也不趋于力心．

若 $mh^2=2\beta$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\frac{\alpha}{mh^2}$$

选基轴，使 $\varphi=0$ 时 $\dot{r}=0$，

因为 $\dot{r}=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$，　$h\neq 0$，　所以在 $\varphi=0$ 处，　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=0$，

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)=-\frac{\alpha}{mh^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{\alpha}{mh^2}\varphi u=-\frac{\alpha}{2mh^2}\varphi^2+u_0$$

$$r=\frac{1}{u_0-\frac{\alpha}{2mh^2}\varphi^2}=\frac{1}{\frac{1}{r_0}-\frac{\alpha}{2mh^2}\varphi^2}$$

当 $\frac{1}{r_0}-\frac{\alpha}{2mh^2}\varphi^2\to 0$，即 $\varphi^2\to\frac{2mh^2}{\alpha r_0}$ 时，$r\to\infty$，质点将在 $-\sqrt{\frac{2mh^2}{\alpha r_0}}<\varphi<\sqrt{\frac{2mh^2}{\alpha r_0}}$ 范围内运动，质点一定飞往无限远．

若 $mh^2<2\beta$，$h\neq 0$，令　　$l^2=\frac{2\beta-mh^2}{mh^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}-l^2u=-\frac{\alpha}{mh^2}$$

令

$$u'=u-\frac{\alpha}{mh^2l^2}=u-\frac{\alpha}{2\beta-mh^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\varphi^2}-l^2u'=0$$

$$u'=A\mathrm{e}^{l\varphi}+B\mathrm{e}^{-l\varphi}$$

$$u=\frac{\alpha}{2\beta-mh^2}+Ae^{l\varphi}+Be^{-l\varphi}$$

$$r=\frac{1}{\dfrac{\alpha}{2\beta-mh^2}+Ae^{l\varphi}+Be^{-l\varphi}} \tag{1}$$

选基轴使 $\varphi=0$ 时，$\dot{r}=0$，即$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=\dfrac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}=0$，并设此处 $r=r_0$，则

$$r_0=\frac{1}{\dfrac{\alpha}{2\beta-mh^2}+A+B}$$

$$A+B=\frac{1}{r_0}-\frac{\alpha}{2\beta-mh^2} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{Ale^{l\varphi}-Ble^{-l\varphi}}{\left(\dfrac{\alpha}{2\beta-mh^2}+Ae^{l\varphi}+Be^{-l\varphi}\right)^2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=0}=\frac{(A-B)l}{\left(\dfrac{\alpha}{2\beta-mh^2}+A+B\right)^2}=0$$

$$A-B=0 \tag{3}$$

由式(2)、(3)得

$$A=B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{\alpha}{2\beta-mh^2}\right)$$

由上式可将式(1)改写为

$$r=\left[\frac{\alpha}{2\beta-mh^2}+\left(\frac{1}{r_0}-\frac{\alpha}{2\beta-mh^2}\right)ch\left(\sqrt{\frac{2\beta-mh^2}{mh^2}}\varphi\right)\right]^{-1}$$

当$\dfrac{1}{r_0}=\dfrac{\alpha}{2\beta-mh^2}$时，质点做圆周运动，是周期运动．当$\dfrac{1}{r_0}\neq\dfrac{\alpha}{2\beta-mh^2}$时，质点将趋于力心．

若 $h=0$，质点做直线运动，取其轨道为 x 轴，

$$m\ddot{x}=\frac{\alpha}{x^2}-\frac{2\beta}{x^3}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\alpha}{x}-\frac{\beta}{x^2}=E$$

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}\right)}$$

$\dot{x}=0$ 时，质点将改变运动方向．

$$E-\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}=0$$

$$Ex^2-\alpha x+\beta=0$$

如 $0<E<\dfrac{\alpha^2}{4\beta}$，$\dot{x}=0$ 的 x 值为

$$x=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta E}}{2E}$$

则质点将在$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta E}}{2E}\leqslant x\leqslant\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta E}}{2E}$内运动，$x=0$ 不在运动范围内，故不通过力心．

如 $E<0$，自然也有 $E<\frac{\alpha^2}{4\beta}$，$\dot{x}=0$ 的 x 值为

$$x=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta E}}{2E}$$

一般讲质点在$\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta E}}{2E}\leqslant x\leqslant\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta E}}{2E}$范围内运动，下界 $x<0$，上界 $x>0$，质点将通过力心．

如 $E>\frac{\alpha^2}{4\beta}$，$Ex^2-\alpha x+\beta=0$ 无实根，质点运动不改变方向，将飞往无限远．

如 $E=\frac{\alpha^2}{4\beta}$，$\dot{x}=0$ 的 x 值为

$$x=\frac{\alpha}{2E}$$

只有一个改变运动方向的点，一般讲质点将做无界运动，因此也将飞往无限远．

如 $E=0$，

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\beta}{x^2}-\frac{\alpha}{x}\right)}$$

当 $x=\frac{\beta}{\alpha}$时，$\dot{x}=0$，也只有一个改变运动方向的点，一般讲也将飞往无限远．

凡是有一处或两处 $\dot{x}=0$，上面讲的都冠以“一般讲”，在特殊情况下，可在此 $\dot{x}=0$ 的点保持静止，上述有界的直线运动是周期运动．

4.1.7　一个质量为 m 的质点在有心力 $F=-\frac{mk^2a^4}{r^3}$（k、a 均为常量）作用下运动．开始位于 $r=a$、$\varphi=\pi$，速度的径向分量和横向分量分别为 $-\frac{ka}{\pi}$ 及 ka，求：

(1) 轨道方程 $r(\varphi)$；

(2) 运动学方程 $r(t)$ 和 $\varphi(t)$．

解　(1)

$$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=-mk^2a^4a^3$$

令 $h=a\cdot ka=ka^2$，轨道微分方程化简为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=0,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=c=\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{t=0}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$$

$t=0$ 时，$r=a$，$r\dot{\varphi}=ka$，$\dot{r}=-\frac{ka}{\pi}$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{t=0}=-\left.\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\right|_{t=0}=-\frac{1}{a}\left(-\frac{ka}{\pi}\right)\frac{1}{ka}=\frac{1}{\pi a}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{\pi a},\quad -\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi a}\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi a}(\varphi-\pi)$$

所以

$$r\varphi=\pi a$$

(2)

$$r^2\dot{\varphi}=h=ka^2$$

将 $r=\frac{\pi a}{\varphi}$ 代入上式,得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi^2}=\frac{k}{\pi^2}\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\pi}=\frac{k}{\pi^2}t$$

$$\varphi=\frac{\pi^2}{\pi-kt},\quad r=\frac{\pi a}{\varphi}=\frac{a}{\pi}(\pi-kt)$$

4.1.8 一个单位质量的物体在一有心力场中运动,它的轨道为 $r=ae^{-b\varphi}$,a、b 均为常量. $t=0$ 时,位于离力心 a 处,径向速度为 k. 求有心力的势能.

解 $r=ae^{-b\varphi},\quad u=\frac{1}{a}e^{b\varphi}$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{b}{a}e^{b\varphi},\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=\frac{b^2}{a}e^{b\varphi}=b^2u$$

$t=0$ 时,$\dot{r}=k$,又 $\dot{r}=-abe^{-b\varphi}\dot{\varphi}$,将 $r=a$ 代入 $r=ae^{-b\varphi}$,可见,此时 $\varphi=0$,

$$\dot{r}=-ab\dot{\varphi}=k,\quad a\dot{\varphi}=-\frac{k}{b}$$

$$h=a^2\dot{\varphi}=-\frac{ka}{b}$$

$$F=-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)$$

$$=-1\cdot\left(-\frac{ka}{b}\right)^2u^2(b^2u+u)=-\frac{k^2a^2(b^2+1)}{b^2r^3}$$

$$V(r)=-\int_\infty^r F(r)\mathrm{d}r=\frac{k^2a^2(b^2+1)}{b^2}\int_{-\infty}^r\frac{1}{r^3}\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{k^2a^2(b^2+1)}{2b^2r^2}\quad \text{(取 }\infty\text{ 为势能零点)}.$$

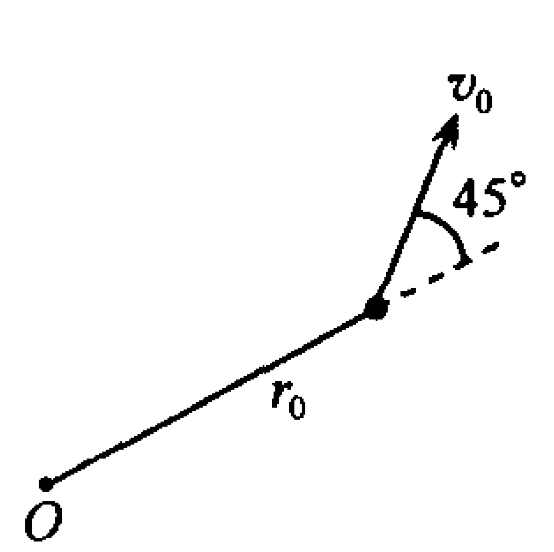


图 4.1

4.1.9 质量为 1g 的质点在有心力的吸引下运动,此力与质点到力心的距离的立方成正比,在距离等于 1cm 时引力等于 1×10^{-5} N,$t=0$ 时,质点与力心的距离为 $r_0=2$cm,速度 $v_0=0.5\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$,其方向与由力心到此质点之直线成 45°角. 求此质点的运动轨道及运动学方程.

解 采用 C G S 单位制,$m=1$g,$F=-\frac{1}{r^3}$(dyn),$t=0$ 时,$r_0=$

2cm，$v_0=0.5\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

由图 4.1 可知，$\dot{r}_0=r_0\dot{\varphi}_0=0.5\sin45°(\text{cm}\cdot\text{s}^{-1})$，

$$h=r_0\cdot r_0\dot{\varphi}_0=2\times0.5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1})$$

将 m、h、F 代入比耐公式，

$$-1\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2u^2\left(\frac{\text{d}^2u}{\text{d}\varphi^2}+u\right)=-u^3$$

$$\frac{\text{d}^2u}{\text{d}\varphi^2}-u=0$$

$$u=A\text{e}^{\varphi}+B\text{e}^{-\varphi}$$

初始条件：$t=0$ 时，$u=u_0=\frac{1}{r_0}=\frac{1}{2}\text{cm}^{-1}$，

$$\left.\frac{\text{d}u}{\text{d}\varphi}\right|_{t=0}=-\left.\left(\frac{1}{r^2}\frac{\text{d}r}{\text{d}\varphi}\right)\right|_{t=0}=-\left.\left(\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\right)\right|_{t=0}$$

$$=-\frac{\dot{r}_0}{r_0\cdot r_0\dot{\varphi}_0}=-\frac{1}{2}\text{cm}^{-1}$$

用初始条件，A、B 满足的方程为

$$A+B=u_0=\frac{1}{2}$$

$$A-B=\left.\frac{\text{d}u}{\text{d}\varphi}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}$$

解出

$$A=0\quad,B=\frac{1}{2}$$

所以

$$u=\frac{1}{2}\text{e}^{-\varphi},\quad r=2\text{e}^{\varphi}$$

$$r^2\dot{\varphi}=h,\quad 4\text{e}^{2\varphi}\frac{\text{d}\varphi}{\text{d}t}=h=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{e}^{2\varphi}\text{d}(2\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{4}\text{d}t$$

取 $t=0$ 时 $\varphi=0$（选择这样的基轴），

$$\text{e}^{2\varphi}-1=\frac{\sqrt{2}}{4}t$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)$$

$$r=2\text{e}^{\varphi}=2\text{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)}=2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)^{1/2}$$

或

$$r^2=4\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)=4+\sqrt{2}t$$

4.1.10 质量为 m 的质点受到的有心力为 $F=-m\left(\frac{\mu^2}{r^2}+\frac{\nu^2}{r^3}\right)$，$\mu$、$\nu$ 都是常数，证明：当 $h^2>\nu^2$(h 为面积速度的两倍)时，其轨道方程有

$$r=\frac{a}{1+e\cos k\varphi}$$

的形式，并给出 a、e、k 与 h、$r_{\min}$等的关系.

证明

$$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=-m(\mu^2u^2+\nu^2u^3)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\left(1-\frac{\nu^2}{h^2}\right)u=\frac{\mu^2}{h^2}$$

令 $u'=u-\dfrac{1}{1-\dfrac{\nu^2}{h^2}}\cdot\dfrac{\mu^2}{h^2}=u-\dfrac{\mu^2}{h^2-\nu^2}$，又因有 $h^2>\nu^2$，还可令 $k^2=1-\dfrac{\nu^2}{h^2}$，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2u'=0$$

选择适当的基轴，

$$u'=A\cos k\varphi,\quad k=\frac{\sqrt{h^2-\nu^2}}{h}$$

$$u=u'+\frac{\mu^2}{h^2-\nu^2}=\frac{\mu^2}{h^2-\nu^2}+A\cos k\varphi$$

$$r=\frac{1}{u}=\frac{1}{\dfrac{\mu^2}{h^2-\nu^2}+A\cos k\varphi}=\frac{\dfrac{(h^2-\nu^2)}{\mu^2}}{1+\dfrac{h^2-\nu^2}{\mu^2}A\cos k\varphi}$$

与

$$r=\frac{a}{1+e\cos k\varphi}$$

相比较，可得

$$a=\frac{h^2-\nu^2}{\mu^2},\quad e=aA,\quad k=\frac{\sqrt{h^2-\nu^2}}{h}$$

当 $\varphi=0$ 时，$r=r_{\min}$，

$$r_{\min}=\frac{a}{1+e},\quad e=\frac{a-r_{\min}}{r_{\min}}$$

4.1.11 质量为 m 的质点 A 在光滑的水平桌面上运动，此质点系在一根可不计质量的、不可伸长的绳子上，绳子穿过桌面上的一个光滑小孔 O 后于另一端系一个相同质量的质点 B. 若质点 A 在桌面上离 O 点 a 处，沿垂直于 OA 的方向以速度 $\left(\frac{9}{2}ag\right)^{1/2}$ 射出. 证明此质点在以后的运动中离 O 点的距离必在 a 及 $3a$ 之间.

证明

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-T$$

$$m\ddot{z}=mg-T$$

$$r+z=\text{常量}$$

$$\ddot{z}=-\ddot{r}$$

消去 T 和 $\ddot{z}$，可得

$$2\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=-g$$

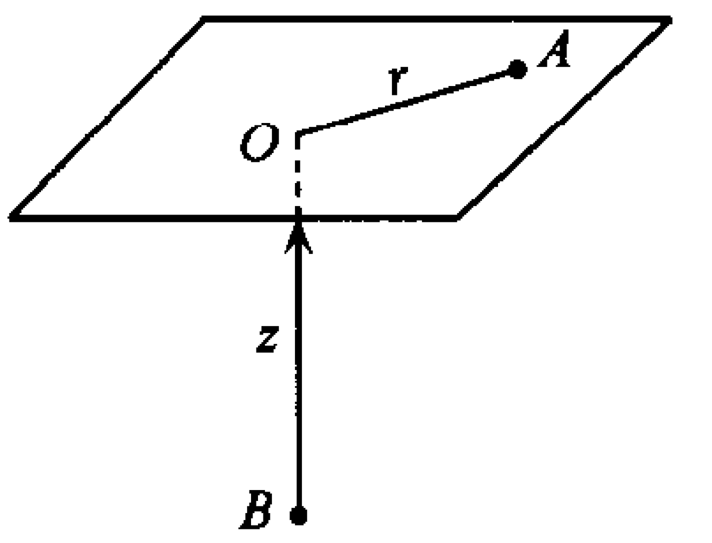


图 4.2

用 $\ddot{r}=\dfrac{d\dot{r}}{dr}\dot{r}$，$h=r^2\dot{\varphi}$，上式可改写为

$$2\dot{r}\,d\dot{r}=\left(\frac{h^2}{r^3}-g\right)dr$$

用初始条件：$t=0$ 时，$r=a$，$\dot{r}=0$，积分上式，得

$$\dot{r}^2=-\frac{h^2}{2r^2}-gr+\frac{h^2}{2a^2}+ga$$

质点 A 在 $r=r_{\min}$ 及 $r=r_{\max}$ 时，$\dot{r}=0$，

$$-\frac{h^2}{2r^2}-gr+\frac{h^2}{2a^2}+ga=0$$

质点 A 受到的合力是有心力，$h=$ 常量，由初始条件 $h=a\cdot\left(\dfrac{9}{2}ag\right)^{1/2}$，将它代入 $r_{\min}$、$r_{\max}$ 满足的方程，可得

$$4r^3-13ar^2+9a^3=0$$

$r=a$ 是方程的一个根，上式等号左边必有一个因子 $(r-a)$，

$$(r-a)(4r^2-9ar-9a^2)=0$$

$$(r-a)(r-3a)(4r+3a)=0$$

$$r=a、3a \text{ 和 } -\frac{3}{4}a$$

舍去 $r=-\dfrac{3}{4}a$ 这个无物理意义的根，得

$$r_{\min}=a,\quad r_{\max}=3a$$

这就证明了质点 A 在 $r=a$ 及 $r=3a$ 间运动．

4.1.12　导出求有心力的公式

$$F=\frac{mh^2}{2}\cdot\frac{dp^{-2}}{dr}$$

式中 m 为质点的质量，r 为质点到力心的距离，h 为角动量与质量之比，p 为力心到轨道切线的垂直距离．

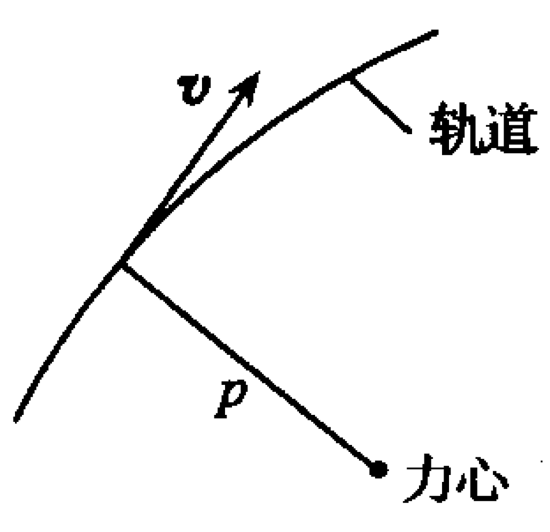


图 4.3

解　方法一：根据 p 与 h 的定义，

$$h=pv$$

$$p^{-2}=\frac{v^2}{h^2}=\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}{h^2}=\frac{\dot{r}^2}{h^2}-\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{dp^{-2}}{dr}=\frac{1}{h^2}\cdot 2\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}-\frac{2}{r^3}=\frac{2}{h^2}\left(\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}\right)$$

$$=\frac{2}{h^2}(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=\frac{2}{mh^2}F$$

所以
$$F=\frac{mh^2}{2}\frac{\mathrm{d}p^{-2}}{\mathrm{d}r}$$

方法二:由牛顿运动定律,

$$F=m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=m\left(\dot{r}\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}-\frac{h^2}{r^3}\right)$$
$$=m\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{r}^2}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}h^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}r}$$

用 $h=pv,v=\dfrac{h}{p}$,上式可改写为

$$F=\frac{1}{2}mh^2\frac{\mathrm{d}p^{-2}}{\mathrm{d}r}$$

方法三:由质点的动能定理,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=F\dot{r}$$
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}r}\dot{r}$$

比较上述两式,

$$F=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}r}$$

以下同方法二.

4.1.13 一个在有心力作用下的粒子的运动轨道为 $r\varphi=$常量,求其势能 $V(r)$.

解
$$F=-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=-\frac{mh^2}{r^3}$$
$$V(r)=-\int_{\infty}^{r}F(r)\mathrm{d}r=\int_{\infty}^{r}\frac{mh^2}{r^3}\mathrm{d}r=-\frac{mh^2}{2r^2}$$

其中 m 为粒子的质量,h 为面积速度的两倍,由初始条件给定.

4.1.14 稠密气体团质量为 m,半径极小,可以忽略,像粒子一样,穿过球状的、半径为 R 的低密度的均匀气体云,气体云总质量为 $M(M\gg m)$,忽略所有非引力作用.

(1) 用"粒子"与云中心的距离 r 表示"粒子"受的力 $F(r)$及其势能 $V(r)$,$(0\leqslant r\leqslant\infty)$,画出 $V(r)$的示意图;

(2) 若"粒子"具有角动量 $J=m\left(\dfrac{GMR}{32}\right)^{1/2}$,总机械能 $E=-\dfrac{5GMm}{4R}$,求轨道的转折点 $r_{\max}$、$r_{\min}$,"粒子"总是在云里?云外?还是有时在云里,有时在云外?

(3) "粒子"具有(2)问所给的 J 和 E,求轨道方程 $r(\varphi)$,并画出示意图,说明有几个转折点.

解 (1) 用万有引力场中的"高斯定理",可写出"粒子"受到均匀气体云的作用力.

在 $0\leqslant r\leqslant R$,

$$F=-G\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\frac{m}{r^2}=-\frac{GMm}{R^3}r$$

在 $R\leqslant r<\infty$，

$$F=-\frac{GMm}{r^2}$$

在 $r\geqslant R$，

$$V(r)=-\int_{\infty}^{r}F(r)\mathrm{d}r=\int_{\infty}^{r}\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{GMm}{r}$$

在 $0\leqslant r\leqslant R$，

$$\begin{aligned}V(r)&=-\int_{\infty}^{R}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)\mathrm{d}r-\int_{R}^{r}\left(-\frac{GMm}{R^3}r\right)\mathrm{d}r\\&=-\frac{GMm}{R}+\frac{GMr}{2R^3}(r^2-R^2)\\&=\frac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^2)\end{aligned}$$

图 4.4 画出了 $V(r)$的示意图.

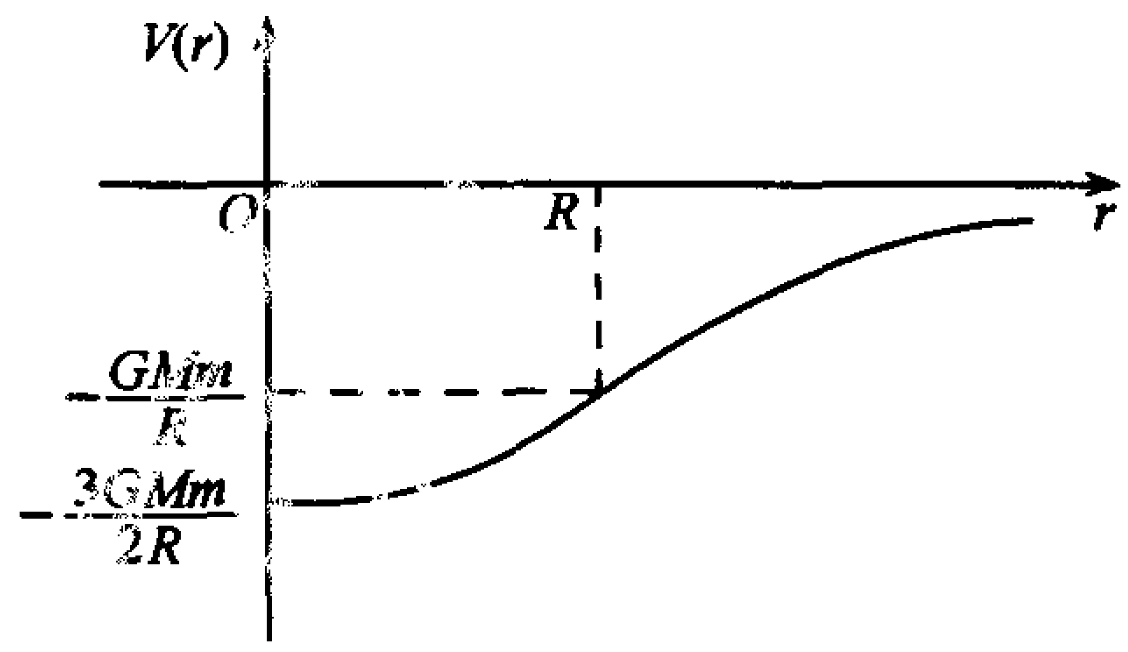


图 4.4

(2)

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)+V(r)=E$$

$$h=\frac{J}{m}=\left(\frac{GMR}{32}\right)^{1/2}$$

$$E=-\frac{5GMm}{4R}$$

因为开始在云里，先用 $V(r)=\dfrac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^2)$ 代入上式，

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{GMR}{32r^2}\right)+\frac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^2)=-\frac{5GMm}{4R}$$

在转折点，$\dot{r}=0$，则转折点 $r=r_{\max}$和 $r=r_{\min}$满足的方程为

$$\frac{GMR}{32r^2}+\frac{GM}{R^3}(r^2-3R^2)=-\frac{5GM}{2R}$$

$$32r^4-16R^2r^2+R^4=0$$

$$r^2=\frac{16R^2\pm\sqrt{256R^4-128R^4}}{64}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{8}R^2$$

$$r_{\max}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{8}\right)^{\frac{1}{2}}R,\quad r_{\min}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{8}\right)^{\frac{1}{2}}R$$

因为 $r_{\max}<R$，“粒子”总在云里.

(3) 设 $\varphi=0$ 时，$r=r_0$，

$$\varphi=\int_{r_0}^{r}\frac{h\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V-\frac{mh^2}{2r^2}\right)}}$$

代入 $h=\left(\frac{GMR}{32}\right)^{\frac{1}{2}}$，$E=-\frac{5GMm}{4R}$，

$$\varphi=\int_{r_0}^{r}\frac{\left(\frac{GMm}{32}\right)^{1/2}}{r^2\left\{\frac{2}{m}\left[-\frac{5GMm}{4R}-\frac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^2)-\frac{GMmR}{32\times 2r^2}\right]\right\}^{1/2\mathrm{d}r}}$$

$$=\int_{r_0}^{r}\frac{R}{r^2\left[16-\frac{32r^2}{R^2}-\frac{R^2}{r^2}\right]^{1/2}}\mathrm{d}r$$

令 $x=\left(\frac{R}{r}\right)^2$，$\mathrm{d}x=-2R^2\frac{1}{r^3}\mathrm{d}r$，$\mathrm{d}r=-\frac{r^3}{2R^2}\mathrm{d}x$，

$$\varphi=\int_{x_0}^{x}\frac{R\left(-\frac{r^3}{2R^2}\right)\mathrm{d}x}{r^2\left(16-\frac{32}{x}-x\right)^{1/2}}=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(16-\frac{32}{x}-x\right)^{1/2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{(-32+16x-x^2)^{1/2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{(32-64+16x-x^2)^{1/2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{[32-(x-8)^2]^{1/2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-8}{4\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x_0-8}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$x=8-4\sqrt{2}\sin\left[2\varphi-\arcsin\left(\frac{x_0-8}{4\sqrt{2}}\right)\right]$$

可重新选取基轴，写成

$$x=8-4\sqrt{2}\sin 2\varphi$$

$$r^2=\frac{R^2}{8-4\sqrt{2}\sin 2\varphi}$$

当 $\sin 2\varphi=-1$ 时，$r=r_{\min}$，

$$2\varphi=\frac{3\pi}{2},\quad \frac{7\pi}{2},\quad \varphi=\frac{3}{4}\pi,\quad \frac{7}{4}\pi$$

当 $\sin 2\varphi=1$ 时，$r=r_{\max}$，

$$2\varphi=\frac{\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{2},\quad \varphi=\frac{1}{4}\pi,\quad \frac{5}{4}\pi$$

共有 4 个转折点．

图 4.5 画出了“粒子”轨道的示意图．

4.1.15 一个质量为 m 的质点束缚在线性势 $V=kr$(k 为常量)之中.

(1) 当能量、角动量为多大时,轨道是一个以原点为圆心、半径为 R 的圆?

(2) 圆运动的角速度多大?

(3) 如果质点稍微偏离圆轨道,小振动的角频率多大?

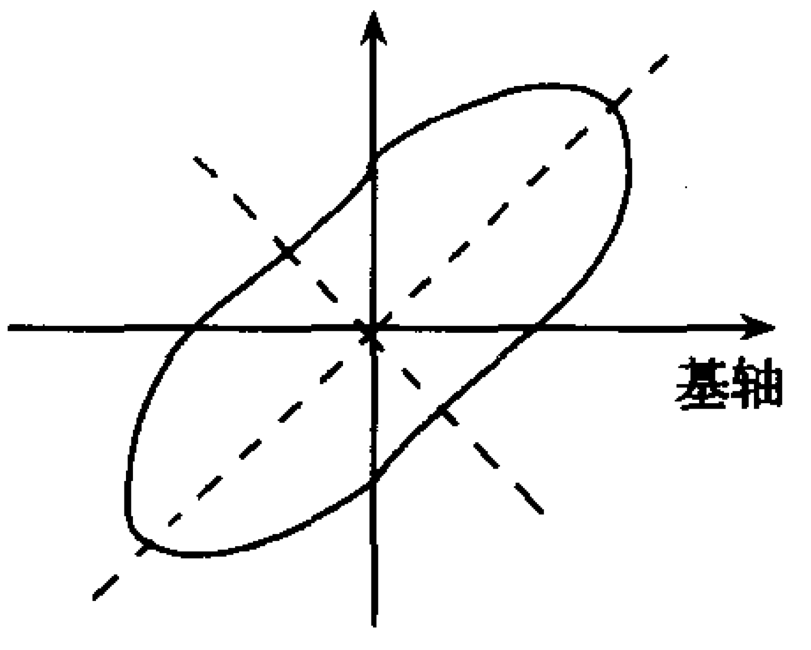


图 4.5

解 (1) $F=-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=-k$

$$r=R,\quad \frac{mv^2}{R}=k,\quad v^2=\frac{kR}{m}$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2+kR=\frac{1}{2}m\frac{kR}{m}+kR=\frac{3}{2}kR$$

$$J=mvR=\sqrt{mkR^3}$$

(2)
$$\omega_0=\frac{v}{R}=\sqrt{\frac{k}{mR}}$$

(3)
$$U(r)=kr+\frac{mh^2}{2r^2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}=k-\frac{mh^2}{R^3}=0,\quad R=\sqrt[3]{\frac{mh^2}{k}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=R}=\frac{3mh^2}{R^4}=\frac{3mh^2}{\dfrac{mh^2}{k}\sqrt[3]{\dfrac{mh^2}{k}}}=\frac{3k}{R}$$

$$\omega_r=\sqrt{\left.\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=R}}=\sqrt{\frac{3k}{mR}}$$

4.1.16 质量为 m 的行星围绕质量为 M 的恒星做半径为 R 的准圆周运动,除了万有引力外,此行星还受到一个与行星到恒星的距离成正比的斥力 $f=Ar$,试计算行星近心点的运动角速度.

解 方法一:$-mh^2u^2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=-GMmu^2+\dfrac{A}{u}$

由于轨道接近于圆,可令 $u=u_0+\delta u$,δu 为小量,

$$mh^2\left[\frac{\mathrm{d}^2(\delta u)}{\mathrm{d}\varphi^2}+u_0+\delta u\right]=GMm-\frac{A}{u_0^3\left(1+\dfrac{\delta u}{u_0}\right)^3}$$

$$\approx GMm-\frac{A}{u_0^3}\left(1-\frac{3\delta u}{u_0}\right)$$

当 $\delta u=0$ 时,轨道为圆,有如下等式:

$$mh^2u_0=GMm-\frac{A}{u_0^3}\tag{1}$$

代入上式可得

$$mh^2\left[\frac{d^2(\delta u)}{d\varphi^2}+\delta u\right]=\frac{3A}{u_0^4}\delta u$$

$$\frac{d^2(\delta u)}{d\varphi^2}+\left(1-\frac{3A}{mh^2u_0^4}\right)\delta u=0$$

选择适当的基轴，可把上式的解写为

$$\delta u = B\sin k\varphi \tag{2}$$

其中

$$k=\left(1-\frac{3A}{mh^2u_0^4}\right)^{1/2}=\left[1-\frac{3AR^3}{GMm-AR^3}\right]^{1/2} \tag{3}$$

$\left(\text{这里用了式(1)及 } u_0=\frac{1}{R}\right)$

设 φ_1、φ_2 是相继两个近日点的角位置，则

$$k\varphi_2-k\varphi_1=k\Delta\varphi=2\pi$$

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{k}$$

近心点的运动角位移为

$$\Delta\varphi_p=\Delta\varphi-2\pi=2\pi\left(\frac{1}{k}-1\right)$$

近心点作此运动角位移所经历的时间

$$\Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\dot{\varphi}}=\frac{2\pi}{k\dot{\varphi}}\approx\frac{2\pi R^2}{kh}$$

这里用了 $h=r^2\dot{\varphi}\approx R^2\dot{\varphi}$.

进动角速度

$$\omega_p=\frac{\Delta\varphi_p}{\Delta t}=\frac{h(1-k)}{R^2}$$

用式(1)可得

$$\frac{h}{R^2}=\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{A}{m}}$$

$$\omega_p=\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{A}{m}}\left[1-\sqrt{1-\frac{3AR^3}{GMm-AR^3}}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{A}{m}}-\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{4A}{m}}$$

方法二：用上题引入有效势能的方法，

$$F(r)=-\frac{GMm}{r^2}+Ar$$

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}-\frac{1}{2}Ar^2$$

$$U(r)=V(r)+\frac{mh^2}{2r^2}=-\frac{GMm}{r}-\frac{1}{2}Ar^2+\frac{mh^2}{2r^2}$$

$$\frac{dU(r)}{dr}=\frac{GMm}{r^2}-Ar-\frac{mh^2}{r^3}$$

$r=R$ 时，$\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}=0$，

$$\frac{GMm}{R^2}-AR-\frac{mh^2}{R^3}=0 \tag{4}$$

这就是方法一中的式(1).

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}=-\frac{2GMm}{r^3}-A+\frac{3mh^2}{r^4}$$

$$\omega_r=\sqrt{\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=R}}=\sqrt{\left(\frac{3mh^2}{R^4}-\frac{2GMm}{R^3}-A\right)\Big/m}$$

用式(4)消去上式中的 h^2，即得

$$\omega_r=\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{4A}{m}}$$

矢径转动角速度

$$\omega_0=\dot{\varphi}=\frac{h}{r^2}\approx\frac{h}{R^2}=\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{A}{m}}$$

(这里也用了式(4)).

$$\omega_p=\omega_r-\omega_0=\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{4A}{m}}-\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\frac{A}{m}}<0$$

说明进动角速度与轨道转动角速度方向相同，其大小 $|\omega_p|$ 就是方法一的结果，换句话说，方法二对 ω_p 的正向规定与方法一的规定是相反的.

4.1.17　考虑质量为 m 的行星环绕质量为 M 的太阳的运动轨道，假定有均匀分布密度为 ρ 的尘埃遍布在太阳和行星周围的空间.

(1) 证明尘埃的影响是增加一个有心引力 $F'=-mkr$，其中 $k=\frac{4\pi}{3}\rho G$，G 为万有引力恒量(忽略任何与尘埃碰撞的阻力)；

(2) 若行星在角动量为 J 的圆轨道上运动，写出轨道半径 r_0 所满足的方程(不必解)；

(3) 假定 F' 与太阳引力相比是小的，行星的轨道稍微偏离(2)问中所述的圆轨道，由径向和方位运动的角频率证明轨道是一进动的椭圆，求出进动角频率 ω_p 与 r_0、ρ、G 和 M 的关系；

(4) 椭圆轴进动与轨道运转方向同向还是反向？

解　(1) 尘埃围绕太阳是球型分布的，与以行星的矢径为半径的球的体积相比，太阳的体积是可以忽略的.

尘埃在半径为 r 的球内的质量为 $\frac{4}{3}\pi r^3\rho$. 尘埃对行星(矢径为 r)的作用力为

$$F'=-G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot\frac{m}{r^2}=-\frac{4}{3}\pi\rho Gmr$$

与 $F'=-mkr$ 相比，可得 $k=\frac{4}{3}\pi\rho G$.

(2)
$$F=-\frac{GMm}{r^2}-mkr$$

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}+\frac{1}{2}mkr^2$$

$$U(r)=V(r)+\frac{mh^2}{2r^2}=-\frac{GMm}{r}+\frac{1}{2}mkr^2+\frac{J^2}{2mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{GMm}{r^2}+mkr-\frac{J^2}{mr^3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0}=0$$

圆轨道半径 r_0 满足的方程为

$$\frac{GMm}{r_0^2}+mkr_0-\frac{J^2}{mr_0^3}=0 \tag{1}$$

(3) $\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}=-\frac{2GMm}{r^3}+mk+\frac{3J^2}{mr^4}$

$$\omega_r=\sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0}}=\sqrt{-\frac{2GM}{r_0^3}+k+\frac{3J^2}{m^2r_0^4}}$$

用式(1)消去上式中的 J，并用 $k=\frac{4\pi}{3}\rho G$，

$$\omega_r=\sqrt{\frac{GM}{r_0^3}+\frac{16\pi\rho G}{3}}$$

方位运动的角频率 $\omega\approx\omega_0=\frac{J}{mr_0^2}=\sqrt{\frac{GM}{r_0^3}+\frac{4\pi\rho G}{3}}$

$$\omega_{\mathrm{p}}=\omega_r-\omega_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0^3}+\frac{16\pi\rho G}{3}}-\sqrt{\frac{GM}{r_0^3}+\frac{4\pi\rho G}{3}}$$

因为 $\omega_r\neq\omega_0$，即 $\omega_{\mathrm{p}}\neq 0$，对圆轨道的偏离轨道如同一个进动的椭圆轨道．

(4) 因 $\omega_{\mathrm{p}}>0$，椭圆轴进动与轨道运转方向相反，如图 4.6 所示，轨道逆时针方向转动，椭圆轴顺时针转动．

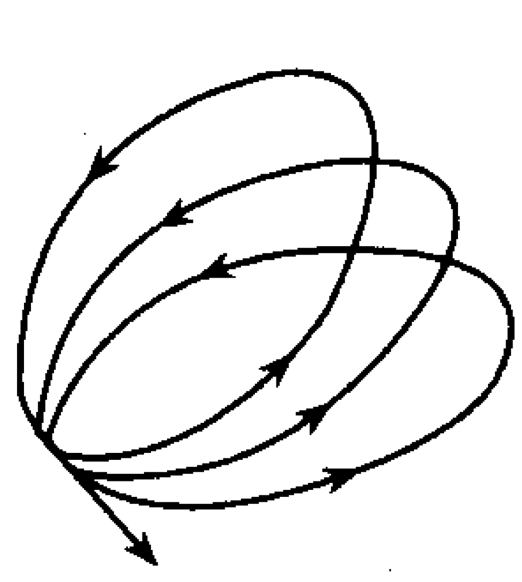


图 4.6

4.1.18 (1) 质量为 m 的行星绕质量为 M 的恒星运动．由于恒星的大气层的阻力，行星受到一个小的阻力 $\boldsymbol{F}'=-\alpha\boldsymbol{v}$，其中 α 为正值常量．设在 $t=0$ 时行星的轨道是半径为 r_0 的圆，求行星的矢径 r 与时间 t 的函数关系；

(2) 忽略上述阻力，但加上另一小的有心力，行星的势能改写为

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}+\frac{\varepsilon}{r^2}$$

其中 ε 为一小常量. 可以设想轨道是近似圆形的，求图 4.7 中两远心点间的幅角 φ.

解 (1) 由于 F' 是一个小量，可以近似地认为以行星做半径缓慢变化的圆周运动．

$$E=-\frac{GmM}{2r}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{GMm}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

机械能的变化是由非保守力 $\boldsymbol{F}'$ 做功所致，

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{v}=-\alpha\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=-\alpha v^2\approx-\alpha\frac{GM}{r}$$

$\left(\text{这里用了}\frac{mv^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}\right)$

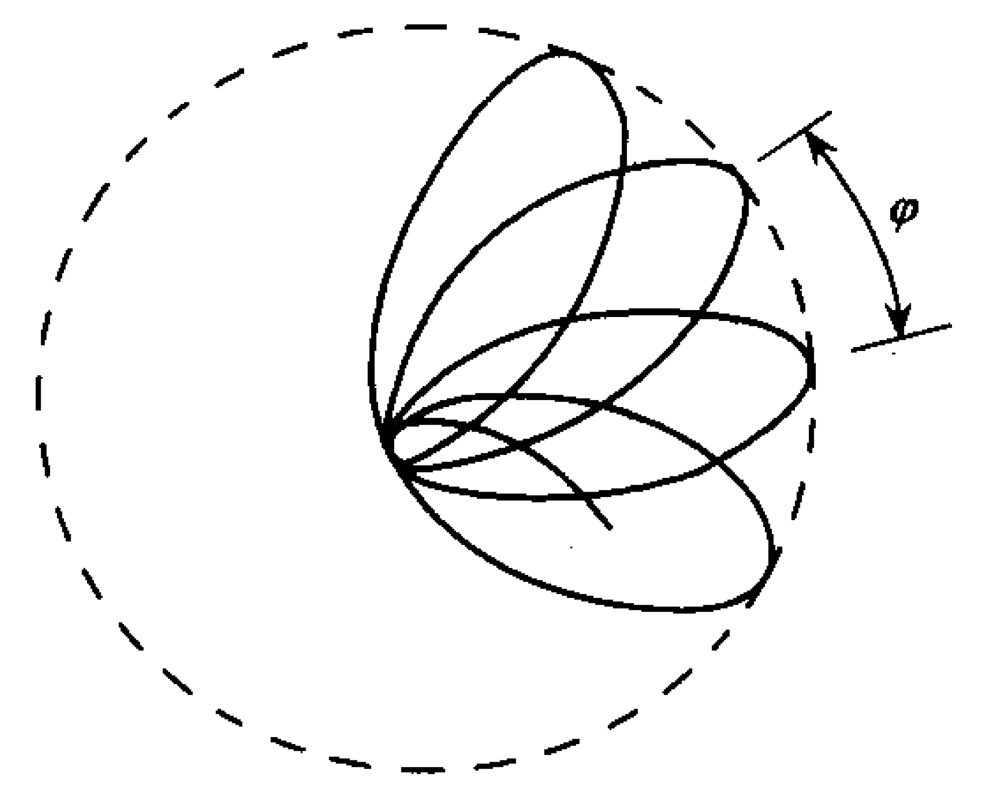


图 4.7

∴

$$\frac{GmM}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\alpha\frac{GM}{r}$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\int_0^t\frac{2\alpha}{m}\mathrm{d}t$$

$$r=r_0\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha}{m}t}$$

（2）

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}+\frac{\varepsilon}{r^2}$$

$$U(r)=V(r)+\frac{J^2}{2mr^2}=-\frac{GMm}{r}+\frac{\varepsilon}{r^2}+\frac{J^2}{2mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{GMm}{r^2}-\frac{2\varepsilon}{r^3}-\frac{J^2}{mr^3}$$

近似圆周运动的半径 r_0 满足的方程为

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0}=0$$

即

$$\frac{GMm}{r_0^2}-\frac{2\varepsilon}{r_0^3}-\frac{J^2}{mr_0^3}=0$$

$$r_0=\frac{2m\varepsilon+J^2}{GMm^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}=-\frac{2GMm}{r^3}+\frac{3(2m\varepsilon+J^2)}{mr^4}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0}=-\frac{2(GM)^4m^7}{(2m\varepsilon+J^2)^3}+\frac{3(GM)^4m^7}{(2m\varepsilon+J^2)^3}$$

$$=\frac{(GM)^4m^7}{(2m\varepsilon+J^2)^3}$$

$$\omega_r=\sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{dr^2}\right|_{r=r_0}}=\frac{(GM)^2m^3}{(2m\varepsilon+J^2)^{3/2}}$$

$$\omega_0=\frac{J}{mr_0^2}=\frac{J(GM)^2m^3}{(2m\varepsilon+J^2)^2}$$

设从轨道的一个远心点到相邻的另一个远心点转过的幅角为 $\Delta\varphi$，经历的时间为 Δt，图中的 φ 与 $\Delta\varphi$ 的关系为

$$\varphi=\Delta\varphi-2\pi=\Delta\varphi_{\mathrm{p}}=\omega_{\mathrm{p}}\Delta t$$

$$= (\omega_0 - \omega_r)\Delta t = (\omega_0 - \omega_r)\frac{\Delta\varphi}{\omega_0} = (\omega_0 - \omega_r)\frac{\varphi + 2\pi}{\omega_0}$$

这里用 $\omega_p = \omega_0 - \omega_r$，是假设轨道的转动角速度大于径向振动的角频率，即 $\omega_0 > \omega_r$，进动的转向与轨道的转向相同．

从上式解出 φ，并代入 ω_0 和 ω_r，可得

$$\varphi = 2\pi\frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_r} = 2\pi\left[\frac{J}{(2m\varepsilon + J^2)^{1/2}} - 1\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{J}{J\left(1 + \frac{2m\varepsilon}{J^2}\right)^{1/2}} - 1\right]$$

$$\approx 2\pi\left(1 - \frac{m\varepsilon}{J^2} - 1\right) = -\frac{2\pi m\varepsilon}{J^2}$$

4.1.19　一粒子在有心引力作用下做半径为 R 的圆周运动，证明当 $f(R) > -\frac{R}{3}\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}$ 时轨道是稳定的，这里 $f(r)$ 是作用力的大小，它是粒子到力心的距离 r 的函数.

证明　方法一：

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -f(r) \tag{1}$$

$$r^2\dot{\varphi} = h \tag{2}$$

做半径为 R 的圆周运动

$$mR\omega^2 = f(R) \tag{3}$$

今给予一个微扰

$$r(t) = R + \delta r(t) \tag{4}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega + \delta\dot{\varphi}(t) \tag{5}$$

将式(4)、(5)代入式(2)，

$$(R + \delta r)^2(\omega + \delta\dot{\varphi}) = h + \delta h$$

只保留一级小量，并用式(3)，可得

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\delta h - 2R\omega\delta r}{R^2} \tag{6}$$

将式(4)、(5)代入式(1)，

$$m[\delta\ddot{r} - (R + \delta r)(\omega + \delta\dot{\varphi})^2] = -f(R) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}\delta r$$

只保留一级小量，并用式(3)，可得

$$m\delta\ddot{r} - 2mR\omega\delta\dot{\varphi} - m\omega^2\delta r = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}\delta r$$

将式(6)代入上式，

$$m\delta\ddot{r} + \left(3m\omega^2 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}\right)\delta r = \frac{2m\omega\delta h}{R}$$

再用式(3)，上式可改写为

$$m\,\delta\ddot{r}+\left[\frac{3f(R)}{R}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}\right]\delta r=\frac{2m\omega\delta h}{R}$$

当$\dfrac{3f(R)}{R}+\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}>0$,即$f(R)>-\dfrac{R}{3}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}$时,$\delta r$做微幅振动,始终保持小量,因而这个圆周运动是稳定的.

方法二:引入有效势能的方法.

$$U(r)=V(r)+\frac{mh^2}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}-\frac{2mh^2}{r^3}=-F(r)-\frac{2mh^2}{r^3}=f(r)-\frac{2mh^2}{r^3}$$

做$r=R$的圆周运动,有$\dfrac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}=0$,

$$f(R)=\frac{2mh^2}{R^3}\tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}+\frac{6mh^2}{r^4}$$

如

$$\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=R}>0$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}+\frac{6mh^2}{R^4}>0\tag{8}$$

用式(7),式(8)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}+\frac{3f(R)}{R}>0\ \text{或}\ f(R)>-\frac{R}{3}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}$$

则径向可做角频率为$\omega_r=\sqrt{\dfrac{1}{m}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=R}}$围绕$r=R$的小振动.因此半径为$R$的圆周运动是稳定的.

4.1.20　一质量为m的质点在有心引力$f(r)$作用下运动.

(1) 证明在适当的初始条件下质点的运动轨道是一个圆;

(2) 如有心引力$f(r)=-\dfrac{k}{r^n}$,其中k为正值常量,要此圆轨道运动是稳定的,对式中的n有何要求?

解　(1)

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r)\\&=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J^2}{2mr^2}+V(r)=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U(r)\end{aligned}$$

做圆周运动,$\dot{r}=0$,如圆轨道的半径为R,要求

$$E=U(R)\tag{1}$$

式(1)是做圆周运动的必要条件,满足式(1),还未必做圆周运动,如质点做非圆周运动,应在$\dot{r}$改变符号的转折点也有$\dot{r}=0$,因而也满足式(1).

做圆周运动还要求在 $r=R$ 处有效势能有极值,即

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}=0 \tag{2}$$

式(2)也可由下述方式得到:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=f(r),\quad mr^2\dot{\varphi}=J$$

圆周运动,$r=R$,$\ddot{r}=0$,可得

$$-\frac{J^2}{mR^3}=f(R) \tag{3}$$

式(3)正是从式(2)得到的式子.

$$U(r)=V(r)+\frac{J^2}{2mr^2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}=\left.\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}-\frac{J^2}{mR^3}=-f(R)-\frac{J^2}{mR^3}=0$$

式(1)、(2)或式(1)、(3)是做圆周运动的必要条件,也是充分条件,因为满足式(1),有 $\dot{r}=0$,满足式(2)或式(3)有 $\ddot{r}=0$,在随矢径的转动参考系中,$r=R=$常量,因此式(1)、(2)或式(1)、(3)是在静参考系中围绕力心做圆周运动的充分必要条件.初始条件满足式(1)、(2)或式(1)、(3),运动轨道是一个圆.

(2) 用上题证明的式子,要求

$$\frac{k}{r^n}>-\frac{r}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{k}{r^n}\right)$$

即

$$\frac{k}{r^n}>\frac{n}{3}\frac{k}{r^n}$$

得

$$n<3$$

只要 $n<3$,以任何半径做圆周运动都是稳定的.

4.2 平方反比律的有心力作用下的运动

4.2.1 某个彗星围绕太阳做椭圆轨道运动,在远日点的速率为 10km/s,在近日点的速率为 80km/s,地球围绕太阳做圆轨道运动,速率为 30km/s,半径为 1.5×10^8km,求此彗星在远日点离太阳的距离.

解 用脚标 e、s、c 分别表示与地球、太阳、彗星有关的物理量,用第二个脚标 a、p 分别表示远日点、近日点的量.

$$\frac{m_e v_e^2}{R_e}=\frac{Gm_e m_s}{R_e^2}$$

$$-\frac{Gm_c m_s}{R_{ca}}+\frac{1}{2}m_c v_{ca}^2=-\frac{Gm_c m_s}{R_{cp}}+\frac{1}{2}m_c v_c^2 p$$

$$m_c R_{ca} v_{ca}=m_c R_{cp} v_{cp}$$

三式中，m_e、m_c 均可约去，有 m_s、R_{ca}、R_{cp}三个未知量，三个方程可解，得

$$R_{ca}=\frac{2R_e v_e^2}{v_{ca}(v_{cp}+v_{ca})}$$

代入 $R_e=1.5\times10^{11}\text{m}$，$v_e=30\times10^3\text{m}$，$v_{ca}=10\times10^3\text{m/s}$，$v_{cp}=80\times10^3\text{m/s}$，可得

$$R_{ca}=3.0\times10^{11}\text{m}=3.0\times10^{8}\text{km}$$

4.2.2 假定在地球表面附近运行的人造地球卫星每 90min 转一周，月球表面附近运行的人造卫星也是每 90min 转一周，关于月球的组成你有何结论？

解 用脚标 e、s、m 分别表示与地球、卫星、月球有关的量．

$$m_s R_e \omega_s^2=\frac{Gm_e m_s}{R_e^2}$$

$$m_s R_m \omega_s^2=\frac{Gm_m m_s}{R_m^2}$$

地球卫星和月球卫星的角速度相同，未加区别，它们的圆轨道半径分别为地球半径和月球半径．

$$\frac{R_m^3}{R_e^3}=\frac{m_m}{m_e}$$

$$\frac{m_e}{\frac{4}{3}\pi R_e^3}=\frac{m_m}{\frac{4}{3}\pi R_m^3}，\text{即 }\rho_e=\rho_m$$

通常把地球看作均质的，也可把月球视为均质的，其密度与地球相同．

4.2.3 知道地球表面的重力加速度为 9.8m/s^2，围绕地球的大圆周长为 $4\times10^7\text{m}$，又知道月球和地球的直径和质量之比分别为

$$\frac{D_m}{D_e}=0.27,\quad \frac{M_m}{M_e}=0.0123$$

问从月球表面出发，逃离月球引力场所必须具有的相对于月球的最小速度多大(把月球视为惯性系)？

解 用 v_e、v_m 分别表示从地球、月球表面出发逃离地球、月球所需的最小速度，

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GmM_e}{R_e}=0$$

$$\frac{GmM_e}{R_e^2}=mg$$

可得

$$v_e=\sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}=\sqrt{2gR_e}=\sqrt{\frac{gL}{\pi}}$$

其中 $L=2\pi R_e$ 是围绕地球的大圆周长，

$$\frac{1}{2}mv_m^2-\frac{GmM_m}{R_m}=0$$

$$\left(\frac{v_m}{v_e}\right)^2=\frac{M_m/R_m}{M_e/R_e}=\frac{M_m/M_e}{D_m/D_e}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{M_m/M_e}{D_m/D_e}} \cdot \sqrt{\frac{gL}{\pi}} = \sqrt{\frac{0.0123}{0.27}} \times \sqrt{\frac{9.8 \times 4 \times 10^7}{\pi}} = 2.38 \times 10^3 \text{m/s}$$

4.2.4　一长程火箭由半径为 R 的地球表面以速度$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ 发射，不计空气摩擦和地球转动，但需考虑精确的引力场，求出确定轨道所达到的最大高度 H 的方程(如图 4.8 所示)，作最低级近似求解此方程，并证明对于$\boldsymbol{v}$ 是垂直向上的情形，给出人们熟知的结果．

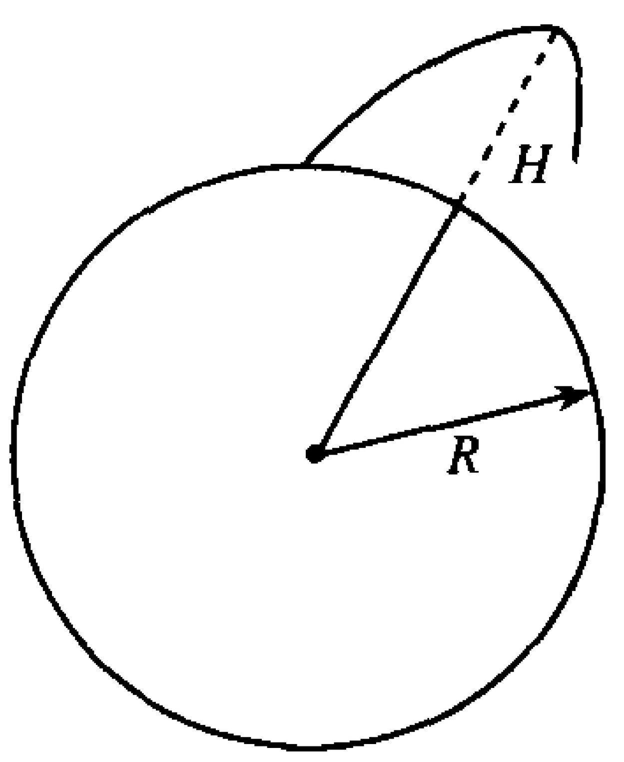


图 4.8

解　设火箭达到最高点时横向速度为 $v_{\varphi a}$(径向速度$v_{ra}=0$)，由对地球中心的角动量守恒和机械能守恒，设火箭质量为 m，

$$mRv_\varphi = m(R+H)v_{\varphi a} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_{\varphi a}^2 - \frac{GMm}{R+H} \tag{2}$$

用式(1)消去式(2)中的 $v_{\varphi a}$，得能确定火箭能达到的最大高度 H 的方程，

$$\frac{1}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R+H}\right)^2 v_\varphi^2 - \frac{GM}{R+H}$$

作最低级近似，$\frac{H}{R}$为小量，上式可近似为

$$\frac{1}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{H}{R}\right)v_\varphi^2 - \frac{GM}{R}\left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

解出

$$H = \frac{v_r^2}{2\left(\frac{GM}{R} - v_\varphi^2\right)}R$$

当垂直发射时，$v_\varphi=0$，$v_r=v$，

$$H = \frac{v^2}{2\left(\frac{GM}{R^2}\right)}$$

再考虑$\frac{H}{R}$为小量，$\frac{GM}{R^2}\approx g$，$H=\frac{v^2}{2g}$是人们熟知的结果．

4.2.5　设一宇宙飞船沿一个围绕太阳的椭圆轨道从地球发往火星，近日点在地球绕太阳的轨道上，远日点在火星绕太阳的轨道上，如图 4.9 所示．不考虑地球和火星对飞船的引力作用，设地球和火星都绕太阳做圆周运动，轨道半径分别为 R_1、$R_2=1.5R_1$．求：

(1) 宇宙飞船的轨道方程；

(2) 先证明开普勒第三定律，然后用它计算按上述轨道从地球到达火星所用的时间；

(3) 为了最节省燃料，从地球上应向什么方向发射？

解　(1) 飞船的椭圆轨道方程可写成

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

由所给的近日点、远日点，有 $\varphi=0$，$r=R_1$，$\varphi=\pi$，$r=1.5R_1$，得

$$R_1 = \frac{p}{1+e},\quad 1.5R_1 = \frac{p}{1-e}$$

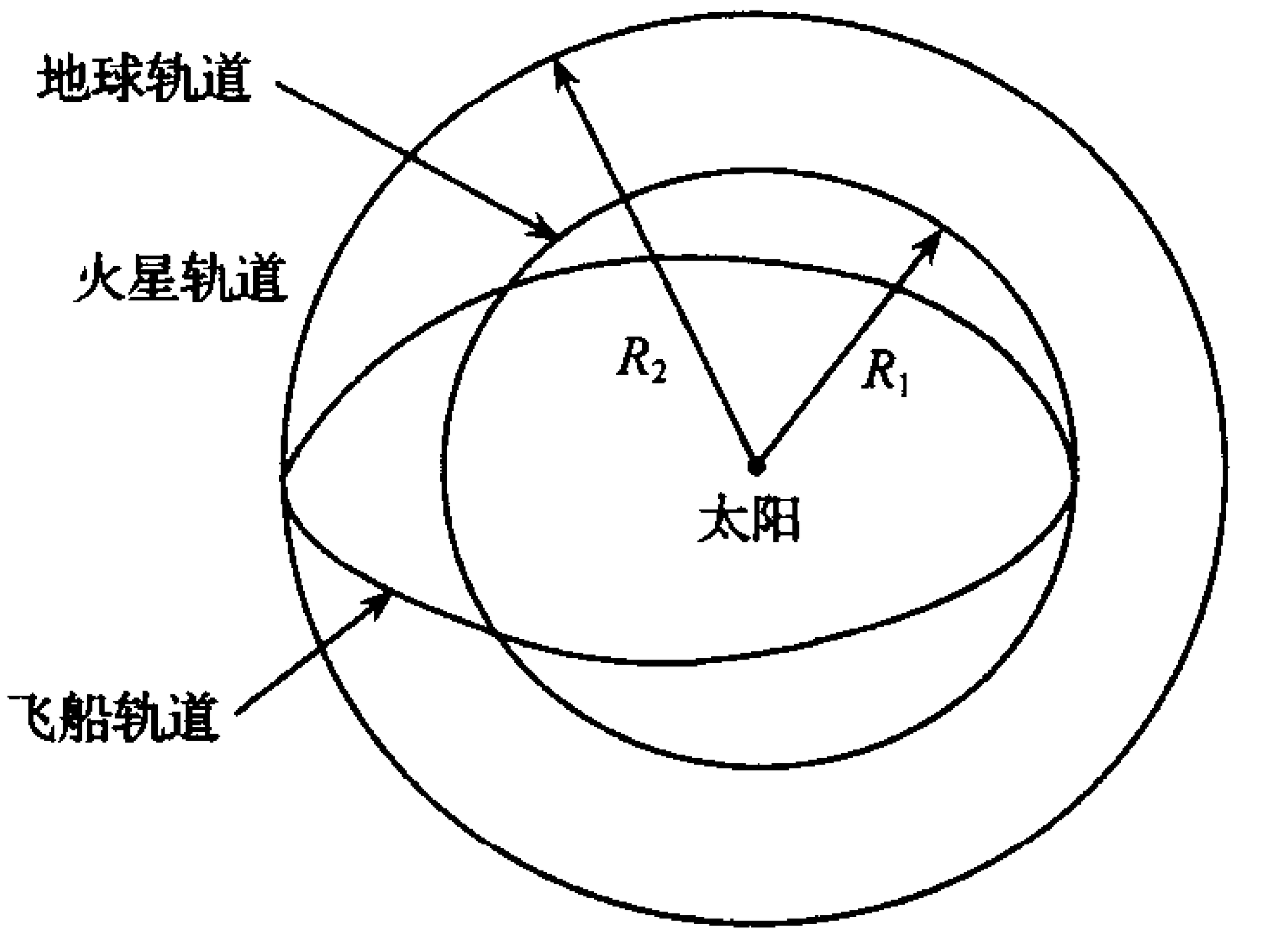


图 4.9

解得

$$e = 0.2,\quad p = 1.2R_1$$

故飞船的轨道方程为

$$r = \frac{1.2R_1}{1 + 0.2\cos\varphi}$$

(2) 设行星绕太阳的轨道是一个长半轴为 a、短半轴为 b 的椭圆,此椭圆的面积为 πab,由有心运动有角动量积分知,面积速度为 $\frac{1}{2}h(h=r^2\dot{\varphi})$,运行周期为

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi ab}{h}$$

由椭圆的极坐标表达和直角坐标表达的两组参数之间的关系以及 e 和 E、h 的关系可导出

$$a = -\frac{GmM}{2E},\quad b = h\sqrt{\frac{m}{-2E}}$$

可将上式改为

$$T = \frac{2\pi}{(GM)^{1/2}}a^{3/2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = 常量$$

行星公转周期的平方和轨道的长半轴的立方成正比,这就证明了开普勒第三定律.

宇宙飞船和行星一样,仅在太阳的引力作用下绕太阳运转,也遵从开普勒第三定律.将它与地球运行周期相比,用脚标 s、e 以区别飞船和地球的量,

$$\frac{T_s^2}{a_s^3} = \frac{T_e^2}{R_e^3} = \frac{T_e^2}{R_1^3}$$

其中

$$a_s = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2}(R_1 + 1.5R_1) = 1.25R_1$$

$$T_s = \left(\frac{a_s}{R_1}\right)^{3/2} T_e = (1.25)^{3/2} T_e = 1.40\text{ 年}$$

其中用了地球公转周期 $T_e=1$ 年.

因此宇宙飞船从地球到火星需时 $\frac{1}{2}T_s=0.70$ 年.

(3) 为节省燃料,飞船应沿地球公转轨道的切线方向发射,且在地球赤道上一点在自转速度与公转速度的夹角尽可能小的时刻发射.

4.2.6 求上题所述的宇宙飞船需以多大的速度离开地球?仍不考虑地球的引力作用,也不考虑地球的自转.

解 以太阳为参考系,飞船航行中机械能守恒,对力心的角动量守恒,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$$

其中 M 为太阳的质量,$h=r^2\dot{\varphi}=$常量.

在近日点,$\dot{r}=0, r=R_e$,在远日点,$\dot{r}=0, r=R_m$,由上式可写出下式:

$$\frac{mh^2}{2R_e^2} - \frac{GMm}{R_e} = \frac{mh^2}{2R_m} - \frac{GMm}{R_m}$$

解出

$$h = \sqrt{2GMR_eR_m/(R_e + R_m)}$$

离开地球时,相对太阳的速度为

$$v = \frac{h}{R_e} = \sqrt{\frac{2GMR_m}{R_e(R_e + R_m)}}$$

求地球围绕太阳公转的速度,

$$\frac{m_e v_e^2}{R_e} = \frac{GMm_e}{R_e^2}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{GM}{R_e}}$$

飞船离开地球相对于地球的速度(沿地球公转的切线方向发射)为

$$v_r = v - v_e = \sqrt{\frac{2GMR_m}{R_e(R_e + R_m)}} - \sqrt{\frac{GM}{R_e}}$$

代入 $R_m=1.5R_e$

$$v_r = \sqrt{\frac{6GM}{5R_e}} - \sqrt{\frac{GM}{R_e}}$$

4.2.7 若 4.2.5 题所述飞船飞离地球需考虑地球的引力作用,仍不考虑地球自转,求飞船从地球表面起航时需具有的速度.

解 在脱离地球引力场以前以地球为参考系,脱离地球引力场时应具有上题的速度 v_r,用机械能守恒定律.

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}mv_{r0}^2 - \frac{GmM_e}{R}$$

其中 v_{r0}就是所要求的飞船从地球表面起航时需具有的速度,M_e 是地球的质量,R 是地球的半径.

$$v_{r0}^2 = v_r^2 + \frac{2GM_e}{R} = \left(\sqrt{\frac{6GM}{5R_e}} - \sqrt{\frac{GM}{R_e}}\right)^2 + \frac{2GM_e}{R}$$

$$= \frac{1}{5}(11 - 2\sqrt{30})\frac{GM}{R_e} + \frac{2GM_e}{R}$$

$$v_{r0} = \left[\frac{1}{5}(11 - 2\sqrt{30})\frac{GM}{R_e} + \frac{2GM_e}{R}\right]^{1/2}$$

其中 M、M_e 分别是太阳和地球的质量,R_e、R 分别是地球公转轨道半径和地球的半径.

4.2.8 质量为 1.6×10^3kg 的陨石在地球表面上方 4.2×10^6m 的圆形轨道上绕地球运动.它突然与另一轻得多的陨石发生正碰使动能损失 2.0%.

(1) 什么物理定律适用于碰撞后的大陨石的运动?

(2) 描述碰撞后陨石轨道的形状;

(3) 求出陨石在碰撞后最接近地球的距离.

解 (1) 碰撞后大陨石仍只受地球的引力作用,仍是有心运动,机械能守恒定律和对力心的角动量守恒定律适用于碰撞后大陨石的运动.

(2) 碰前大陨石做圆周运动,总能量 $E<0$,碰后,仍有 $E<0$,因动能损失,地球的引力大于按原来半径的圆周运动所需要的向心力,陨石碰后做椭圆轨道运动.

(3) 由$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$

碰撞前陨石的动能为

$$T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GMm}{2r} = \frac{mgR^2}{2r}$$

其中用了$\frac{GMm}{R^2} = mg$,R 为地球半径.代入 $g=9.8\text{m/s}$,$R=6400\times10^3\text{m}$,$r=(6400+4200)\times10^3=10600\times10^3\text{m}$,质量 m 可不必代入数据.

$$T_0 = 1.893\times10^7 m(\text{J})$$

碰撞后陨石的动能为

$$T = (1-0.020)T_0 = 1.855\times10^7 m(\text{J})$$

碰撞后陨石的势能等于碰前的势能

$$V = V_0 = -\frac{GMm}{r} = -2T_0 = -3.786\times10^7 m(\text{J})$$

碰撞后陨石的机械能

$$E = T + V = -1.931\times10^7 m(\text{J})$$

由

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

可得碰后椭圆轨道的长轴

$$2a = -\frac{GMm}{E} = -\frac{mgR^2}{E}$$

代入 $g=9.8\text{m/s}, R=6400\times10^3\text{m}, E=-1.931\times10^7 m(\text{J})$

可得 $2a=2.079\times10^7\text{m}$.

大陨石和轻得多的陨石发生正碰，碰后大陨石的速度方向不变，这时的位置，$\dot{r}=0$，因$\frac{mv^2}{r}<\frac{GMm}{r^2}$，这时的 $r=r_{\max}$.

碰撞后陨石最接近地面的距离为

$$r_{\min}-R=2a-r_{\max}-R$$
$$=2.079\times10^7-1.06\times10^7-6.4\times10^6=3.8\times10^6\text{m}$$

4.2.9 我国于1971年3月3日发射的科学实验卫星的重量为221.0kg，近地点高度为266km，远地点高度为1826km，地球半径取为6400km，求该卫星运行的周期.

解 像4.2.6题那样，可得

$$h=\sqrt{2GM_e r_{\max}r_{\min}/(r_{\max}+r_{\min})}$$
$$r_{\max}=(1826+6400)\times10^3=8.226\times10^6\text{m}$$
$$r_{\min}=(221.0+6400)\times10^3=6.621\times10^6\text{m}$$

因为 $$\frac{GM_e}{R_e^2}=g, GM_e=gR_e^2$$

将 $g=9.8\text{m/s}^2, R_e=6.400\times10^6\text{m}$ 及 $r_{\max}$、$r_{\min}$值代入得

$$h=5.43\times10^{10}\text{m}^2/\text{s}$$

用 $r_{\min}=\frac{p}{1+e}, r_{\max}=\frac{p}{1-e}$,

$$e=\frac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}}=0.108$$

$$h=r^2\dot{\varphi},\quad \text{d}t=\frac{1}{h}r^2\text{d}\varphi$$

运行周期

$$T=\int_0^T\text{d}t=\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}r^2\text{d}\varphi=\frac{2}{h}\pi ab$$

a、b 分别是椭圆轨道的半长轴和半短轴.

因为 $e=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$，所以 $b=a\sqrt{1-e^2}$,

$$T=\frac{2}{h}\pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

$$a=\frac{1}{2}(r_{\max}+r_{\min})=7.424\times10^6\text{m}$$

将已算得的 h、e 和 a 代入 T 的式子，得

$$T=6340\text{s}=106\text{min}$$

4.2.10 一质量为 m 的空间站沿半径为 R 的圆轨道绕月球运动. 为使空间站能在月球上登陆，沿轨道曲线方向向前发射一质量为 m_1 的物体，使空间站在发射物体后，转过转角180°后刚好抵达月球表面. 已知月球的质量为 M_m，半径为 R_m. 求：

(1) 质量为 m_1 的物体的发射速度；

(2) 从发射到空间站抵达月球所经历的时间．

解　(1) 设空间站做圆周运动时的速度为 v，

$$\frac{mv^2}{R}=\frac{GmM_m}{R^2},\quad v=\sqrt{\frac{GM_m}{R}}$$

设空间站向前发射物体的速度为 v_1，空间站发射后的速度为 v_2，由动量守恒，

$$mv=m_1v_1+(m-m_1)v_2 \tag{1}$$

发射后空间站的机械能守恒，角动量守恒，

$$\frac{1}{2}(m-m_1)v_2^2-\frac{G(m-m_1)M_m}{R}=\frac{1}{2}(m-m_1)v_3^2-\frac{G(m-m_1)M_m}{R_m} \tag{2}$$

$$(m-m_1)v_2R=(m-m_1)v_3R_m \tag{3}$$

其中 v_3 是空间站在月球登陆时的速度．

从式(2)、(3)可解出

$$v_2=\sqrt{\frac{2GM_mR_m}{R(R+R_m)}} \tag{4}$$

从式(1)解出 v_1，并代入式(4)，

$$v_1=\frac{mv}{m_1}-\frac{m-m_1}{m_1}v_2$$

$$=\frac{m}{m_1}\sqrt{\frac{GM_m}{R}}-\frac{m-m_1}{m_1}\sqrt{\frac{2GM_mR_m}{R(R+R_m)}}$$

(2) 用开普勒第三定律于绕月球的两个空间站的运动，设 T、T' 分别为做圆周运动和做椭圆运动的周期，

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{T'^2}{\left[\frac{1}{2}(R+R_m)\right]^3}$$

$$T'=\sqrt{\left(\frac{R+R_m}{2R}\right)^3}T$$

又

$$T=\frac{2\pi R}{v}=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_m}}$$

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{(R+R_m)^3}{8GM_m}}$$

从空间站发射物体到空间站抵达月球所经历的时间为半个周期，

$$t=\frac{1}{2}T'=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(R+R_m)^3}{2GM_m}}$$

4.2.11　假定你去访问一无大气、半径为 R_0 的小行星，发现物体以速率 v_0 水平抛出后，恰好能环绕该星体的表面做圆周运动．周 v_0、R_0 表示下述各量：

(1) 物体逃离该小行星的速度；

(2) 从行星表面竖直上抛使最高点达到 R_0 高度所需的上抛速率，并求该物体达到

$\frac{1}{2}R_0$ 高度时的速率；

(3) 质量为 m 的物体在离行星表面为 y 时的势能；

(4) 使物体从行星表面升到 y 高度所需的上抛速率.

解　(1) 设 M 为小行星的质量，v 为物体逃离小行星所需速度.

$$\frac{mv_0^2}{R_0}=\frac{GmM}{R_0^2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R_0}=0$$

消去 M，可得 $v^2=2v_0^2$，　$v=\sqrt{2}\,v_0$

(2) 设竖直上抛到最高点为 R_0 所需的上抛速率为 v，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R_0}=-\frac{GmM}{2R_0}$$

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{GM}{R_0}-\frac{GM}{2R_0}=\frac{GM}{2R_0}=\frac{1}{2}v_0^2$$

所以

$$v=v_0$$

设达到 $\frac{1}{2}R_0$ 高度时的速率为 v'，

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GmM}{R_0}=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{GmM}{R_0+\frac{1}{2}R_0}$$

$$v'^2=v_0^2+2GM\left(\frac{2}{3R_0}-\frac{1}{R_0}\right)=v_0^2-\frac{2GM}{3R_0}=\frac{1}{3}v_0^2$$

$$v'=\frac{\sqrt{3}}{3}v_0$$

(3)
$$V(y)=-\frac{GmM}{R_0+y}=-\frac{mR_0v_0^2}{R_0+y}$$

(4) 设物体从行星表面升到最大高度为 y 所需的上抛速率为 v，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R_0}=-\frac{GmM}{R_0+y}$$

$$v^2=2GM\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_0+y}\right)=2GM\frac{y}{R_0(R_0+y)}=\frac{2v_0^2y}{R_0+y}$$

$$v=v_0\sqrt{\frac{2y}{R_0+y}}$$

4.2.12　(1) 证明在按 $\frac{1}{r}$ 规律变化的有心引力势场中具有相同角动量的圆形轨道的半径等于抛物线轨道近心点离力心距离的两倍；

(2) 证明在(1)问中的有心力场中具有相同的角动量的圆形轨道和抛物线轨道相交处的速率，后者是前者的 $\sqrt{2}$ 倍.

证明　(1) 在按 $\frac{1}{r}$ 规律变化的有心引力势场中运动的轨道方程是圆锥曲线

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

其中 $p=\frac{h^2}{\alpha}$，α 是 $F(r)=-\frac{m\alpha}{r^2}$ 或 $V(r)=-\frac{m\alpha}{r}$ 中的 α.

圆形轨道：　　$e=0,\quad r=p$

抛物线轨道：　　$e=1,\quad r=\frac{p}{1+\cos\varphi}$

$$r=r_{\min}=r(0)=\frac{1}{2}p$$

同一力场，α 相同，两种轨道(圆和抛物线)的角动量相同，则 h 相同，由 $p=\frac{h^2}{\alpha}$ 可见 p 也相同．这就证明了圆形轨道的半径(等于 p)是抛物线轨道近心点至力心的距离 $\left(等于\frac{1}{2}p\right)$ 的两倍．

(2) 在上述力场中，质点做圆轨道运动和做抛物线轨道运动，如角动量相等，即 h 相同，则 p 也相同，两种轨道相交处，r 相同，故抛物线上该交点的矢径 $r=p$，

$$p=\frac{p}{1+\cos\varphi}$$

可见，该交点的极坐标为 $\left(p,\pm\frac{\pi}{2}\right)$.

做圆轨道运动，各处的速率均为 $\frac{h}{p}$.

做抛物线轨道运动，

$$r=\frac{p}{1+\cos\varphi}$$

$$\dot{r}=\frac{p}{(1+\cos\varphi)^2}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

在交点，

$$\varphi=\pm\frac{\pi}{2},\ \dot{r}=\pm p\,\dot{\varphi}=\pm p\frac{h}{r^2}\bigg|_{r=p}=\pm\frac{h}{p}$$

$$r\dot{\varphi}=\frac{h}{r}\bigg|_{r=p}=\frac{h}{p}$$

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2}=\sqrt{2}\,\frac{h}{p}$$

在两个交点 $\left(p,\frac{\pi}{2}\right)$、$\left(p,-\frac{\pi}{2}\right)$，均有沿抛物线运动的速率是沿圆周运动的速率的 $\sqrt{2}$ 倍．

4.2.13　宇宙飞船绕一行星沿圆轨道飞行，轨道半径为 R，飞行速率为 v_0，要把轨道改为经过 B 点的椭圆轨道，如图 4.10 所示，B 点位于以 O 为圆心、半径为 $3R$ 的圆周上．

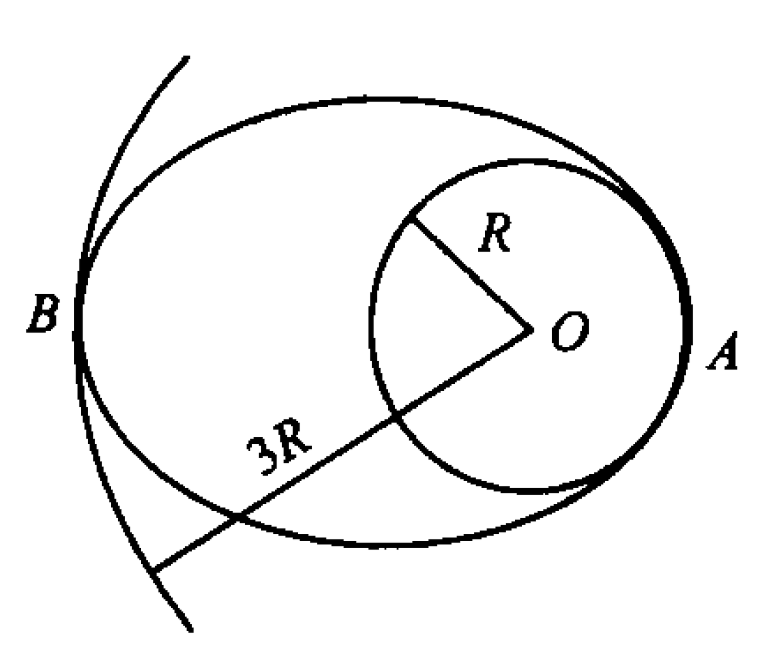


图 4.10

(1) 写出该椭圆的方程；

(2) 飞船在 A 点进入上述轨道时，它的速度应增加多少？

(3) 从 A 点到 B 点的航程要用多少时间？

(4) 当飞船的位矢垂直于 AB 时,速度的径向和横向分量多大?

解 (1) 椭圆方程可写为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=R,\quad r_{\max}=\frac{p}{1-e}=3R$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}}=\frac{1+e}{1-e}=3,\quad \frac{1+e+(1-e)}{1+e-(1-e)}=\frac{3+1}{3-1}=2$$

得

$$e=\frac{1}{2},\quad p=R(1+e)=\frac{3}{2}R$$

所以

$$r=\frac{\frac{3}{2}R}{1+\frac{1}{2}\cos\varphi}$$

(2) 设 m、M 分别为飞船和行星的质量,飞船做圆周运动时,

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{R},\quad \frac{mv_0^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}$$

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-mv_0^2=-\frac{1}{2}mv_0^2,\quad \frac{GMm}{R}=mv_0^2$$

飞船做椭圆运动时,

$$E'=-\frac{GMm}{2a}=-\frac{GMm}{2\times 2R}=-\frac{1}{4}mv_0^2$$

又有 $E'=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}$,$v$ 为在 A 点时的速度,

$$E'-E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}-\left(\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{R}\right)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

又有 $E'-E=-\frac{1}{4}mv_0^2-\left(-\frac{1}{2mv_0^2}\right)=\frac{1}{4}mv_0^2$,

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{4}mv_0^2$$

$$v^2=\frac{3}{2}v_0^2,\quad v=\sqrt{\frac{3}{2}}v_0$$

在 A 点进入椭圆轨道,需有速度增量为

$$v-v_0=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)v_0$$

(3) 由开普勒第三定律,设椭圆运动的周期为 T,

$$\frac{T^2}{(2R)^3}=\frac{\left(\frac{2\pi R}{v_0}\right)^2}{R^3},\quad T^2=8\left(\frac{2\pi R}{v_0}\right)^2$$

$$T=4\sqrt{2}\,\frac{\pi R}{v_0}$$

从 A 到 B 的航程所需时间是半个周期,

$$t = \frac{1}{2}T = 2\sqrt{2}\,\frac{\pi R}{v_0}$$

(4)
$$h = vR = \sqrt{\frac{3}{2}}v_0R$$

飞船的位矢垂直于 AB 时，$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$，

$$r = \frac{3}{2}R$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}v_0R}{\frac{3}{2}R} = \sqrt{\frac{2}{3}}v_0$$

$$v_r = \dot{r} = \frac{\frac{3}{2}R}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\sin\varphi\dot{\varphi} = \frac{\frac{3}{4}R\sin\varphi}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)^2}\cdot\frac{v_\varphi}{r}$$

$$= \pm\frac{\frac{3}{4}R\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}v_0}{\frac{3}{2}R} = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}v_0$$

4.2.14 有两颗地球卫星 M_1 及 M_2 沿同一椭圆运动，地球中心在此椭圆的一个焦点，又设 M_1M_2 相距不远，可将圆弧 $\overset{\frown}{M_1M_2}$ 看作直线，已知直线 M_1M_2 的中点经近地点时，$M_1M_2=b$，近地点到地心的距离为 R_1，远地点到地心的距离为 R_2. 求直线 M_1M_2 的中点经远地点时两颗卫星的距离. 若取卫星处于近地点时 $\varphi=0$，则在任意 φ 角时，两颗卫星的距离多大？

解 两颗卫星沿同一椭圆轨道运动，周期相同，两颗卫星间的航程所需时间 Δt 是不变的.

在近地点，设 M_1M_2 的中点的速率为 v_1，两颗卫星 M_1、M_2 相距不远，都在近地点附近，可认为这一段的速率近似为 v_1，故有

$$v_1\Delta t = b$$

在远地点，速率为 v_2，M_1、M_2 相距为 $v_2\Delta t$，

$$\because\quad v_1R_1 = v_2R_2,\quad v_2 = \frac{R_1}{R_2}v_1$$

$$M_1M_2 = v_2\Delta t = \frac{R_1}{R_2}v_1\Delta t = \frac{R_1}{R_2}b$$

在任意点 φ，要算出在此点的速率 v.

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

$$\dot{r} = \frac{pe\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\dot{\varphi}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{p^2e^2\sin^2\varphi}{(1+e\cos\varphi)^4}\dot{\varphi}^2 + \frac{p^2}{(1+e\cos\varphi)^2}\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{p^2\dot{\varphi}^2}{(1+e\cos\varphi)^4}(1+e^2+2e\cos\varphi)$$

$$= \frac{r^4\dot{\varphi}^2}{p^2}(1+e^2+2e\cos\varphi) = \frac{h^2}{p^2}(1+e^2+2e\cos\varphi)$$

$$v = \frac{h}{p}\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}$$

将 h、p、e 用 v_1、R_1 和 R_2 表示,

$$h = v_1R_1,\quad R_1 = \frac{p}{1+e},\quad R_2 = \frac{p}{1-e}$$

可得

$$e = \frac{R_2-R_1}{R_1+R_2},\quad p = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$v = \frac{v_1}{2R_2}\sqrt{2[R_1^2+R_2^2+(R_2^2-R_1^2)\cos\varphi]}$$

$$M_1M_2 = v\Delta t = \frac{b}{2R_2}\sqrt{2[R_1^2+R_2^2+(R_2^2-R_1^2)\cos\varphi]}$$

可以验证:当 $\varphi=0$ 时,$M_1M_2=b$;当 $\varphi=\pi$ 时,$M_1M_2=\frac{R_1}{R_2}b$. 正是上述在近日点和远日点的两个结果.

4.2.15 一质点做椭圆轨道运动,偏心率为 e,力心在椭圆轨道的一焦点上. 当质点运动到近心点时,力心突然移到椭圆的另一焦点上. 求证以后椭圆轨道的偏心率为 $\frac{e(3+e)}{(1-e)}$,说明原来 e 值处在什么范围时,新的轨道将仍是椭圆、变成抛物线和变成双曲线.

证明 原椭圆方程为

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

$$V(r) = -\frac{m\alpha}{r},\quad p = \frac{h^2}{\alpha}$$

在近心点:　$\varphi=0, r=\frac{p}{1+e}=\frac{h^2}{\alpha(1+e)},\quad v=\frac{h}{r}=\frac{\alpha(1+e)}{h}$

实然力心变到另一焦点,v 不变,r 变为 r',

$$r' = \frac{p}{1-e} = \frac{h^2}{\alpha(1-e)}$$

$$h' = vr' = \frac{\alpha(1+e)}{h}\cdot\frac{h^2}{\alpha(1-e)} = \frac{1+e}{1-e}h$$

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m\alpha}{r'}$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{\alpha^2(1+e)^2}{h^2} - \frac{m\alpha}{h^2}\alpha(1-e)$$

$$= \frac{m\alpha^2}{2h^2}(e^2+4e-1)$$

$$e' = \sqrt{1+\frac{2h'E'}{m\alpha^2}} = \frac{e(3+e)}{1-e} \qquad \text{（计算过程略）}$$

当 $e'=1$ 时，变为抛物线，

$$\frac{e(3+e)}{1-e} = 1$$

$$e^2+3e = 1-e, \quad e^2+4e-1=0$$

$$e = \frac{-4+\sqrt{16+4}}{2} = \sqrt{5}-2$$

因为原来 e 的取值范围为 $0<e<1$，另一根小于零是不可能的，故舍去．

经计算可得

$$\frac{\mathrm{d}e'}{\mathrm{d}e} = \frac{(3-e)(1+e)}{(1-e)^2} > 0$$

（因为 $0<e<1$，分子、分母均大于零．）

$\frac{\mathrm{d}e'}{\mathrm{d}e}>0$ 说明 e' 是 e 的单调递增函数，$e=\sqrt{5}-2$ 时，$e'=1$，则：

$0<e<\sqrt{5}-2$ 时，$0<e'<1$（注意，$e=0$ 时，$e'=0$，故 $e>0$ 时，$e'>0$），仍为椭圆；

$e=\sqrt{5}-2$ 时，$e'=1$，变成抛物线；

$\sqrt{5}-2<e<1$ 时，$e'>1$，变成双曲线．

4.2.16　一行星绕质量为 M 的恒星做圆周运动．恒星突然爆炸，以一个比行星的轨道速度大得多的速率喷射它的外层表壳，因此其质量损失可认为是瞬时的，恒星的剩余质量为 M'，仍比行星的质量 m 大得多．求爆炸后行星轨道的偏心率忽略膨胀的壳体施加在行星上的力，可用偏心率 e 与能量 E、角动量 J 的下列关系：

$$e^2 = 1+\frac{2J^2E}{m^3\alpha^2}$$

恒星对行星的引力为　$F=-\frac{m\alpha}{r^2}$．）

解　方法一：令 $F=-\frac{GmM}{r^2}$，即 $\alpha=GM$．

爆炸前，$E=-\frac{GmM}{2R}$，R 为圆轨道半径；

爆炸后，行星的动能和角动量没有发生突然变化，而势能因恒星质量由 M 变为 M'，发生突然变化．

$$\begin{aligned} E' &= T'+V' = T+V' = T+V+V'-V \\ &= E+V'-V = -\frac{GmM}{2R}+\frac{Gm(M-M')}{R} \end{aligned}$$

$$J' = J$$

用 $e^2=1+\frac{2J^2E}{m^3\alpha^2}$，原为圆周运动，$e=0$，

$$J^2 = -\frac{m^3\alpha^2}{2E} = -\frac{m^3(GM)^2}{2E} = GMm^2R$$

爆炸后的偏心率 e' 的平方

$$e'^2 = 1 + \frac{2J'^2E'}{m^3\alpha'^2} = 1 + \frac{2J^2E'}{m^3(GM')^2}$$

$$= 1 + \frac{2GMm^2R}{m^3(GM')^2}\left[-\frac{GmM}{2R} + \frac{Gm(M-M')}{R}\right]$$

$$= 1 + \left(\frac{M}{M'}\right)^2\left(1 - \frac{2M'}{M}\right)（这里用了\ \alpha' = GM'）$$

$$e' = \left[1 + \left(\frac{M}{M'}\right)^2\left(1 - \frac{2M'}{M}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[1 - \frac{2M}{M'} + \left(\frac{M}{M'}\right)^2\right]^{1/2} = \left[\left(1 - \frac{M}{M'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{M}{M'} - 1$$

注意：$e'>0$，今 $M'<M$，$e=\left|1-\dfrac{M}{M'}\right|=\dfrac{M}{M'}-1$.

方法二：　　用 $r=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$ 及 $p=\dfrac{h^2}{\alpha}$.

爆炸前：　　$e=0, r=p=\dfrac{h^2}{\alpha}=\dfrac{h^2}{GM}$

爆炸后：　　$r=\dfrac{p'}{1+e'\cos\varphi}$

h 不变，　　$p'=\dfrac{h^2}{\alpha'}=\dfrac{h^2}{GM'}$

$\varphi=0$ 时，　　$r=\dfrac{h^2}{GM}$

$$\frac{h^2}{GM} = \frac{\dfrac{h^2}{GM'}}{1+e'}$$

$$1 + e' = \frac{M}{M'},\quad e' = \frac{M}{M'} - 1$$

4.2.17　已知一个由具有电荷 e 的核和一个在半径为 r_0 的圆形轨道上的单电子组成的氘原子的经典模型．突然这个核发射出一个电子，其电荷变为 $2e$，这个核发射的电子很快地逃逸了，我们可不考虑它，在轨道上的那个电子即有一个新状态．

(1) 求出发射后与发射前电子能量之比（规定无穷远处势能为零）；

(2) 定性地描述新轨道；

(3) 求出新轨道的离核最近和最远的距离，以 r_0 为单位；

(4) 以 r_0 表示出新轨道的长轴和短轴．

解　(1) 被发射的电子很快地逃逸了，可认为原轨道上的电子瞬时位置未变、动能未变，而势能发生了变化．

设电子质量为 m，做半径为 r_0 的圆周运动时速率为 v_0，

发射前，

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$$

$$T=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0},\quad V=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

$$E_1=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=-\frac{e_2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

发射后，

$$E_2=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=-\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

发射后与发射前电子能量之比为

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{-\frac{3}{8}\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0 r_0}}{-\frac{1}{8}\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0 r_0}}=3$$

(2) 新轨道 $E_2<0$，由 $e=\sqrt{1+\frac{2h^2E}{m\alpha^2}}<1$，$e\neq0$，考虑到原来 $e_1=0$，发射后 $\alpha'=2\alpha$，可得发射后 $e_2=\frac{1}{2}$，因此新轨道为椭圆．

(3)
$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=E_2=-\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

其中 h 未变，仍和发射前一样，

$$h=v_0r_0=\sqrt{\frac{2e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0 m}}r_0=\sqrt{\frac{e^2r_0}{4\pi\varepsilon_0 m}}$$

离核最近和最远距离时，$\dot{r}=0$，$r_{\min}$、$r_{\max}$满足的方程为

$$\frac{1}{2}m\frac{e^2r_0}{4\pi\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{r^2}-\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

$$3r^2-4r_0r+r_0^2=0$$

$$(3r-r_0)(r-r_0)=0$$

所以
$$r_{\min}=\frac{1}{3}r_0,\quad r_{\max}=r_0$$

(4)
$$2a=r_{\max}+r_{\min}=\frac{4}{3}r_0$$

$$2c=r_{\max}-r_{\min}=\frac{2}{3}r_0$$

$$2b=2\sqrt{a^2-c^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r_0$$

4.2.18 (1) 某彗星的轨道为抛物线，其近日点为地球轨道（假定为圆形）半径的$\frac{1}{n}$，则此彗星运行时，在地球轨道内停留的时间为一年的$\frac{2}{3\pi}\frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$倍，试证明之；

(2) 再证任何抛物线轨道的彗星停留在地球轨道（仍假定为圆形）内的最长时间为$\frac{2}{3\pi}$年或约为 76 日．

证明　(1) 设地球的轨道半径为 R，彗星轨道的近日点的矢径为 q，如图 4.11 所示．

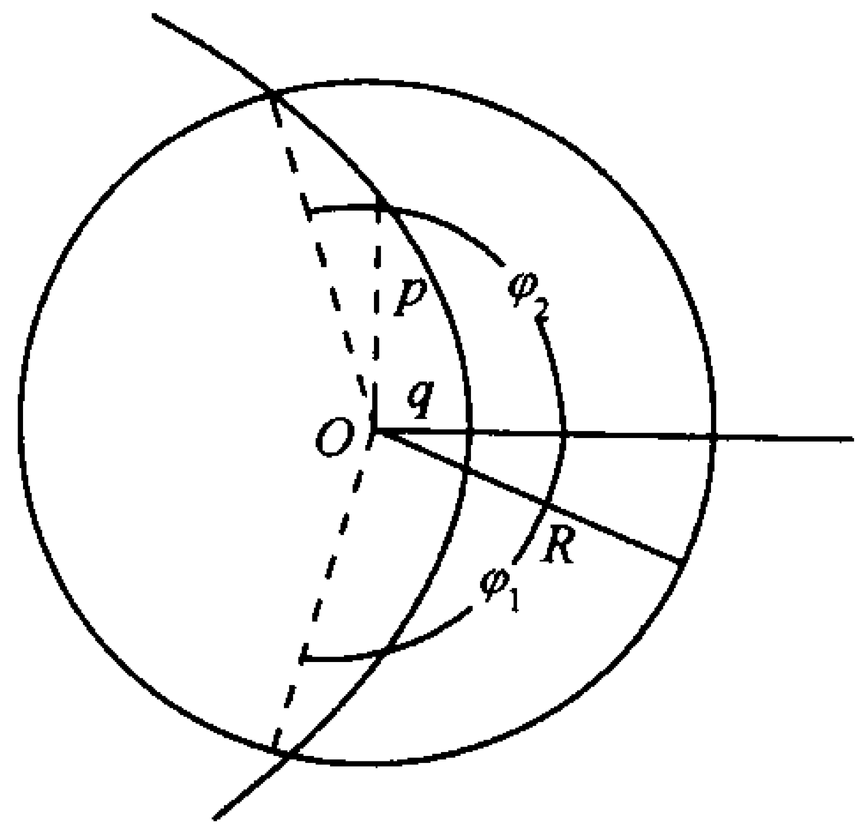


图 4.11

$$q=\frac{R}{n}$$

因为
$$r=\frac{p}{1+\cos\varphi}$$

$$\varphi=0,r=q=\frac{p}{2},\varphi=\frac{\pi}{2},r=p=2q$$

$$p=\frac{h^2}{\alpha}=\frac{h^2}{GM}$$

$$h=\sqrt{GMp}=\sqrt{2GMq}=\sqrt{\frac{2GMR}{n}}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=h=\sqrt{\frac{2GMR}{n}},\quad \mathrm{d}t=\sqrt{\frac{n}{2GMR}}r^2\mathrm{d}\varphi$$

$$r=\frac{p}{1+\cos\varphi}=\frac{2q}{1+\cos\varphi}=\frac{\frac{2R}{n}}{1+\cos\varphi}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{GM}}\sqrt{\frac{n}{2R}}\left(\frac{2R}{n}\right)^2\frac{1}{(1+\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{GM}}\left(\frac{2R}{n}\right)^{3/2}\frac{1}{\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

求积分限:当 $r=R$ 时的两个 φ 满足下式:

$$\frac{2R}{n}\frac{1}{1+\cos\varphi}=R$$

$$1+\cos\varphi=\frac{2}{n},\quad \cos\varphi=\frac{2}{n}-1$$

$$\varphi_2=\arccos\left(\frac{2}{n}-1\right),\quad \varphi_1=-\arccos\left(\frac{2}{n}-1\right)$$

令 $\theta=\frac{\varphi}{2}$,

$$t=\frac{1}{2\sqrt{GM}}\left(\frac{2R}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{\varphi_1/2}^{\varphi_2/2}\frac{1}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta$$

用积分公式:

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos^n u}=\frac{\sin u}{(n-1)\cos^{n-1}u}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos^{n-2}u}$$

$$\int_{\varphi_1/2}^{\varphi_2/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta}=\frac{\sin\theta}{3\cos^3\theta}\Bigg|_{\varphi_1/2}^{\varphi_2/2}+\frac{2}{3}\int_{\varphi_1/2}^{\varphi_2/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\left(\frac{\sin\theta}{3\cos^3\theta}+\frac{2}{3}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\Bigg|_{\varphi_1/2}^{\varphi_2/2}$$

用 $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2=\frac{2}{n}-1$,

$$\cos\frac{\varphi_1}{2}=\cos\frac{\varphi_2}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi_1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}=-\sin\frac{\varphi_2}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\varphi_1}{2}}=-\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

可得
$$\int_{\varphi_{1/2}}^{\varphi_{2/2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta}=\frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n-1}$$

$$t=\frac{1}{3\sqrt{GM}}\left(\frac{2R}{n}\right)^{3/2}(n+2)\sqrt{n-1}$$

设地球的质量为 m_e，公转的速率为 v_e，公转周期为 T_e，则

$$\frac{m_e v_e^2}{R}=\frac{Gm_eM}{R^2}$$

$$T_e=\frac{2\pi R}{v_e}=\frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}}=\frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

$$\frac{t}{T_e}=\frac{1}{3\pi}\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}(n+2)\sqrt{n-1}=\frac{2}{3\pi}\frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

$T_e=1$ 年，这就证明了彗星在地球公转轨道内运行的时间为一年的 $\frac{2}{3\pi}\frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$ 倍.

(2) 在地球轨道内运行的时间是 n 的函数或是 $\frac{1}{n}$ 的函数，令 $\frac{1}{n}=k$，

$$\frac{t}{T_e}=\frac{2}{3\pi}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{2}}=\frac{2}{3\pi}(1+2k)\sqrt{\frac{1-k}{2}}$$

求极大值，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[(1+2k)\sqrt{1-k}\right]=0$$

可得 $k=\frac{1}{2}$，

$$\left(\frac{t}{T_e}\right)_{\max}=\frac{2}{3\pi}\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\frac{2}{3\pi}$$

4.2.19 一火箭自地球表面发射，发射方向与铅直方向成 α 角，火箭将按椭圆轨道运动，若椭圆之长轴是地球半径的 $n(n<2)$ 倍，地球半径为 R，求火箭在空中飞行的时间.

解 设火箭的轨道方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

$$h=vR\sin\alpha$$

其中 R 是地球半径，v 是火箭发射时的速率.

设 m、M 分别为火箭和地球的质量，

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=-\frac{GMm}{nR}$$

后一等式用了 $E=-\frac{GMm}{2a}$，a 为椭圆的长半轴.

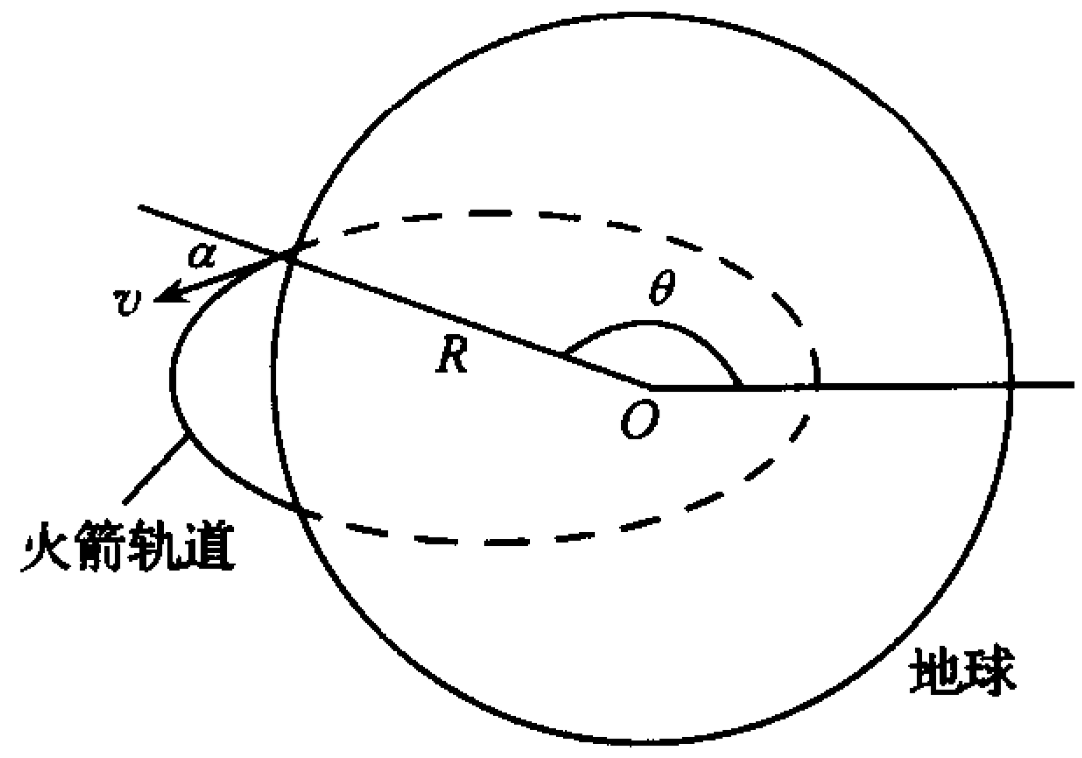


图 4.12

$$v^2=\frac{2GM}{R}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$h^2=v^2R^2\sin^2\alpha=2GMR\left(\frac{n-1}{n}\right)\sin^2\alpha$$

$$p=\frac{h^2}{GM}=2R\left(\frac{n-1}{n}\right)\sin^2\alpha \tag{1}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2h^2E}{m(GM)^2}}=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-4(n-1)\sin^2\alpha}$$

所以

$$r=\frac{2R\left(\frac{n-1}{n}\right)\sin^2\alpha}{1+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-4(n-1)\sin^2\alpha}\cos\varphi}$$

当 $\varphi=0$ 时，$r=R$，代入上式，可得

$$1+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-4(n-1)\sin^2\alpha}\cos\theta=2\left(\frac{n-1}{n}\right)\sin^2\alpha$$

$$\cos\theta=\frac{2(n-1)\sin^2\alpha-n}{\sqrt{n^2-4(n-1)\sin^2\alpha}} \tag{2}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=h,\quad \mathrm{d}t=\frac{1}{h}r^2\mathrm{d}\varphi$$

设想火箭从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\theta$ 历时 t_1，

$$t_1=\frac{1}{h}\int_0^\theta r^2\mathrm{d}\varphi=\frac{p^2}{h}\int_0^\theta\frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

用积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^k}=\frac{1}{(k-1)(a^2-b^2)}\left[-\frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^{k-1}}\right.$$
$$\left.+(2k-3)a\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{k-1}}-(k-2)\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{k-2}}\right]$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\tan\frac{x}{2}\right)$$

可得

$$\int_0^\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}=\frac{1}{1-e^2}\left[-\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

用式(1)、(2)及$\dfrac{GM}{R^2}=g$，经过相当繁琐的计算可得

$$t_1=\sqrt{\frac{R}{2g}}\sqrt{n(n-1)}\left\{-\cos\alpha+\frac{n}{\sqrt{n-1}}\arctan\left[\frac{2\sqrt{n-1}\cos\alpha}{n-2+\sqrt{n^2+4(n-1)\sin^2\alpha}}\right]\right\}$$

火箭在空中飞行的时间为

$$t=T-2t_1$$

其中 T 是火箭做此椭圆运动的周期．

为计算 T，先计算围绕地球表面的人造地球卫星做半径为 R 的圆周运动的周期 T_0，

$$\frac{mv^2}{R}=\frac{GmM}{R^2},\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{Rg}$$

$$T_0=\frac{2\pi R}{v}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

用开普勒第三定律，

$$\frac{T^2}{\left(\frac{1}{2}nR\right)^3}=\frac{T_0^2}{R^3}$$

$$T=\left(\frac{n}{2}\right)^{3/2}T_0=2\pi\left(\frac{n}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{R}{g}}=\pi n^{3/2}\sqrt{\frac{R}{2g}}$$

$$t=\sqrt{\frac{n^3R}{2g}}\left\{\pi+\frac{2\sqrt{n-1}}{n}\cos\alpha-2\arctan\left[\frac{2\sqrt{n-1}\cos\alpha}{n-2+\sqrt{n^2+4(n-1)\sin^2\alpha}}\right]\right\}$$

4.2.20　证明做椭圆轨道运动的最大与最小速率的乘积为$\left(\dfrac{2\pi a}{T}\right)^2$，其中 T 是周期，a 是长半轴．

证明

$$r_{\max}=a+c,\quad r_{\min}=a-c$$

$$v_{\max}=\frac{h}{r_{\min}}=\frac{h}{a-c},\quad v_{\min}=\frac{h}{r_{\max}}=\frac{h}{a+c}$$

$$v_{\max}\cdot v_{\min}=\frac{h^2}{(a-c)(a+c)}=\frac{h^2}{a^2-c^2}=\frac{h^2}{b^2}$$

$$T=\frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h}=\frac{2\pi ab}{h},\quad b=\frac{Th}{2\pi a}$$

$$v_{\max}\cdot v_{\min}=\frac{h^2}{\left(\frac{Th}{2\pi a}\right)^2}=\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2$$

4.3　有心力场中的散射

4.3.1　质量为 m 的粒子以初速 v 从无穷远向其势能大小为$\dfrac{\alpha}{r^n}$(α 为正值常量)的引力场运动，求粒子被俘获的总截面．

解　设瞄准距离为 $\rho, h=\rho v$.

$$U = V + \frac{mh^2}{2r^2} = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{m\rho^2 v^2}{2r^2}$$

求 $v_{\max}$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} = \frac{n\alpha}{r_0^{n+1}} - \frac{m\rho^2 v^2}{r_0^3} = 0$$

$$n\alpha - m\rho^2 v^2 r_0^{n-2} = 0$$

$$r_0 = \left(\frac{n\alpha}{m\rho^2 v^2}\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

$$U_{\max} = U(r_0) = -\frac{\alpha}{\left(\dfrac{n\alpha}{m\rho^2 v^2}\right)^{\frac{n}{n-2}}} + \frac{m\rho^2 v^2}{2\left(\dfrac{n\alpha}{m\rho^2 v^2}\right)^{\frac{2}{n-2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(n-2)\left(\frac{m\rho^2 v^2}{n\alpha}\right)^{\frac{n}{n-2}}$$

能被俘获的条件为 $E \geqslant U_{\max}$，即

$$\frac{1}{2}mv^2 \geqslant \frac{1}{2}\alpha(n-2)\left(\frac{m\rho^2 v^2}{n\alpha}\right)^{\frac{n}{n-2}}$$

解出 $\rho^2 \leqslant n(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\dfrac{\alpha}{mv^2}\right)^{\frac{2}{n}}$.

能被俘获的总截面为

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \pi n(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{mv^2}\right)^{\frac{2}{n}}$$

4.3.2　一质量为 m 的粒子以速度 v_0 射向一固定散射中心．该散射中心施以排斥力 $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{2}mv_1^2\delta(r-a)\boldsymbol{e}_r$，其中 $\boldsymbol{e}_r$ 是由力心出发沿其径向的单位矢量，a 是一固定半径，在该处有力作用，v_1 是具有速度量纲的常数．

(1) 求势能；

(2) 证明若 $v_0 < v_1$，则粒子不能进入半径 $r=a$ 的球内，而被反射回去，反射角等于入射角；

(3) 对 $v_0 > v_1$、瞄准距离 $\rho = \dfrac{1}{2}a$ 的情形，画出粒子轨道的草图．

解　(1) 取无穷远为势能零点，

$$V(r) = -\int_\infty^r \boldsymbol{F}(r')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \int_r^\infty \boldsymbol{F}(r')\cdot\mathrm{d}r'$$

$$= \int_r^\infty \frac{1}{2}mv_1^2\delta(r'-a)\mathrm{d}r'$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}mv_1^2 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

(2) 若粒子进入 $r=a$ 的球内，根据机械能守恒，设粒子在球内的速率为 v'，

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v'^2 = v_0^2 - v_1^2$$

v'必须是实的，要求 $v_0>v_1$，今 $v_0<v_1$，粒子是进不了 $r=a$ 的球内的．

对此粒子在 $r=a$ 处，受到散射中心径向的斥力，列牛顿运动定律的径向分量方程：

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}mv_1^2\delta(r-a)$$

$$m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) = \frac{1}{2}mv_1^2\delta(r-a)$$

$$\dot{r}\,\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\dot{r} = \frac{1}{2}v_1^2\delta(r-a)\dot{r}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}^2) - \frac{h^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}v_1^2\delta(v-a)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\dot{r}^2 - h^2\int\frac{1}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}v_1^2\int\delta(r-a)\mathrm{d}r$$

前已论证了粒子到不了 $r<a$ 处，故 $\int\delta(r-a)\mathrm{d}r = 0$，在斥力作用期间，因为力无限大，作用时间无限小，粒子获得有限的冲量，无位移，故 $\int\frac{1}{r^3}\mathrm{d}r = 0$．第一项积分得，冲量作用后的径向速率与作用前的径向速率相等，不能进入，只能反向．从冲量的方向也能得此结论．

在球的切向未受力的作用，保持原来的横向速度不变，径向速度等值反向，这就证明了反射角等于入射角，参看图 4.13，图中 v_0 是粒子入射时的速度，v'是粒子反射后的速度．

(3) 当 $v_0>v_1$，$\rho=\frac{1}{2}a$ 时，粒子可进入 $r=a$ 的球内，进入前后，由机械能守恒和横向动量守恒，设进入后的速率为 v'，

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v'\sin\theta = v_0\sin 30° = \frac{1}{2}v_0$$

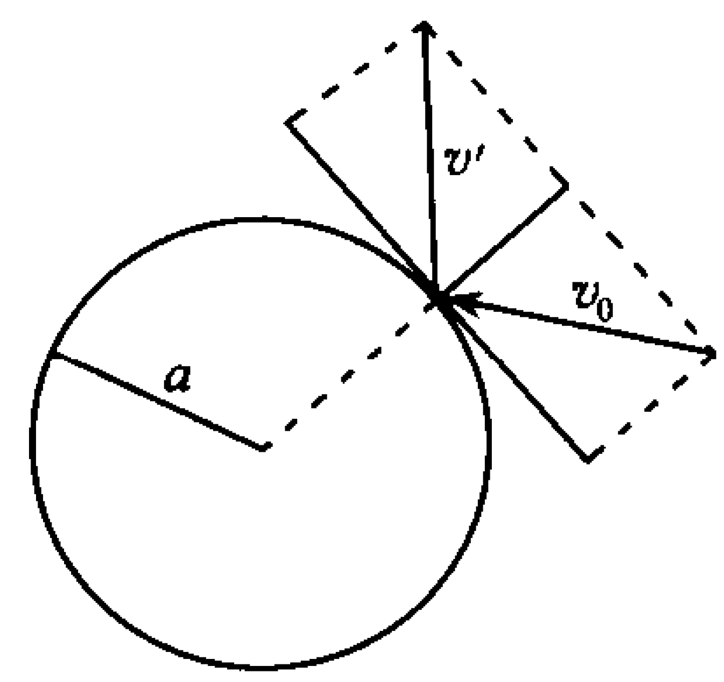


图 4.13

解得

$$v' = \sqrt{v_0^2 - v_1^2}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v_0}{2\sqrt{v_0^2 - v_1^2}}\right)$$

粒子进入后，以$\boldsymbol{v}'$的速度做匀速运动，再次到达 $r=a$ 时穿出 $r=a$ 的球．设穿出后的速度为$\boldsymbol{v}''$，则

$$\frac{1}{2}mv''^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v''\sin\alpha = v'\sin\theta = \frac{1}{2}v_0$$

可得 $v''=v_0$，$\alpha=30°$.

出射后保持$\boldsymbol{v}''$不变．粒子的轨道如图 4.14 所示．

4.3.3　一质量为 m 的粒子以能量 E_0、对 O 点的角动量为 J 被中心在 O 点的势能 $V=-G(r)$的引力场所散射．

(1) 写出关于$\frac{d\alpha}{dr}$的微分方程;

(2) 写出最接近距离 $r_{\min}$所满足的方程.

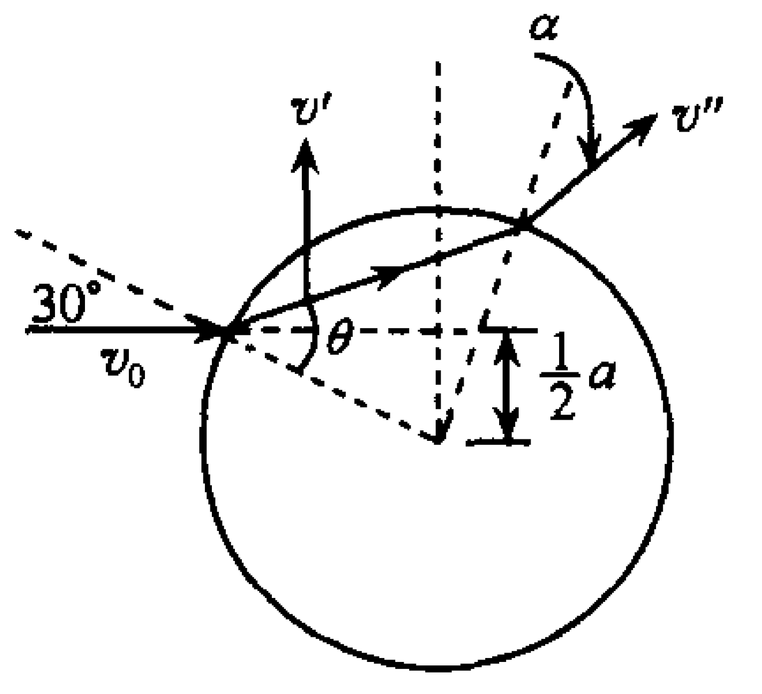


图 4.14

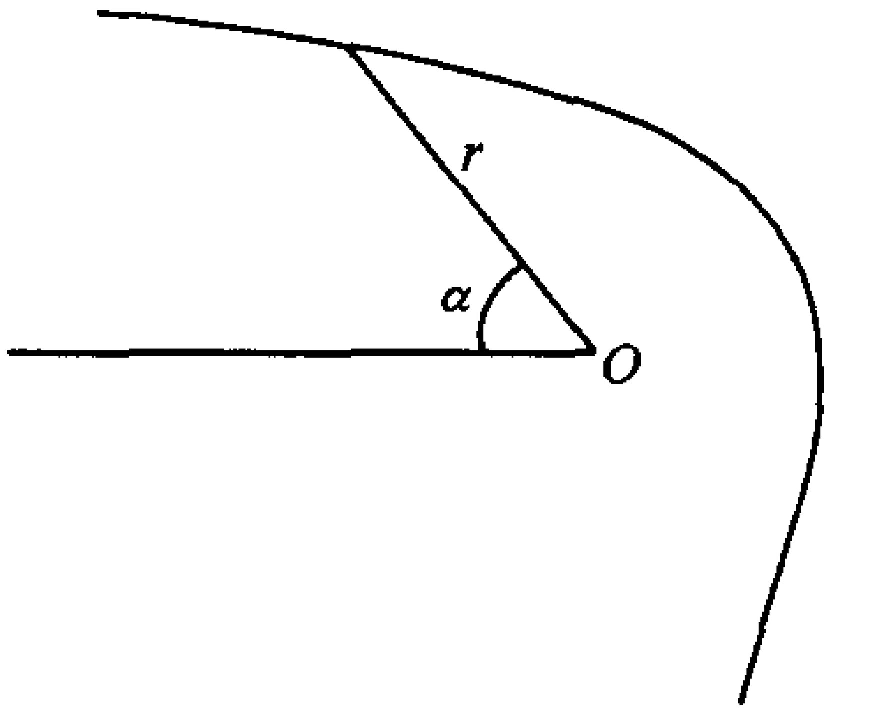


图 4.15

解 (1) 由机械能守恒和对 O 点的角动量守恒,

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2) - G(r) = E_0$$

$$mr^2\dot{\alpha} = J$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2(E_0 + G)}{m} - \frac{J^2}{m^2r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\alpha}\dot{\alpha} = \frac{dr}{d\alpha}\frac{J}{mr^2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{mr^2}{J}\right)^2\dot{r}^2 = \left(\frac{mr^2}{J}\right)^2\left[\frac{2(E_Q + G)}{m} - \frac{J^2}{m^2r^2}\right]$$

$$\frac{dr}{d\alpha} = \pm\frac{mr^2}{J}\sqrt{\frac{2(E_Q + G)}{m} - \frac{J^2}{m^2r^2}} = \pm\frac{1}{J}\sqrt{2m(E_0 + G)r^4 - J^2r^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm\frac{J}{\sqrt{2m(E + G)r^4 - J^2r^2}}$$

(2) 当 $r = r_{\min}$时,$\dot{r} = 0$,

$$\frac{2[E_0 + G(r_{\min})]}{m} - \frac{J^2}{m^2r_{\min}^2} = 0$$

4.3.4 一束很宽的平行小粒子束,粒子质量为 m,不带电,从空间射向月球,相对于月球的初速为 v_0,忽略地球和太阳的存在,求用月球的半径 R、从月球表面的逃逸速度 v_{esc} 和 v_0 表示的碰击月球的碰撞截面 σ.

解 求能碰上月球的最大瞄准距离 $\rho_{\max}$.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{1}$$

$$mvR = mv_0\rho_{\max} \tag{2}$$

其中 M 是月球质量,v 是刚能碰上月球的粒子碰月球时的速率,刚能碰上月球的粒子是擦着月球表面相碰的.

由式(1)得

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2GM}{R} = v_0^2 + v_{\text{esc}}^2$$

$\left(\text{后一等号来自}\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - \frac{GMm}{R} = 0\right)$

将上式代入式(2)得

$$\rho_{\max}^2 = \frac{v^2R^2}{v_0^2} = \left(1 + \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_0^2}\right)R^2$$

碰击月球的碰撞截面为

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \pi R^2\left(1 + \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_0^2}\right)$$

4.3.5　一彗星以初速 v_0 向太阳运动，太阳的质量为 M、半径为 R，可视为静止的，并略去所有其他的星体．求彗星和太阳相撞的总截面．

解　如上题那样，求彗星刚能碰上太阳的最大瞄准距离 $\rho_{\max}$，设彗星质量为 m.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$mvR = mv_0\rho_{\max}$$

可得

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2GM}{R}$$

$$\rho_{\max}^2 = \frac{v^2R^2}{v_0^2} = \left(1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}\right)R^2$$

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \pi R^2\left(1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}\right)$$

4.3.6　一个原子与一个离子的相互作用可由势能 $V(r) = -cr^{-4}$ 给出，其中 $c = \frac{e^2p_a^2}{2}$，e 是离子电荷，p_a 是原子的极化率．

(1) 作出有效势能 $U(r)$ 的草图；

(2) 求出用角动量 J 表达的有效势能的极大值 U_0；

(3) 设离子远比原子轻，求离子击中原子(即深入到 $r=0$)的横截面 $\sigma(v_0)$.

解　(1)

$$U(r) = V(r) + \frac{J^2}{2mr^2} = \dot{c}\,r^{-4} + \frac{J^2}{2mr^2}$$

$$= -cr^{-4} + \frac{J^2}{2mr^2}$$

有效势能 $U(r)$ 的草图如图 4.16 所示.

(2)

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \frac{4c}{r^5} - \frac{J^2}{mr^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{20c}{r^6} + \frac{3J^2}{mr^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 0,\quad \frac{4c}{r^5} - \frac{J^2}{mr^3} = 0$$

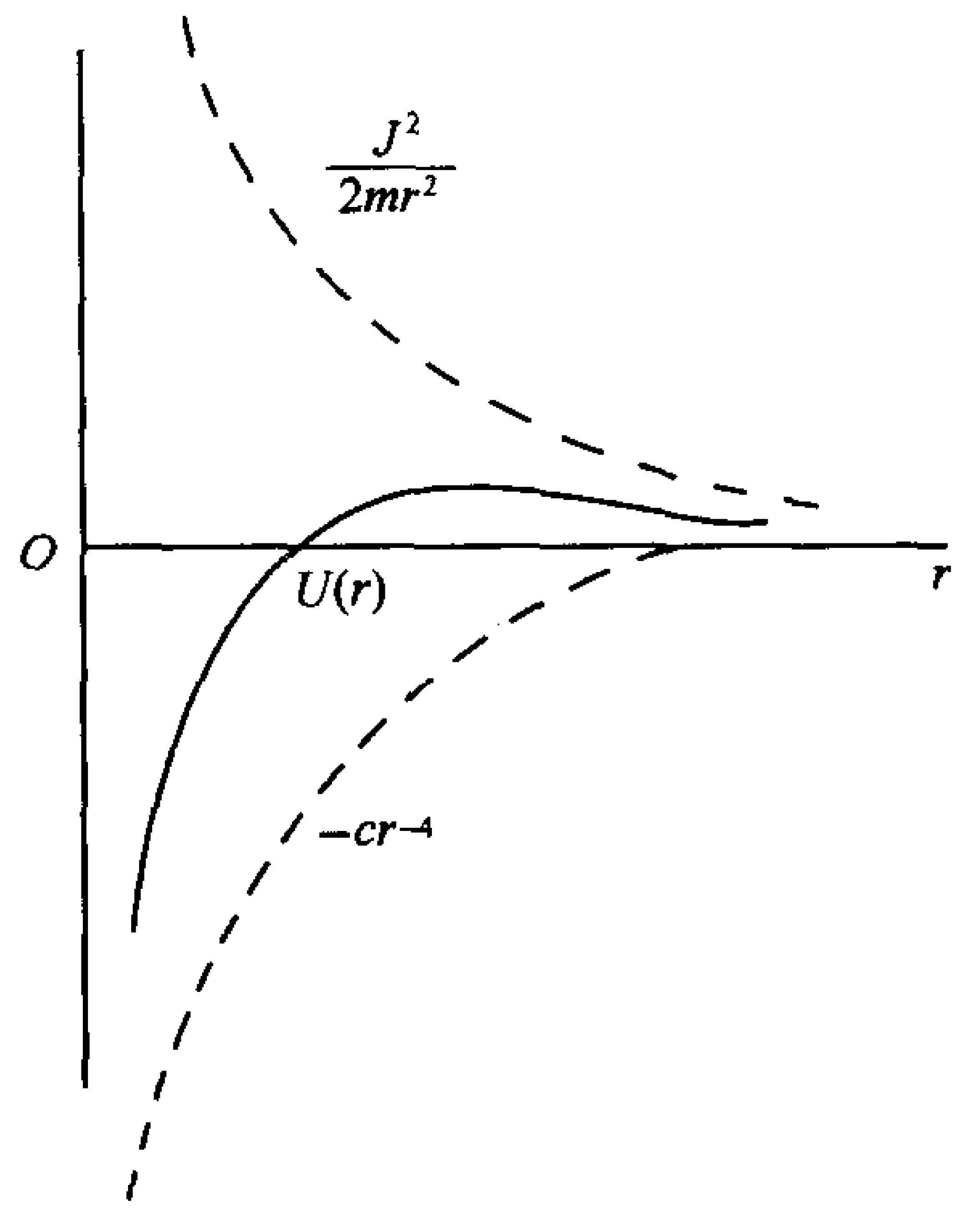


图 4.16

解得

$$r_1 = \infty, \quad r_2 = \frac{2\sqrt{mc}}{J}$$

$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_1}=0$，还可看到$\left.\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}r^3}\right|_{r=r_1}=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}r^4}\right|_{r=r_1}=0$，…. 在 $r\to\infty$ 时，$U(r)\to 0$，不是极值．

$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_2}=-\frac{7J^6}{16m^3c^2}<0$. $r=r_2$ 处，U 有极大值．

$$U_0 = U(r)\big|_{r=\frac{2\sqrt{mc}}{J}} = \frac{J^4}{16m^2c}.$$

(3) 设能量为 E、对力心的角动量为 J 的离子从无穷远处向原子入射，

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E$$

在 $r=r_{\min}$ 时，$\dot{r}=0$，故 $r_{\min}$ 满足的方程为

$$U(r) = E$$

即

$$-\frac{c}{r^4} + \frac{J^2}{2mr^2} = E$$

$$2mr^4E - J^2r^2 + 2mc = 0$$

$$r_{\min}^2 = \frac{J^2 \pm \sqrt{J^4 - 16m^2cE}}{4mE}$$

当 $E=\frac{J^4}{16m^2c}=U_0$ 时，$r_{\min}=\sqrt{\frac{J^2}{4m\cdot\frac{J^4}{16m^2c}}}=\frac{2\sqrt{mc}}{J}$，不能击中原子；

当 $E<\frac{J^4}{16m^2c}$ 即 $E<U_0$ 时，$r_{\min}>\frac{2\sqrt{mc}}{J}$，这可从有效势能图上得出，在离子从无穷远入射时，上述 $r_{\min}^2$ 的式子，只能取 $r_{\min}^2=\frac{J^2+\sqrt{J^4-16m^2cE}}{4mE}$，

当 $E>\frac{J^4}{16m^2c}$ 即 $E>U_0$ 时，$r_{\min}$ 为复数．说明无 $r_{\min}$，从有效势能图可见，离子将深入到 $r=0$($J=0$ 时)或 $r\to 0$($J\neq 0$ 时)，两种情况均可视为击中原子．

$$J = m\rho v_0, \quad \rho = \frac{J}{mv_0}$$

其中 ρ 为离子在无穷远入射时的瞄准距离．

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

要击中原子，$E>U_0$，即 $E>\frac{J^4}{16m^2c}$.

在无穷远处以 v_0 入射的离子能击中原子的最大瞄准距离为

$$\rho_{\max}(v_0) = \frac{J_{\max}}{mv_0} < \frac{\left(\frac{1}{2}mv_0^2 \cdot 16m^2c\right)^{\frac{1}{4}}}{mv_0} = (8m^{-1}cv_0^{-2})^{\frac{1}{4}}$$

$$\sigma(v_0) = \pi\rho_{\max}^2(v_0) < \pi(8m^{-1}cv_0^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{v_0}\sqrt{\frac{2c}{m}}$$

4.3.7 求一个粒子被半径为 a 的刚球弹性散射的微分散射截面和总散射截面．

解 见图 4.17.

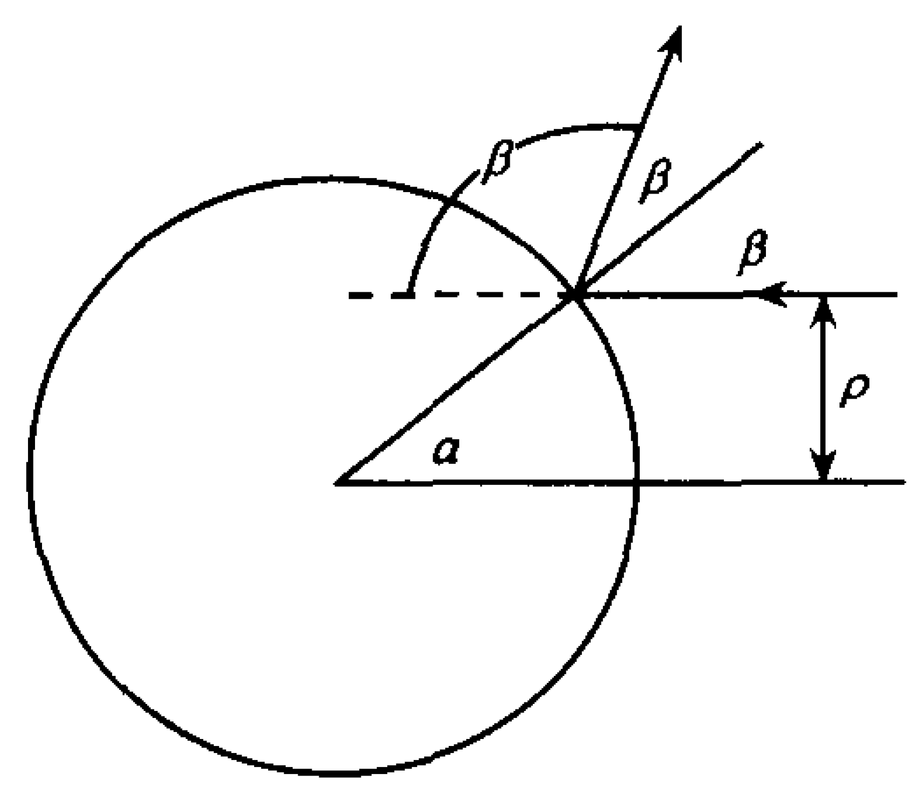


图 4.17

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

$$\theta = |\pi - 2\beta| = \pi - 2\arcsin\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

$$\sigma(v,\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|$$

$$\rho = a\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$$\sigma(v,\theta) = \frac{a\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{2}a\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2\sigma(v) = \int_0^{\theta_{\max}}\sigma(v,\theta) \cdot 2\pi\text{sim}\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}a^2 \cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \pi a^2$$

4.3.8 一质量为 m、半径为 r 的小弹子球被一质量为 $M(m \ll M)$、半径为 R 的大弹子球弹性散射，求微分散射截面和总散射截面．

解 因为 $m \ll M$，m 遭 M 散射时可把 M 视为不动的．和上题的差别在于上题的粒子的半径是不计的，弹性散射的情况和不计半径的 m 被半径为 $R+r$ 的 M 弹性散射一样．这样把上题的 a 改为 $R+r$ 即得本题的结果．

$$\sigma(v,\theta) = \frac{1}{4}(R+r)^2$$

$$\sigma(v) = \pi(R+r)^2$$

4.3.9 质量为 m 的粒子以速度 v_0 从无穷远发射被大小为 $\frac{k}{r^2}$（k 为常量）的固定的斥力中心所散射．如粒子不受斥力作用，粒子将以与斥力中心距离为 b 的轨迹通过，求：

(1) 粒子接近斥力中心的最近距离；

(2) 实际产生的偏转角；

(3) 对于一均匀的粒子束受到该势场散射的微分散射截面 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

解 (1)
$$f = \frac{k}{r^2}, \quad V = \frac{k}{r}, \quad h = bv_0,$$

$$U(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2} = \frac{k}{r} + \frac{mb^2v_0^2}{2r^2}$$

$r_{\min}$满足的方程为

$$U(r_{\min}) = E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{k}{r_{\min}} + \frac{mb^2v_0^2}{2r_{\min}^2} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$r_{\min} = \frac{1}{mv_0^2}\left(k + \sqrt{k^2 + m^2b^2v_0^4}\right)$$

$r_{\min}$的另一负根无物理意义,已舍去.

(2)

$$u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{mv_0^2}{k+\sqrt{k^2+m^2b^2v_0^4}} = \frac{-k+\sqrt{k^2+m^2b^2v_0^4}}{mb^2v_0^2}$$

$$\beta = \int_0^{u_{\max}} \frac{b\mathrm{d}u}{\left[1 - \frac{1}{E_0}V\left(\frac{1}{u}\right) - b^2u^2\right]^{1/2}}$$

$$= \int_0^{u_{\max}} \frac{b\mathrm{d}u}{\left[1 - \frac{k}{\frac{1}{2}mv_0^2}u - b^2u^2\right]^{1/2}}$$

$$= \int_0^{u_{\max}} \frac{b\mathrm{d}u}{\left[1 + \left(\frac{k}{mv_0^2b}\right)^2 - \left(bu + \frac{k}{mv_0^2b}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \arcsin\left[\left(bu + \frac{k}{mv_0^2b}\right)\Big/\sqrt{1 + \left(\frac{k}{mv_0^2b}\right)^2}\right]\Bigg|_0^{u_{\max}}$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2v_0^4b^2}}\right)$$

偏转角

$$\theta = \pi - 2\beta = \pi - \left[2\arcsin 1 - 2\arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2v_0^4b^2}}\right)\right]$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2v_0^4b^2}}\right)$$

(3)

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{k^2}{k^2+m^2v_0^4b^2}$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{k^2}{(k^2 + m^2v_0^4b^2) - k^2} = \frac{k^2}{m^2v_0^4b^2}$$

$$b^2 = \frac{k^2}{m^2v_0^4}\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \sigma(v,\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}\theta}\right| = \left[\frac{k}{2mv^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right]^2$$

4.3.10　(1)质量为 m 的粒子在势场 $V(r)=\frac{k}{r^2}$($k>0$,为常量)中运动,考虑在 xy 平面内运动,用极坐标 r、φ,求出 r 作为 φ、角动量 J 和能量 E 的函数关系;

(2) 用(1)问中的结果讨论在这个势场中的散射,求微分散射截面 $\sigma(\theta,E)$,其中 θ 为散射角.

解　(1)

$$F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=\frac{2k}{r^3}$$

$$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)=F=2ku^3$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\left(1+\frac{2k}{mh^2}\right)u=0$$

令 $\omega^2=1+\frac{2k}{mh^2}$. 选取适当的极轴,解可写为

$$u=A\sin(\omega\varphi)$$

由 $\varphi=0$,$r=\infty$处,$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2\Big|_{\varphi=0}$定 A,

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}=\frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-h\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\varphi}=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=-hA\omega\cos(\omega\varphi)$$

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2\Big|_{\varphi=0}=\frac{1}{2}mh^2A^2\omega^2=\frac{1}{2m}J^2A^2\omega^2$$

$$A=\frac{\sqrt{2mE}}{J\omega}$$

$$r=\frac{1}{u}=\frac{J\omega}{\sqrt{2mE}}\csc(\omega\varphi)$$

其中 $\omega=\sqrt{1+\frac{2k}{mh^2}}=\sqrt{1+\frac{2mk}{J^2}}$.

(2) 已解得

$$u=\frac{\sqrt{2mE}}{J\omega}\sin(\omega\varphi)$$

如图 4.18 所示. 在 $\varphi=0$ 处入射,在 $\omega\varphi=\pi$(此处 $u=0$,$r=\infty$)出射,散射角 θ 为

$$\theta=\varphi=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{2k}{mh^2}}}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{2k}{m\rho^2v^2}}}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{k}{\rho^2E}}}$$

从上式解出

$$\rho^2=\frac{k\theta^2}{E(\pi^2-\theta^2)}$$

$$\mathrm{d}\sigma=2\pi\rho|\mathrm{d}\rho|=\pi|\mathrm{d}\rho^2|=\frac{2\pi^3k\theta}{E(\pi^2-\theta^2)^2}\mathrm{d}\theta$$

$\mathrm{d}\sigma$ 是具有能量 E 的均匀粒子束被散射到 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$ 所占的百分比.

$$\sigma(\theta,E)=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{2\pi\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}=\frac{k\pi^2\theta}{E\sin\theta(\pi^2-\theta^2)^2}.$$

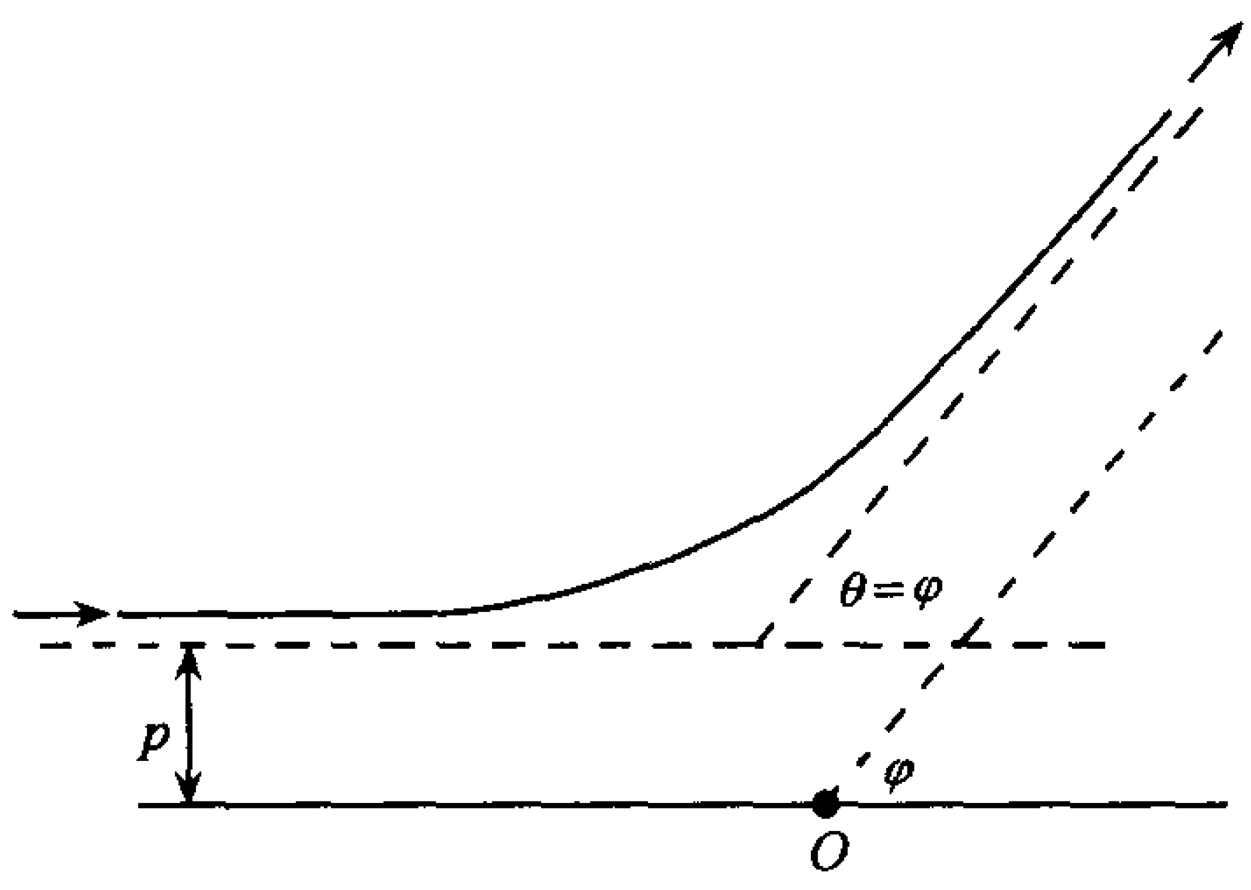


图 4.18

它是具有能量 E 的均匀粒子束被散射到 θ 附近单位立体角内所占的百分比.

4.3.11 具有动能为 T(非相对论)的带电 π 介子(π^+或 π^-)和电荷为 Ze、有效半径为 b 的重核.考虑经典力学的图像,当 π 介子距核的最近距离等于或小于 b 时,π 介子就会打到核上.忽略核的反冲,证明 π 介子的碰撞截面为

$$\sigma = \pi b^2\left(\frac{T-V}{T}\right) \qquad 对于 \pi^+$$

$$\sigma = \pi b^2\left(\frac{T+V}{T}\right) \qquad 对于 \pi^-$$

其中

$$V = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b}.$$

证明 对于 π^+介子,
$$V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

求能打中重核的最大瞄准距离 $\rho_{\max}$,打中时,$r=r_{\min}=b$,设此时 π^+介子的速率为 v,由机械能守恒和角动量守恒,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b} = E = T$$

$$vb = \rho_{\max}\sqrt{\frac{2T}{m}}$$

解出

$$\rho_{\max}^2 = \frac{m}{2T}v^2b^2 = \frac{T-\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b}}{T}b^2 = \frac{T-V}{T}b^2$$

其中 $V=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b}$.

$$\sigma(E) = \sigma(T) = \pi\rho_{\max}^2 = \pi b^2\left(\frac{T-V}{T}\right)$$

对于 π^-介子,
$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

用以上步骤，可得

$$\sigma(E)=\sigma(T)=\pi b^2\left(\frac{T+V}{T}\right)$$

其中 $V=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b}$.

4.3.12　在核物理中常遇到下列球形势阱：

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & r\leqslant a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

(1) 证明：在经典力学中被上述势产生的散射如同光线被相对折射率 $n=\sqrt{\dfrac{E+V_0}{E}}$、半径为 a 的球的折射（这等效说明为什么既能用惠更斯原理的波动说又可用牛顿力学的微粒说解释折射现象）；

(2) 证明微分散射截面为

$$\sigma(E,\theta)=\begin{cases}\dfrac{n^2a^2}{4\cos\dfrac{\theta}{2}}\dfrac{\left(n\cos\dfrac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2} & 0\leqslant\theta\leqslant 2\arccos\dfrac{1}{n}\\ 0 & \theta\geqslant 2\arccos\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

(3) 求总散射截面，可能用到下列积分公式：

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx)+\frac{a}{a+bx}\right]$$

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\ln(a+bx)-\frac{a^2}{a+bx}\right]$$

解　(1) 图 4.19 和图 4.20 都是表示势阱的，从势能表达式看，表现为一个长方阱，而从空间位置上看，表现为一个球形阱．

质点从阱外向势阱入射时，入射角设为 α_1（见图 4.20），在进入势阱和离开势阱的两个边界上，质点的势能都发生突变，因机械能守恒，因而动能也发生突变，这说明质点受到力的作用，$\boldsymbol{F}=-\nabla V$，方向沿该边界点与球心 O 的连线指向势能减少的方向，因而受到的力是有心力．进入时，动能增加，受引力作用；离开时，动能减少，受到的力也是引力，在阱外和阱内均不受力的作用．

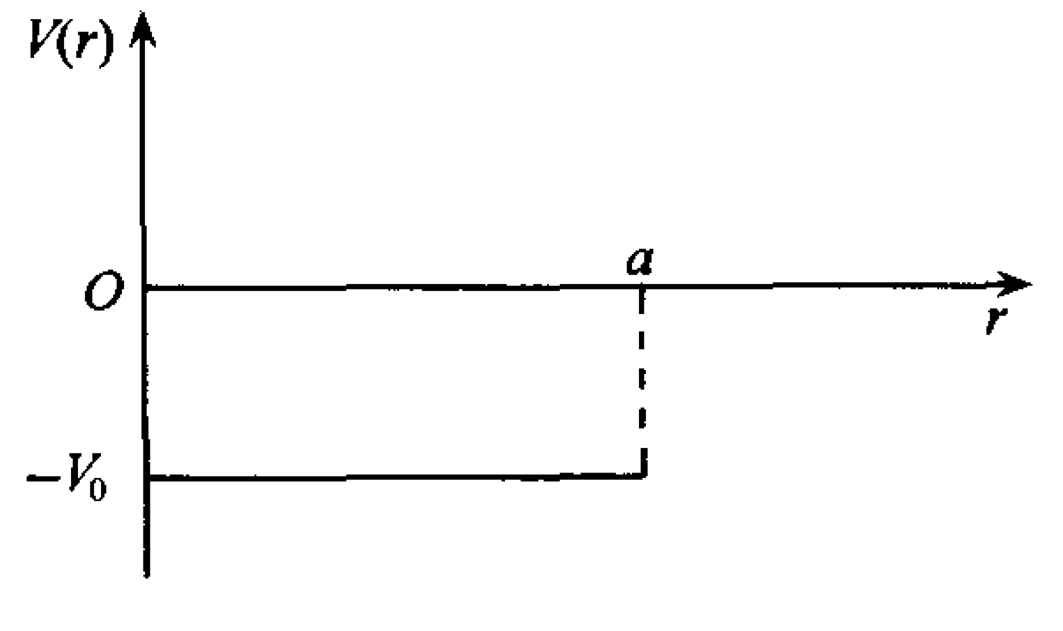


图 4.19

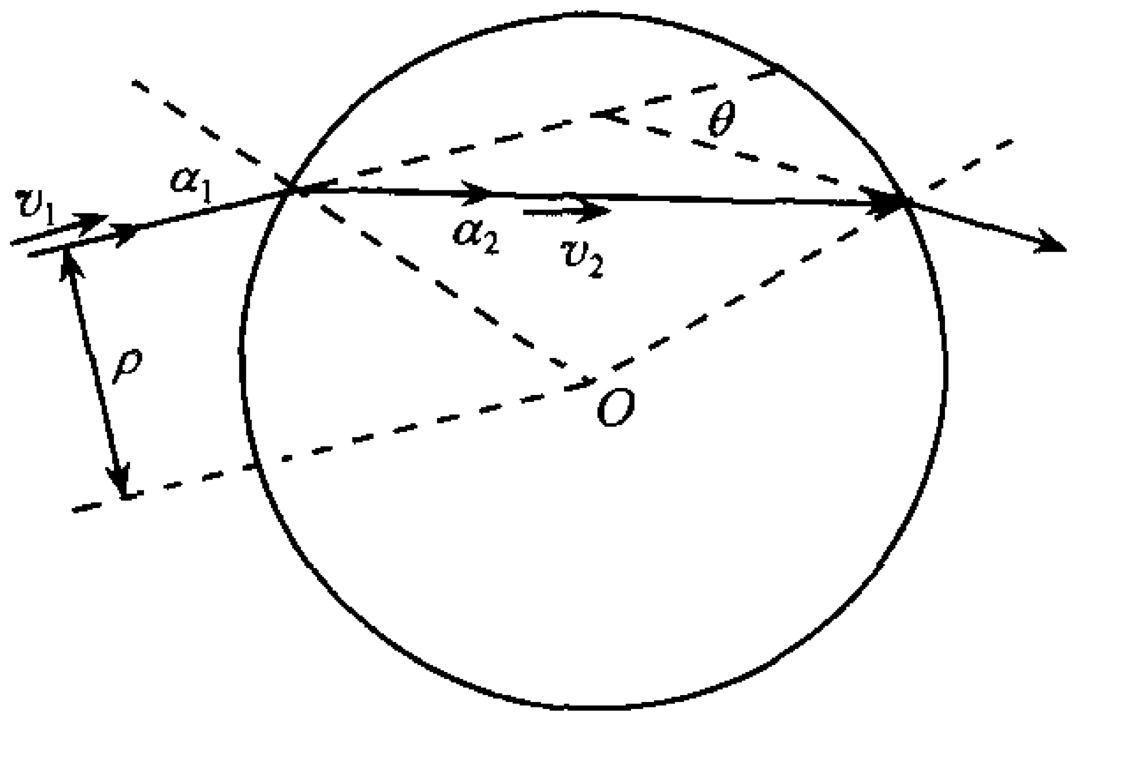


图 4.20

设质点质量为 m，入射时速率为 v_1，入射角为 α_1，进入势阱，在边界上，速率立即变为

v_2,设折射角为 α_2,则:

由切线方向未受力,切线方向动量守恒,

$$mv_1\sin\alpha_1 = mv_2\sin\alpha_2$$

由机械能守恒,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - V_0 = E$$

所以 $$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{v_1^2 + \frac{2}{m}V_0}}{v_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mv_1^2 + V_0}{\frac{1}{2}mv_1^2}} = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

根据光学中的折射定律,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} = n$$

n 是相对折射率,

所以 $$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

这说明质点被这个势阱散射与光线按同样的入射角射入半径为 a、相对折射率 $n=\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}$的球的情况是可以类比的.

(2) 由图 4.20 可见,散射角

$$\theta = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

先求 $\rho(\theta)$,今有 $\rho=a\sin\alpha_1$,要将 α_1、α_2 均表成 ρ 和 θ 的函数,

$$\frac{\sin\alpha^2}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\theta\right)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_1\cos\frac{\theta}{2} - \cos\alpha_1\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\alpha_1} = \cos\frac{\theta}{2} - \cot\alpha_1\cdot\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{n}$$

从上式解出 $\cot\alpha_1$,得

$$\cot\alpha_1 = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{n}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\rho^2 = a^2\sin^2\alpha_1 = \frac{a^2}{1 + \cot^2\alpha_1} = \frac{a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{a^2n^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{n^2 + 1 - 2n\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$2\rho\mathrm{d}\rho = \frac{a^2n^2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(n^2 + 1 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right) - 2n\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}{\left(n^2 + 1 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2n^2\sin\frac{\theta}{2}\left(n\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(n^2 + 1 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$\sigma(E,\theta)=\frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|=\frac{a^2n^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left|\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\left(n^2+1-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

关于 θ 的取值范围：

当 $\rho=0$ 时，$\alpha_1=0,\alpha_2=0,\theta=\theta_{\min}=0$.

当 $\rho\to a$，时，$\alpha_1\to\frac{\pi}{2}$，由 $\cos\frac{\theta}{2}-\cot\alpha_1\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{n}$

因为　$\cot\alpha_1\to 0,\cos\frac{\theta}{2}\to\frac{1}{n},\theta_{\max}\to 2\arccos\frac{1}{n}$.

可见，$\theta<\theta_{\max}$时，$\cos\frac{\theta}{2}>\frac{1}{n},n\cos\frac{\theta}{2}-1>0$. 在能发生的散射角范围内，都有 $n\cos\frac{\theta}{2}-1>0$ 的情况，而在 $\theta>\theta_{\max}$即 $\theta>2\arccos\frac{1}{n}$时，$\sigma(E,\theta)=0$，

$$\sigma(E,\theta)=\begin{cases}\dfrac{a^2n^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\dfrac{\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\arccos\frac{1}{n}\\ 0 & \theta\geqslant 2\arccos\frac{1}{n}\end{cases}$$

其中

$$n=\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}$$

(3)

$$\sigma(E)=\int_0^{\theta_{\max}}2\pi\sigma(E,\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\arccos\frac{1}{n}}\frac{a^2n^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\cdot 2\pi\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

令　$\cos\frac{\theta}{2}=x,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\theta=-\dfrac{2\mathrm{d}x}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$$\sigma(E)=-\int_1^{\frac{1}{n}}\frac{2\pi a^2n^2(nx-1)(n-x)}{(1+n^2-2nx)^2}\mathrm{d}x=2\pi a^2n^2\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{(n^2+1)x-nx^2-n}{(n^2+1-2nx)^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{(n^2+1)x}{(n^2+1-2nx)^2}\mathrm{d}x=\frac{n^2+1}{4n^2}\left[\ln(n^2+1-2nx)+\frac{n^2+1}{n^2+1-2nx}\right]\Bigg|_{\frac{1}{n}}^1$$

$$=\frac{n^2+1}{4n^2}\left[\ln\frac{(n-1)^2}{n^2-1}+\frac{n^2+1}{(n-1)^2}-\frac{n^2+1}{n^2-1}\right]$$

$$=\frac{n^2+1}{4n^2}\left[\ln\frac{n-1}{n+1}+\frac{2(n^2+1)}{(n-1)^2(n+1)}\right]$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{-nx^2}{(n^2+1-2nx)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{-n}{(-2n)^3}\left[n^2+1-2nx-2(n^2+1)\ln(n^2+1-2nx)-\frac{(n^2+1)^2}{n^2+1-2nx}\right]\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$= \frac{1}{8n^2}\left[-2(n-1)-2(n^2+1)\ln\frac{n-1}{n+1}-\frac{2(n^2+1)^2}{(n-1)^2(n+1)}\right]$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{-n}{(n^2+1-2nx)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2+1-2nx}\right]\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{1} = -\frac{1}{(n-1)^2(n+1)}$$

代入 $\sigma(E)$的式子，经计算可得

$$\sigma(E) = \pi a^2$$

这个结果正是我们期待的，因为能产生散射的最大瞄准距离显然有 $\rho_{\max}\to a$，

$$\sigma(E) = \pi\rho_{\max}^2 = \pi a^2$$

4.3.13　一束质量为 m、能量为 E 的粒子垂直入射在厚度为 d、每单位体积内包含 n 个固定散射中心的金属薄片上. 一个粒子与一个散射中心间的力是大小为$\frac{k}{r^2}$(k 为常量)的斥力. 问束中粒子有多大部分被散射到 θ 大于 α 的立体角内?

解　一个散射中心对粒子的作用力与 4.3.9 题完全一样，可用 4.3.9 题已解得的微分散射截面，

$$\sigma(v,\theta) = \left[\frac{k}{2mv^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right]^2$$

改成 $\sigma(E,\theta)$. 因为 $E=\frac{1}{2}mv^2$，

$$\sigma(E,\theta) = \left[\frac{k}{4E\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right]^2$$

被一个散射中心散射到 $\theta>\alpha$ 的立体角内的粒子数所占的分数为

$$\int_\alpha^\pi 2\pi\sigma(E,\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\pi \frac{2\pi k^2}{16E^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi k^2}{4E^2}\int_\alpha^\pi \frac{1}{\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi k^2}{4E^2}\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

单位面积金属薄片内有 nd 个散射中心，能量为 E、垂直入射的粒子被金属薄片散射到 $\theta>\alpha$ 的立体角内的粒子所占的分数为

$$\frac{nd\pi k^2}{4E^2}\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

如不是垂直入射，$\sigma(E,\theta)$没有差别，而与粒子束垂直的单位面积金属薄片内的散射中心数不再是 nd.

4.3.14　一束质量为 m、能量为 E 的粒子垂直入射在上题所述的金属薄片上，离粒子束通过薄片所在的 O 点距离为 r 的地方，放置一面积为 $A(A\ll r^2)$的粒子探测器，从 O

点到探测器的线与粒子入射方向间夹角为 α(如图 4.21 所示),若射到金属薄片上的粒子束流密度为 I 、问单位时间内有多少粒子射中探测器?

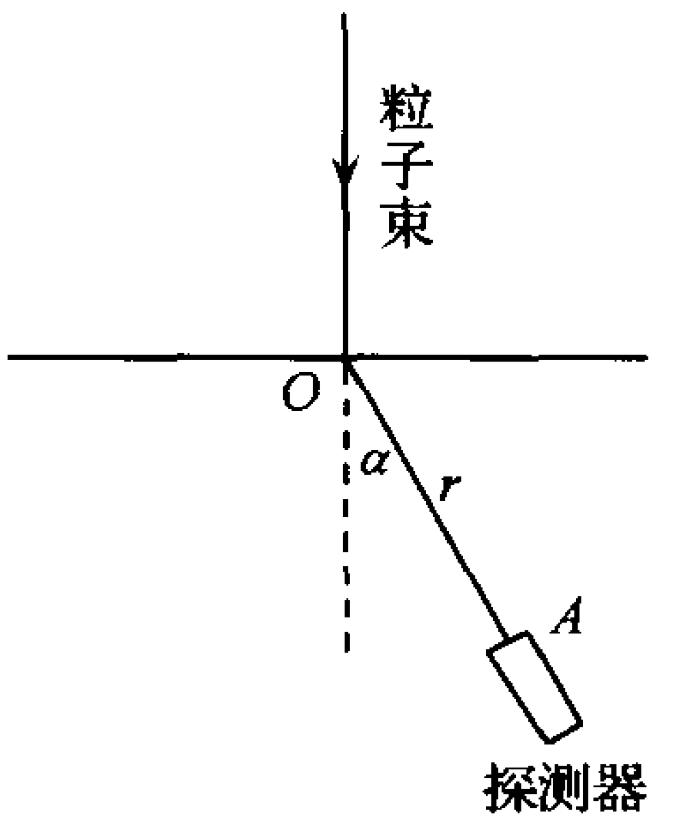


图 4.21

解　考虑到 $A \ll r^2$,探测器对 O 点所张的立体角很小,可以忽略在这立体角内 $\sigma(E,\theta)$的差别.

用上题所得的结果(对于金属薄片单位面积内的 nd 个散射中心),

$$\sigma(E,\theta) = \frac{ndk^2}{16E^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

射到金属薄片上的粒子束流密度 I 是单位时间内射到单位面积金属薄片上的粒子数.

单位时间内射到探测器上的粒子数为,

$$N = I\sigma(E,\mathrm{d})\mathrm{d}\Omega = \frac{Indk^2A}{16E^2r^2\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega=\dfrac{A}{r^2}$是探测器所张的很小的立体角.

4.3.15　粒子束遇到由许多散射中心组成的靶子.设 $I(0)$是入射时的粒子束强度,进入靶后穿透 x 距离处的强度为 $I(x)$.设束中一个粒子被一个散射中心散射的总散射截面为 σ,证明:

(1) $I(x)=I(0)\mathrm{e}^{-n\sigma x}$,$n$ 为单位体积内的散射中心数;

(2) 粒子被散射前运行的平均距离为$\dfrac{1}{n\sigma}$.

证明　(1) 一个粒子从 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 被散射的概率为 $n\sigma\mathrm{d}x$,强度减弱$|\mathrm{d}I|$,

$$\mathrm{d}I = - In\sigma\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{I(x)}\frac{\mathrm{d}I}{I} = - n\sigma\int_0^x\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{I(x)}{I(0)} = - n\sigma x$$

$$I(x) = I(0)\mathrm{e}^{-n\sigma x}$$

(2)
$$\bar{x} = \frac{1}{I(0)}\int_0^\infty I(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{I(0)}\int_0^\infty I(0)\mathrm{e}^{-n\sigma x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\sigma}\mathrm{e}^{-n\sigma x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{n\sigma}$$

第五章　刚体运动学

5.1　刚体上各点的速度和加速度

5.1.1　揉茶机的揉桶有三个曲柄支承，曲柄的支座为 A、B、C，支轴为 a、b、c，且 A、B、C 与 a、b、c 为两等边三角形，各曲柄长 r，均以不变的角速度 ω 绕其支座转动，如图 5.1 所示，求揉桶中心 O 点的速率和加速度的大小.

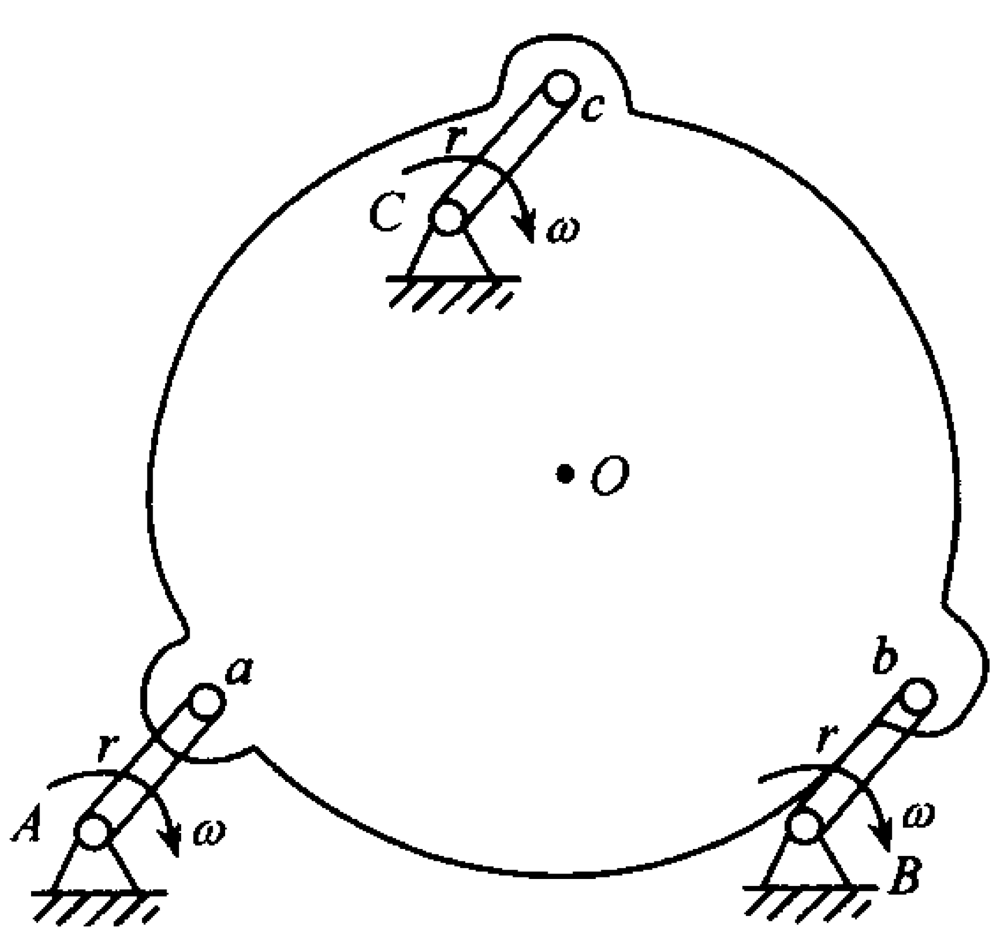


图 5.1

解　揉茶机上的三个支轴 a、b、c 均有同样的速度，刚体上不在一条直线上的三点有同样的速度，刚体的运动是平动，O 点的速率等于 a、b、c 点的速率，O 点的加速度的大小等于 a、b、c 点的加速度的大小.

$$v_0 = r\omega,\quad a_0 = r\omega^2$$

5.1.2　半径为 r 的半圆形凸轮以匀速 u 沿水平线向右运动，带动直杆 AB 绕 A 点转动，当 $\theta=30°$时，A 点与凸轮的中心 O 点正好在同一铅直线上(见图 5.2). 求此时 AB 杆与凸轮相接触的一点 C 的速度与加速度的大小.

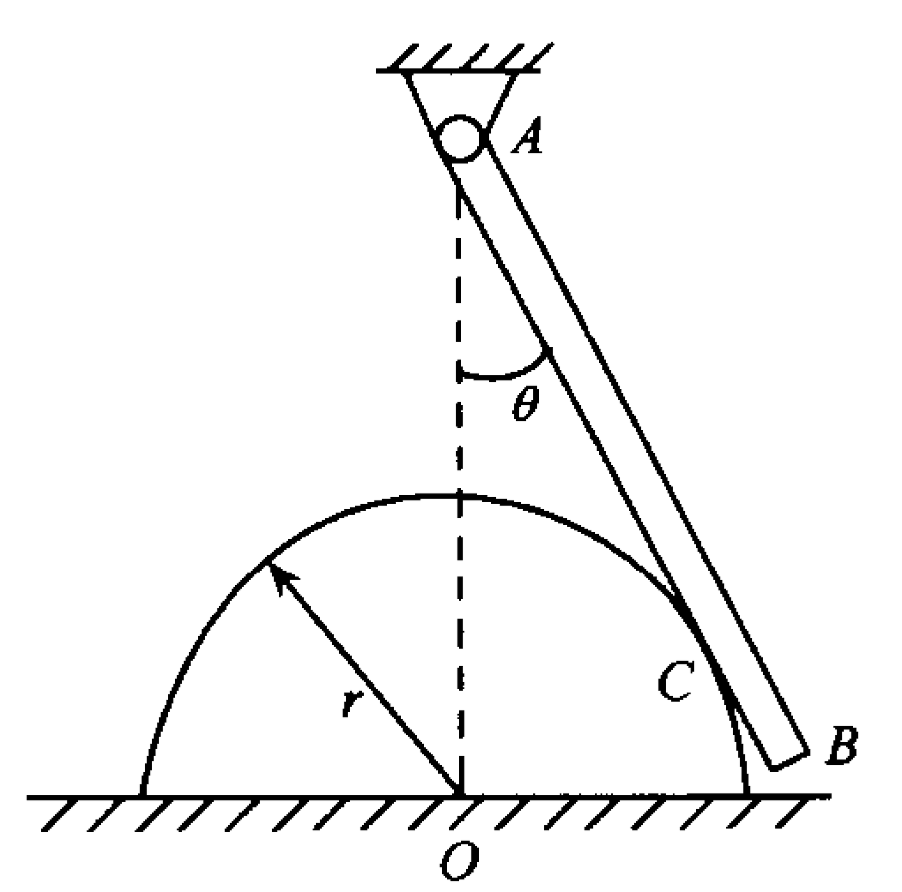


图 5.2

解　以凸轮为动参考系，C 点对静参考系的速度是牵连速度与相对速度(沿 CA 方向)之矢量和，AB 绕 A 轴转动，C 点的绝对速度必垂直于 AC. 由此可得 C 点的速率

$$v = u\cos\theta = u\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}u$$

要求此刻 C 点的加速度，须知道此刻 AB 杆的角速度 $\dot{\theta}$和角加速度 $\ddot{\theta}$，此刻，

$$AC = \frac{r}{\tan 30°} = \sqrt{3}\,r$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}u}{\sqrt{3}\,r} = \frac{u}{2r}$$

设图 5.2 所示位置时 $t=0$，图 5.3 画了 t 时刻的位形，

$$AD = AO\big|_{t=0} = \frac{r}{\sin 30°} = 2r$$

$$BD = BH + HD = r + DO\cos\theta = r + ut\cos\theta$$

$$BD = AD\sin\theta = 2r\sin\theta$$

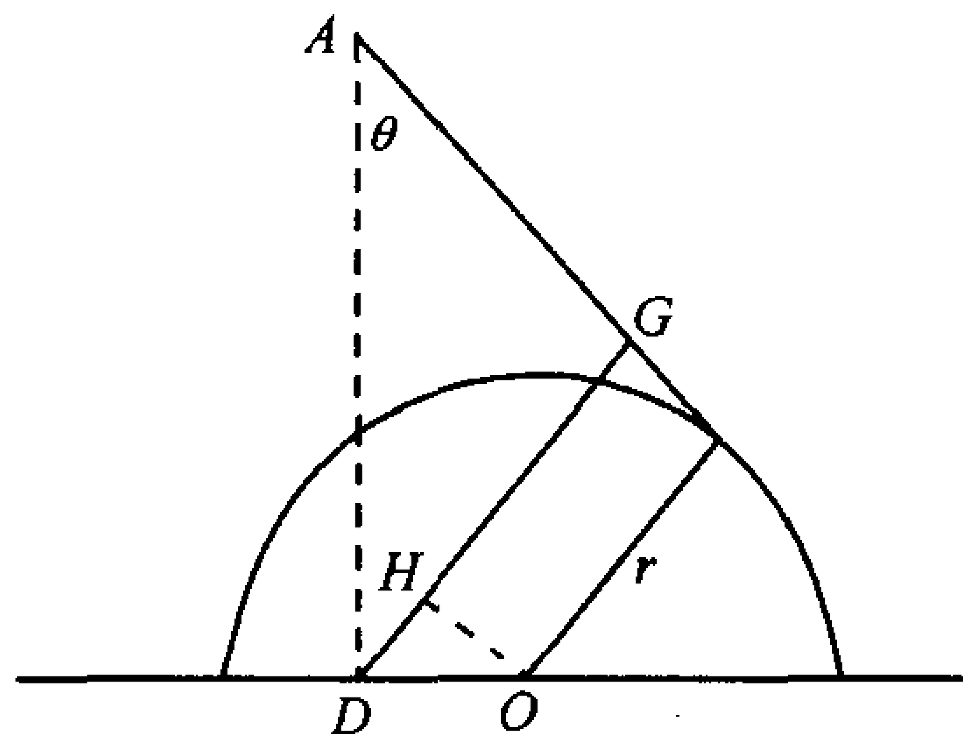


图 5.3

所以
$$r + ut\cos\theta = 2r\sin\theta$$

上式两边对 t 求导两次，

$$u\cos\theta - ut\sin\theta\dot{\theta} = 2r\cos\theta\dot{\theta}$$

$$-u\sin\theta\dot{\theta} - u\sin\theta\dot{\theta} - ut\cos\theta\dot{\theta}^2 - ut\sin\theta\ddot{\theta} = -2r\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2r\cos\theta\ddot{\theta}$$

$$-2u\sin\theta\dot{\theta} + (2r\sin\theta - ut\cos\theta)\dot{\theta}^2 = (2r\cos\theta + ut\sin\theta)\ddot{\theta}$$

代入 $t=0$ 时的 $\theta=30°$，$\dot{\theta}=\dfrac{u}{2r}$，得 $t=0$ 时的 $\ddot{\theta}$ 为

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2r\cos 30°}\left[-2u\sin 30°\cdot\frac{u}{2r} + 2r\sin 30°\cdot\left(\frac{u}{2r}\right)^2\right] = -\frac{u^2}{4\sqrt{3}r^2}$$

$$a_n = AC\Big|_{t=0}\dot{\theta}^2 = \sqrt{3}r\cdot\left(\frac{u}{2r}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}u^2}{4r}$$

$$a_\tau = AC\Big|_{t=0}\ddot{\theta} = \sqrt{3}r\left(-\frac{u^2}{4\sqrt{3}r^2}\right) = -\frac{u^2}{4r}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{u^2}{4r}\sqrt{3 + (-1)^2} = \frac{u^2}{2r}$$

5.1.3　图 5.4 中画的是蒸汽机或内燃机中用的曲柄、滑块连杆机构. 曲柄 OA 以等角速度 ω 绕 O 点转动，通过连杆 AB 带动活塞 B 在滑槽中左右运动．若 $OA=R$，$AB=l$，$t=0$ 时 $\varphi=0$. 求 t 时活塞 B 的速度．

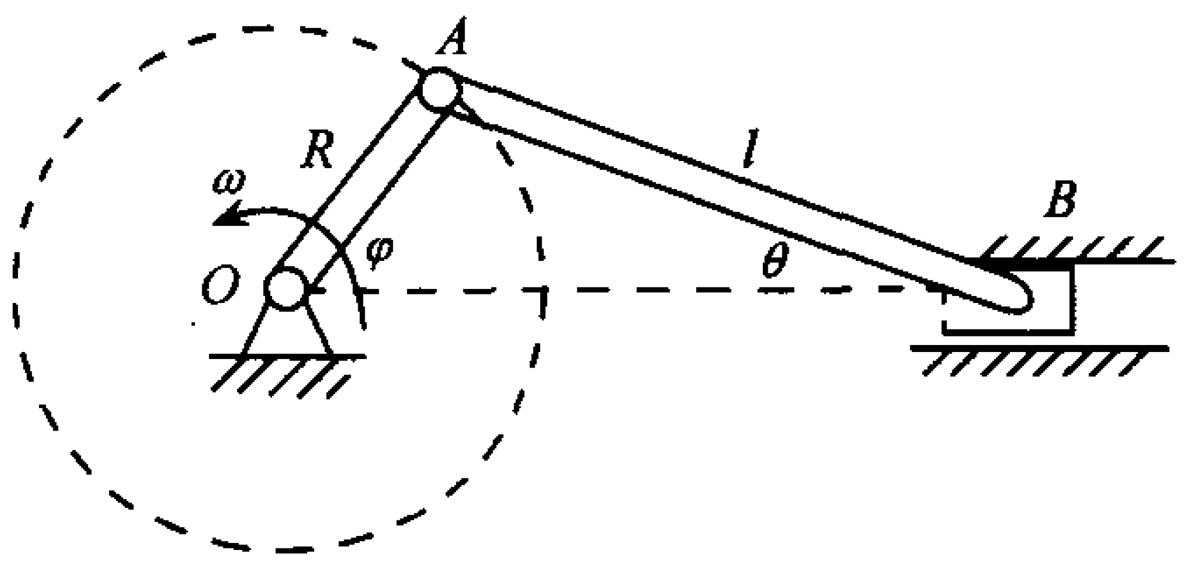


图 5.4

解 取 x 轴沿 OB 直线,向左为正,O 为原点.

$$x_B = -R\cos\varphi - l\cos\theta$$

$$R\sin\varphi = l\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{R}{l}\sin\varphi, \quad \cos\theta = \sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\varphi}$$

$$\cos\theta\dot{\theta} = \frac{R}{l}\cos\varphi\dot{\varphi} = \frac{R\omega}{l}\cos\varphi$$

$$\dot{\theta} = \frac{R\omega}{l}\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} = \frac{R\omega\cos\varphi}{\sqrt{l^2-R^2\sin^2\varphi}}$$

$$v_B = \frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}t} = R\sin\varphi\dot{\varphi} + l\sin\theta\dot{\theta} = R\omega\sin\varphi + R\sin\varphi\cdot\frac{R\omega\cos\varphi}{\sqrt{l^2-R^2\sin^2\varphi}}$$

$$\varphi = \omega t$$

$$v_B = R\omega\left(1+\frac{R\cos\omega t}{\sqrt{l^2-R^2\sin^2\omega t}}\right)\sin\omega t$$

5.1.4 曲柄 OA 以匀角速 $\omega_0=10\text{s}^{-1}$顺时针方向转动(见图 5.5). 求当 $\theta=30°$时 BC 杆的角速度 ω、角加速度 β 及销钉 A 在 BC 杆导槽中的相对加速度 a_r.

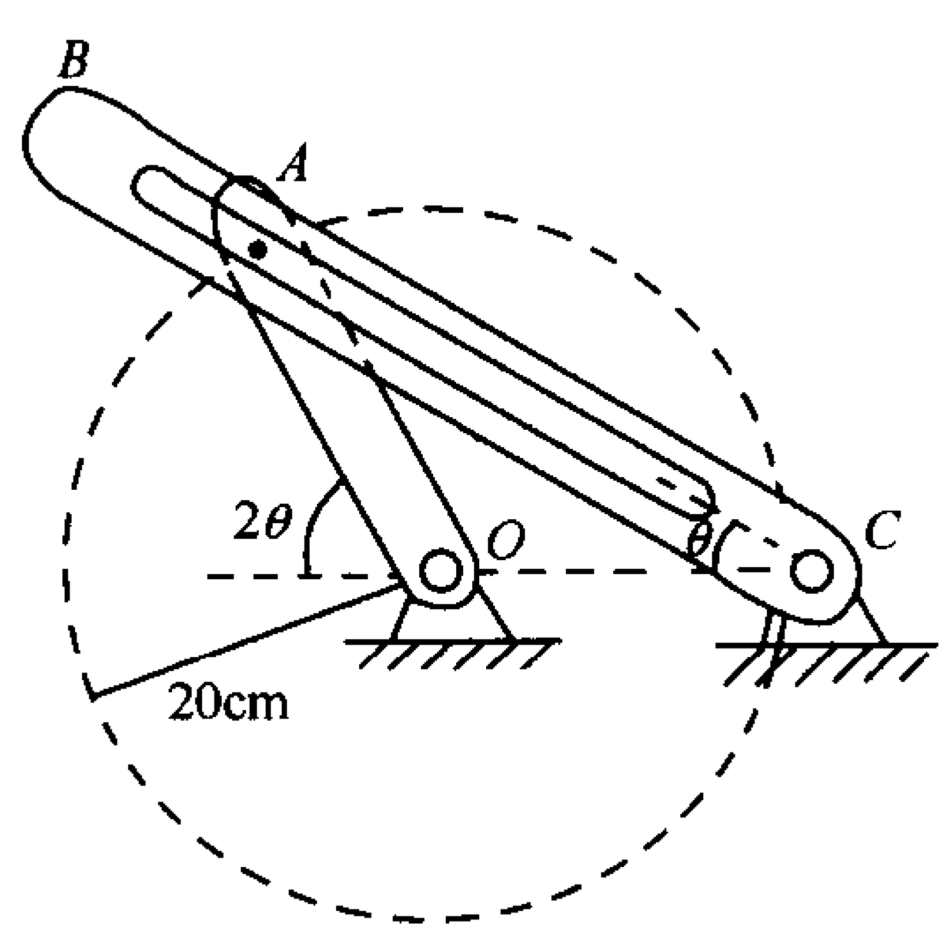


图 5.5

解 $2\dot{\theta}=\omega_0$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{1}{2}\omega_0 = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5\text{s}^{-1}(\text{顺时针方向})$$

$$\beta = \ddot{\theta} = 0$$

下面求销钉 A 在 BC 杆导槽中的相对加速度. 以 BC 杆为动参考系,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_e - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$\boldsymbol{a}_r$ 沿 AC 方向,设指向 C 的方向为正,因为 BC 杆的角速度 $\omega\neq 0$,角加速度 $\beta=0$.

$$a_e = AC\cdot\omega^2 = 2\cdot AO\cos 30°\times 5^2 = 866(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}),$$

沿 BC 方向,指向 C 点.

$$a = AO\omega_0^2 = 20\times 10^2 = 2000(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$$

沿 AO 方向,指向 O 点,

$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 在与 $\boldsymbol{a}_r$ 相垂直的方向,

所以
$$a_r = a\cos 30° - a_e = 2000\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 866 = 866(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$$

沿 AC 方向,指向 C 点.

5.1.5 摇床急用机构的曲柄以不变转速 $n=90\text{r/min}$ 绕定轴 O 转动,通过滑块 A 带动扇形齿轮绕 O_1 轴转动,从而带动齿条 B 做铅垂方向振动. 设 OO_1 在同一水平线上,曲柄 $OA=76\text{mm}$,其他尺寸如图 5.6 所示.

求 $\theta=30°$时齿条 B 的速度和加速度.

解　设 O_1A 与水平线的夹角为 φ，

$$\dot{\theta}=-2\pi n/60=-2\pi\cdot 90/60=-3\pi \mathrm{s}^{-1}$$

$$\tan\varphi=\frac{OA\sin\theta}{OO_1-OA\cos\theta}=\frac{7.6\sin\theta}{183-7.6\cos\theta}\tag{1}$$

$$\sec^2\varphi=1+\tan^2\varphi=\frac{3.35\times 10^4-2.78\times 10^3\cos\theta}{(183-7.6\cos\theta)^2}\tag{2}$$

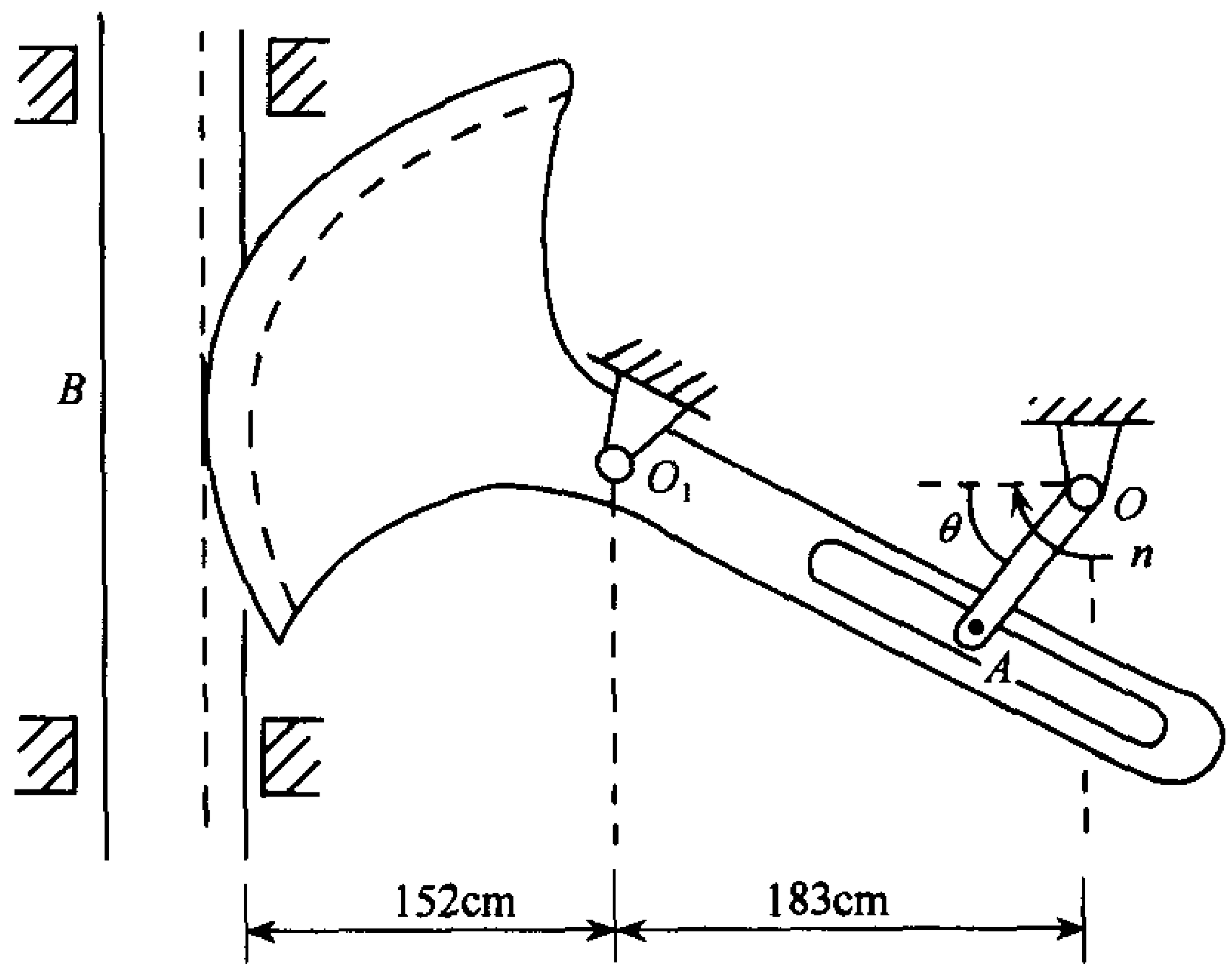


图 5.6

式(1)两边对 t 求导，

$$\sec^2\varphi\cdot\dot{\varphi}=\frac{7.6\cos\theta\dot{\theta}(183-7.6\cos\theta)-(7.6\sin\theta)^2\dot{\theta}}{(183-7.6\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{-57.8+1.39\times 10^3\cos\theta}{(183-7.6\cos\theta)^2}\dot{\theta}\tag{3}$$

将式(2)及 $\dot{\theta}=-3\pi\mathrm{s}^{-1}$代入式(3)，可得

$$\dot{\varphi}=-3\pi\frac{-57.8+1.39\times 10^3\cos\theta}{3.35\times 10^4-2.78\times 10^3\cos\theta}$$

$$\ddot{\varphi}=-3\pi\left[\frac{-1.39\times 10^3\sin\theta\dot{\theta}(3.35\times 10^4-2.78\times 10^3\cos\theta)}{(3.35\times 10^4-2.78\times 10^3\cos\theta)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{(-57.8+1.39\times 10^3\cos\theta)\cdot 2.78\times 10^3\sin\theta\dot{\theta}}{(3.35\times 10^4-2.78\times 10^3\cos\theta)^2}\right]$$

$$=-9\pi^2\frac{4.64\times 10^7\sin\theta}{(3.35\times 10^4-2.78\times 10^3\cos\theta)^2}$$

规定齿条向下的速度为正，

$$v_B=-152\dot{\varphi},\quad a_B=-152\ddot{\varphi}$$

代入 $\theta=30°$，

$$v_B=-152(-3\pi)\frac{-57.8+1.39\times 10^3\times 0.866}{3.35\times 10^4-2.78\times 10^3\times 0.866}=52.8(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

$$a_B = -152(-9\pi^2)\frac{4.64\times10^7\times0.5}{(3.35\times10^4-2.78\times10^3\times0.866)^2} = 324(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$$

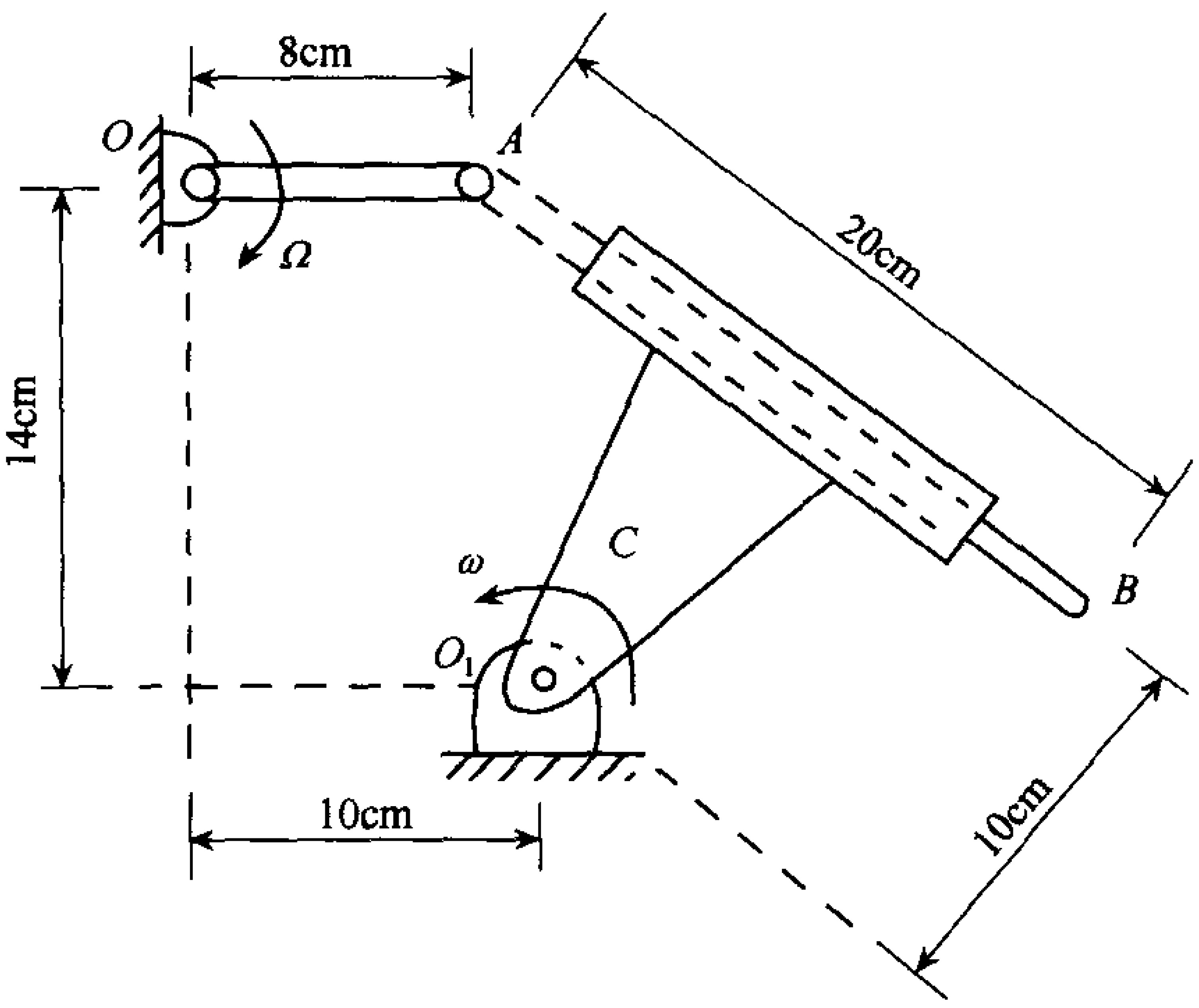


图 5.7

5.1.6 图 5.7 中机构在竖直平面内运动，各部件的尺寸如图所示．某时刻在图示位置，杆 OA 处于水平位置，绕 O 点的角速度 $\Omega=2\text{rad/s}$，求此时部件 C 的角速度 ω 及杆 AB 的 B 端的速度的大小．

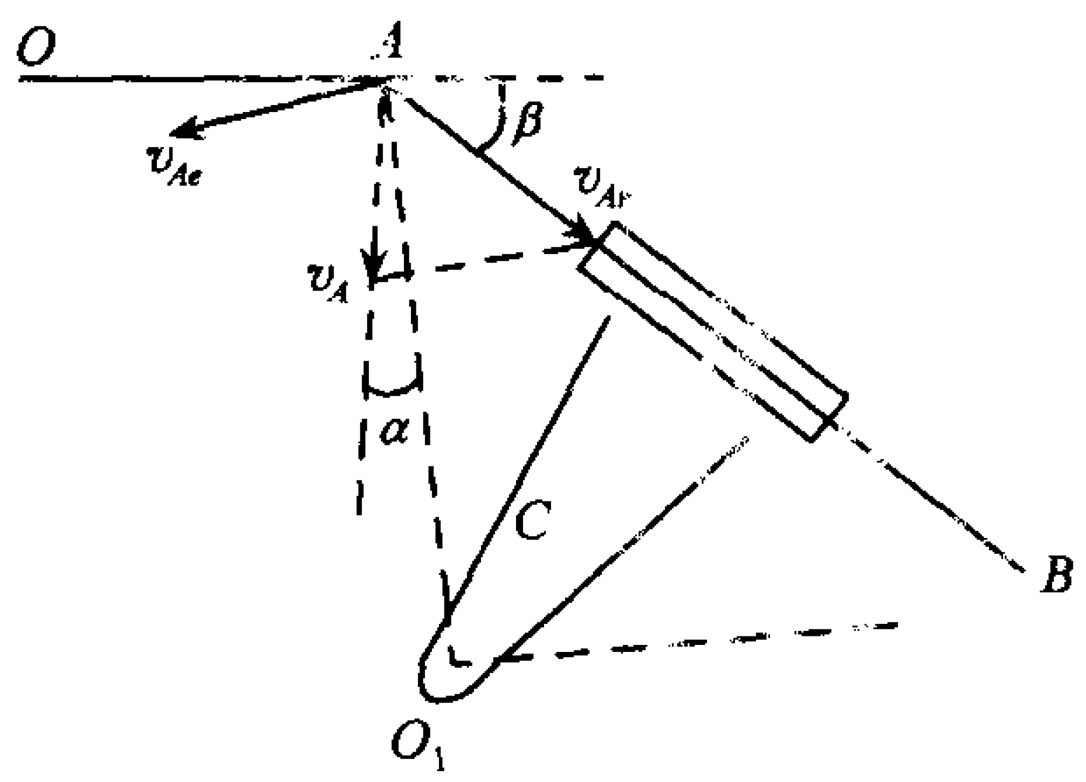


图 5.8

解 见解图 5.8，

$$v_A = \Omega\times OA = 2\times8 = 16(\text{cm/s})$$

$$\tan\alpha = \frac{10-8}{14} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha = \arctan\frac{1}{7} = 8.13°$$

$$\beta = 90° - 45° - \alpha = 36.87°$$

考虑 AB 杆上的 A 点，取部件 C 为动参考系，

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{Ae} + \boldsymbol{v}_{Ar} \tag{1}$$

$v_{Ae}=AO_1\cdot\omega=10\sqrt{2}\,\omega$，　　ω 待定．

$\boldsymbol{v}_{Ar}$沿 AB 方向，v_{Ar}待定．

由式(1)的水平和竖直两方向的分量方程，

$$10\sqrt{2}\,\omega\cos\alpha = v_{Ar}\cos\beta \tag{2}$$

$$10\sqrt{2}\,\omega\sin\alpha + v_{Ar}\sin\beta = v_A = 16 \tag{3}$$

式(2)$\times\sin\beta$+式(3)$\times\cos\beta$ 可消去 v_{Ar}，得

$$10\sqrt{2}\,\omega\sin(\alpha+\beta) = 16\cos\beta,$$

$$\omega = \frac{16\cos36.87°}{10\sqrt{2}\sin45°} = 1.28\text{rad/s}.$$

此时，AB 杆围绕 A 点的角速度即部件 C 围绕 O_1 点的角速度 ω.

取此时随 A 点平动的参考系为动系，B 点的绝对速度是$\boldsymbol{v}_A$（牵连速度）与$\boldsymbol{v}_{BA}$（相对速度）的矢量和，$\boldsymbol{v}_A$ 与$\boldsymbol{v}_{BA}$的方向如图 5.9 所示，

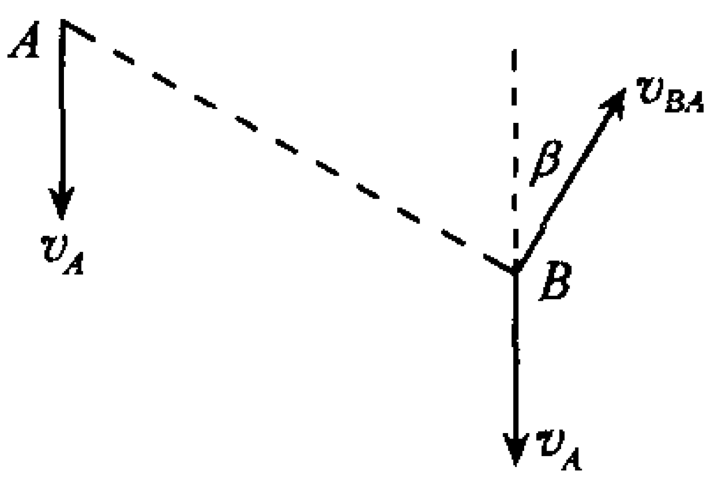


图 5.9

$$v_{BA} = AB \cdot \omega = 20\omega = 25.6\text{cm/s}$$

$$v_B = \sqrt{(v_A - v_{BA}\cos\beta)^2 + (v_{BA}\sin\beta)^2}$$

代入 v_A、v_{BA}及 β 值，可得

$$v_B = 16\text{cm/s}$$

读者也可取部件 C 为动参考系，求 B 点的绝对速度以检验上述结果.

5.1.7 若除上题所给条件以外，还知道此时 OA 杆绕 O 点的角加速度 $\dot{\Omega}=0$，求此时部件 C 的角加速度 $\dot{\omega}$及 B 点的加速度 a_B.

解 A 点的绝对加速度为

$$a_A = OA \cdot \Omega^2 = 8 \times 2^2 = 32(\text{cm/s}^2)$$

沿水平方向，向左.

取部件 C 为动参考系，a_{Ae1}、a_{Ae2}分别表示 A 点的牵连法向、切向加速度，

$$a_{Ae1} = AD\omega^2 = 10\sqrt{2} \times (1.28)^2 = 23.17(\text{cm/s}^2)$$

$$a_{Ae2} = AD\dot{\omega} = 10\sqrt{2}\,\dot{\omega}$$

这里已代入了上题解得的 ω 值. a_{Ar}是相对加速度，必沿 AB 方向，设图 5.10 所示的方向为正方向.

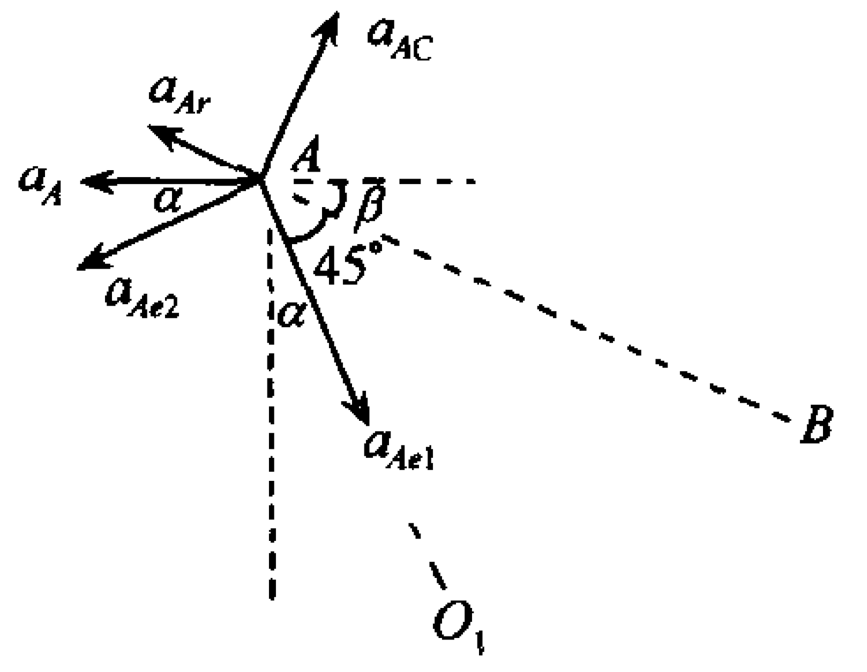


图 5.10

$$\boldsymbol{a}_{AC} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{Ar}$$

是科里奥利加速度，其中$\boldsymbol{v}_{Ar}$沿 AB 方向，指向 B，由上题式(2)可得

$$v_{Ar} = \frac{10\sqrt{2}\,\omega\cos\alpha}{\cos\beta} = 22.40\text{cm/s}$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{Ar} + \boldsymbol{a}_{Ae1} + \boldsymbol{a}_{Ae2} + \boldsymbol{a}_{AC}$$

两个分量方程为

$$a_A = a_{Ar}\cos\beta + a_{Ae2}\cos\alpha - a_{Ae1}\sin\alpha - 2\omega v_{Ar}\sin\beta$$

$$a_{Ar}\sin\beta - a_{Ae2}\sin\alpha - a_{Ae1}\cos\alpha + 2\omega v_{Ar}\cos\beta = 0$$

代入本题和上题已解得的数据，可得

$$a_{Ar} = -18.17\text{cm/s}^2$$

$$\dot{\omega} = 6.02\text{rad/s}^2$$

现在求 B 点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_B$，仍取部件 C 为动系，

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{Br} + \boldsymbol{a}_{Be1} + \boldsymbol{a}_{Be2} + \boldsymbol{a}_{BC}$$

其中 $\boldsymbol{a}_{Br}$、$\boldsymbol{a}_{Be1}$、$\boldsymbol{a}_{Be2}$、$\boldsymbol{a}_{BC}$的方向如图 5.11 所示，其大小分别为

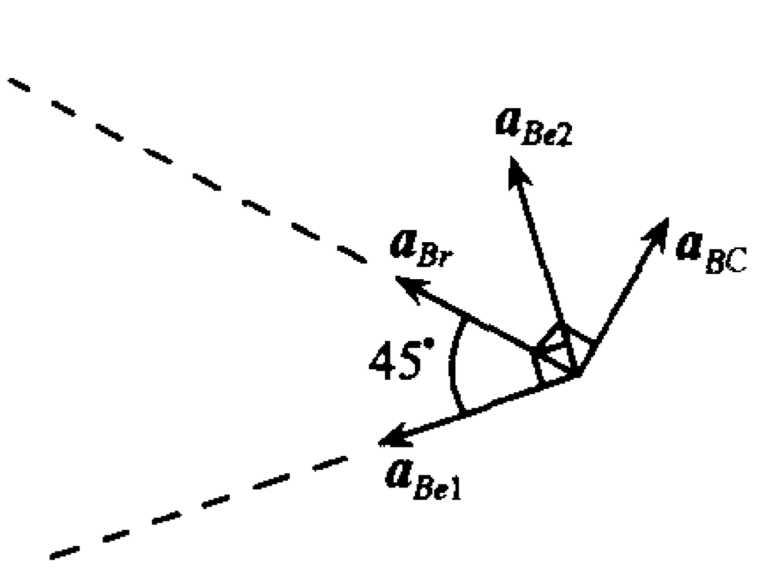


图 5.11

$$a_{Br} = a_{Ar} = -18.17\text{cm/s}^2$$

$$a_{Be1} = a_{Ae1} = 23.17\text{cm/s}^2$$

$$a_{Be2} = a_{Ae2} = 14.14 \cdot 6.02 = 85.12\text{cm/s}^2$$

$$a_{BC} = a_{AC} = 2\omega v_{Br} = 2\omega v_{Ar} = 57.34\text{cm/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{[a_{Br} + (a_{Be1} + a_{Be2})\cos 45°]^2 + [(a_{Be2} - a_{Be1})\cos 45° + a_{BC}]^2} = 116.8\text{cm/s}^2.$$

5.1.8 某瞬时刚体绕通过坐标原点的某轴转动，刚体上一点 $M_1(1,0,1)$的速度 $v_1 = 4\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$，它与 x 轴所成的角 $\alpha_1 = 45°$；另一点 $M_2(3,4,0)$的速度 v_2 与 x 轴成 α_2 角，且 $\cos\alpha_2 = -0.8$. 试求此刻刚体的角速度$\boldsymbol{\omega}$ 及 M_2 点的速度的大小.

解　$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}$，

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 = \omega_y \boldsymbol{i} + (\omega_z - \omega_x)\boldsymbol{j} - \omega_y \boldsymbol{k}$$

已知$\boldsymbol{v}_1 = 4\cos 45° \boldsymbol{i} + v_{1y}\boldsymbol{j} + v_{1z}\boldsymbol{k}$，

所以
$$\omega_y = 4\cos 45° = 2\sqrt{2}$$

$$v_{1z} = -\omega_y = -2\sqrt{2}$$

$$v_1^2 = (2\sqrt{2})^2 + v_{1y}^2 + (-2\sqrt{2})^2 = 4^2$$

解出

$$v_{1y} = 0$$

所以
$$\omega_z - \omega_x = 0, \quad \omega_z = \omega_x$$

$$\boldsymbol{r}_2 = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

$$v_2 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_2 = (\omega_x \boldsymbol{i} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{j} + \omega_x \boldsymbol{k}) \times (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})$$

$$= -4\omega_x \boldsymbol{i} + 3\omega_x \boldsymbol{j} + (4\omega_x - 6\sqrt{2})\boldsymbol{k}$$

已知 $v_2 = -0.8 v_2 \boldsymbol{i} + v_{2y}\boldsymbol{j} + v_{2z}\boldsymbol{k}$，

∴
$$v_{2x} = -0.8 v_2 = -4\omega_x$$

$$v_{2y} = 3\omega_x, \quad v_{2z} = 4\omega_x - 6\sqrt{2}$$

$$v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2 = (-4\omega_x)^2 + (3\omega_x)^2 + (4\omega_x - 6\sqrt{2})^2$$

$$= 41\omega_x^2 - 48\sqrt{2}\omega_x + 72$$

$$v_2 = \frac{4}{0.8}\omega_x = 5\omega_x$$

由上述两式消去 v_2 得

$$16\omega_x^2 - 48\sqrt{2}\omega_x + 72 = 0$$

$$2\omega_x^2 - 6\sqrt{2}\omega_x + 9 = 0$$

$$\omega_x = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{72 - 72}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,(\text{s}^{-1})$$

$$\omega_z = \omega_x = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\text{s}^{-1}$$

∴
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\boldsymbol{i} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{j} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\boldsymbol{k}$$

$$\omega=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{17}\mathrm{s}^{-1}$$

$$v_2=5\omega_x=\frac{15}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

5.1.9　半径为 b 的圆筒在半径为 a 的固定圆柱上做纯滚动．若相切的直线从静止开始以恒定的角加速度 β 围绕固定圆柱的轴顺时针转动，图 5.12 中画的是 $t=0$ 时的位置．求圆筒上 P、C 两点 t 时刻的速度和加速度(均按圆筒的切向和法向分解)．

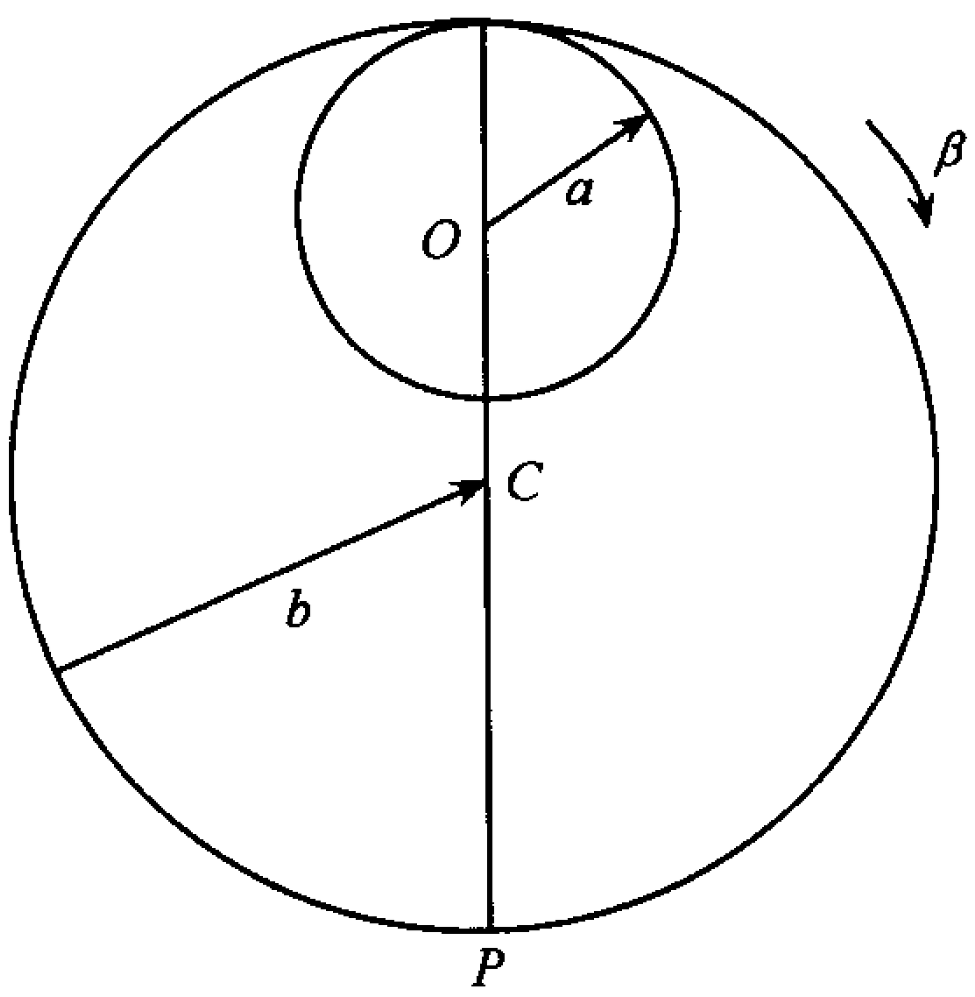


图 5.12

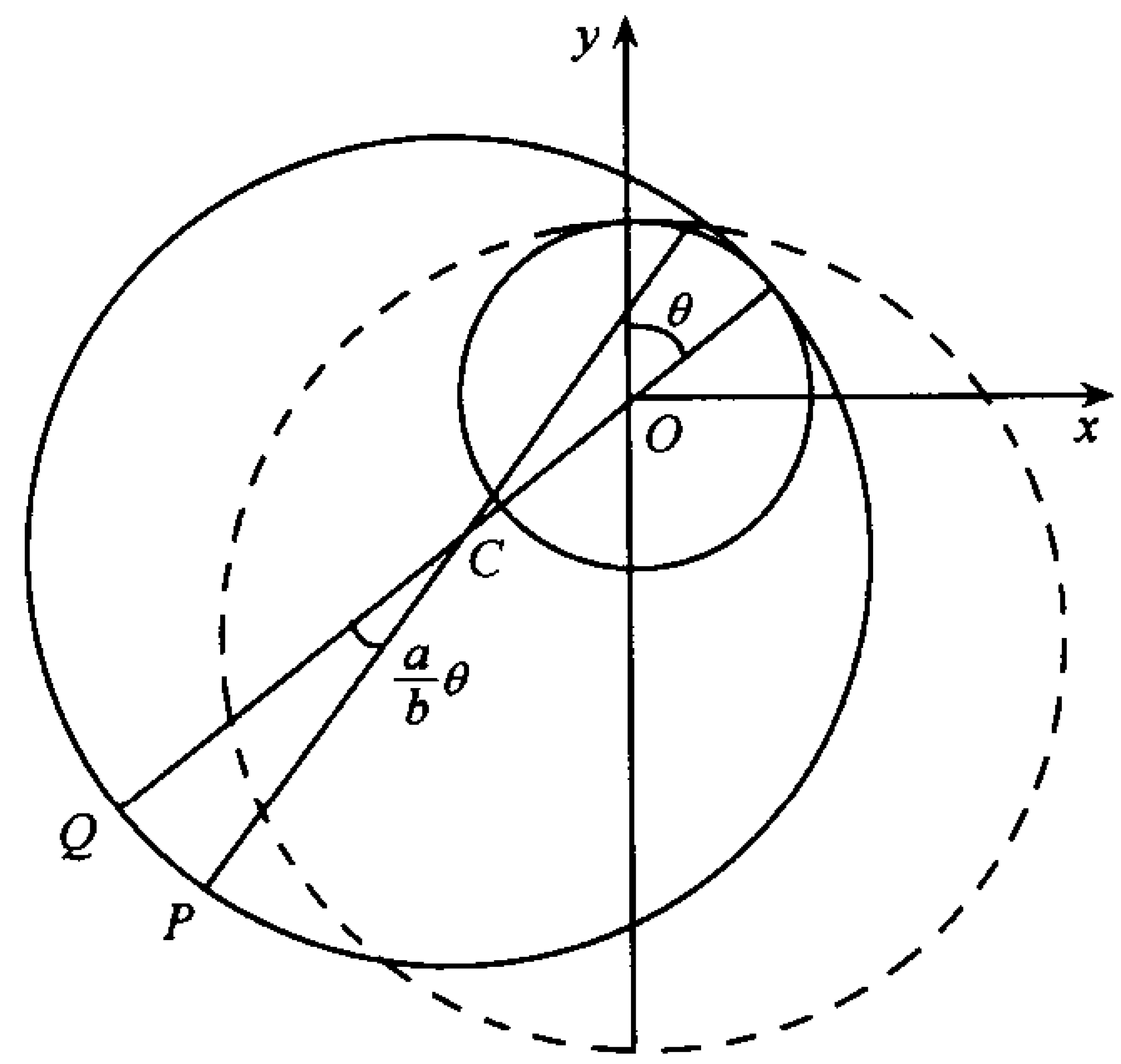


图 5.13

解　图 5.13 中用实线表示 t 时刻圆筒的位置，虚线表示 $t=0$ 时刻圆筒的位置．

取图中的 xy 坐标，原点位于固定圆柱的轴上．

$t=0$ 时相切的直线位于 $\theta=0$，由题设，$\dot{\theta}=0$，$\ddot{\theta}=\beta$($\ddot{\theta}$ 恒定)在 t 时刻，$\dot{\theta}=\beta t$，$\theta=\frac{1}{2}\beta t^2$.

$$x_C=-(b-a)\sin\theta,\quad y_C=-(b-a)\cos\theta$$

$$\dot{x}_C=-(b-a)\cos\theta\dot{\theta}=-(b-a)\beta t\cos\theta$$

$$\ddot{x}_C=-(b-a)\beta\cos\theta+(b-a)\beta^2t^2\sin\theta$$

$$\dot{y}_C=(b-a)\beta t\sin\theta$$

$$\ddot{y}_C=(b-a)\beta\sin\theta+(b-a)\beta^2t^2\cos\theta$$

$$v_{Ct}=-\dot{x}_C\cos\theta+\dot{y}_C\sin\theta=(b-a)\beta t$$

$$v_{Cn}=\dot{x}_C\sin\theta+\dot{y}_C\cos\theta=0$$

$$a_{Ct}=-\ddot{x}_C\cos\theta+\ddot{y}_C\sin\theta=(b-a)\beta$$

$$a_{Cn}=\ddot{x}_C\sin\theta+\ddot{y}_C\cos\theta=(b-a)\beta^2t^2$$

$\because$　$$\overset{\frown}{PQ}=a\theta,\quad\therefore\angle QCP=\frac{a}{b}\theta$$

t 时刻 CP 与 $-y$ 轴的夹角为 $\theta-\frac{a}{b}\theta=\frac{b-a}{b}\theta$，

$$x_P=-(b-a)\sin\theta-b\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$

$$y_P=-(b-a)\cos\theta-b\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$

$$\dot{x}_P=-(b-a)\beta t\cos\theta-(b-a)\beta t\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$

$$\ddot{x}_P=-(b-a)\beta\cos\theta+(b-a)\beta^2t^2\sin\theta$$
$$-(b-a)\beta\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)+\frac{(b-a)^2}{b}\beta^2t^2\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$

$$\dot{y}_P=(b-a)\beta t\sin\theta+(b-a)\beta t\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$

$$\ddot{y}_P=(b-a)\beta\sin\theta+(b-a)\beta^2t^2\cos\theta$$
$$+(b-a)\beta\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)+\frac{(b-a)^2}{b}\beta^2t^2\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$

$$v_{Pt}=-\dot{x}_P\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)+\dot{y}_P\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$
$$=(b-a)\beta t\left[1+\cos\left(\frac{a}{b}\theta\right)\right]$$

$$v_{Pn}=\dot{x}_P\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)+\dot{y}_P\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)=(b-a)\beta t\sin\left(\frac{a}{b}\theta\right)$$

$$a_{Pt}=-\ddot{x}_P\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)+\ddot{y}_P\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$
$$=(b-a)\beta\left[1+\cos\left(\frac{a}{b}\theta\right)\right]-(b-a)\beta^2t^2\sin\left(\frac{a}{b}\theta\right)$$

$$a_{Pn}=\ddot{x}_P\sin\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)+\ddot{y}_P\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)$$
$$=-(b-a)\beta\sin\left(\frac{a}{b}\theta\right)+(b-a)\beta^2t^2\cos\left(\frac{a}{b}\theta\right)+\frac{(b-a)^2}{b}\beta^2t^2$$

其中 $\theta=\frac{1}{2}\beta t^2$.

5.1.10 证明刚体上任何两点的速度在它们连线上的投影相等(速度投影定理).

证明 刚体上任意两点 A、B，它们对刚体上另一点 C(不一定是质心)的位矢为 $\boldsymbol{r}_A$ 和 $\boldsymbol{r}_B$.

今取此 C 点为基点，刚体的运动可分为跟随基点的平动和围绕过此基点的轴的转动．设此时刚体的角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，基点 C 的速度为 $\boldsymbol{v}_C$，则

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A$$

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_B$$

$$\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B)$$

$$(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B}{|\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B|}=[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B)]\cdot\frac{\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B}{|\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B|}=0$$

所以
$$\boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B}{|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B|} = \boldsymbol{v}_B \cdot \frac{\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B}{|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B|}$$

5.1.11　曲柄 OA 在图 5.14 所示位置(OA 与 DC 的夹角为 60°. BD 与 OA 垂直)绕定轴 O 转动的角速度 $\omega=4\text{s}^{-1}$, $OA=AB=AD=a=30\text{cm}$, $BC=b=40\text{cm}$, 滑块 C、D 在同一水平直线上,并限在水平滑道内滑动,求此时刻滑块 C、D 的速度.

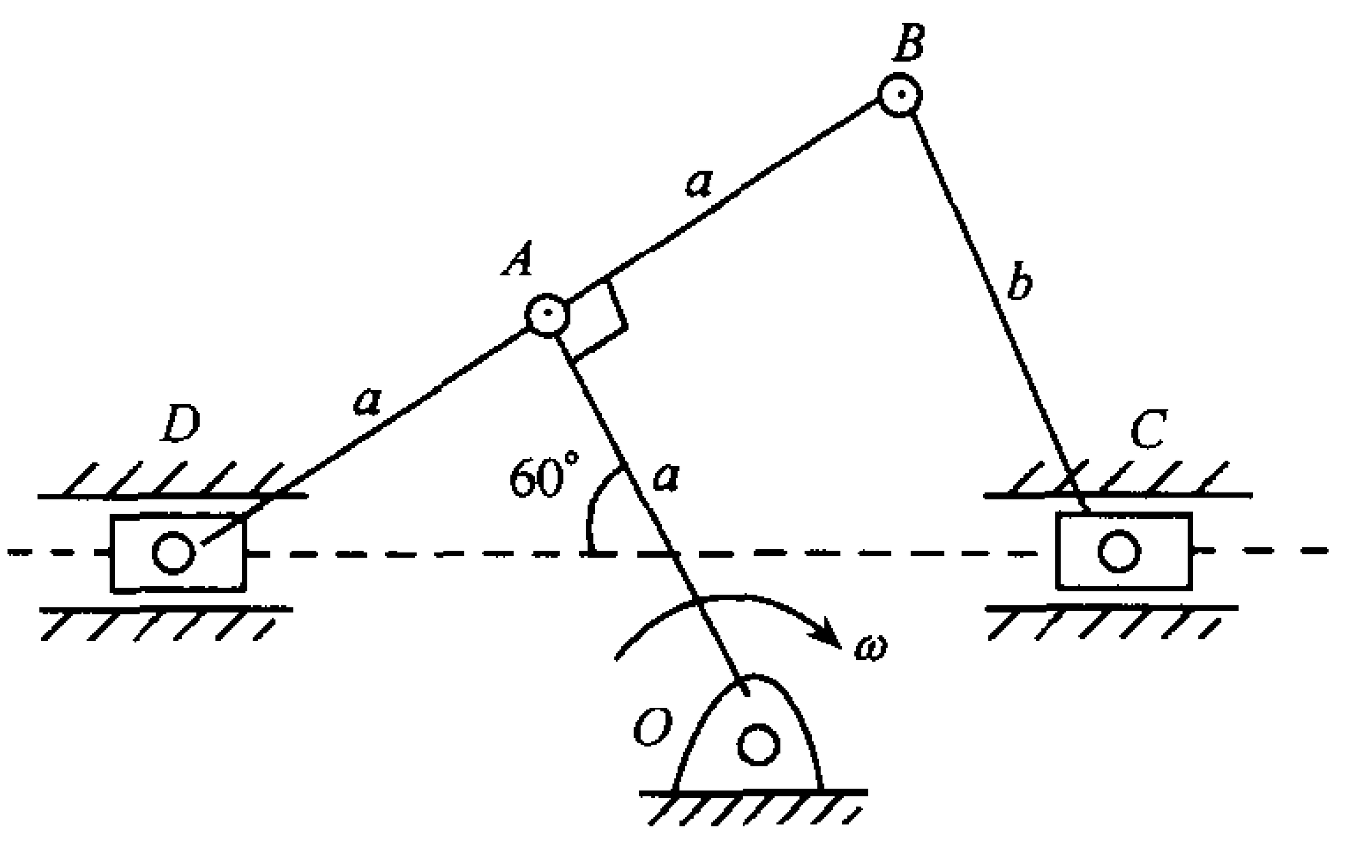


图 5.14

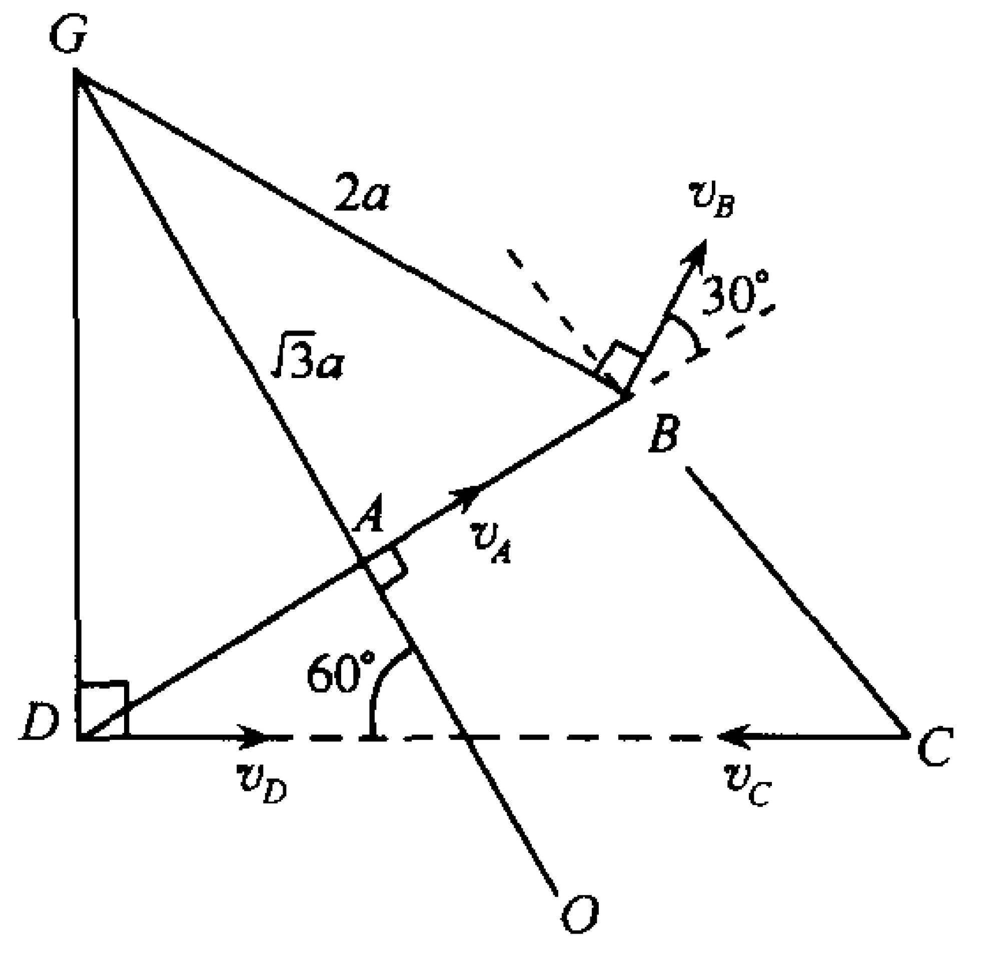


图 5.15

解　BD 做平面平行运动,已知在此时 BD 上 D、A 两点的速度方向,如图 5.15 所示,由 D、A 两点分别作 $\boldsymbol{v}_D$、$\boldsymbol{v}_A$ 的垂线,其交点 G 是此时杆 BD 的瞬心.

显见, $BG=DG=2a$, $GA=\sqrt{3}\,a$, $\boldsymbol{v}_B$ 与 DB 的夹角为 30°,

$v_A = a\omega = 30 \cdot 4 = 120(\text{cm/s})$

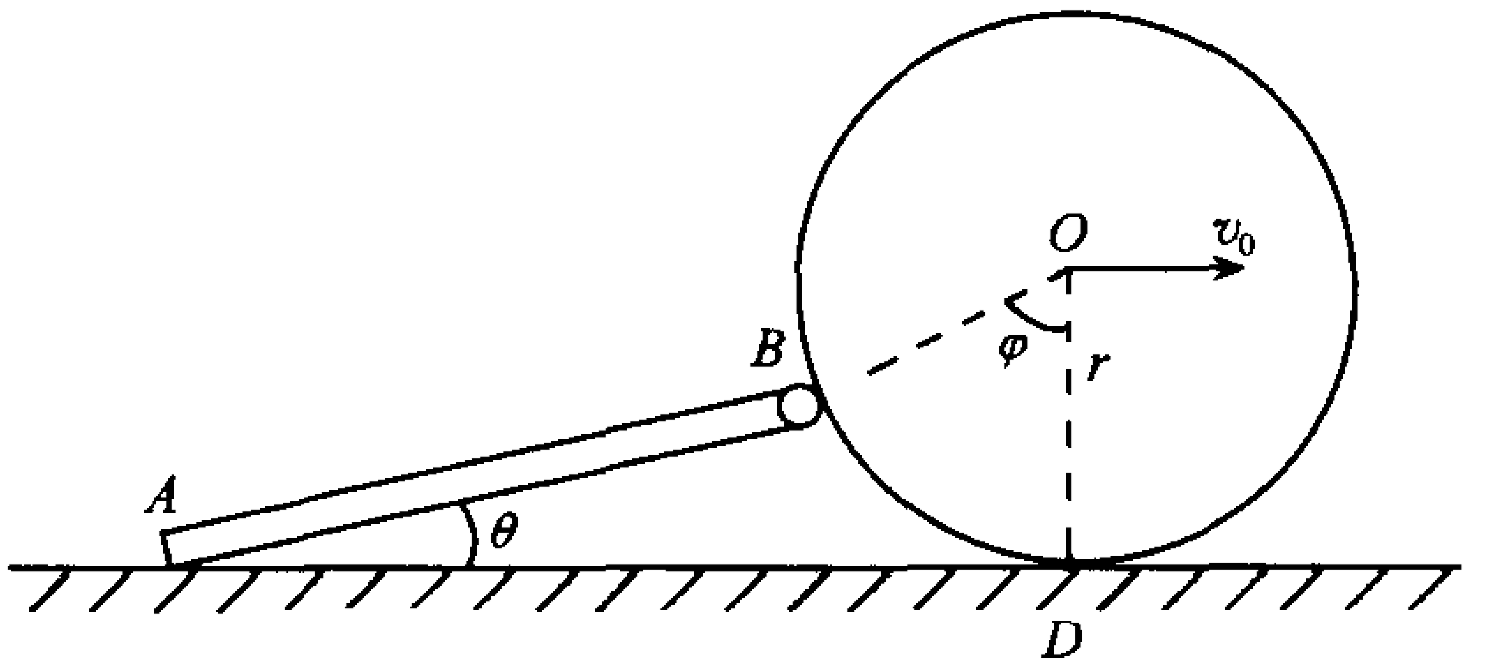


图 5.16

用速度投影定理,
$$v_D\cos30° = v_B\cos30° = v_A = 120$$
$$v_D = v_B = \frac{120}{\cos30°} = 139(\text{cm/s})$$

对 ΔBCD 用正弦定理,
$$\frac{b}{\sin30°} = \frac{2a}{\sin\angle C}$$
$$\sin\angle C = \frac{2a}{b}\sin30° = \frac{2\times30}{40}\times0.5 = 0.75$$
$$\angle C = \arcsin0.75 = 48.6°$$
$$\angle B = 180° - 30° - 48.6° = 101.4°$$

再对 BC 杆用速度投影定理,
$$v_C\cos\angle C = v_B\cos(\angle B - 30°)$$
$$v_C = \frac{v_B\cos(\angle B - 30°)}{\cos\angle C} = \frac{139\cos71.4°}{\cos48.6°} = 67.0(\text{cm/s})$$

方向沿 CD 指向 D.

5.1.12 一个半径为 r 的圆柱沿一平面做无滑滚动，其轴线 O 保持速度 v_0 不变，一块长度为 l 的矩形平板其 B 边以铰链接在圆柱的边缘上，另一端 A 边搁在上述平面上随圆柱运动．若 $t=0$ 时 $\varphi=0$，求 A 边的速度与时间的关系，并取适当的坐标，取最方便的基点，写出 AB 板的运动学方程．

解 取 xy 坐标，原点取在 $t=0$ 时 B 边所在位置，x 轴沿 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向，y 轴竖直向上，

$$x_A = x_D - AD = x_O - AD$$

$$v_A = \frac{\mathrm{d}x_O}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}AD}{\mathrm{d}t} = v_0 - \frac{\mathrm{d}AD}{\mathrm{d}t}$$

$$AD = l\cos\theta + r\sin\varphi$$

$$l\sin\theta = r(1-\cos\varphi)$$

$$\sin\theta = \frac{r}{l}(1-\cos\varphi)$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2(l-\cos\varphi)^2}$$

$$AD = \sqrt{l^2 - r^2(1-\cos\varphi)^2} + r\sin\varphi$$

$$v_A = v_0 - \left[\frac{-2r^2(1-\cos\varphi)}{2\sqrt{l^2-r^2(1-\cos\varphi)^2}}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + r\cos\varphi\dot{\varphi}\right]$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{r}$$

$$v_A = v_0 + \frac{v_0 r(1-\cos\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{l^2-r^2(1-\cos\varphi)^2}} - v_0\cos\varphi$$

$$= v_0(1-\cos\varphi)\left[1 + \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{l^2-r^2(1-\cos\varphi)^2}}\right]$$

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$$

v_A 也可改写为

$$v_A = 2v_0\sin^2\left(\frac{v_0}{2r}t\right)\left[1 + \frac{r\sin\left(\frac{v_0}{r}t\right)}{\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_0}{2r}t\right)}}\right]$$

取 B 为基点，则 AB 板的运动学方程为

$$x_B = v_0 t - r\sin\varphi = v_0 t - r\sin\left(\frac{v_0}{r}t\right)$$

$$y_B = r(1-\cos\varphi) = r\left[1-\cos\left(\frac{v_0}{r}t\right)\right]$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{y_B}{l}\right) = \arcsin\left\{\frac{r}{l}\left[1-\cos\left(\frac{v_0}{r}t\right)\right]\right\}$$

5.1.13 求上题中 AB 板的空间极迹和本体极迹方程(可用 t 作为参数)．

解 取上题所用的 x、y 坐标，由于 A 点的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 沿 x 轴，可知瞬心 C 的 x 坐标

$$x_C = x_A = x_B - l\cos\theta = x_0 - r\sin\varphi - l\cos\theta$$

$$= v_0t - r\sin\varphi - l\cos\theta$$

$$= v_0t - r\sin\left(\frac{v_0}{r}t\right) - \sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_0}{2r}t\right)}$$

$$y_C = \frac{v_A}{\dot{\theta}}$$

上题已求得

$$v_A = 2v_0\sin^2\left(\frac{v_0}{2r}t\right)\left[1 + \frac{r\sin\left(\frac{v_0}{r}t\right)}{\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_0}{2r}t\right)}}\right]$$

由

$$\sin\theta = \frac{r}{l}(1 - \cos\varphi)$$

$$\cos\theta \cdot \dot{\theta} = \frac{r}{l}\sin\varphi\dot{\varphi} = \frac{v_0}{l}\sin\varphi$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0\sin\varphi}{l\cos\theta} = \frac{v_0\sin\left(\frac{v_0}{r}t\right)}{\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_0}{2r}t\right)}}$$

$$y_C = \frac{v_A}{\dot{\theta}} = \tan\left(\frac{v_0}{2r}t\right)\left[r\sin\left(\frac{v_0}{r}t\right) + \sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_0}{2r}t\right)}\right]$$

上述 $x_C(t)$、$y_C(t)$就是以 t 为参数的空间极迹方程．

写本体极迹方程必须另取固连于 AB 的坐标，今取 $Ax'y'$，原点在 A 点，x'轴沿 AB 方向，y'轴与之垂直，向上的方向为正，则本体极迹方程为

$$x'_C = y_C\sin\theta,$$
$$y'_C = y_C\cos\theta.$$

将 y_C、$\sin\theta$、$\cos\theta$ 与 t 的关系代入上述两式即得以 t 为参数的本体极迹方程，

$$x'_C = \frac{2r}{l}\tan\left(\frac{v_0}{2r}t\right)\sin^2\left(\frac{v_0}{2r}t\right)\left[r\sin\left(\frac{v_0}{r}t\right) + \sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_0}{2r}t\right)}\right]$$

$$y'_C = \frac{1}{l}\tan\left(\frac{v_0}{2r}t\right)\left[l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_t}{2r}t\right) + r\sin\left(\frac{v_t}{r}t\right)\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\left(\frac{v_t}{2r}t\right)}\right]$$

5.1.14　证明均质的质量为 m 的直棒的动能 $T=\frac{1}{6}m(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 分别是棒两端的速度．

证明　方法一：沿棒取 x 轴，$x=0$ 处质元速度为 $\boldsymbol{u}$，设棒长为 l，$x=l$ 端质元速度为$\boldsymbol{v}$．x 处质元速度为

$$\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}}{l}x$$

按动能的定义，

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\boldsymbol{u}+\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{l}x\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}+\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{l}x\right)\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m}{2l}\int_0^l\left[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{l}x+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\frac{x^2}{l^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m}{2l}\left[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}l+l\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+\frac{1}{3}l(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\right]$$

$$=\frac{1}{6}m(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}).$$

方法二:用柯尼希定理,可不必积分.

$$v_C=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{l}$$

$$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{l}|=\omega l\sin\alpha$$

其中 α 是$\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的夹角,$\boldsymbol{l}$ 为速度为$\boldsymbol{v}$ 的一端对速度为 $\boldsymbol{u}$ 的一端的位矢.

$$I_C=\frac{1}{12}ml^2\sin^2\alpha$$

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\right]^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}ml^2\sin^2\alpha\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|}{l\sin\alpha}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\frac{1}{4}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+\frac{1}{12}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\right]$$

$$=\frac{1}{6}m(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

5.1.15 如图 5.17 曲柄 OA 以匀角速 $n_0=50\text{r/min}$ 绕定轴 O 转动,定齿轮的齿数为 Z_4,齿数 Z_1、Z_2 的两齿轮紧固成一体装在曲柄 OA 上的 B 点.求装在 A 端的齿数 Z_3 的齿轮转速.

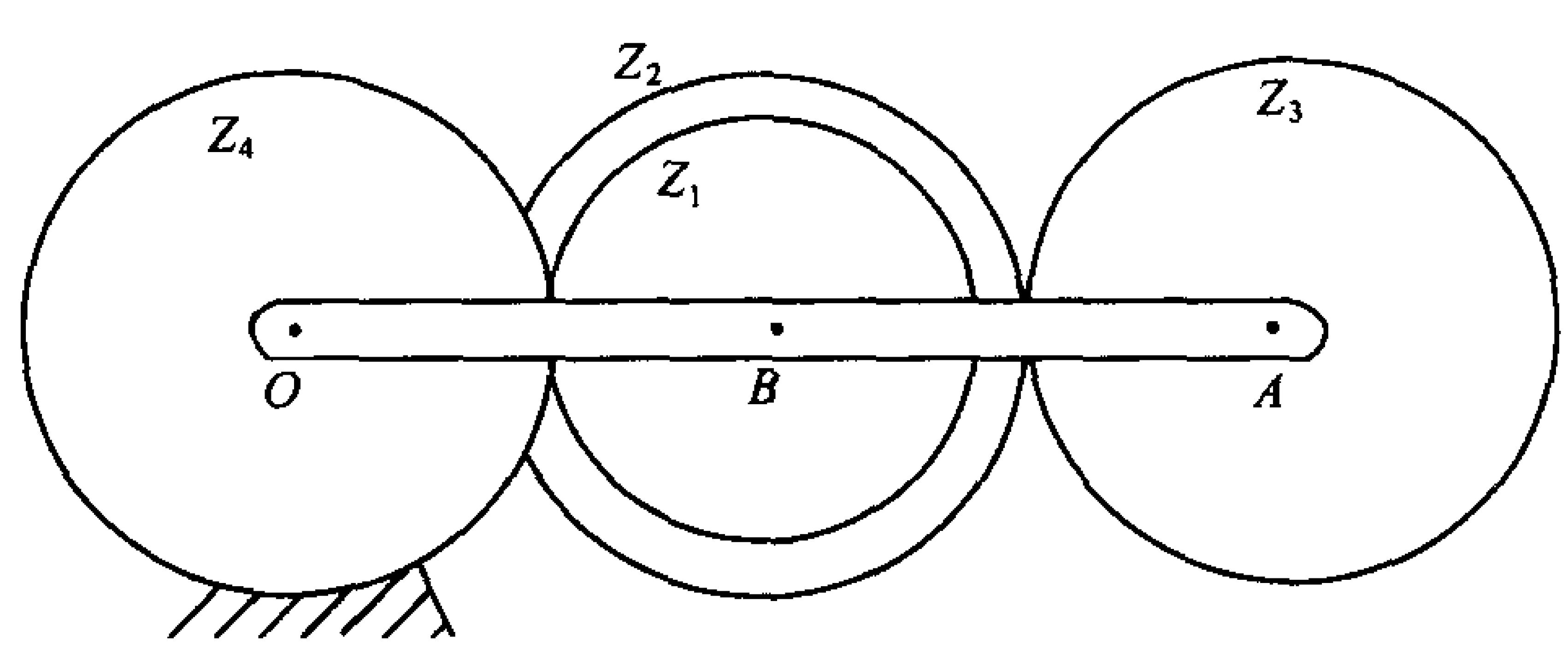


图 5.17

解 取以 O 为原点随 OA 转动的参考系.规定 OA 的角速度的方向为正,齿轮为 Z_4 的定齿轮的转速为$-n_0$,其余三个齿轮的转速分别设为 n_1'、n_2'、n_3',由纯滚动条件

$$(-n_0)Z_4=-n_1'Z_1,\quad n_1'=n_2'$$

$$n_2'Z_2=-n_3'Z_3$$

所以　　$$n_3' = -\frac{Z_2}{Z_3}n_2' = -\frac{Z_2}{Z_3}n_1' = -\frac{Z_2}{Z_3}\cdot\frac{Z_4}{Z_1}n_0$$

相对于静参考系的转速为

$$n_3 = n_0 + n_3' = n_0\left(1 - \frac{Z_2Z_4}{Z_1Z_3}\right) = 50\left(1 - \frac{Z_2Z_4}{Z_1Z_3}\right)\ (\text{r/min})$$

5.1.16　半径为 b 的小圆柱在一个较大的半径为 a 的圆柱内部纯滚动，如外面的圆柱围绕它的轴(固定轴)以角速度 Ω 转动，两圆柱的轴所在的平面以角速度 ω 绕固定轴转动，设 Ω、ω 都是正的，求小圆柱的角速度．

解　考虑两圆柱相切的线的速度 v，

作为大圆柱上的点，$v=\Omega a$.

作为小圆柱上的点，取小圆柱轴上的点为基点，考虑到小圆柱在大圆柱内做纯滚动．

$$v = \omega(a-b) + \omega' b$$

其中 ω' 是小圆柱的角速度，其正方向的规定与 ω、Ω 相同．

$$\Omega a = \omega(a-b) + \omega' b$$

$$\omega' = \frac{1}{b}[\Omega a - \omega(a-b)] = \frac{1}{b}[a(\Omega-\omega) + b\omega]$$

5.1.17　若做定点转动的刚体的运动学方程为

$$\varphi = at,\quad \psi = bt,\quad \theta = c$$

式中 a、b、c 均为常量，φ、ψ、θ 为欧拉角、求角速度、角加速度在动、静坐标系中的分量．

解　　$$\dot{\varphi}=a,\quad \dot{\psi}=b,\quad \dot{\theta}=0.$$

角速度$\boldsymbol{\omega}$、角加速度$\boldsymbol{\beta}$在固连于刚体的动坐标系 x、y、z 轴上的分量计算如下：

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi = a\sin c\sin bt$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = a\sin c\cos bt$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = b + a\cos c$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \dot{\omega}_x\boldsymbol{i} + \dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + \dot{\omega}_z\boldsymbol{k}$$

$$\beta_x = \dot{\omega}_x = ab\sin c\cos bt$$

$$\beta_y = \dot{\omega}_y = -ab\sin c\sin bt$$

$$\beta_z = \dot{\omega}_z = 0$$

角速度$\boldsymbol{\omega}$、角加速度$\boldsymbol{\beta}$在静坐标系 ξ、η、ζ 轴上的分量计算如下：

$$\omega_\xi = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi = b\sin c\sin at$$

$$\omega_\eta = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi = -b\sin c\cos at$$

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = a + b\cos c$$

$$\beta_\xi = \dot{\omega}_\xi = ab\sin c\cos at$$

$$\beta_\eta = \dot{\omega}_\eta = ab\sin c\sin at$$

$$\beta_\zeta = \dot{\omega}_\zeta = 0$$

5.1.18　刚体做上题的运动，求刚体上(1,0,0)点及位于空间(1,0,0)的刚体上的点在 t 时刻的速度和加速度.

解　方法一：t 时刻刚体上(1,0,0)点(即 $x=1$、$y=0$、$z=0$ 的点)的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = (\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{i} = \omega_z\boldsymbol{j}-\omega_y\boldsymbol{k}\\ &= (b+a\cos c)\boldsymbol{j} - a\sin c\cos bt\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

该点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = (b+a\cos c)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + ab\sin c\sin bt\boldsymbol{k} - a\sin c - \cos bt\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j} = (\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{j}\\ &= -\omega_z\boldsymbol{i}+\omega_x\boldsymbol{k} = -(b+a\cos c)\boldsymbol{i} + a\sin c\sin bt\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k} = (\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{k}\\ &= \omega_y\boldsymbol{i}-\omega_x\boldsymbol{j} = a\sin c\cos bt\boldsymbol{i} - a\sin c\sin bt\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

将 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}$ 代入 $\boldsymbol{a}$ 的式子，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = &-[(b+a\cos c)^2 + (a\sin c\cos bt)^2]\boldsymbol{i}\\ &+ (a\sin c)^2\sin bt\cos bt\boldsymbol{j} + a\sin c(2b+a\cos c)\sin bt\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

方法二：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}\\ &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\omega^2 + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

代入 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \omega_x\boldsymbol{\omega} - \omega^2\boldsymbol{i} + \beta_z\boldsymbol{j} - \beta_y\boldsymbol{k}\\ &= a\sin c\sin bt[a\sin c\sin bt\boldsymbol{i} + a\sin c\cos bt\boldsymbol{j} + (b+a\cos c)\boldsymbol{k}]\\ &\quad - [a^2\sin^2 c + (b+a\cos c)^2]\boldsymbol{i} + ab\sin c\sin bt\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

以下计算略，可得与方法一同样的结果 .

t 时刻位于空间(1,0,0)即 $\xi=1,\eta=0,\zeta=0$ 处刚体上的点的速度和加速度分别计算如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = (\omega_\xi\boldsymbol{\xi}^\circ + \omega_\eta\boldsymbol{\eta}^\circ + \omega_\zeta\boldsymbol{\zeta}^\circ)\times\boldsymbol{\xi}^\circ = \omega_\zeta\boldsymbol{\eta}^\circ - \omega_\eta\boldsymbol{\zeta}^\circ\\ &= (a+b\cos c)\boldsymbol{\eta}^\circ + b\sin c\cos at\boldsymbol{\zeta}^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}\\ &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\omega^2 + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

代入 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\xi}^\circ$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \omega_\xi\boldsymbol{\omega} - \omega^2\boldsymbol{\xi}^\circ + \beta_\zeta\boldsymbol{\eta}^\circ - \beta_\eta\boldsymbol{\zeta}^\circ\\ &= b\sin c\sin at[b\sin c\sin at\boldsymbol{\xi}^\circ - b\sin c\cos at\boldsymbol{\eta}^\circ\end{aligned}$$

$$+ (a + b\cos c)\boldsymbol{\zeta}^\circ] - [(b\sin c)^2 + (a + b\cos c)^2]\boldsymbol{\zeta}^\circ$$
$$- ab\sin c\sin at\boldsymbol{\zeta}^\circ$$
$$= - [(a + b\cos c)^2 + (b\sin c\cos at)^2]\boldsymbol{\xi}^\circ$$
$$- (b\sin c)^2\sin at\cos at\boldsymbol{\eta}^\circ + b^2\sin c\cos c\sin at\boldsymbol{\zeta}^\circ$$

注意：不能用前面算出的$\boldsymbol{v}$ 用 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$求 $\boldsymbol{a}$. 这样计算的$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$不是位于空间那点在 t 时刻的加速度，而是位于空间那点的刚体上的点的速度变化率 .

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to v}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

t 和 $t+\Delta t$ 位于的点是刚体上不同的点，因此这个速度的时间变化率不是处于那点的刚体上的点的加速度 .

5.1.19　刚体做 5.1.17 题所给的定点转动，求本体极面和空间极面满足的方程 .

解　本体极面和空间极面满足的方程是

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = 0$$

本体极面方程代入$\boldsymbol{\omega} =\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a\sin c\sin bt & a\sin c\cos bt & b + a\cos c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$ay\sin c\sin bt - ax\sin c\cos bt = 0$$
$$az\sin c\sin bt - (b + a\cos c)x = 0$$
$$az\sin c\cos bt - (b + a\cos c)y = 0$$

$$\frac{x}{z} = \frac{a\sin c\sin bt}{b + a\cos c} \tag{1}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{a\sin c\cos bt}{b + a\cos c} \tag{2}$$

式(1)、(2)两式平方相加，可消去 t 得不含参数的本体极面方程：

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2\sin^2 c}{(b + a\cos c)^2}z^2,$$

求空间极面方程，用$\boldsymbol{\omega} =\omega_\xi\boldsymbol{\xi}^\circ+\omega_\eta\boldsymbol{\eta}^\circ+\omega_\zeta\boldsymbol{\zeta}^\circ$，$\boldsymbol{r}=\xi\boldsymbol{\xi}^\circ+\eta\boldsymbol{\eta}^\circ+\zeta\boldsymbol{\zeta}^\circ$，代入$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=0$，得

$$\omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta = 0$$
$$\omega_\xi\zeta - \omega_\zeta\xi = 0$$

即

$$(- b\sin c\cos at)\zeta - (a + b\cos c)\eta = 0$$
$$(b\sin c\sin at)\zeta - (a + b\cos c)\xi = 0$$

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{- b\sin c\cos at}{a + b\cos c}$$

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{b\sin c\sin at}{a + b\cos c}$$

消去 t 得不含参数的空间极面方程

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{b^2\sin^2 c}{(a + b\cos c)^2}\zeta^2$$

5.1.20 开始固连于刚体的动坐标系 $Oxyz$ 与静坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 完全重合(x、y、z 轴分别与 ξ、η、ζ 轴重合). 动系先绕 ξ 轴转 θ 角,再绕新的 y 轴转 ψ 角,最后绕新的 z 轴转 φ 角.刚体的位置用此 θ、ψ、φ 来描述. 像推导欧拉运动学方程那样,分别写出做定点转动的刚体的角速度在固连于刚体的 xyz 坐标系的三个分量,与在 $\xi\eta\zeta$ 静坐标系的三个分量,与这里定义的 θ、ψ、φ 三个角及其对时间的导数的关系.

解 动坐标系三次转动的过程如图 5.18 所示. 开始,$Oxyz$ 与 $O\xi\eta\zeta$ 完全重合,第一次转动绕 ξ 轴转 θ 角,x 轴(图中 x' 轴)不动,y、z 轴分别转到图中 y'、z' 轴的位置;第二次转动绕新的 y 轴(即图中 y' 轴)转 ψ 角,z' 轴转到最后位置(图中 z 轴),x' 轴转到 x'',y' 不动. 第三次转动绕图中 z 轴转 φ 角,x''、y' 分别转到 x、y 轴的最后位置(图中 x、y 轴). 共面的轴用光滑的虚线相连. z'、ζ、y'、η 四轴共面,z'、z、ξ、(x)、x'' 轴共面,x''、x、y'、y 轴共面,ON 是 xy 平面与 $\eta\zeta$ 平面的交线,ON 也就是 y' 轴.

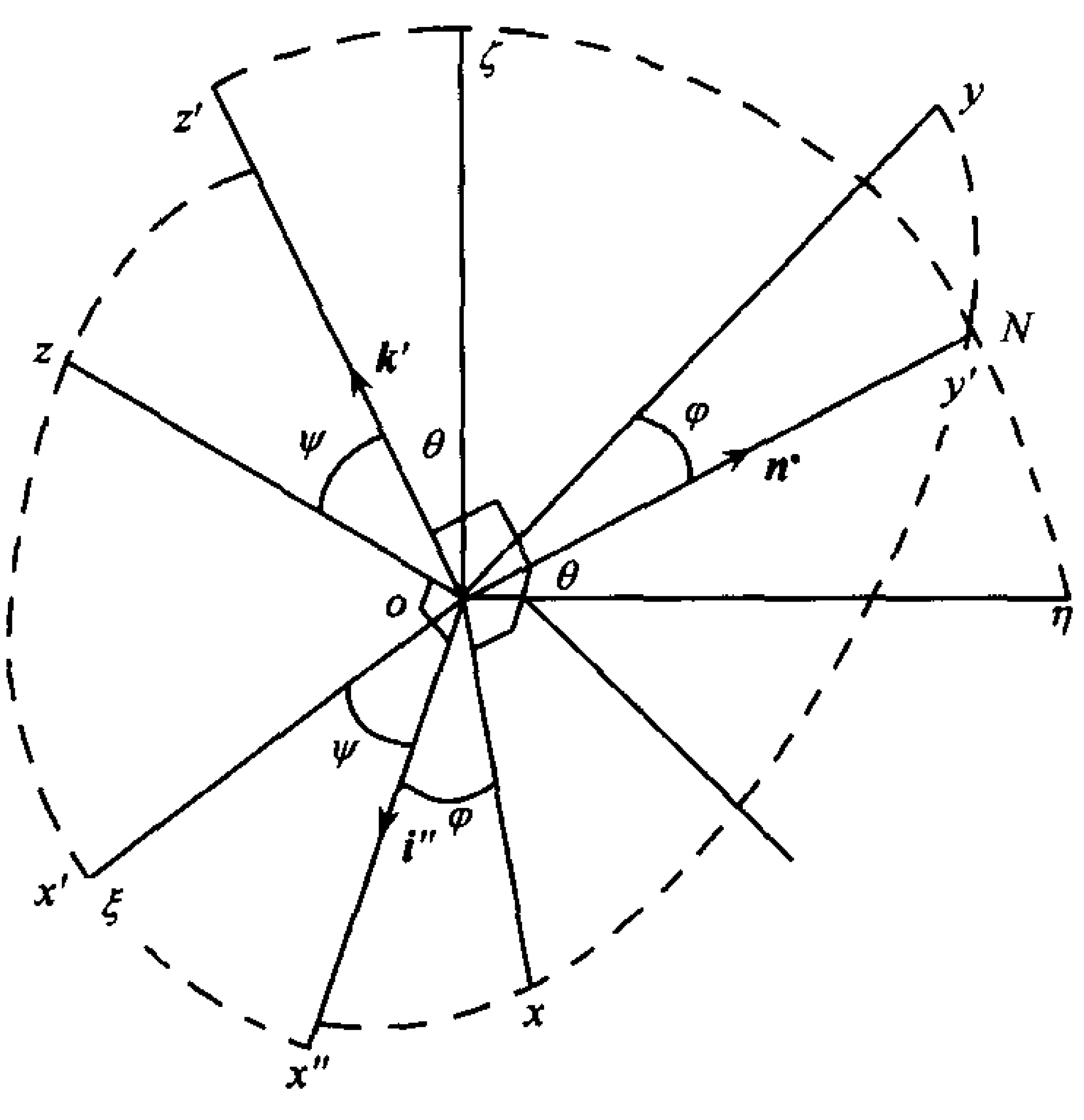


图 5.18

θ 是绕 ξ 轴转动的,ψ 是绕 y' 轴即 ON 转动的,ψ 是绕 z 轴转动的,故

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{\xi}^\circ + \dot{\psi}\,\boldsymbol{n}^\circ + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{n}^\circ$ 是 ON 轴的单位矢量.

将 $\boldsymbol{\xi}^\circ$、$\boldsymbol{n}^\circ$ 用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示,就可得到角速度在动坐标系中的三个分量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^\circ &= \cos\psi\boldsymbol{i}'' + \sin\psi\boldsymbol{k} = \cos\psi\left[\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}\right] + \sin\psi\boldsymbol{k}\\ &= \cos\psi\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \cos\psi\sin\varphi\boldsymbol{j} + \sin\psi\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{n}^\circ = \sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}\,(\cos\psi\cos\varphi\boldsymbol{i} - \cos\psi\sin\varphi\boldsymbol{j} + \sin\psi\boldsymbol{k}) + \dot{\psi}\,(\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}\\ &= \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\psi\cos\varphi$$

$$\omega_y=\dot{\psi}\cos\varphi-\dot{\theta}\cos\psi\sin\varphi$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\psi$$

将 $\boldsymbol{n}^\circ$、$\boldsymbol{k}$ 用$\boldsymbol{\xi}^\circ$、$\boldsymbol{\eta}^\circ$、$\boldsymbol{\zeta}^\circ$表示，可得到角速度在静坐标系中的三个分量：

$$\boldsymbol{n}^\circ=\cos\theta\boldsymbol{\eta}^\circ+\sin\theta\boldsymbol{\zeta}^\circ$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}&=\cos\psi\boldsymbol{k}'+\sin\psi\boldsymbol{\xi}^\circ\\&=\cos\psi\left[\cos\theta\,\boldsymbol{\zeta}^\circ+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{\eta}^\circ\right]+\sin\psi\boldsymbol{\xi}^\circ\\&=\sin\psi\boldsymbol{\xi}^\circ-\cos\psi\sin\theta\boldsymbol{\eta}^\circ+\cos\psi\cos\theta\boldsymbol{\zeta}^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\dot{\theta}\,\boldsymbol{\xi}^\circ+\dot{\psi}\,(\cos\theta\boldsymbol{\eta}^\circ+\sin\theta\boldsymbol{\zeta}^\circ)+\dot{\varphi}\,(\sin\psi\boldsymbol{\xi}^\circ\\&\quad-\cos\psi\sin\theta\boldsymbol{\eta}^\circ+\cos\psi\cos\theta\boldsymbol{\zeta}^\circ)\\&=\omega_\xi\boldsymbol{\xi}^\circ+\omega_\eta\boldsymbol{\eta}^\circ+\omega_\zeta\boldsymbol{\zeta}^\circ\end{aligned}$$

$$\omega_\xi=\dot{\theta}+\dot{\varphi}\sin\psi$$

$$\omega_\eta=\dot{\psi}\cos\theta-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta$$

$$\omega_\zeta=\dot{\psi}\sin\theta+\dot{\varphi}\cos\psi\cos\theta$$

5.2　刚体的相对运动

5.2.1　一个半径为 a、圆心为 A 的圆柱在一个水平面上做无滑滚动，圆心 A 以恒定速度 u 运动；另一半径为 b、圆心为 B 的第二个圆柱（它的轴与第一个圆柱的轴平行）在第一个圆柱上做无滑滚动，B 点相对于固连于第一个圆柱的坐标系以恒定的速率 v 运动．P 点是第二个圆柱边缘上的点，若 $t=0$ 时，A、B、P 在同一铅垂线上．求 P 点的速度、加速度和时间的关系．

解　AB 连线相对于固连于第一个圆柱的参考系的角速度为

$$\omega_{AB}'=\frac{v}{a+b}$$

第一个圆柱对随 A 平动的参考系或对静参考系的角速度为

$$\omega_A=\frac{u}{a}$$

AB 连线相对于随 A 平动的参考系或对静参考系的角速度为

$$\omega_{AB}=\dot{\alpha}=\omega_A+\omega_{AB}'=\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}$$

其中 α 是 AB 线与竖直线（向上方向）的夹角．

设第二个圆柱对 A 平动参考系或对静参考系的角速度为 ω_β 或 $\dot{\beta}$，β 是 BP 线与竖直线（向上方向）的夹角（设 P 点在 $t=0$ 时位于第二个圆柱的最高点）．

以上对 ω_{AB}'、ω_B 的正向规定都是与 ω_A 的正向相同．

考虑到两圆柱体间的相对运动是纯滚动，两圆柱的两接触点对任何参考系都有相同的速度，对随 A 点平动的参考系，有

$$\omega_{AB}(a+b)-\omega_B\cdot b=\omega_A a$$

即

$$\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}\right)(a+b)-\omega_B b=\frac{u}{a}\cdot a$$

$$\dot{\beta}=\omega_B=\frac{1}{b}\left(\frac{u}{a}b+v\right)=\frac{u}{a}+\frac{v}{b}$$

对静参考系，P 点的速度可表为

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{\omega}_B\times\boldsymbol{r}'_P=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}_{AB}\times\boldsymbol{r}_{AB}+\boldsymbol{\omega}_B\times\boldsymbol{r}'_P \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{r}'_P$是 P 点对 B 点的位矢，$\boldsymbol{r}_{AB}$是 B 点对 A 点的位矢(两圆柱都做平面平行运动，取共面的代表平面，A、B、P 都是代表平面上的点).

取 $\boldsymbol{i}$ 为水平方向(沿 $\boldsymbol{u}$ 的方向)的单位矢量，$\boldsymbol{j}$ 是竖直向下的单位矢量，则

$$vA=u\boldsymbol{i},\boldsymbol{\omega}_{AB}=\dot{\alpha}\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega}_B=\dot{\beta}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_{AB}=(a+b)(\sin\alpha\boldsymbol{i}-\cos\alpha\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{r}'_P=b(\sin\beta\boldsymbol{i}-\cos\beta\boldsymbol{j})$$

将这些式子代入式(1)，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P&=u\boldsymbol{i}+\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}\right)\boldsymbol{k}\times(a+b)(\sin\alpha\boldsymbol{i}-\cos\alpha\boldsymbol{j})\\&\quad+\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)\boldsymbol{k}\times b(\sin\beta\boldsymbol{i}-\cos\beta\boldsymbol{j})\\&=\left[u+\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}\right)(a+b)\cos\alpha+\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)b\cos\beta\right]\boldsymbol{i}\\&\quad+\left[\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}\right)(a+b)\sin\alpha+\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)b\sin\beta\right]\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_P=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_P}{\mathrm{d}t}&=-\left[\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}\right)^2(a+b)\sin\alpha+\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)^2b\sin\beta\right]\boldsymbol{i}\\&\quad+\left[\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}\right)^2(a+b)\cos\alpha+\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)^2b\cos\beta\right]\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

其中
$$\alpha=\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{a+b}\right)t,\quad\beta=\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)t$$

计算 P 点的加速度也可用下列公式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_P&=\boldsymbol{a}_A+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB}\times(\boldsymbol{\omega}_{AB}\times\boldsymbol{r}_{AB})+\boldsymbol{\omega}_{AB}\times\boldsymbol{r}_{AB}\\&\quad+\boldsymbol{\omega}_B\times(\boldsymbol{\omega}_B\times\boldsymbol{r}'_P)+\dot{\boldsymbol{\omega}}_B\times\boldsymbol{r}'_P\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a}_A$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB}$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B$ 在这里均为零.

显然比上述直接求导的方法麻烦.

5.2.2　A、B、C 三个半径均为 r 的圆盘，紧挨着安装在一曲柄上．除 A 盘不动外，B、C 两盘可分别绕 O_2、O_3 转动，曲柄围绕 O_1 转动．整个机构在同一平面上．B、C 盘均做滚动．若 B 盘的转动角速度为 $\omega(t)$．求：

(1) C 盘的转动角速度；

(2) t 时刻位于 B、C 两盘相接触的两点 P、Q 的加速度的大小；

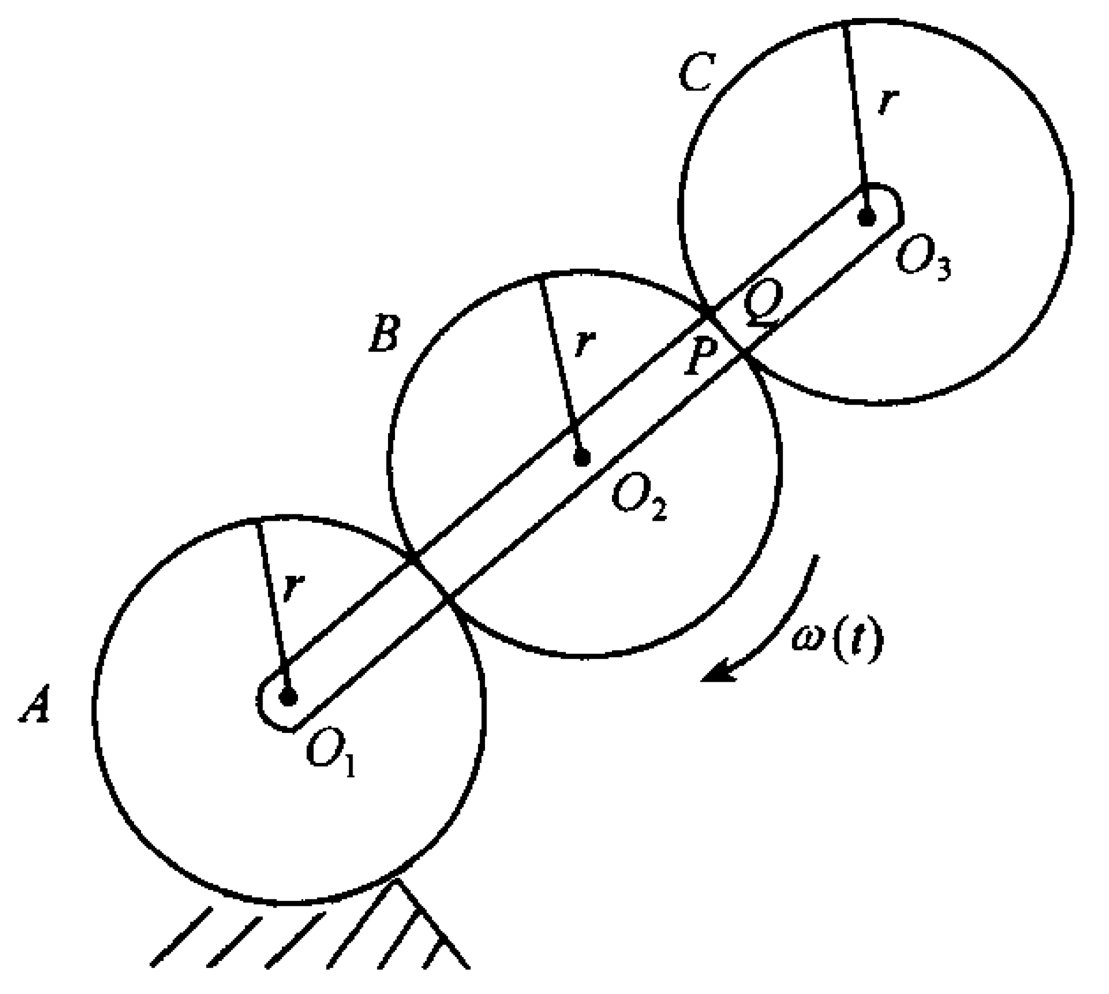


图 5.19

(3) 若 $t=0$ 时，P 点在图示位置，求任何时刻 P 点的加速度的大小．

解　(1) 规定垂直纸面向下的角速度为正值，设曲柄的角速度为 Ω．考虑 B 盘上与 A 盘相接触的点的速度为零，

$$2r\Omega - r\omega(t) = 0$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega(t)$$

设 C 盘的角速度为 ω_C，考虑 P、Q 两点速度相等，

$$4r\Omega - r\omega_C = 2r\Omega + r\omega$$

$$\omega_C = 2\Omega - \omega = 0$$

(2) 求 P 点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_P$，动系用 O_2 平动参考系，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{Pe} &= 2r\Omega^2\boldsymbol{n} + 2r\dot{\Omega}\,\boldsymbol{\tau} \\ &= 2r\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\boldsymbol{n} + 2r\cdot\frac{1}{2}\dot{\omega}\,\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}r\omega^2\boldsymbol{n} + r\dot{\omega}\,\boldsymbol{\tau}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}_{Pr} = r\omega^2\,\boldsymbol{n} + r\dot{\omega}\,\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_{Pe} + \boldsymbol{a}_{Pr} = \frac{3}{2}r\omega^2\boldsymbol{n} + 2r\dot{\omega}\,\boldsymbol{\tau}$$

$$a_P = \sqrt{a_{Pn}^2 + a_{P\tau}^2} = \frac{r}{2}\sqrt{9\omega^4 + 16\dot{\omega}^2}$$

求 Q 点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_Q$，动系用 O_3 平动参考系，

$$\boldsymbol{a}_{Qe} = 4r\Omega^2\boldsymbol{n} + 4r\dot{\Omega}\,\boldsymbol{\tau} = r\omega^2\boldsymbol{n} + 2r\dot{\omega}\,\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a}_{Qr} = r\omega_C^2\boldsymbol{n}' + r\dot{\omega}_C\boldsymbol{\tau}' = 0$$

$$\boldsymbol{a}_Q = \boldsymbol{a}_{Qe} + \boldsymbol{a}_{Qr} = r\omega^2\boldsymbol{n} + 2r\dot{\omega}\,\boldsymbol{\tau}$$

$$a_Q = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (2r\dot{\omega})^2} = r\sqrt{\omega^4 + 4\dot{\omega}^2}$$

(3) 取固定坐标 xy，原点在 O_1，x 轴沿图示位置($t=0$ 时)O_1P 的方向，y 轴向右下方为正方向．取 O_2 平动参考系为动系，

$$\boldsymbol{a}_e=\frac{1}{2}r\omega^2\boldsymbol{n}+r\dot{\omega}\boldsymbol{\tau}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=-\cos\int_0^t\Omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{i}-\sin\int_0^t\Omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{j}\\&=-\cos\frac{1}{2}\int_0^t\omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{i}-\sin\frac{1}{2}\int_0^t\omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{\tau}&=-\sin\frac{1}{2}\int_0^t\omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{i}+\cos\frac{1}{2}\int_0^t\omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

为书写简便起见,令

$$\alpha=\frac{1}{2}\int_0^t\omega(t)\mathrm{d}t$$

它是曲柄在 $0\sim t$ 期间的角位移.

$$\boldsymbol{a}_e=-\left(\frac{1}{2}r\omega^2\cos\alpha+r\dot{\omega}\sin\alpha\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{1}{2}r\omega^2\sin\alpha+r\dot{\omega}\cos\alpha\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_r=r\omega^2\boldsymbol{n}'+r\dot{\omega}\boldsymbol{\tau}'$$

注意这里的法向、切向单位矢量与 $\boldsymbol{a}_e$ 式子中的法向、切向单位矢量方向不一致,必须加以区别,而在(2)问中计算 $\boldsymbol{a}_{Pe}$、$\boldsymbol{a}_{Pr}$中的两个 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{\tau}$ 是一致的,$\boldsymbol{a}_{Qe}$、$\boldsymbol{a}_{Qr}$中的不一致也加以区别了,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}'&=-\cos\int_0^t\omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{i}-\sin\int_0^t\omega(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{j}\\&=-\cos2\alpha\boldsymbol{i}-\sin2\alpha\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{\tau}'&=-\sin2\alpha\boldsymbol{i}+\cos2\alpha\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{a}_r&=-(r\omega^2\cos2\alpha+r\dot{\omega}\sin2\alpha)\boldsymbol{i}+(-r\omega^2\sin2\alpha+r\dot{\omega}\cos2\alpha)\boldsymbol{j}\\a_P&=\sqrt{(a_{ex}+a_{rx})^2+(a_{ey}+a_{ry})^2}\\&=\left[\left(-\frac{1}{2}r\omega^2\cos\alpha-r\dot{\omega}\sin\alpha-r\omega^2\cos2\alpha-r\dot{\omega}\sin2\alpha\right)^2\right.\\&\quad\left.+\left(-\frac{1}{2}r\omega^2\sin\alpha+r\dot{\omega}\cos\alpha-r\omega^2\sin2\alpha+r\dot{\omega}\cos2\alpha\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\frac{1}{4}r^2\omega^4+r^2\dot{\omega}^2+r^2\omega^4+r^2\dot{\omega}^2+r^2\omega^4\cos\alpha\right.\\&\quad\left.+r^2\omega^2\dot{\omega}\sin\alpha-2r^2\omega^2\dot{\omega}\sin\alpha+2r^2\dot{\omega}^2\cos\alpha\right]^{\frac{1}{2}}\\&=r\left[\frac{5}{4}\omega^4+2\dot{\omega}^2+\omega^4\cos\alpha-\omega^2\dot{\omega}\sin\alpha+2\dot{\omega}^2\cos\alpha\right]^{\frac{1}{2}}\\&=r\left[\omega^4\left(\frac{5}{4}+\cos\alpha\right)-\omega^2\dot{\omega}\sin\alpha+2\dot{\omega}^2(1+\cos\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

当 $\alpha=2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$时,$P$ 点与 C 盘相切,a_P 值与(2)问的结果相同.

注意:(2)问中的 P 点是 B 盘与 C 盘相切的点,(3)问中的 P 点不是时时与 C 盘相切的,a_P 是 t 的函数,而在 $\alpha=2n\pi$ 那些时刻,a_P 值都一样,都在图示的与 C 盘相切的位置.

5.2.3　一半径为 a 的圆盘 A 以等角速 ω_A 绕其固定中心 O 转动,另一半径为 b 的圆

盘 B 以等角速 ω_B 绕其中心 O' 在前一圆盘外侧纯滚动(如图 5.20 所示). 求:

(1) 两盘的连杆 OO' 的转动角速度 Ω;

(2) B 盘在 A 盘上转动回到 A 盘上同一接触点所需的最短时间 t_1;

(3) B 盘上与 A 盘相接触的点又回到与 A 盘相接触的位置所需的最短时间 t_2;

(4) O' 点回到空间原来位置所需的最短时间 t_3;

(5) 如 $a=5\text{cm}, b=3\text{cm}, \omega_A=20\pi\text{s}^{-1}, \omega_B=36\pi\text{s}^{-1}$, B 盘所有点回到空间原来位置所需的最小时间 t_4, A、B 盘所有点回到空间原来位置所需的最小时间 t_5, A 盘所有点及 O' 点回到空间原来位置所需的最小时间 t_6.

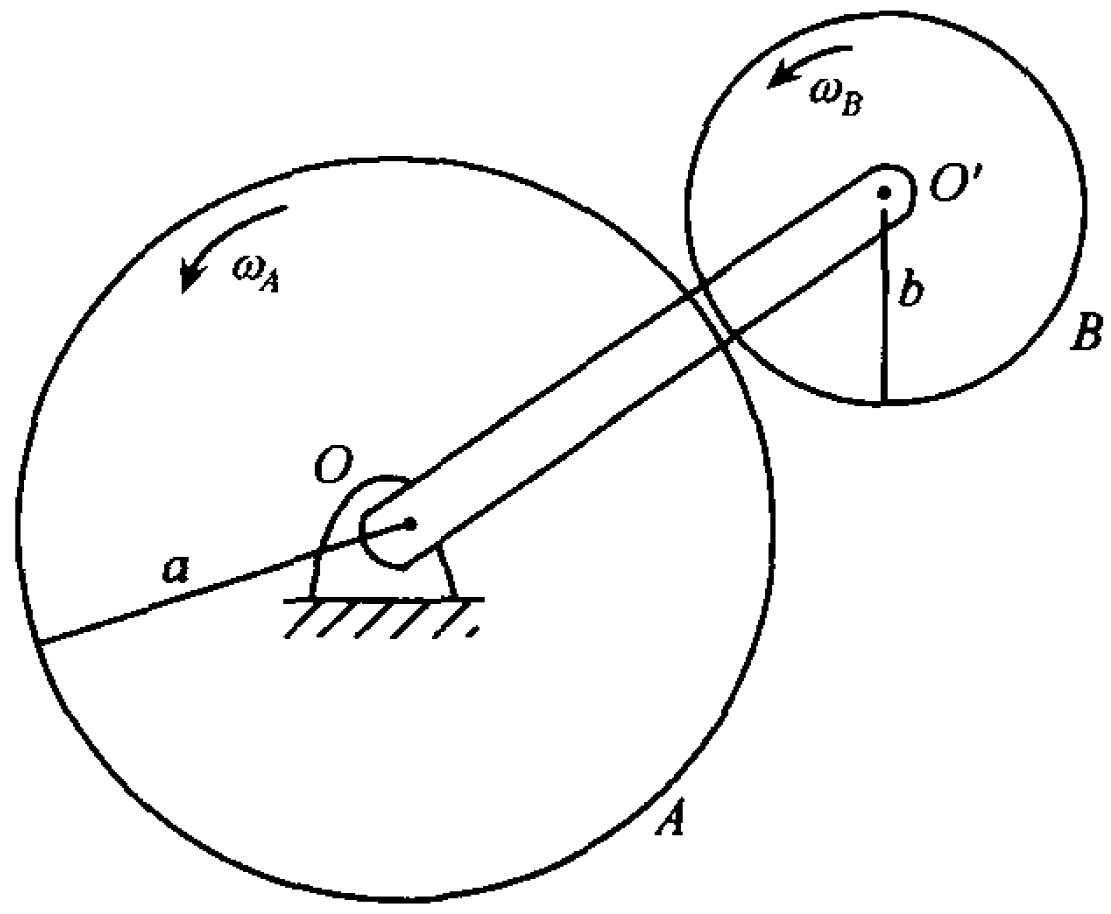


图 5.20

解　(1) 设连杆 OO' 的角速度为 Ω,逆时针转动的角速度为正.

由纯滚动条件,

$$\Omega_A a = \Omega(a+b) - \omega_B b$$

$$\Omega = \frac{\omega_A a + \omega_B b}{a+b}$$

(2) B 盘在 A 盘上转动回到 A 盘上的同一点相切所需的最短时间,是连杆 OO' 相对于 A 转一周的时间.

连杆 OO' 相对于 A 盘的角速度为

$$\Omega - \omega_A = \frac{\omega_A a + \omega_B b}{a+b} - \omega_A = \frac{(\omega_B - \omega_A)b}{a+b}$$

$$t_1 = \frac{2\pi}{|\Omega - \omega_A|} = \frac{2\pi(a+b)}{b|\omega_B - \omega_A|}$$

(3) B 盘上与 A 盘相接触的点又回到与 A 盘相接触,并不要求在图示的同一位置,也不要求与 A 盘在先前的同一点相接触,所要求的时间是 B 盘相对于连杆 OO' 转一周所需的时间.

B 盘相对于连杆 OO' 的角速度为

$$\omega_B - \Omega = \omega_B - \frac{\omega_A a + \omega_B b}{a+b} = \frac{(\omega_B - \omega_A)a}{a+b}$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{|\omega_B - \Omega|} = \frac{2\pi(a+b)}{a|\omega_B - \omega_A|}$$

(4) O' 点回到空间原来位置所需的最短时间就是连杆 OO' 的周期,

$$t_3 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi(a+b)}{\omega_A a + \omega_B b}$$

(5) 今 $a=5\text{cm}, b=3\text{cm}, \omega_A=20\pi\text{s}^{-1}, \omega_B=36\pi\text{s}^{-1}$,

$$\Omega = \frac{\omega_A a + \omega_B b}{a+b} = \frac{20\pi \times 5 + 36\pi \times 3}{5+3} = 26\pi\text{s}^{-1}$$

$t=t_4$ 时，B 盘所有点回到空间原来位置，$\omega_B t_4$ 必为 2π 的整数倍，此时连杆 OO' 也回到空间原来位置，故 Ωt_4 也必为 2π 的整数倍，求最短时间，两个整数之比必须是不可约的有理数，

$$\frac{\omega_B t_4}{2\pi}\Big/\frac{\Omega t_4}{2\pi}=\frac{\omega_B}{\Omega}=\frac{36\pi}{26\pi}=\frac{18}{13}$$

$$13\omega_B=18\Omega,\text{或 }\omega_B:\Omega=18:13$$

$$t_4=\frac{2\pi}{\omega_B}\times 18\text{ 或}\frac{2\pi}{\Omega}\times 13=1\text{s}$$

$\left(t_4\text{ 是}\frac{2\pi}{\Omega}\text{及}\frac{2\pi}{\omega_B}\text{的不可约的整数倍 .}\right)$

t_5 是 A、B 盘的所有点回到空间原来位置所需的最小时间，也是 A、B 盘及 O' 点回到空间原来位置所需的最小时间，照上述的考虑：

$$\omega_A:\omega_B:\Omega=10:18:13$$

$$t_5=\frac{2\pi}{\omega_A}\times 10=\frac{2\pi}{\omega_B}\times 18=\frac{2\pi}{\Omega}\times 13=1\text{s}$$

同样考虑 A 盘所有点及 O' 点回到空间原来位置所需的最小时间 t_6，

$$\omega_A:\Omega=10:13$$

$$t_6=\frac{2\pi}{\omega_A}\times 10=\frac{2\pi}{\Omega}\times 13=1\text{s}$$

5.2.4 高为 h、顶角为 2α 的正圆锥在一水平面上绕顶点作纯滚动，若已知其几何对称轴以恒定的角速度 Ω 绕竖直轴转动 . 求此刻圆锥底面上最高点 A 的速度和加速度 .

解 用 xyz 动坐标系来表达，x 轴始终是圆锥与水平面的交线，如图 5.21 所示 .

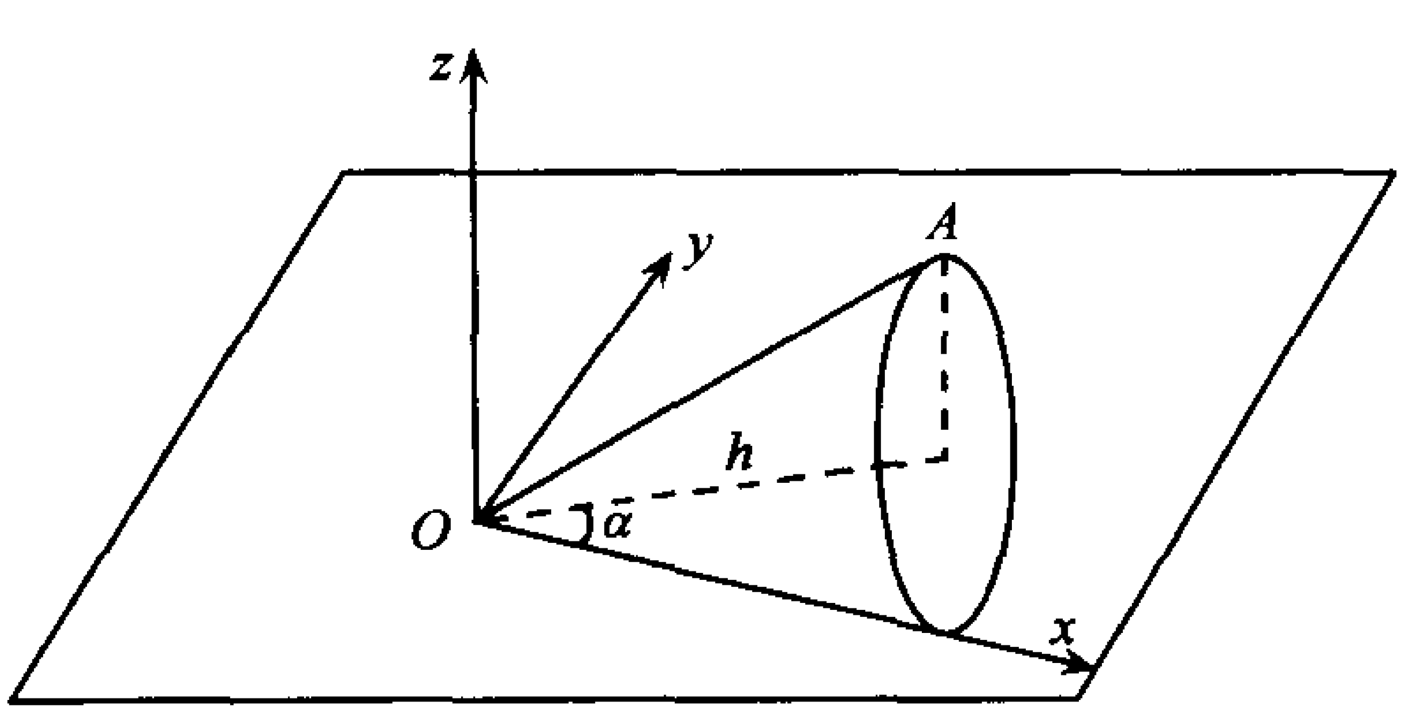


图 5.21

方法一：用刚体上一点的速度和加速度公式.

设刚体的角速度的大小为 ω，

$$\boldsymbol{\omega}=-\omega\boldsymbol{i}$$

底面中心 D 的速度为

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OD}=-\omega\boldsymbol{i}\times(h\cos\alpha\boldsymbol{i}+h\sin\alpha\boldsymbol{k})=\omega h\sin\alpha\boldsymbol{j}$$

又知 OD 的角速度为 $\Omega\boldsymbol{k}$，

$$\boldsymbol{v}_D=\Omega\boldsymbol{k}\times(h\cos\alpha\boldsymbol{i}+h\sin\alpha\boldsymbol{k})=\Omega h\cos\alpha\boldsymbol{j}$$

$$\therefore\omega h\sin\alpha=\Omega h\cos\alpha,\quad \omega=\Omega\cot\alpha$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\Omega\cot\alpha\boldsymbol{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\Omega\cot\alpha\boldsymbol{i}) = -\Omega\cot\alpha\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\Omega\cot\alpha\Omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = -\Omega^2\cot\alpha\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OA} = -\Omega\cot\alpha\boldsymbol{i}\times h\sec\alpha(\cos 2\alpha_i + \sin 2\alpha\boldsymbol{k})$$

$$= \Omega h\cot\alpha\sec\alpha\sin 2\alpha\boldsymbol{j} = 2\Omega h\cos\alpha\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OA})$$

$$= -\Omega^2\cot\alpha\boldsymbol{j}\times h\sec\alpha(\cos 2\alpha\boldsymbol{i} + \sin 2\alpha\boldsymbol{k}) - \Omega\cot\alpha\boldsymbol{i}\times 2\Omega h\cos\alpha\boldsymbol{j}$$

$$= -2\Omega^2 h\cos\alpha\boldsymbol{i} - \Omega^2 h\csc\alpha\boldsymbol{k}$$

方法二：由角速度合成公式求刚体的角速度$\boldsymbol{\omega}$，以下同方法一．

刚体的定点转动，取其几何对称轴为固连于刚体的动坐标系的 z 轴，静坐标系的 ζ 轴竖直向上，则刚体做规则进动．图 5.22 中的 ω'是自转角速度，Ω 是进动角速度，章动角速度等于零，ω 是刚体的角速度．

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}', \quad \omega = \Omega\cot\alpha$$

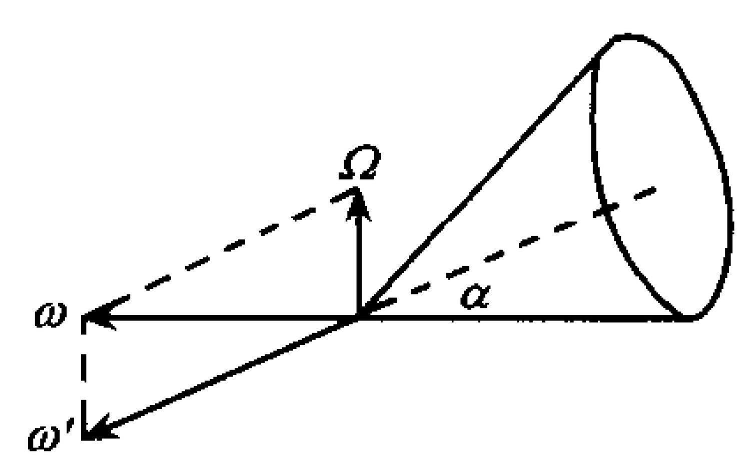


图 5.22

一般的教科书在刚体运动学中不讲规则进动，也可将图中的$\boldsymbol{\Omega}$、$\boldsymbol{\omega}'$分别视为图中动系 $Oxyz$ 的角速度和刚体对动参考系的角速度，从而得出$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}'$和 $\omega = \Omega\cot\alpha$.

方法三：将 $Oxyz$ 作为动参考系，用相对运动的知识．

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{Ar} + \boldsymbol{v}_{Ae} = \boldsymbol{\omega}'\times\overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\Omega}\times\overrightarrow{OA}$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{Ar} + \boldsymbol{a}_{Ae} + \boldsymbol{a}'_{Ac}$$

$$\boldsymbol{a}_{Ar} = \omega'\times(\boldsymbol{\omega}'\times\overrightarrow{OA}) = \boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{v}_{Ar}$$

这里已考虑了$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}'}{\mathrm{d}t}=0$，

$$\boldsymbol{a}_{Ae} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\overrightarrow{OA}) = \boldsymbol{\Omega}\cdot\times(\boldsymbol{\Omega}\times\overrightarrow{OA})$$

$$\boldsymbol{a}_{Ac} = 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_{Ar} = 2\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\omega}'\times\overrightarrow{OA})$$

可用图中的 $Oxyz$ 坐标系表达，

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{\omega}' = -\Omega\csc\alpha(\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{k})$$

$$\overrightarrow{OA} = h\sec\alpha(\cos 2\alpha\boldsymbol{i} + \sin 2\alpha\boldsymbol{k})$$

具体计算略．

方法四：直接求导的方法，但不能由上述的$\overrightarrow{OA} = h\sec\alpha(\cos 2\alpha\boldsymbol{i} + \sin 2\alpha\boldsymbol{k})$，由$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_A$，原因是这个$\overrightarrow{OA}$式子只在 A 处于最高点时才成立，而被求导的式子必须在任何时刻都成立．同样也不能从已算得的$\boldsymbol{v}_A = 2\Omega h\cos\alpha\boldsymbol{j}$ 对 t 求导得 $\boldsymbol{a}_A$，因为$\boldsymbol{v}_A$ 的上述式子也只适用于 A 位于最高点时的时刻，不是任何时刻都成立．

直接求导需作如下计算：

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OA}$$

$$a_A = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}$$

$$= (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}) \times \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA})$$

以下不再求导,可用图中的动坐标系表达的各个式子.

5.2.5 直杆 A 铰接于U形管夹板的 OO' 轴上,该板连在旋转的竖直轴的端点,竖直轴以图5.23所示的角速度 Ω 转动,杆 A 与竖直轴 z 的夹角 θ 以不变的速率 $\dot{\theta} = -p$ 变化.求杆 A 的角速度$\boldsymbol{\omega}$与角加速度$\boldsymbol{\beta}$.

解 取转动参考系 $O''xyz$,y 轴与 OO' 保持平行,可见此动参考系的角速度为 $\Omega\boldsymbol{k}$.

杆 A 的角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e$$

$$\boldsymbol{\omega}_r = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{j} = p\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{\omega}_e = \Omega\boldsymbol{k}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{j} + \Omega\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\boldsymbol{j} + \Omega\boldsymbol{k})$$

$$= p\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = p\Omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -p\Omega\boldsymbol{i}$$

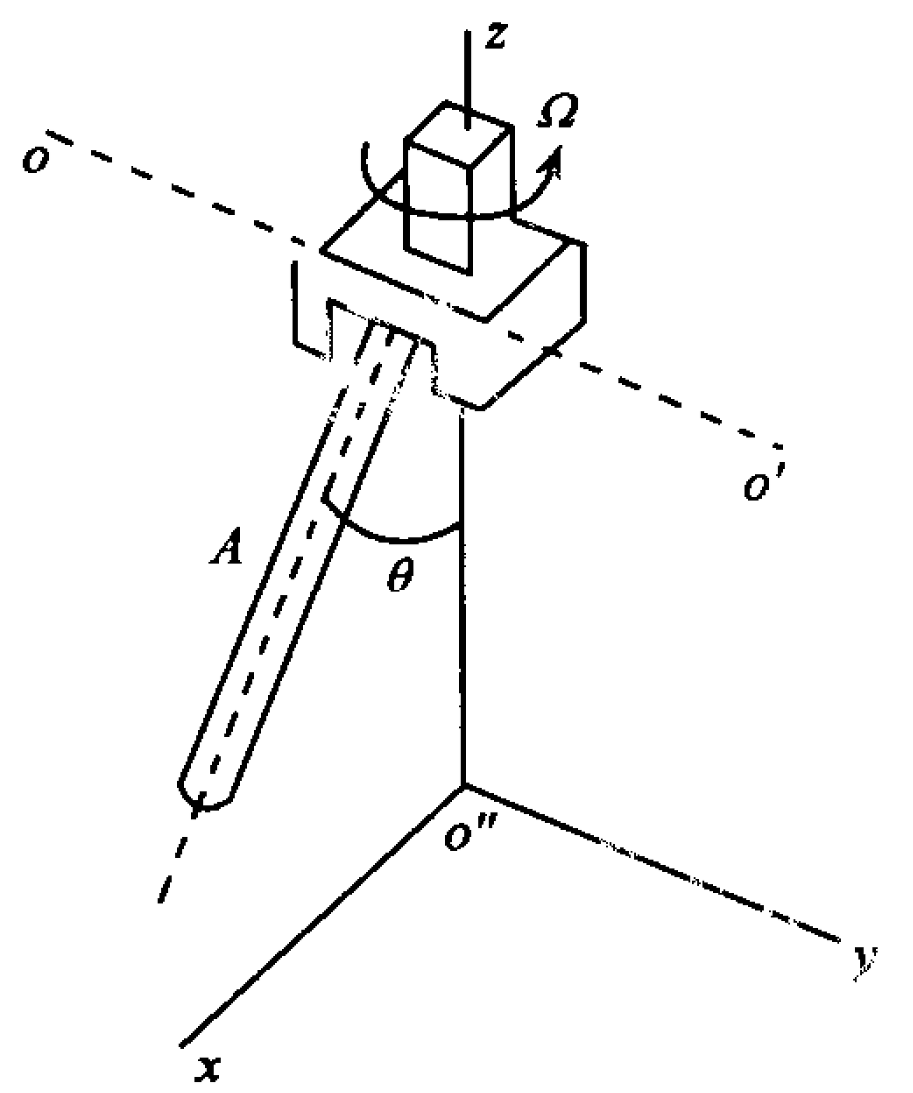


图5.23

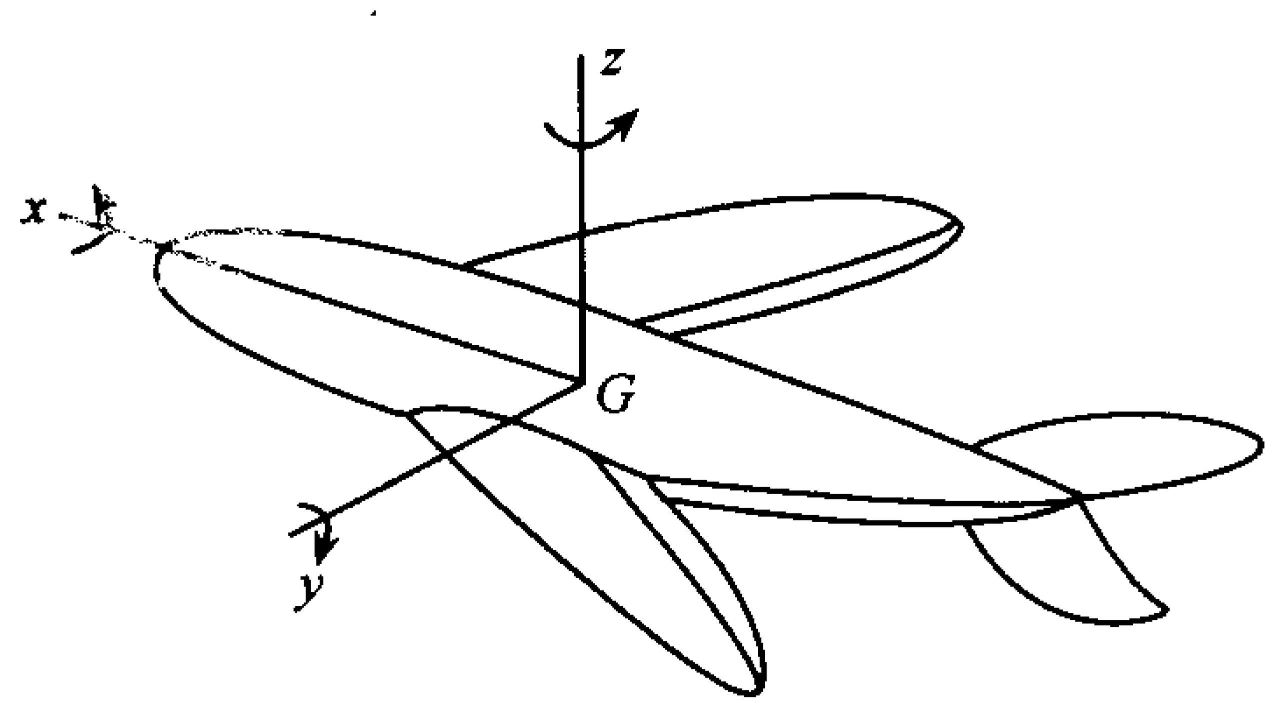


图5.24

5.2.6 飞机重心 G 做匀速直线运动,坐标系 xyz 的原点置于 G 点,飞机相对于此坐标系的角速度为:滚转 $\omega_x = 0.5\mathrm{s}^{-1}$,俯仰 $\omega_y = 0.3\mathrm{s}^{-1}$,偏航 $\omega_z = 0.1\mathrm{s}^{-1}$,现有一旅客在重心 G 之后30m,高于 G 点2m,以相对于机身的速度 $v_r = 1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$沿与 x 轴相反的方向走向机尾,求此旅客的加速度.

解

$$\boldsymbol{\omega} = 0.5\boldsymbol{i} + 0.3\boldsymbol{j} + 0.1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r} = -30\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_r = -1\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{a}_r = 0$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

$$= 0 + \boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \omega^2\boldsymbol{r} + 0 + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

$$
\begin{aligned}
&= -14.8(0.5\boldsymbol{i} + 0.3\boldsymbol{j} + 0.1\boldsymbol{k}) \\
&\quad - [(0.5)^2 + (0.3)^2 + (0.1)^2](-30\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}) \\
&\quad + (0.5\boldsymbol{i} + 0.3\boldsymbol{j} + 0.1\boldsymbol{k}) \times (-1\boldsymbol{i}) \\
&= 3.1\boldsymbol{i} - 4.64\boldsymbol{j} - 1.58\boldsymbol{k}(\mathrm{m/s^2})
\end{aligned}
$$

5.2.7　圆盘以匀角速 Ω 绕其中心轴 z 转动，架子 A 以匀角速度 ω_2 绕其轴线 y'（$y' \parallel y$）转动．同时，整个装置以角速度 ω_1 绕 X 轴转动．求架子 A 使圆盘处于图 5.25 所示位置时圆盘的角速度$\boldsymbol{\omega}$、角加速度$\boldsymbol{\beta}$以及圆盘上最高点 P 的速度和加速度，图中 xyz 坐标轴固连于架子 A. 在此时，x 轴与固定坐标 X 轴平行．设圆盘半径为 r，y、y' 轴间距为 b，x、X 轴间距为 c，z 与 Z 轴间的水平间距可以忽略.

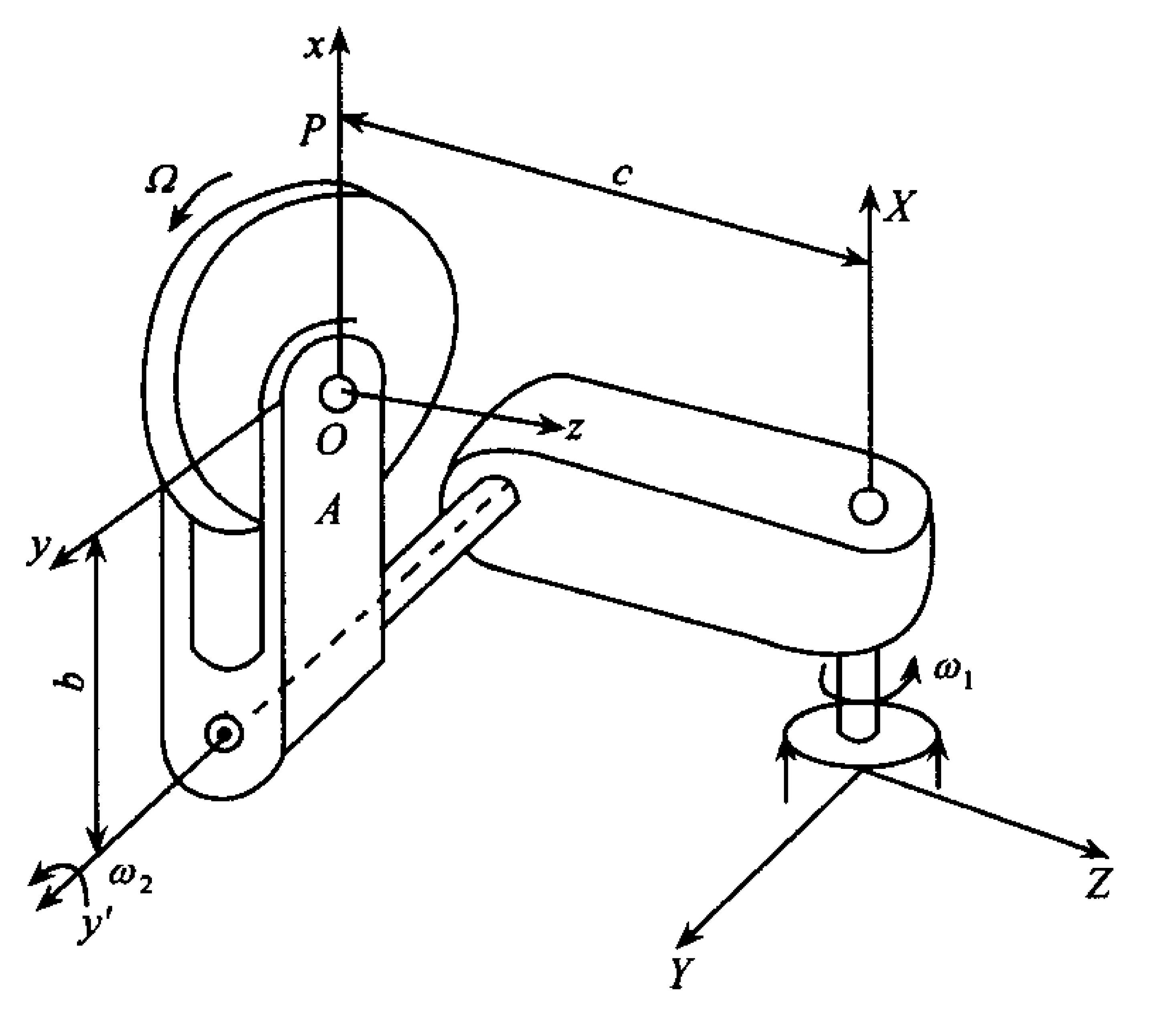


图 5.25

解
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{i} + \omega_2\boldsymbol{j} + \Omega\boldsymbol{k}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= \omega_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + \Omega \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \omega_2\omega_1\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + \Omega(\omega_1\boldsymbol{i} + \omega_2\boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{k} \\
&= \omega_2\Omega\boldsymbol{i} - \omega_1\Omega\boldsymbol{j} + \omega_1\omega_2\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}' = -c\boldsymbol{k} + b\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{i}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_P &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{r}_2 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{r}' \\
&= \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}' \\
&= \omega_1\boldsymbol{i} \times (-c\boldsymbol{k} + b\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{i}) + \omega_2\boldsymbol{j} \times (b + r)\boldsymbol{i} + \Omega\boldsymbol{k} \times r\boldsymbol{i} \\
&= (c\omega_1 + r\Omega)\boldsymbol{j} - (b + r)\omega_2\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_P &= \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}'] \\
&= \boldsymbol{\omega}_1 \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}') + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t} \times (\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\Omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\\
=&\ \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{v}_P+(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)\times(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}')\\
&+\boldsymbol{\omega}_2\times[(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{r}_2+(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{r}']\\
&+[(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{\Omega}]\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\Omega}\times[(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{r}']\\
=&\ \omega_1\boldsymbol{i}\times[(c\omega_1+r\Omega)\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}]+(\omega_1\boldsymbol{i}\times\omega_2\boldsymbol{j})\times(b+r)\boldsymbol{i}\\
&+\omega_2\boldsymbol{j}\times[(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j})\times b\boldsymbol{i}+(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\Omega\boldsymbol{k})\times r\boldsymbol{i}]\\
&+[(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j})\times\Omega\boldsymbol{k}]\times r\boldsymbol{i}+\Omega\boldsymbol{k}\times[(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\Omega\boldsymbol{k})\times r\boldsymbol{i}]\\
=&\ \omega_1(c\omega_1+r\Omega)\boldsymbol{k}+(b+r)\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}+(b+r)\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}-b\omega_2^2\boldsymbol{i}\\
&-r\omega_2^2\boldsymbol{i}+r\omega_1\Omega\boldsymbol{k}-r\Omega^2\boldsymbol{i}\\
=&-[r\Omega^2+(b+r)\omega_2^2]\boldsymbol{i}+2(b+r)\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}+(c\omega_1^2+2r\omega_1\Omega)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

注意:用这种求导的方法须注意$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$的计算不能乱套公式,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}\neq\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}_1$,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}=0$. ∵$\boldsymbol{\omega}_1=\omega_1\boldsymbol{i}$,这个$\boldsymbol{i}$是$XYZ$坐标系中的$\boldsymbol{i}$,不随$t$而变,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\neq\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}_2$,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\neq\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\omega}_2$,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2$,∵$\boldsymbol{\omega}_2=\omega_2\boldsymbol{j}$,这个$\boldsymbol{j}$是$y'$轴的单位矢量,在此时,它绕$X$轴以$\boldsymbol{\omega}_1$的角速度转动.$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\neq\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}$,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}$这样写虽然结果是对的,但严格讲不妥,∵$\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{k}$,这个$\boldsymbol{k}$是$Z$轴的单位矢量,此时它以$\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$的角速度(以$\boldsymbol{\omega}_2$的角速度绕$y'$轴转动,$y'$轴又以$\boldsymbol{\omega}_1$的角速度绕$X$轴转动)转动.同样,$\boldsymbol{r}_2=b\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{r}'=r\boldsymbol{i}$两个$\boldsymbol{i}$的时间导数是不同的.$\boldsymbol{a}_P=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_P}{\mathrm{d}t}\neq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(c\omega_1+r\Omega)\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}]$.

方法二:考虑圆盘中心O点平动参考系作为动系.

先求O点的绝对速度和绝对加速度,取以角速度$\boldsymbol{\omega}_1$绕X轴转动的动参考系XYZ,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_O=\boldsymbol{v}_{oe}+\boldsymbol{v}_{or}\\
&\boldsymbol{v}_{oe}=\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)=\omega_1\boldsymbol{i}\times(-c\boldsymbol{k}+b\boldsymbol{i})=c\omega_1\boldsymbol{j}\\
&\boldsymbol{v}_{or}=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{r}_2=\omega_2\boldsymbol{j}\times b\boldsymbol{i}=-b\omega_2\boldsymbol{k}\\
&\boldsymbol{v}_o=c\omega_1\boldsymbol{j}-b\omega_2\boldsymbol{k}\\
&\boldsymbol{a}_o=\boldsymbol{a}_{oe}+\boldsymbol{a}_{or}+\boldsymbol{a}_{oc}\\
&\boldsymbol{a}_{oe}=\boldsymbol{\omega}_1\times[\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)]\\
&\quad=\omega_1\boldsymbol{i}\times[\omega_1\boldsymbol{i}\times(-c\boldsymbol{k}+b\boldsymbol{i})]=c\omega_1^2\boldsymbol{k}\\
&\boldsymbol{a}_{or}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{\omega}_2\times(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{r}_2)\\
&\quad=0+\omega_2\boldsymbol{j}\times(\omega_2\boldsymbol{j}\times b\boldsymbol{i})=-b\omega_2^2\boldsymbol{i}\\
&\boldsymbol{a}_{oc}=2\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{v}_{or}=2\omega_1\boldsymbol{i}\times(-b\omega_2\boldsymbol{k})=2b\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}\\
&\boldsymbol{a}_o=-b\omega_2^2\boldsymbol{i}+2b\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}+c\omega_1^2\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

下面计算$\boldsymbol{v}_P$和$\boldsymbol{a}_P$,

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_{Pe}+\boldsymbol{v}_{Pr}=\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{v}_{Pr}$$

$$\boldsymbol{v}_{Pr}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\Omega\boldsymbol{k})\times r\boldsymbol{i}$$

$$=r\Omega\boldsymbol{j}-r\omega_2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_P=(c\omega_1+r\Omega)\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_{Pe}+\boldsymbol{a}_{Pr}=\boldsymbol{a}_o+\boldsymbol{a}_{Pr}$$

$$\boldsymbol{a}_{Pr}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{Pr}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$$

$$=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$$

$$=(\omega_2\Omega\boldsymbol{i}-\omega_1\Omega\boldsymbol{j}+\omega_1\omega_2\boldsymbol{k})\times r\boldsymbol{i}$$

$$+(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\Omega\boldsymbol{k})\times[(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\Omega\boldsymbol{k})\times r\boldsymbol{i}]$$

$$=-(r\Omega^2+r\omega_2{}^2)\boldsymbol{i}+2r\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}+2r\omega_1\Omega\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}_P=-[r\Omega^2+(b+r)\omega_2^2]\boldsymbol{i}+2(b+r)\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}+(c\omega_1^2+2r\omega_1\Omega)\boldsymbol{k}$$

方法三：考虑以角速度 ω_1 绕 X 轴转动的动参考系.

$$\boldsymbol{v}_{Pe}=\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}')$$

$$=\omega_1\boldsymbol{i}\times(-c\boldsymbol{k}+b\boldsymbol{i}+r\boldsymbol{i})=c\omega_1\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_{Pr}=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{r}_2+(\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{r}'$$

$$=\omega_2\boldsymbol{j}\times b\boldsymbol{i}+(\omega_2\boldsymbol{j}+\Omega\boldsymbol{k})\times r\boldsymbol{i}=r\Omega\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_{Pe}+\boldsymbol{v}_{Pr}=(c\omega_1+r\Omega)\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}_{Pe}=\omega_1\boldsymbol{i}\times[\omega_1\boldsymbol{i}\times(-c\boldsymbol{k}+b\boldsymbol{i}+r\boldsymbol{i})]=c\omega_1^2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}_{Pr}=\boldsymbol{\omega}_2\times(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{r}_2)+(\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\Omega})\times[(\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{r}']$$

$$=-(b\omega_2^2-r\omega_2^2-r\Omega^2)\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}_{Pc}=2\,\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{v}_{Pr}=2\omega_1\boldsymbol{i}\times[r\Omega\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}]$$

$$=2r\omega_1\Omega\boldsymbol{k}+2(b+r)\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_{Pe}+\boldsymbol{a}_{Pr}+\boldsymbol{a}_{Pc}$$

$$=-[r\Omega^2+(b+r)\omega_2^2]\boldsymbol{i}+2(b+r)\omega_1\omega_2\boldsymbol{j}+(c\omega_1^2+2r\omega_1\Omega)\boldsymbol{k}$$

方法四：考虑随 O 点又平动又转动的参考系为动系，此动系的转动角速度为$\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$.

$$\boldsymbol{v}_{Pe}=\boldsymbol{v}_o+(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{r}'$$

用方法二已算出的$\boldsymbol{v}_o=c\omega_1\boldsymbol{j}-b\omega_2\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{v}_{Pe}=c\omega_1\boldsymbol{j}-b\omega_2\boldsymbol{k}+(\omega_1\boldsymbol{i}+w_2\boldsymbol{j})\times r\boldsymbol{i}=c\omega_1\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_{Pr}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'=\Omega\boldsymbol{k}\times r\boldsymbol{i}=r\Omega\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_{Pe}+\boldsymbol{v}_{Pr}=(c\omega_1+r\Omega)\boldsymbol{j}-(b+r)\omega_2\boldsymbol{k}$$

采用方法二、三、四，在写$\boldsymbol{v}_e$、$\boldsymbol{v}_r$、$\boldsymbol{a}_e$、$\boldsymbol{a}_r$时都须十分小心，因此用方法一出错的可能性小些.

5.2.8 如图 5.26 所示，圆锥滚子在水平的圆锥环形支座上做纯滚动，滚子底面半径 $R=10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$，顶角 $2\alpha=90°$，滚子中心 A 沿其轨迹运动的速率 $v_A=20\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，求圆锥滚子上点 B 和 C 的速度和加速度的大小.

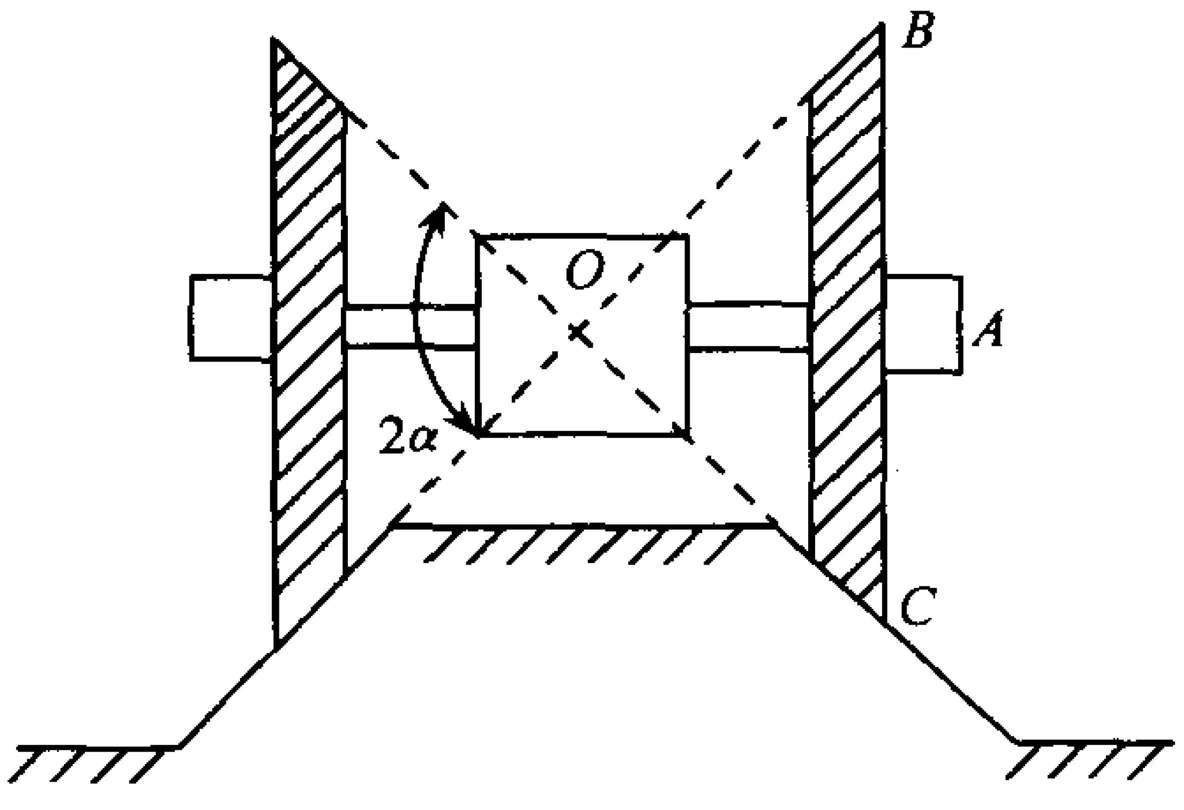


图 5.26

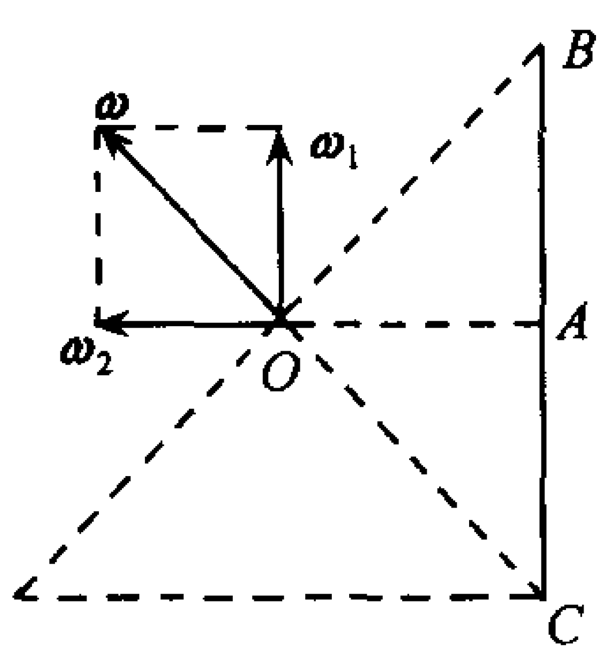


图 5.27

解 圆锥滚子滚动时,A 点绕 O 在水平面内做圆周运动,如图 5.27 所示,角速度 ω_1 为

$$\omega_1=\frac{v_A}{\overline{OA}}=\frac{v_A}{\overline{AB}}=\frac{v_A}{R}=\frac{20}{10\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,\mathrm{s}^{-1}$$

滚子做纯滚动,C 点速度为零,

$$\boldsymbol{v}_C=0$$

O 点是固定点,在图 5.27 所示位置,OC 为瞬时转轴,另一个角速度分量 ω_2 必在 AO 的延长线上.

∵

$$2\alpha=90°,$$

$$\omega=\sqrt{2}\,\omega_1=2\mathrm{s}^{-1}$$

OB 线与转轴垂直,$OB=\sqrt{2}\,R=20\mathrm{cm}$,

$$v_B=\omega\cdot OB=2\times 20=40\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OB})+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{OB}$$

$$=-\omega^2\overrightarrow{OB}+(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega})\times\overrightarrow{OB}$$

第一项沿 BO 方向,第二项沿 CO 方向,互相垂直,故

$$a_B=\sqrt{(-\omega^2OB)^2+(\omega_1\omega\sin45°\cdot OB)^2}$$

$$=OB\sqrt{(-2^2)^2+\left(\sqrt{2}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=40\sqrt{5}\,(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OC})+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{OC}$$

$$=(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega})\times\overrightarrow{OC}$$

$$a_C=\omega_1\omega\sin45°\cdot OC=\omega_1\omega\sin45°\cdot OB=40\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

方法二:考虑随 OA 转动的动参考系,滚子对动系的角速度为$\boldsymbol{\omega}_2$,角加速度 $\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}=0$.

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_{Be}+\boldsymbol{v}_{Br}=\boldsymbol{\omega}_1\times\overrightarrow{OB}+\boldsymbol{\omega}_2\times\overrightarrow{OB}$$

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_{Be}+\boldsymbol{a}_{Br}+\boldsymbol{a}_{Bc}$$

$$=\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\overrightarrow{OB})+\boldsymbol{\omega}_2\times(\boldsymbol{\omega}_2\times\overrightarrow{OB})+2\,\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_2\times\overrightarrow{OB})$$

$$v_B = \omega_1 R + \omega_2 R = 40\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_B = \sqrt{(\omega_1^2 R + 2\omega_1\omega_2 R)^2 + (\omega_2^2 R)^2} = 40\sqrt{5}\,\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{Ce} + \boldsymbol{v}_{Cr} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{OC} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{OC}$$

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{Ce} + \boldsymbol{a}_{Cr} + \boldsymbol{a}_{Cc}$$

$$= \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{OC}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{OC}) + 2\,\boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{OC})$$

$$v_C = \omega_1 R - \omega_2 R = 0$$

$$a_C = \sqrt{(\omega_1^2 R - 2\omega_1\omega_2 R)^2 + (\omega_2^2 R)^2} = 40\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

这里用了方法一得到的$\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 作上述计算，如果一开始就采取方法二，则先按方法一那样算出$\boldsymbol{\omega}_1$，再由$\boldsymbol{v}_C=0$ 得$\boldsymbol{\omega}_2$，再用上述方法算 v_B、a_B 和 a_C.

再就 5.2.6、5.2.7、5.2.8 三题中$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$的计算作一点说明：5.2.6、5.2.8 两题的几个转轴都通过固定点，用$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}$ 计算时，可采用统一的动坐标系，5.2.6 题可用固连于飞机的动坐标系，$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=0$，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=0$，故$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=0$，5.2.8 题，取随 OA 转动的动坐标系，$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2$，如取固连于滚子的动坐标系，$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}\neq0$，$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}$. 5.2.7 题中圆盘的角速度$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\Omega}$，$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$，因$\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$、$\boldsymbol{\Omega}$ 的转轴不共点，计算$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$在使用公式$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}$ 时，必须采用不同的动坐标系. 算$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}$可用静坐标系，算$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_2}{\mathrm{d}t}$用 XYZ 动坐标系，算$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$用固连于架子 A 的 xyz 动坐标系.

5.2.9 图 5.28 是一个双重差动机构，曲柄 3 绕固定轴 AB 转动、在曲柄上活动地套一行星齿轮 4，行星齿轮由半径分别为 $r_1=5\text{cm}$ 和 $r_2=2\text{cm}$ 的两个锥齿轮固连而成，两锥齿轮又分别与半径分别为 $R_1=10\text{cm}$、$R_2=5\text{cm}$ 的另两个锥齿轮 1、2 啮合，齿轮 1、2 均绕 AB 轴转动，均不与曲柄相连，它们的角速度分别为 $\omega_1=4.5\text{rad/s}$，$\omega_2=9\text{rad/s}$，转动方向相同. 求曲柄 3 的角速度 ω_3 和行星齿轮相对于曲柄的角速度 ω_{43}.

解 设$\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 均沿 BA 方向，假定$\boldsymbol{\omega}_3$ 也沿 BA 方向（即与$\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 同向），行星齿轮相对于曲柄 3 的角速度$\boldsymbol{\omega}_{43}$向左（图示时刻），即指向 O 的方向，如图 5.29 所示.

由纯滚动，

$$(\boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{43}) \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1D}$$

$$(\boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{43}) \times \overrightarrow{OE} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{O_2F}$$

即

$$\omega_3 R_1 - \omega_{43} r_1 = \omega_1 R_1$$

$$\omega_3 R_2 + \omega_{43} r_2 = \omega_2 R_2$$

$$10\omega_3 - 5\omega_{43} = 4.5 \times 10 = 45 \tag{1}$$

$$5\omega_3 + 2\omega_{43} = 9 \times 5 = 45 \tag{2}$$

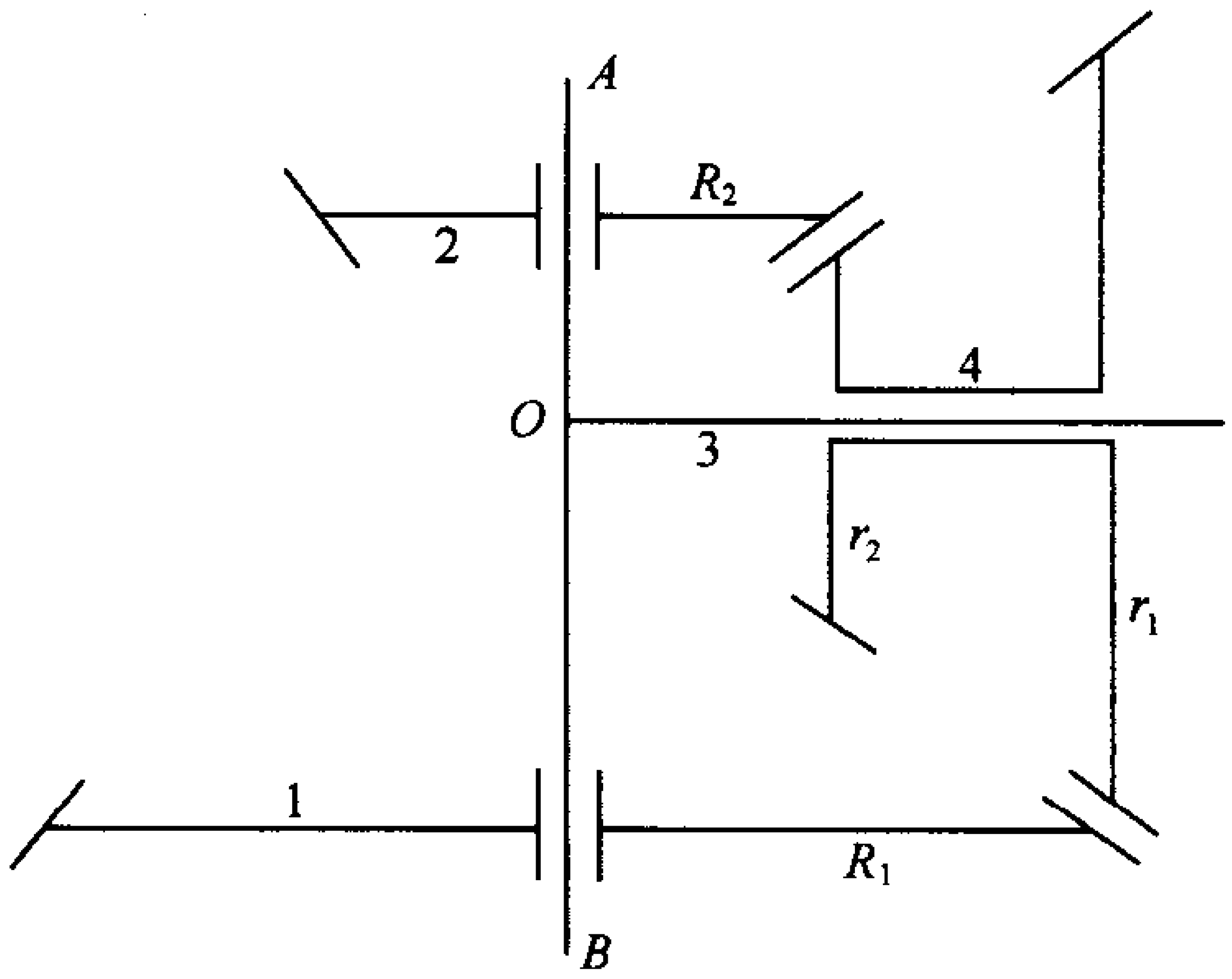


图 5.28

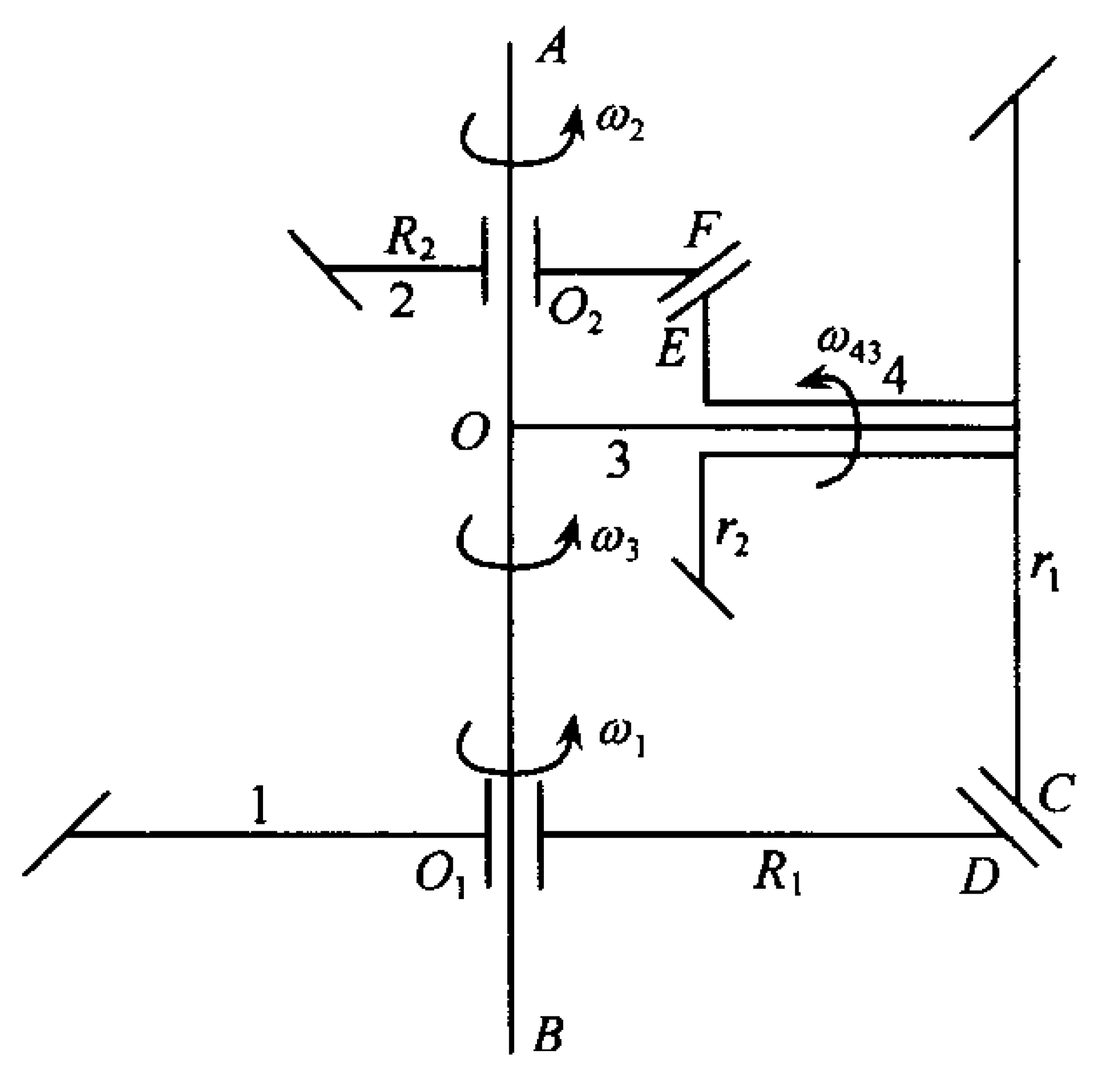


图 5.29

式(1)+式(2)×2.5,得

$$\omega_3 = \frac{45 + 45 \times 2.5}{10 + 5 \times 2.5} = 7(\text{rad/s})$$

$$\omega_{43} = \frac{45 - 5\omega_3}{2} = 5\text{rad/s}$$

5.2.10 用什么样的动系可把刚体做定点转动时用的 $\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$三个角速度中的一个作为相对角速度,而另两个作为牵连角速度.

解 取部分固连于刚体的转动参考系 $Oxyz$ 为动参考系,O 点是刚体定点转动的固定点,z 轴固连于刚体,则 $\dot{\psi}$为相对角速度,$\dot{\theta}+\dot{\varphi}$为牵连角速度.

第六章　质点系动力学

6.1　质点系的动量定理和动量守恒定律

6.1.1　求由抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=a$ 围成的区域形状的均质薄板的质心.

解　设面密度为 σ,根据对称性判断,

$$x_c = 0$$

考虑图 6.1 中阴影部分的质元,其面积为 $(a-x^2)\mathrm{d}x$,其质心的 y 坐标为 $a-\frac{1}{2}(a-x^2)$,

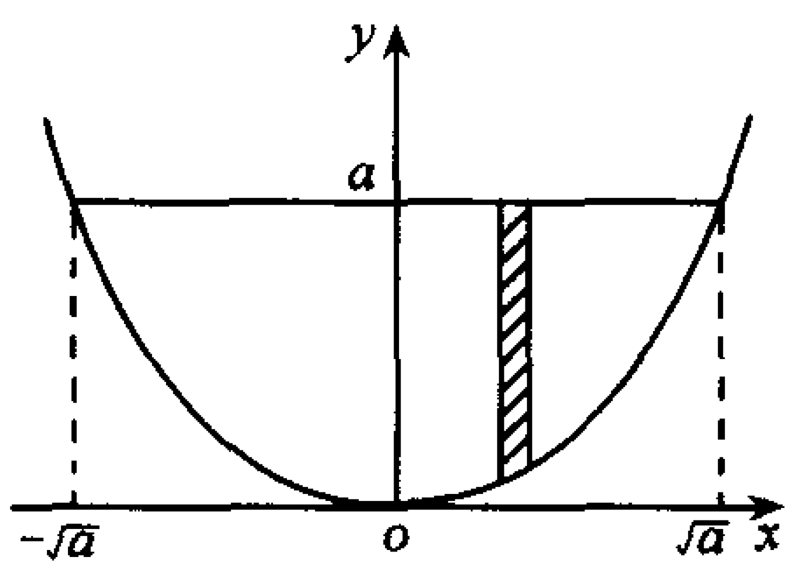


图 6.1

$$\begin{aligned}
y_c &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \sigma\left[a - \frac{1}{2}(a - x^2)\right](a - x^2)\mathrm{d}x \Big/ \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \sigma(a - x^2)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{2}(a + x^2)(a - x^2)\mathrm{d}x \Big/ 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{a}} (a^2 - x^4)\mathrm{d}x \Big/ 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{a^2x - \frac{1}{5}x^5}{2\left(ax - \frac{1}{3}x^3\right)}\right|_{x=0}^{x=\sqrt{a}} = \frac{3}{5}a
\end{aligned}$$

6.1.2　求由四个平面:$x=0$、$y=0$、$z=0$ 和 $4x+2y+z=8$ 为边界的均质实心体的质心.

解　这块实心体如图 6.2 所示.

求 x_c,用 $x=x'$ 面截这个实心体,其边界为 $y=0$,$z=0$,$2y+z=8-4x'$,如图 6.3 所示.

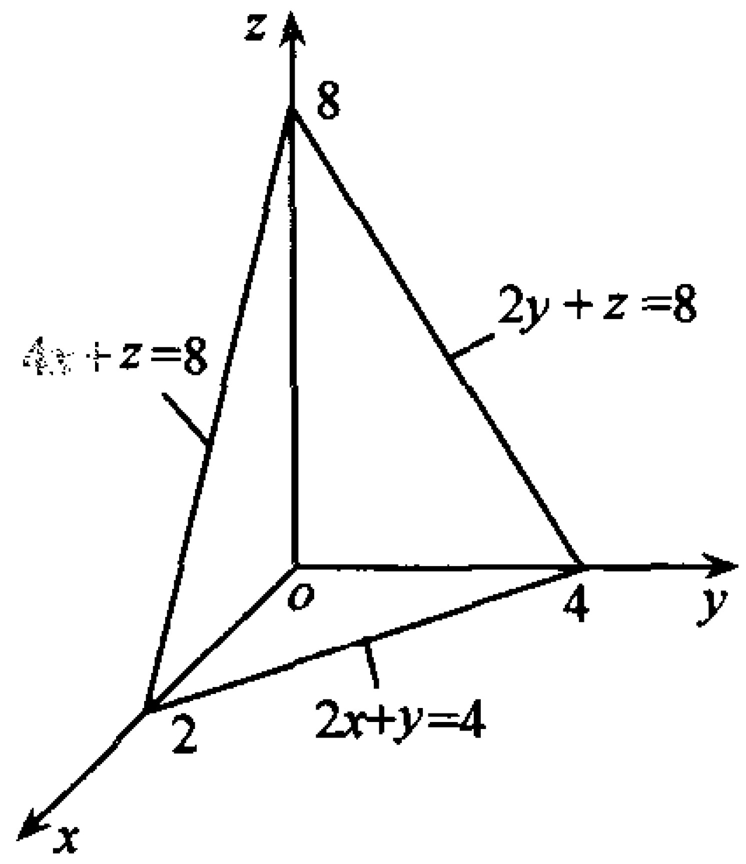


图 6.2

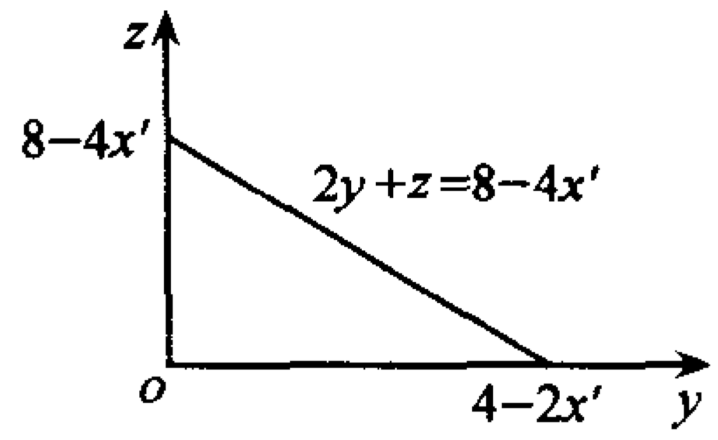


图 6.3

考虑 $x'\sim x'+\mathrm{d}x'$ 体积元，其体积为

$$\frac{1}{2}(8-4x')(4-2x')\mathrm{d}x'$$

质心的 x 坐标为 x'.

实心体的体积

$$V=\int_0^2\frac{1}{2}(8-4x')(4-2x')\mathrm{d}x'$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(32-32x'+8x'^2)\mathrm{d}x'=\frac{32}{3}$$
$$x_c=\frac{1}{V}\int_0^2 x'\,\frac{1}{2}(8-4x')(4-2x')\mathrm{d}x'=\frac{1}{2}$$

求 y_c，用 $y=y'$ 截实心体，其边界为 $x=0$、$z=0$、$4x+z=8-2y'$，如图 6.4 所示. $y'\sim y'+\mathrm{d}y'$ 体积元的体积为

$$\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}y'\right)(8-2y')\mathrm{d}y'$$
$$y_c=\frac{1}{V}\int_0^4 y'\,\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}y'\right)(8-2y')\mathrm{d}y'$$
$$=\frac{1}{V}\int_0^4 y'\left(8-4y'+\frac{1}{2}y'^2\right)\mathrm{d}y'=1$$

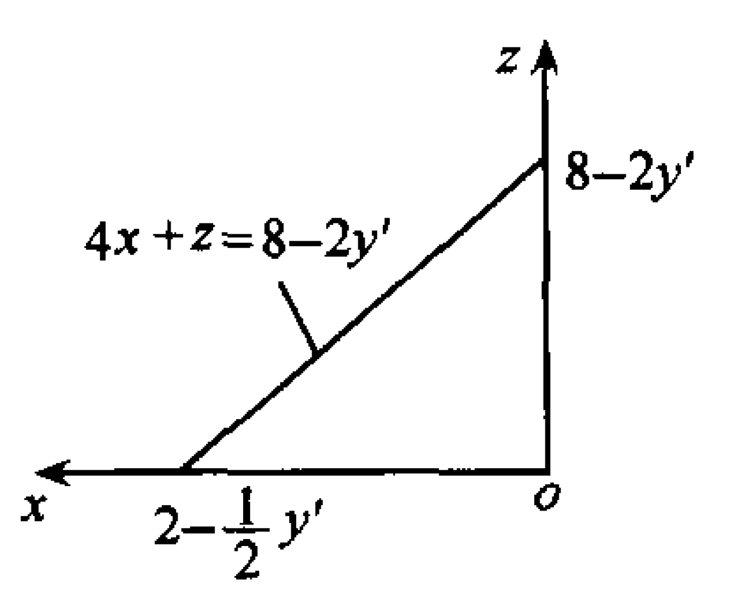


图 6.4

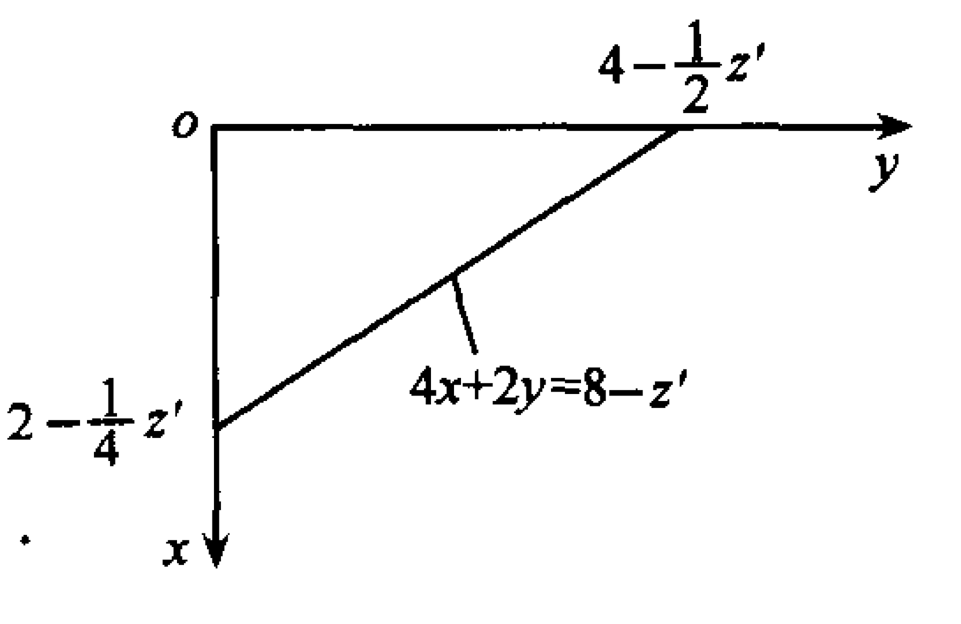


图 6.5

求 z_c，用 $z=z'$ 面截实心体，其边界为 $x=0$、$y=0$、$4x+2y=8-z'$，如图 6.5 所示. $z'\sim z'+\mathrm{d}z'$ 体积元的体积为

$$\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}z'\right)\left(2-\frac{1}{4}z'\right)\mathrm{d}z'$$
$$z_c=\frac{1}{V}\int_0^8 z'\cdot\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}z'\right)\left(2-\frac{1}{4}z'\right)\mathrm{d}z'=2$$

所以实心体的质心坐标为 $x_c=\dfrac{1}{2}$，$y_c=1$，$z_c=2$.

6.1.3　求均质的内外半径分别为 a 和 b 的半球壳的质心.

解　方法一：采用球坐标，取球心为原点，对称轴为 z 轴，根据对称性可以判断质心位于 z 轴上，即 $x_c=0$，$y_c=0$.

设密度为 ρ，位于 $r\sim r+\mathrm{d}r$、$\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$、$\varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 的质元的质量为

$$\mathrm{d}m=\rho r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

此质元的 z 坐标为

$$z = r\cos\theta$$

$$z_c = \frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int r\cos\theta \cdot \rho r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\int \rho r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \frac{\int_a^b r^3\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}{\int_a^b r^2\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)\ \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2} \times 2\pi}{\frac{1}{3}(b^3 - a^3) \times 1 \times 2\pi} = \frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$$

方法二：采用柱坐标，仍取方法一中的 xyz 坐标，$x_c=0, y_c=0$.

$z \sim z+\mathrm{d}z$ 质元的质量为

$$\mathrm{d}m = \begin{cases} \rho[\pi(b^2 - z^2) - \pi(a^2 - z^2)]\mathrm{d}z & 0 \leqslant z \leqslant a \\ \rho\pi(b^2 - z^2)\mathrm{d}z & a \leqslant z \leqslant b \end{cases}$$

$$z_c = \frac{\int_0^a z\rho\pi(b^2 - a^2)\mathrm{d}z + \int_a^b z\rho\pi(b^2 - z^2)\mathrm{d}z}{\int_0^a \rho\pi(b^2 - a^2)\mathrm{d}z + \int_a^b \rho\pi(b^2 - z^2)\mathrm{d}z}$$

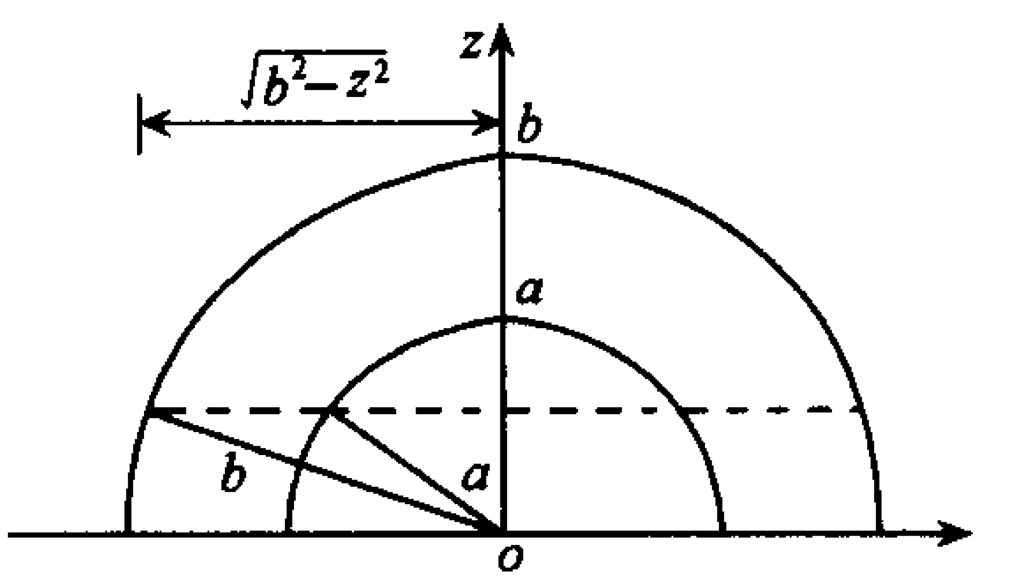


图 6.6

计算略，计算较方法一麻烦些.

6.1.4　图 6.7 所示的画有斜线的匀质薄板是由半径为 R 的大圆板挖去两个半径为 $\frac{1}{2}R$ 的完整的和不完整的小圆板形成的. 两小圆的圆心 A、B 处于同一条直径上，且在圆心 O 的两侧与 O 点的距离 R 和 $\frac{R}{2}$ 处. 求此薄板的质心.

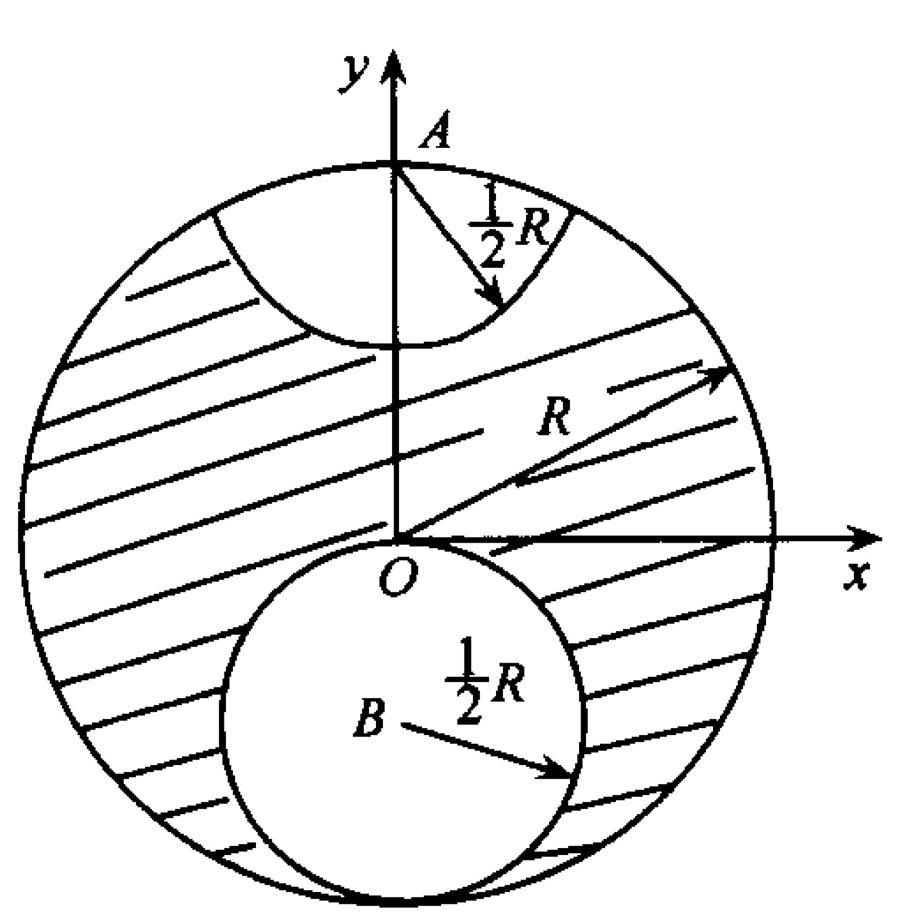


图 6.7

解　先求被挖去的圆心在 A 的那部分的质量 m_1 和质心位置 y_{1c}，这部分的边界为两个圆弧，其方程为

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad x^2 + (y - R)^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2$$

两式相减可得两曲线相交点的 y 坐标 y^*，

$$2Ry^* - R^2 = R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{3}{4}R^2$$

$$y^* = \frac{7}{8}R$$

设匀质板的面密度为 σ，

$$m_1 = \int_{\frac{1}{2}R}^{y^*} \sigma \cdot 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}R\right)^2 - (R - y)^2}\mathrm{d}y + \int_{y^*}^{R} \sigma \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

$$= 2\sigma \cdot \frac{1}{2}\left[(y-R)\sqrt{\frac{1}{4}R^2-(y-R)^2}+\frac{1}{4}R^2\arcsin\left(\frac{y-R}{\frac{1}{2}R}\right)\right]\Bigg|_{y=\frac{1}{2}R}^{y=\frac{7}{8}R}$$

$$+ 2\sigma \cdot \frac{1}{2}\left[y\sqrt{R^2-y^2}+R^2\arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right]\Bigg|_{y=\frac{7}{8}R}^{y=R}$$

$$= 0.351\sigma R^2$$

$$y_{1c} = \frac{1}{m_1}\left[\int_{\frac{R}{2}}^{y^*} y\cdot\sigma\cdot 2\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2-(R-y)^2}\,\mathrm{d}y + \int_{y^*}^{R} y\cdot\sigma\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{1}{m_1}\left[\int_{\frac{R}{2}}^{\frac{7}{8}R}(y-R)\sigma\cdot 2\sqrt{\frac{1}{4}R^2-(y-R)^2}\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{7}{8}R} R\cdot\sigma\cdot 2\sqrt{\frac{1}{4}R^2-(y-R)^2}\,\mathrm{d}y\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{7}{8}R}^{R} y\cdot\sigma\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right]$$

$$= 0.766R$$

被挖去的圆心在 B 的小圆板的质量

$$m_2 = \sigma\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sigma\pi R^2, \qquad y_{2c} = -\frac{1}{2}R$$

所要求的薄板质量为

$$m = \sigma\pi R^2 - m_1 - m_2 = 2.005\sigma R^2$$

其质心,由对称性可知,$x_c=0$,y_c 待求.

三部分的质量 $m+m_1+m_2=\sigma\pi R^2$,质心位于 $x=0$,$y=0$ 处.

由质心的定义,

$$\sigma\pi R^2 \cdot o = 2.005\sigma R^2 y_c + 0.351\sigma R^2 \times 0.766R + \frac{1}{4}\sigma\pi R^2\left(-\frac{1}{2}R\right)$$

$$y_c = \frac{1}{2.005}\left[\frac{1}{8}\pi - 0.351 \times 0.766\right]R = 0.062R$$

所以薄板的质心坐标为 $x_c=0$、$y_c=0.062R$.

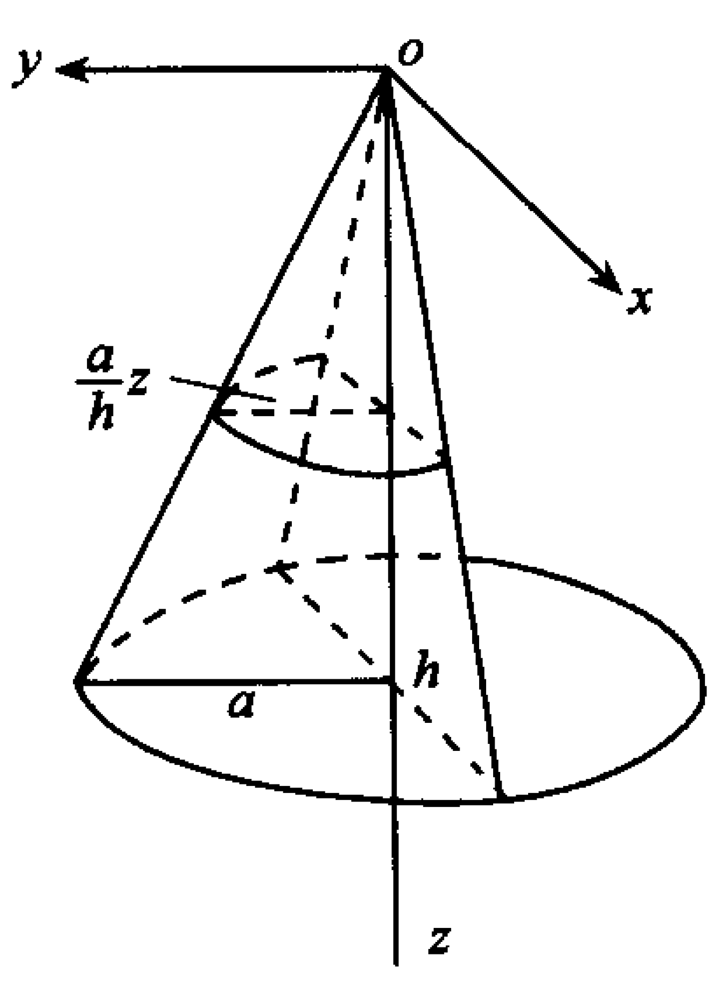


图 6.8

6.1.5 正圆锥体底面的半径为 a,今用一通过其对称轴的平面将它等分为二.证明任一半的质心和该轴的距离为 $\frac{a}{\pi}$.

证明 设圆锥高为 h,取图 6.8 所示的坐标,原点在圆锥的顶点,z 轴为对称轴,y 轴垂直于将正圆锥平分的平面.

设密度为 ρ,$z\sim z+\mathrm{d}z$ 质元的质量为

$$\mathrm{d}m = \rho\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}z\right)^2\mathrm{d}z$$

半正圆锥的质量为

$$m = \int_0^h \rho\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}z\right)^2\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\rho\pi a^2 h$$

上述质元的质心的 y 坐标是 z 的函数,标为 $y_c(z)$.用柱坐标,

$$y_c(z)=\frac{1}{\mathrm{d}m}\int r\sin\varphi\cdot\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\frac{\rho}{\mathrm{d}m}\left[\int_0^{\frac{a}{h}z}r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}z=\frac{4}{3\pi}\frac{a}{h}z$$

半正圆锥的质心离对称轴的距离为 y_c，

$$y_c=\frac{1}{m}\int_0^h y_c(z)\cdot\rho\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}z\right)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{m}\cdot\frac{4}{3\pi}\rho\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}\right)^3\cdot\frac{1}{4}h^4=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{6}\rho a^3h=\frac{a}{\pi}$$

6.1.6　证明一个均质的三角形薄板的质心与位于该三角形三个顶点有相等质量的质点系统的质心重合.

证明　均质三角形薄板的质心位于三角形的重心，它是三条中线的交点. 这是不难证明的. 用一系列平行于 BC 的直线将三角形分成无数个狭条质元，每个质元的质心均位于中线 AD 上，可见均质三角形的质心必在 AD 上，同样可证质心必在中线 BE、CF（图中未画）上，这就证明了均质三角形的质心位于三角形的重心.

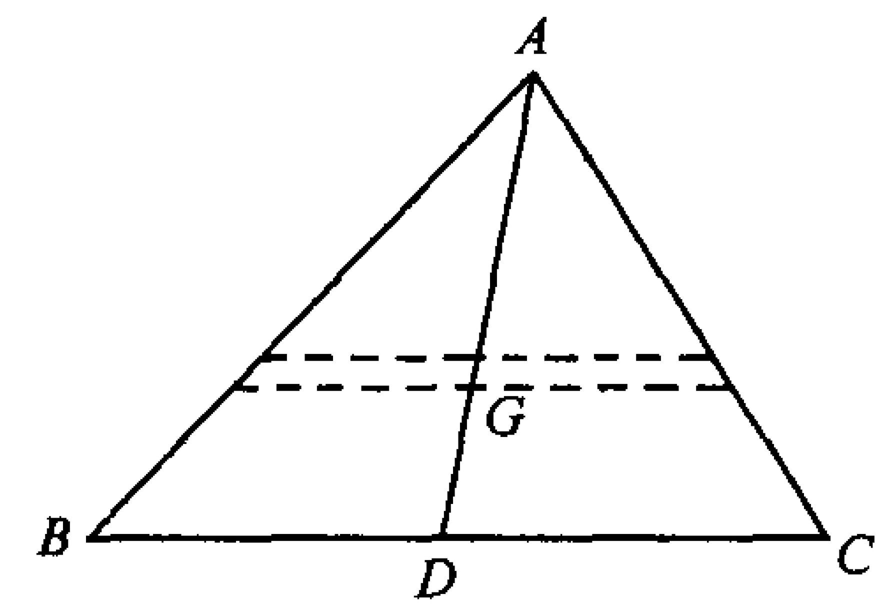


图 6.9

在三角形三个顶点 A、B、C 各有质量为 m 的质点系统的质心求法如下：先求 B、C 处两个质量为 m 的质点系统的质心，显然它位于 BC 的中点 D 处. A、B、C 处各有质量为 m 的质点系统的质心等于 A 处有质量为 m 的质点和在 D 处有质量为 $2m$ 的质点系统的质心，后者的质心显然在 AD 线上的 G 点，$DG=\frac{1}{2}AG$. G 点正是三角形的重心.

这里两个系统的质心重合，并不意味着两个系统动力学等效，下章将涉及两个系统的动力学等效的问题.

6.1.7　修理街道电网用的迁移式转动起重机安装在质量为 1t 的自动车上，质量 200kg 的起重机的摇架 K 装在质量 100kg、杆长 4m 的杆 L 上. 可绕与图面垂直的水平轴 O 转动. 摇架的质心 C 离轴 O 的距离 $OC=3.5$m.

(1) 开始起重机杆 L 处于水平位置，自动车处于静止. 求起重机杆转过 60°时，未上闸

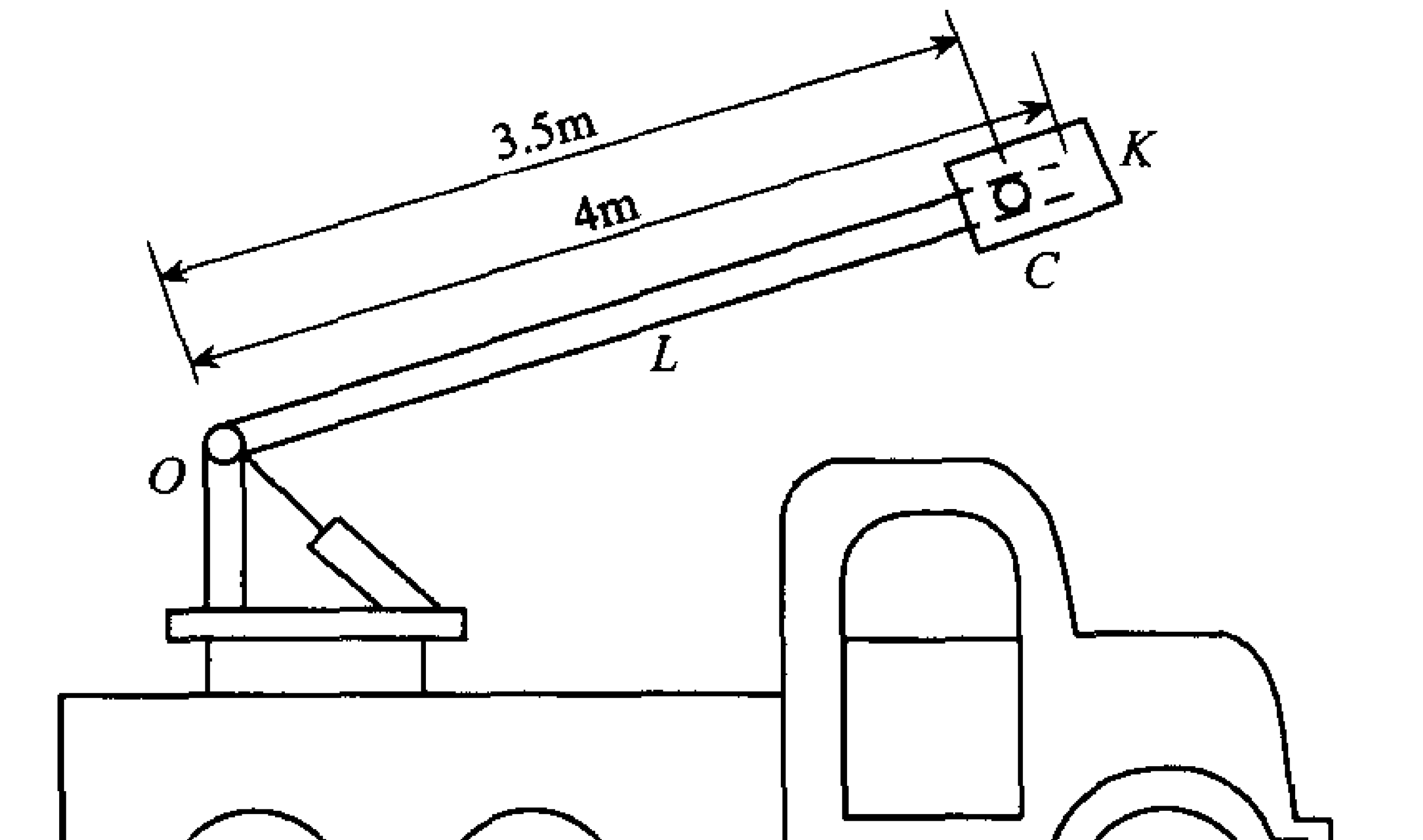


图 6.10

的自动车移动的距离,运动时所受阻力均可不计;

(2) 自动车上了闸,起重机杆从水平位置以恒定的角速度 $\omega=0.02\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$转到 60°期间,靠地面的摩擦力,自动车保持不动.求在此期间摩擦力给予的冲量;

(3) 若摩擦因数 $\mu=0.1$,要在转动过程中保持自动车不动,对转动角速度 ω 有何限制?

解 (1) 因水平方向未受外力作用,由质心运动定理,系统质心的水平位置保持不变.设自动车在此过程中向前移动的距离为 Δs,则

$$1000\Delta s+200[\Delta s-3.5(1-\cos 60°)]+100\left[\Delta s-\frac{1}{2}\cdot 4(1-\cos 60°)\right]=0$$

$$\Delta s=\frac{(200\times 3.5+100\times 2)(1-0.5)}{1000+200+100}=0.346\text{m}$$

(2) 由质点系的动量定理,摩擦力给予系统的冲量 I 等于系统的水平方向动量的增量,设向后方向的冲量为正,

$$I=100\times\frac{4}{2}\times 0.02\sin 60°+200\times 3.5\times 0.02\sin 60°=15.6\text{N}\cdot\text{s}$$

(3) 在转动过程中,系统的动量为

$$\boldsymbol{p}=\left(100\cdot\frac{4}{2}\omega+200\cdot 3.5\omega\right)(\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j})=900\omega(\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j})$$

这里 $\boldsymbol{i}$ 是水平向后方向的单位矢量,$\boldsymbol{j}$ 是竖直向上方向的单位矢量.

由质点系的动量定理,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=f\boldsymbol{i}+[N-(1000+200+100)\times 9.8]\boldsymbol{j}$$

其中 f 是地面施以的摩擦力,N 是地面施以的支持力.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=900\omega^2(\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j})$$

所以

$$f=900\omega^2\cos\theta$$

$$N=(1000+200+100)\times 9.8-900\omega^2\sin\theta$$

在 θ 从 0～60°的区间内,均应有

$$f\leqslant\mu N$$

即

$$900\omega^2\cos\theta\leqslant 0.1(1300\times 9.8-900\omega^2\sin\theta)$$

$$\omega^2\leqslant\frac{0.1\times 1300\times 9.8}{900\cos\theta+90\sin\theta}$$

$$\omega_{\max}^2=\frac{0.1\times 1300\times 9.8}{(900\cos\theta+90\sin\theta)|_{\max}}$$

其中$(900\cos\theta+90\sin\theta)|_{\max}$表示在 $\theta=0$～60°区间内 $900\cos\theta+90\sin\theta$ 的最大值,这个最大值的 θ 由下式确定:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(900\cos\theta+90\sin\theta)=0$$

解出

$$\theta=\arctan 0.1=5.71°$$

$$\omega_{\max}^2=\frac{0.1\times 1300\times 9.8}{900\cos 5.71°+90\sin 5.71°}=1.408(\text{rad/s})^2$$

$$\omega_{\max} = 1.18\text{rad/s}$$

最后一位数字只舍不入，$\sqrt{1.41}=1.187$，不能取 1.19，转动角速度不能超过 $\omega_{\max}$.

6.1.8　一火箭垂直向上发射，当它达到最高点时炸裂成三个等质量的碎片. 观察到其中一块碎片经时间 t_1 垂直地落到地上，而其他两块碎片在炸裂后的 t_2 时刻落到地上，求炸裂时离地面的高度.

解　火箭到达最高点时，速度为零. 炸裂成三块，由质点系动量守恒，总动量为零.

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 = 0$$

三块质量相等，$m_1=m_2=m_3$

所以
$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3=0$$

取 z 轴沿竖直方向，原点在炸裂点，向下为正，在竖直方向动量守恒，

$$v_{1z} + v_{2z} + v_{3z} = 0 \tag{1}$$

设炸裂处离地面的高度为 h，则

$$h = v_{1z}t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 \tag{2}$$

$$h = v_{2z}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 \tag{3}$$

$$h = v_{3z}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 \tag{4}$$

由式(3)、(4)可得
$$v_{2z}=v_{3z}$$

将上式代入式(1)，

$$v_{2z} = -\frac{1}{2}v_{1z} \tag{5}$$

用式(5)，式(3)可改写为

$$h = -\frac{1}{2}v_{1z}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 \tag{6}$$

式(2)$\times t_2$+式(6)$\times 2t_1$，解出

$$h = \frac{gt_1t_2(t_1 + 2t_2)}{2(2t_1 + t_2)}$$

6.1.9　以下各量均用万有引力常数 G、距离 L 和质量表示：

(1) 相距为 L 的某一等质量($M_1=M_2=M$)双星的转动周期；

(2) 相距为 L 的某一不等质量($M_1\neq M_2$)双星的转动周期；

(3) 边长为 L 的某一等质量等边三角形三星的转动周期；

(4) 某一不等质量($M_1\neq M_2\neq M_3$)的等边(边长为 L)三角形三星的转动周期.

解　(1) 双星系统的质心位于两星连线的中点，用质心平动参考系，对一个星写牛顿第二定律的法向方程：

$$\frac{Mv^2}{\frac{1}{2}L} = G\frac{M^2}{L^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{2L}$$

$$T=\frac{2\pi\cdot\frac{1}{2}L}{v}=\pi L\sqrt{\frac{2L}{GM}}$$

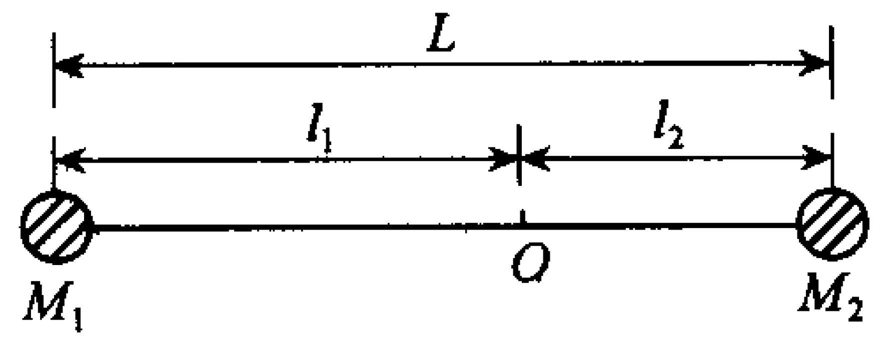


图 6.11

(2) 双星系统的质心距两星的距离 l_1、l_2 如图 6.11 所示，

$$l_1=\frac{M_2}{M_1+M_2}L,\quad l_2=\frac{M_1}{M_1+M_2}L$$

用质心平动参考系，

$$\frac{M_1v_1^2}{l_1}=G\frac{M_1M_2}{L^2}$$

$$v_1^2=\frac{GM_2}{L^2}l_1=\frac{GM_2}{L^2}\cdot\frac{M_2}{M_1+M_2}L=\frac{GM_2^2}{(M_1+M_2)L}$$

$$T=\frac{2\pi l_1}{v_1}=2\pi\frac{M_2}{M_1+M_2}L\cdot\sqrt{\frac{(M_1+M_2)L}{GM_2^2}}=2\pi L\sqrt{\frac{L}{G(M_1+M_2)}}$$

(3) 三星系统的质心与每个星的距离为

$$l=\frac{2}{3}\sqrt{L^2-\left(\frac{1}{2}L\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}L$$

每个星受到另两个星的作用力为

$$f=2G\frac{M^2}{L^2}\cos30°=\sqrt{3}\frac{GM^2}{L^2}$$

$$\frac{Mv^2}{l}=f=\sqrt{3}\frac{GM^2}{L^2}$$

$$v^2=\sqrt{3}\frac{GM}{L^2}l=\sqrt{3}\frac{GM}{L^2}\frac{\sqrt{3}}{3}L=\frac{GM}{L}$$

$$T=\frac{2\pi l}{v}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi L\sqrt{\frac{L}{GM}}$$

(4) 取图 6.12 所示的 x、y 坐标，三个星的坐标分别为 $M_1(0,0)$，$M_2(L,0)$，$M_3\left(\frac{L}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)$.

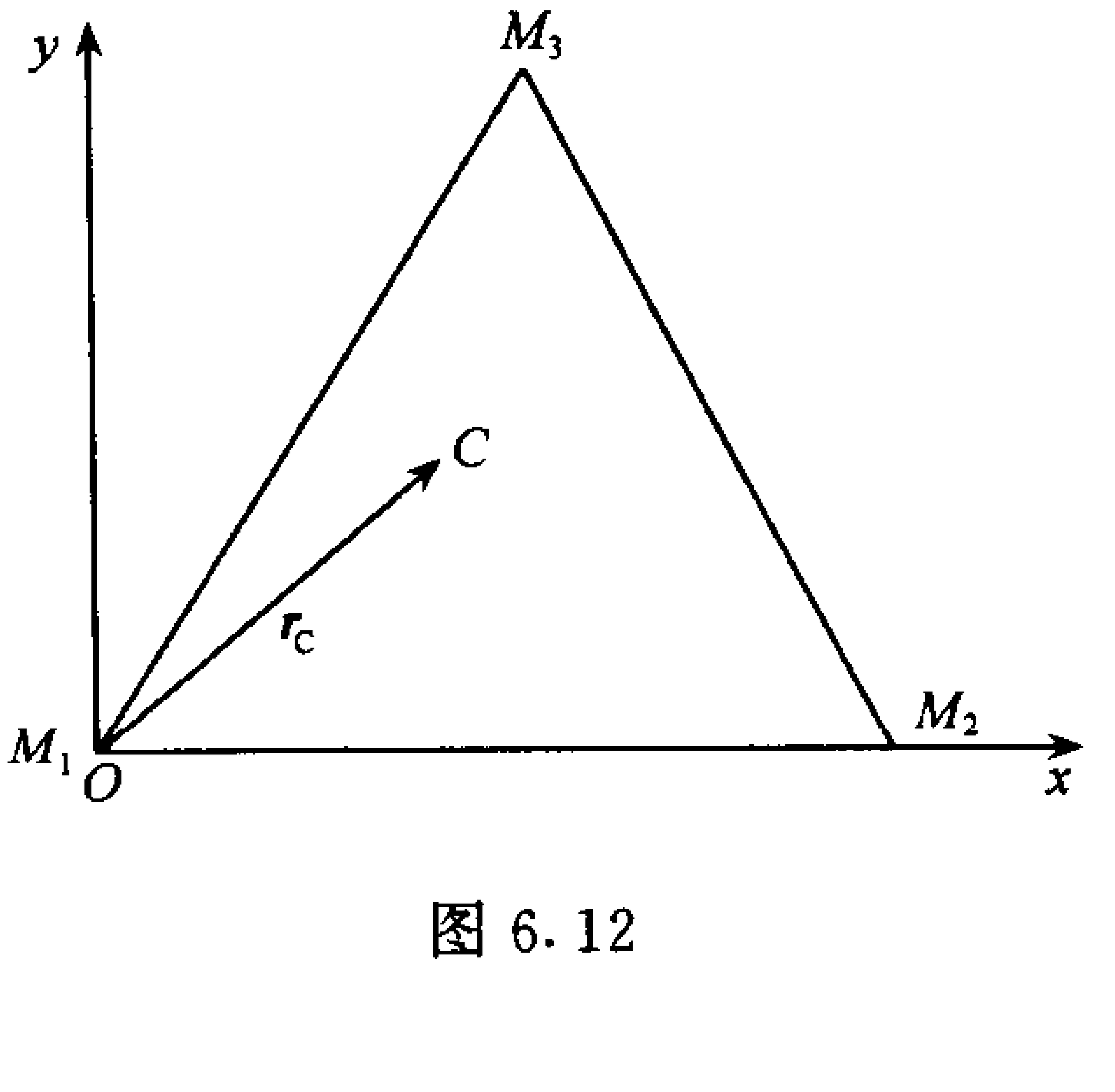


图 6.12

由质心的定义,质心 C 点的位矢

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{3}M_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{3}M_i}=\frac{1}{M_1+M_2+M_3}\left(M_2L\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}M_3L\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}M_3L\boldsymbol{j}\right)$$

$$=\frac{L}{M_1+M_2+M_3}\left[\left(M_2+\frac{1}{2}M_3\right)\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}M_3\boldsymbol{j}\right]$$

设 $\boldsymbol{f}_{12}$、$\boldsymbol{f}_{13}$分别为 M_2 星、M_3 星对 M_1 星的作用力,

$$\boldsymbol{f}_{12}=G\frac{M_1M_2}{L^2}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{f}_{13}=G\frac{M_1M_3}{L^2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

其合力为

$$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{f}_{12}+\boldsymbol{f}_{13}=\frac{GM_1}{L^2}\left[\left(M_2+\frac{1}{2}M_3\right)\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}M_3\boldsymbol{j}\right]$$

比较 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_C$ 可知,$\boldsymbol{f}_1$ 作用线通过质心. 同样可证作用于 M_2 星的合力 $\boldsymbol{f}_2$、作用于 M_3 星的合力 $\boldsymbol{f}_3$ 的作用线均通过质心 C. 三个星保持等距 L 围绕质心 C 做恒定角速度的转动.

用质心平动参考系,

$$\frac{M_1v_1^2}{r_C}=f_1 \tag{1}$$

$$r_C=|\boldsymbol{r}_C|=\frac{L}{M_1+M_2+M_3}\sqrt{\left(M_2+\frac{1}{2}M_3\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M_3\right)^2} \tag{2}$$

$$f_1=|\boldsymbol{f}_1|=\frac{GM_1}{L^2}\sqrt{\left(M_2+\frac{1}{2}M_3\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M_3\right)^2} \tag{3}$$

将式(2)、(3)代入式(1),解出 v_1^2 得

$$v_1^2=\frac{1}{M_1}r_Cf_1=\frac{G}{(M_1+M_2+M_3)L}\left[\left(M_2+\frac{1}{2}M_3\right)^2+\frac{3}{4}M_3^2\right]$$

$$T=\frac{2\pi r_C}{v_1}=\frac{2\pi L}{M_1+M_2+M_3}\sqrt{\left(M_2+\frac{1}{2}M_3\right)^2+\frac{3}{4}M_3^2}$$

$$\times\sqrt{\frac{(M_1+M_2+M_3)L}{G}\frac{1}{\left[\left(M_2+\frac{1}{2}M_3\right)^2+\frac{3}{4}M_3^2\right]}}$$

$$=2\pi L\sqrt{\frac{L}{G(M_1+M_2+M_3)}}$$

6.1.10 一质量为 M 的有轨平板车能无摩擦地在一条水平直轨道上运动. 初始时刻,N 个质量均为 m 的人站在静止的平板车上.

(1) 这 N 个人一起跑向车的一头,并且同时跳下车,在跳下车前的瞬时,他们相对于车子的速度为 v_r,求这 N 个人跳下后平板车的速度;

(2) 如果这 N 个人是一个接一个地跑离车子(每次仅有一个在跑). 每个人在跳下车

前相对于车子的速度都为 v_r. 求这车子的最终速度；

(3) 在上述两种情况下，哪种情况下车子达到的速度大？

解　(1) 取地面为参考系，设最终平板车的速度为 v，沿人跑的反方向为正，由动量守恒，

$$Mv + Nm(v - v_r) = 0$$

$$v = \frac{Nm}{M + Nm} v_r$$

(2) 设 v_n 表示车子上有 n 个人时的车速，则再跳下一个人时的车速为 v_{n-1}，在此过程中系统（包括车子和这 n 个人）动量守恒，

$$Mv_{n-1} + (n-1)mv_{n-1} + m(v_{n-1} - v_r) = Mv_n + nmv_n$$

$$v_{n-1} = v_n + \frac{mv_r}{M + nm}$$

考虑到最后的车速为 v_0，最初的车速为 $v_N=0$，

$$v_0 = \sum_{n=1}^{N} \frac{mv_r}{M + nm}$$

(3) 因为 $M+nm<M+Nm(n<N)$，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{mv_r}{M + nm} > \frac{Nmv_r}{M + Nm}$$

可见，第二种情况车子达到的速度较大.

6.1.11　证明质量为 M 的飞机在水平航线上飞行时落下一个质量为 m 的炸弹时，飞机将有一个向上的加速度 mg/M.

证明　设飞机和炸弹系统受到向上的力为 N，在水平航线上飞行时.

$$N - (m + M)g = 0$$

$$N = (m + M)g$$

落炸弹时，飞机并未给予炸弹作用力（炸弹落下时的初速度沿水平方向），设落下炸弹时飞机有向上方向的加速度 a，则

$$Ma = N - Mg = (m + M)g - Mg = mg,$$

$$a = mg/M$$

6.1.12　水从 5m 高处以每分钟 60kg 的速率注入静放在地上的桶中，桶的质量为 12kg. 求水注入一分钟时桶受到地面的作用力.

解　方法一：分别考虑不同的系统，用动量定理.

设在 $t \sim t+\mathrm{d}t$ 时间内，已注入桶内的水对在此期间注入的水的作用力为 F（向上为正），对在此期间注入的水用动量定理，

$$(F - g\mathrm{d}m)\mathrm{d}t = \mathrm{d}m[0 - (-\sqrt{2gh})]$$

略去二级小量 $g\mathrm{d}m\mathrm{d}t$，得

$$F = \sqrt{2gh}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

再对 t 时刻静放在地面上的包括在此前已注入的水的水桶用牛顿运动第二定律，它受到重力、地面的作用力 N（规定向上为正）和将注入的水的作用力 F（它是上面求的 $\boldsymbol{F}$ 的反作用力，向下），加速度为零，

$$F+\left(M+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot t\right)g-N=0$$

$$N=F+Mg+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}gt=(\sqrt{2gh}+gt)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+Mg$$

$t=1\mathrm{min}$ 时，

$$N=(\sqrt{2\times 9.8\times 5}+9.8\times 60)\times\frac{60}{60}+12\times 9.8=715\mathrm{N}$$

方法二：作为变质量质点的运动问题.

取 t 时刻的水桶和已注入的水为本体，公式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+(v-u)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=F_m^{(e)}+F_{\mathrm{d}m}^{(e)}$$

中

$$m=M+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot t,\quad v=0,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$$

$$u=\sqrt{2gh}\quad（规定向下为正）$$

$$F_m^{(e)}=\left(M+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}t\right)g-N$$

$$F_{\mathrm{d}m}^{(e)}=0,\quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=1\mathrm{kg/s},\quad M=12\mathrm{kg}$$

$$t=60\mathrm{s}$$

可得

$$N=\left(M+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\times 60\right)g+\sqrt{2gh}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=715\mathrm{N}$$

6.1.13　质量为 m_A 与 m_B 的两个小球 A 和 B，用不可伸长的轻绳相连，静止在水平面上. 绳子拉紧时，给 B 球一个冲量 $\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 的方向与 AB 成 α 角，$\alpha<\frac{\pi}{2}$，如图 6.13 所示. 已知冲击后 B 的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 之大小，求 $\boldsymbol{v}_B$ 的方向和冲量 $\boldsymbol{I}$ 的大小.



图 6.13

解　设 $\boldsymbol{v}_B$ 的方向与 AB 线的夹角为 β，由动量守恒，

$$m_Av_A+m_Bv_B\cos\beta=I\cos\alpha \tag{1}$$

$$m_Bv_B\sin\beta=I\sin\alpha \tag{2}$$

因绳子不可伸长，

$$v_A=v_B\cos\beta \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)，再用式(2)消去 v_B，得

$$\frac{m_B}{m_A+m_B}\tan\beta=\tan\alpha$$

$$\beta=\arctan\left(\frac{m_A+m_B}{m_B}\tan\alpha\right)$$

$$\cos\beta=1/\sqrt{1+\tan^2\beta}=\frac{m_B}{\sqrt{m_B^2+(m_A+m_B)^2\tan^2\alpha}}$$

$$\sin\beta=\cos\beta\cdot\tan\beta=\frac{(m_A+m_B)\tan\alpha}{\sqrt{m_B^2+(m_A+m_B)^2\tan^2\alpha}}$$

$$I=\frac{1}{\sin\alpha}m_Bv_B\sin\beta=\frac{m_B(m_A+m_B)v_B}{\cos\alpha\sqrt{m_B^2+(m_A+m_B)^2\tan^2\alpha}}$$

$$=\frac{m_B(m_A+m_B)v_B}{\sqrt{(m_A+m_B)^2\sin^2\alpha+m_B^2\cos^2\alpha}}$$

6.1.14　扫雪机在水平路上以速度 15km/h 行驶，每分钟把质量为 30t 的雪抛到路旁，雪相对于雪铲的速度为 12m/s，并沿 45°角方向. 求路面与轮胎间的横向力，并求驱动扫雪机工件所需之牵引力.

解　因雪铲随扫雪机做匀速运动，用雪铲参考系，它是惯性参考系，以扫雪机和被铲的雪为系统. 设路面给予轮胎的横向力为 F. 在 $t\sim t+\mathrm{d}t$ 时间内用动量定理，

$$(30\times10^3/60)\mathrm{d}t\times12\sin45°=F\mathrm{d}t$$

$$F=500\times12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4.24\times10^3(\mathrm{N})$$

以静系为参考系，扫雪机工件和被铲的雪为系统，设驱动扫雪机工件所需之牵引力为 f. 在 $t\sim t+\mathrm{d}t$ 时间内沿扫雪机运动方向用动量定理，

$$Mv+\mathrm{d}m\cdot v-Mv=f\mathrm{d}t$$

式中 M 是扫雪机工件的质量，$\mathrm{d}m$ 是在此期间被扫的雪的质量，v 是扫雪机的速度，

$$f=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v=\frac{30\times10^3}{60}\times\frac{15\times10^3}{3600}=2.08\times10^3(\mathrm{N})$$

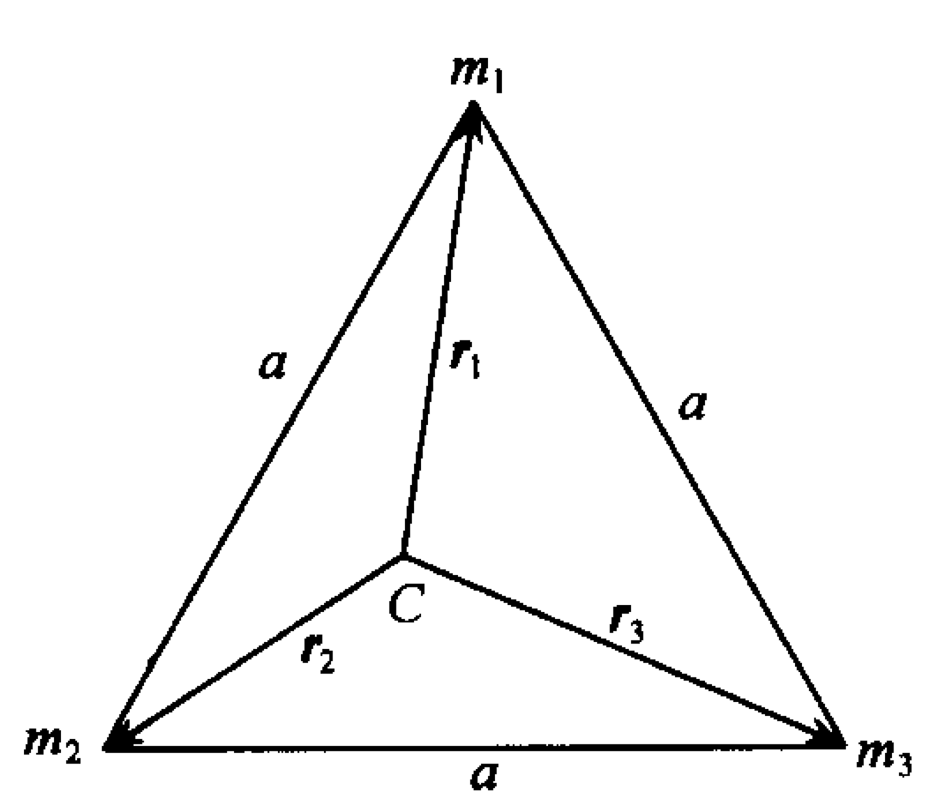


图 6.14

6.1.15　有 m_1、m_2 和 m_3 三质量受到它们的相互间万有引力的作用，如果最初这些质量位于边长为 a 的等边三角形的顶点，只要这些质量的初速是适当选择的，它们的位置就会连续确定一个边长为 a 以等角速 ω 转动的等边三角形. 求 ω 与 m_1、m_2、m_3、a 以及引力常数 G 的关系.

解　此题与 6.1.9(4)题相同，那里讲的三星系统自然是满足保持等边三角形且边长不变的条件的. 解 6.1.9(4)题用了坐标表示位矢和力. 这里不取坐标.

取质心平动参考系，各质量对质心的位矢如图 6.14 所示，

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1=\frac{Gm_1m_2}{a^2}\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{a}+\frac{Gm_1m_3}{a^2}\frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1}{a}$$

$$=\frac{Gm_1m_2}{a^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+\frac{Gm_1m_3}{a^3}(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\frac{Gm_1^2}{a^3}\boldsymbol{r}_1-\frac{Gm_1^2}{a^3}\boldsymbol{r}_1$$

$$=\frac{Gm_1}{a^3}(m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3)-\frac{Gm_1}{a^3}(m_1+m_2+m_3)\boldsymbol{r}_1$$

因为

$$m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3=(m_1+m_2+m_3)\boldsymbol{r}_c=0$$

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\frac{Gm_1}{a^3}(m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{r}_1$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}\boldsymbol{r}_1$$

质量为 m_1 的质点受到的合力是有心力，力始终指向质心. 这是在三个质点位于一等边三角形的三个顶点的情况下得出的结论，只要三个质点的初速合适，它们就可以做以质心为圆心保持原等边三角形的圆周运动、设圆周运动的角速度为 ω，

$$m_1\omega^2 r_1 = \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)m_1}{a^3}r_1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}}$$

所谓三个质点的初速度合适，是指在质心平动参考系中三个质点的速率分别为 ωr_1、ωr_2 和 ωr_3，方向均与它们与质心的连线垂直，均指向顺时针方向或均指向逆时针方向，对系统质心在静参考系中的速度没有任何要求.

6.1.16　一个仅由自身引力保持在一起的小天体. 如果它非常靠近大质量体的话，可以被这个大天体引起的潮汐力所分裂. 求一个直径为 1km、密度为 $\rho = 2\text{g/cm}^3$ 的小天体围绕地球做圆周运动而不被拉散的圆周极限半径. 已知地球质量 $M = 5.97\times10^{27}\text{g}$.

解　把随地球中心平动的参考系视为惯性系，小天体围绕地球中心做圆周运动. 设圆周运动的半径为 l 时，刚好小天体的各处质元不被地球引力拉散，因此 l 就是所求的极限半径.

如图 6.15 所示，O、C 分别是地球和小天体的中心. 考虑 OC 连线上离 C 点 x 处一质元，质量为 Δm.

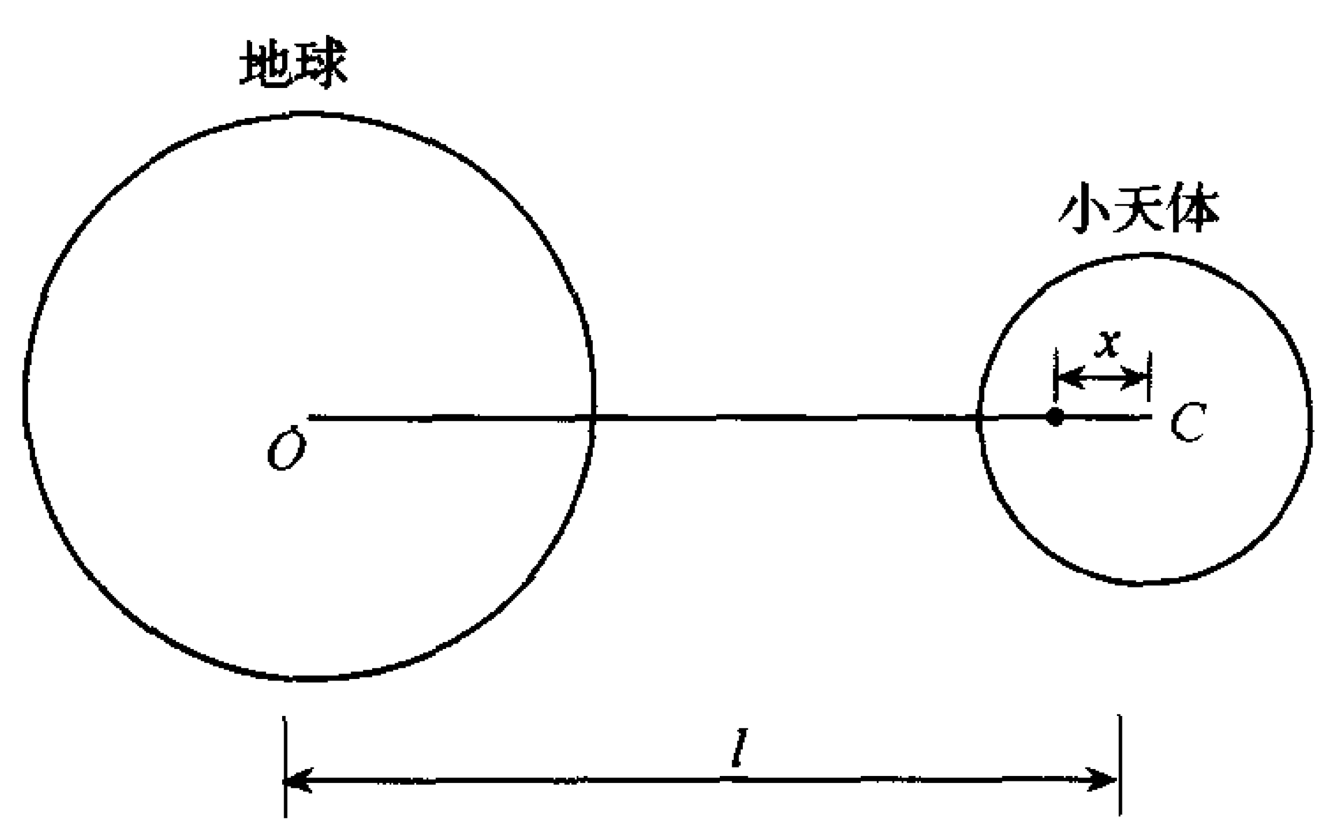


图 6.15

由刚好不被拉散的条件，地球对它的向左的引力与小天体对它向右的引力的合力应提供它围绕 O 做圆周运动所需的向心力.

$$\Delta m(l - x)\omega^2 = \frac{GM\Delta m}{(l - x)^2} - \frac{G\Delta m}{x^2}\cdot\frac{4}{3}\pi x^3\rho \tag{1}$$

写小天体对质元的作用力时用了关于万有引力的“高斯定理”.

ω 也是小天体绕 O 点做圆周运动的角速度，设小天体质量为 m.

$$ml\omega^2 = \frac{GMm}{l^2}$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{l^3} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，

$$l\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{GM}{l^3} = \frac{GM}{l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{-2} - \frac{4}{3}\pi\rho Gx$$

因为
$$x \ll l,\quad \left(1-\frac{x}{l}\right)^{-2} \approx 1+\frac{2x}{l}$$

所以
$$\frac{M}{l^2} - \frac{M}{l^3}x = \frac{M}{l^2} + \frac{2M}{l^3}x - \frac{4}{3}\pi\rho x$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho x = \frac{3M}{l^3}x$$

$$l = \left(\frac{9M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} = \left(\frac{9\times 5.97\times 10^{27}}{4\pi\times 2}\right)^{1/3}$$

$$= 1.29\times 10^9\text{cm} = 1.29\times 10^4\text{km}$$

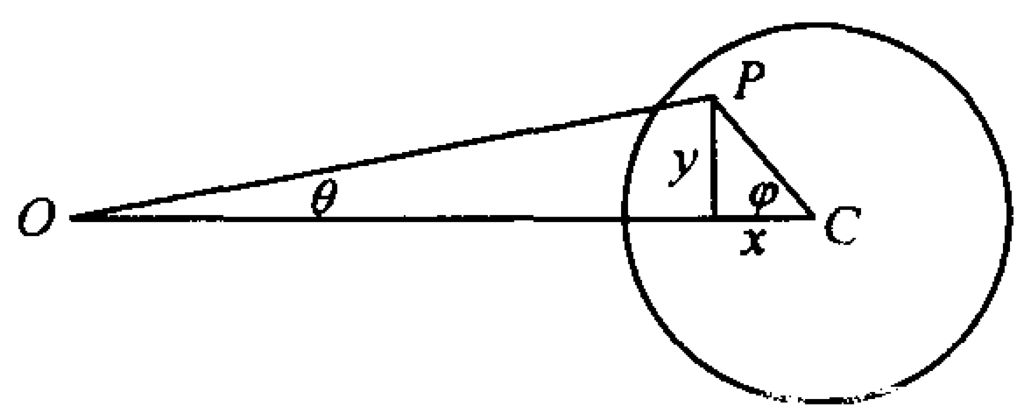


图 6.16

当 x 取负值时，上述 l 同样适用，说明在小天体上 OC 连线的外侧的质元也刚好不被拉散.

再考虑不在 OC 及其延长线上的质元，考虑图 6.16 中的 P 点的质元 Δm. 设在平行于 OC 方向不受小天体互相挤压的力. 在这个方向上写牛顿运动第二定律的分量方程，

$$\Delta m\sqrt{(l-x)^2+y^2}\,\omega^2\cos\theta$$

$$= \frac{GM\Delta m}{(l-x)^2+y^2}\cos\theta - \frac{4}{3}\pi(\sqrt{x^2+y^2})^3\rho G\,\frac{\Delta m}{x^2+y^2}\cos\varphi$$

其中
$$\cos\theta = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}},\quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

代入 $\omega^2 = \dfrac{GM}{l^3}$，可得

$$\frac{GM}{l^3}(l-x) = \frac{GM(l-x)}{[(l-x)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{4}{3}\pi\rho Gx$$

$$\frac{M}{l^2} - \frac{M}{l^3}x = \frac{M}{l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{y^2}{l^2}\right]^{-3/2} - \frac{4}{3}\pi\rho x$$

略去二级及二级以上小量

$$\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)^2+\frac{y^2}{l^2}\right]^{-3/2} = \left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1-\frac{2x}{l}+\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{-3/2}$$

$$\approx \left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1+\frac{3x}{l}\right) \approx 1+\frac{2x}{l}$$

$$\frac{M}{l^2} - \frac{M}{l^3}x = \frac{M}{l^2}\left(1+\frac{2x}{l}\right) - \frac{4}{3}\pi\rho x$$

$$\frac{3M}{l^3} = \frac{4}{3}\pi\rho,\quad l = \left(\frac{9M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

得到与前面同样的结论，说明不在 OC 及其延长线上的小天体质元，在平行于 OC 的方向无除万有引力以外的力.

比较质元的质量乘加速度在垂直于 OC 方向的分量，与地球、小天体对它的万有引力的合力在这方向的分量可见，OC 两边的质元除受到万有引力外还受到小天体周围质元给予的垂直于 OC 背向 OC 线的力，换句话说，P 点质元对周围质元有向 OC 方向挤压的力，存在这个方向的力，小天体不会散开.

6.2　质点系的角动量定理和角动量守恒定律

6.2.1　半径为 R、质量为 M 的水平均质圆盘可绕通过其中心的铅垂轴无摩擦地转动.

(1) 若圆盘绕该轴以 Ω 的角速度转动，求圆盘对该轴的角动量；

(2) 质量为 m 的甲虫按 $s=\frac{1}{2}at^2$(a 为常量)的规律沿圆盘的边缘爬行，开始时两者都是静止的，求甲虫爬行后圆盘的角速度；

(3) 质量为 m 的甲虫从边缘上一点突然以对圆盘恒定的角速度 ω 作半径为 $\frac{1}{2}R$ 的圆周运动，开始两者都是静止的. 求甲虫突然爬行后圆盘的角速度.

解　(1) 取 $r\sim r+\mathrm{d}r$ 的圆环为质元，对通过圆心的垂直轴的角动量为

$$\mathrm{d}J=\frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot r\Omega\cdot r=\frac{2M\Omega}{R^2}r^3\mathrm{d}r$$

$$J=\int\mathrm{d}J=\int_0^R\frac{2M\Omega}{R^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}MR^2\Omega$$

(2) 设 Ω 是圆盘的角速度，规定与甲虫爬行方向相反的转动角速度为正. 由角动量守恒，因开始甲虫、圆盘都是静止的，圆盘、甲虫的总角动量为零，

$$\frac{1}{2}MR^2\Omega+m\left(\Omega R-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)R=0$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\Omega=matR$$

$$\Omega=\frac{2mat}{(M+2m)R}$$

(3) 当甲虫相对于圆盘转过 φ 角时，设此时圆盘的角速度为 Ω(其正负号规定同上问)，甲虫的速度为相对速度 $\frac{1}{2}R\omega$(方向垂直于 $O'A$)和牵连速度 $v_e=\Omega R\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$(方向垂直于 OA)的矢量和(见图 6.17).

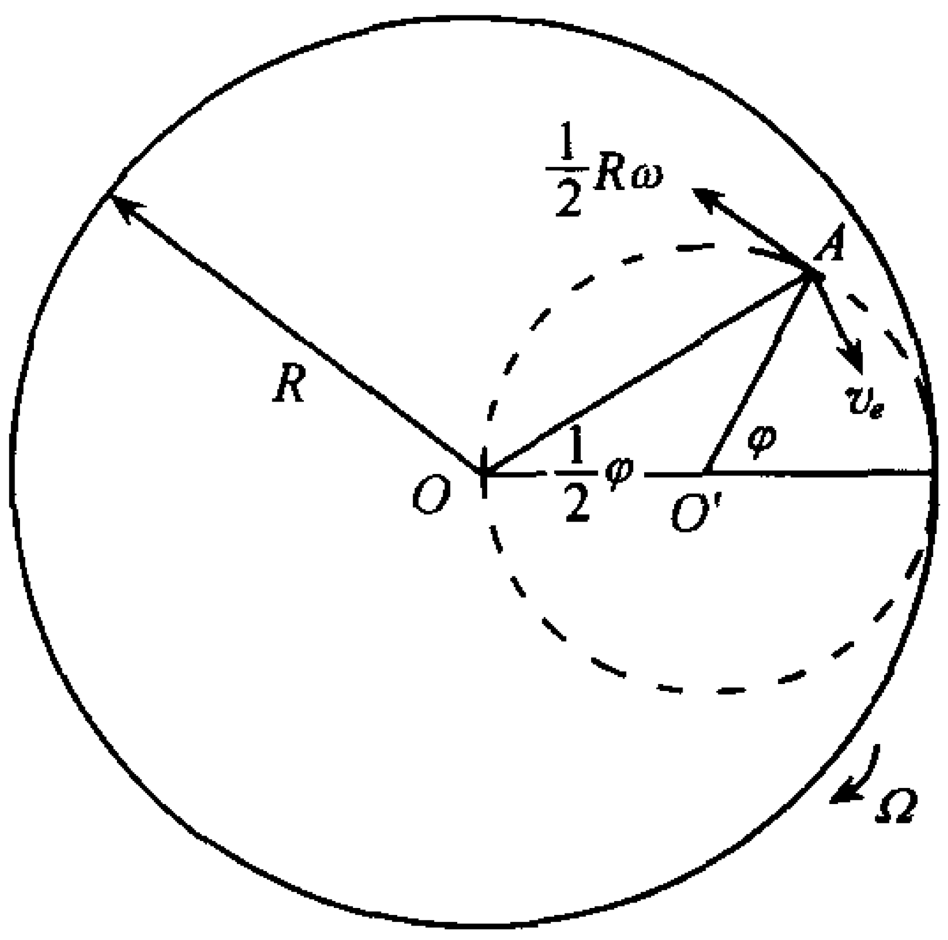


图 6.17

此时甲虫对 O 点的角动量为

$$m\left[R\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right]^2\Omega-mR\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\cdot\frac{1}{2}R\omega\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$$

(规定垂直纸面向下的角动量为正).

圆盘、甲虫系统对 O 点的角动量守恒，

$$\frac{1}{2}MR^2\Omega+m\left[R\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right]^2\Omega-m\cdot\frac{1}{2}\omega\left[R\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right]^2=0$$

解出 Ω,并代入 $\varphi=\omega t$,得

$$\Omega=\frac{m\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t\right)}{M+2m\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t\right)}\omega$$

6.2.2 一个半径为 a 的均质圆盘可在竖直平面内围绕通过它的中心 C 的水平轴自由转动,质量为圆盘 $\frac{1}{10}$ 的昆虫 A 在盘的最低点,整个系统处于静止状态.突然,昆虫以相对于圆盘不变的速率 v 开始沿边缘爬行,证明圆盘的初角速度为 $v/6a$;如用 θ 表示 CA 线与竖直向下方向间的夹角,证明微分方程 $6a\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$ 成立,证明圆盘对昆虫的作用力在垂直于半径方向的分量为 $\frac{1}{12}mg\sin\theta$,其中 m 是圆盘的质量.

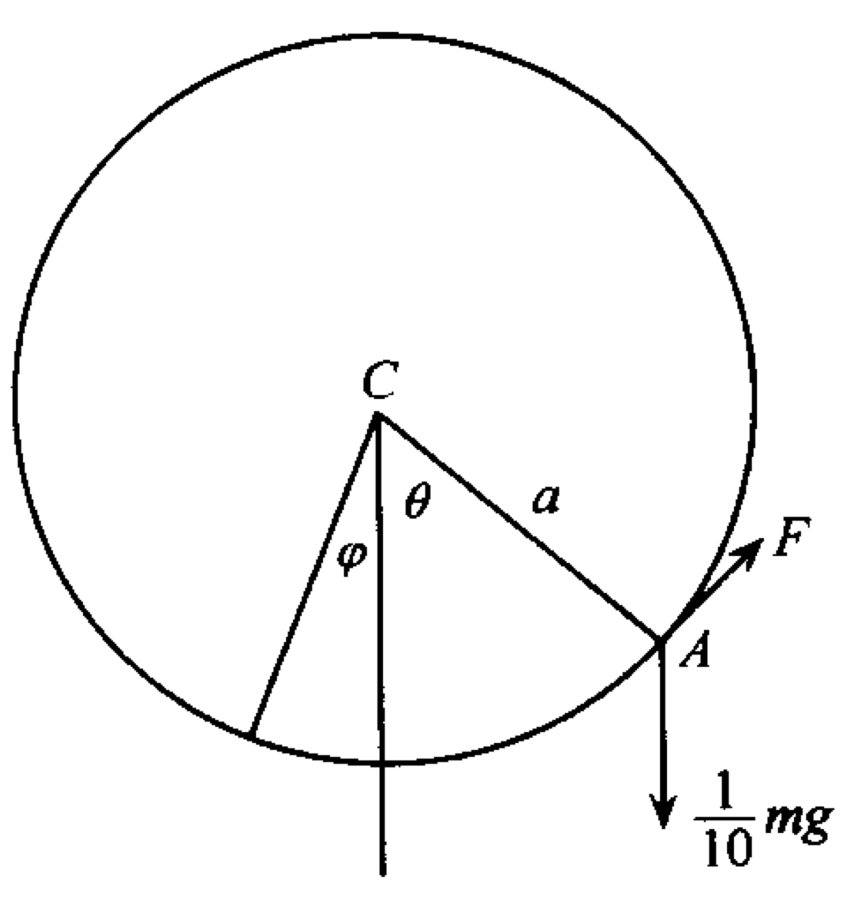


图 6.18

证明 设圆盘在昆虫突然运动时的初角速度为 Ω_0,即使昆虫不在圆盘的最低点,都可用圆盘昆虫系统的对水平转轴的角动量守恒,

$$\frac{1}{10}m(v-\Omega_0a)a-\frac{1}{2}ma^2\Omega_0=0$$

所以

$$\Omega_0=\frac{v}{6a}$$

当昆虫 A 运动到图 6.18 所示位置时,CA 线与竖直向下方向夹角为 θ,圆盘向相反方向转过 φ 角.$\dot{\theta}$ 和 $\dot{\varphi}$ 都不是常量,但昆虫相对于圆盘的速率 v 不变,

$$a(\dot{\varphi}+\dot{\theta})=v \tag{1}$$

规定垂直纸面向下的角动量为正,圆盘、昆虫系统对转轴的角动量为

$$J=\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}+\frac{1}{10}ma^2\left(\dot{\varphi}-\frac{v}{a}\right)=\frac{3}{5}ma^2\dot{\varphi}-\frac{1}{10}mav$$

用式(1),可改写为

$$J=\frac{1}{2}mav-\frac{3}{5}ma^2\dot{\theta}$$

用对转轴的角动量定理,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mav-\frac{3}{5}ma^2\dot{\theta}\right)=\frac{1}{10}mga\sin\theta$$

可得

$$6a\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

昆虫对转轴的角动量也可直接写为

$$-\frac{1}{10}ma^2\dot{\theta}$$

对昆虫用对转轴的角动量定理,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{10}ma^2\dot{\theta}\right)=\frac{1}{10}mga\sin\theta-Fa$$

其中 F 就是所要求的圆盘对昆虫的作用力在垂直于半径方向的分量：

$$F=\frac{1}{10}ma\ddot{\theta}+\frac{1}{10}mg\sin\theta=\frac{1}{12}mg\sin\theta$$

(这里用了前已证明的 $6a\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$).

6.2.3　质量为 M、半径为 a 的均质圆柱可围绕它在水平方向固定的对称轴自由转动，质量为 m、长度 $b=2\pi an$(n 为整数)的均质链条一端连在圆柱上，然后绕圆柱 n 圈，让非常小的一段链条自由挂着，整个系统由静止释放. 求圆柱的角速度与圆柱角位移 θ 的函数关系.

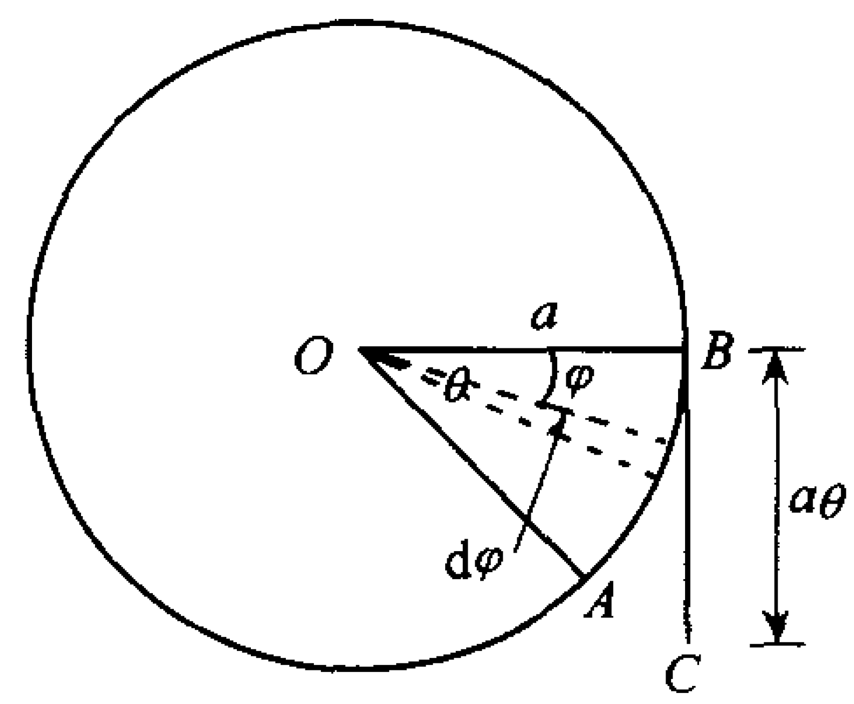


图 6.19

解　为用角动量定理，先写出在圆柱角位移 θ 时系统对转轴的角动量. 原处于 B 点位置的圆柱上的点现处于 A 点，原处于 B 点位置的链条自由端现处于 C 点，原处于 $\overset{\frown}{BA}$ 弧的一段链条没有在角位移中得到补充，总的结果是这一段等长的链条自由挂着，$BC=a\theta$. 不论绕在圆柱上的链条部分还是自由挂着的链条部分都有相同速率 $a\dot{\theta}$，因此链条对轴的角动量为 $ma^2\dot{\theta}$，

所以
$$J=\frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}+ma^2\dot{\theta}=\left(\frac{1}{2}M+m\right)a^2\dot{\theta}$$

再计算系统受到的对转轴的外力矩，对圆柱的重力矩为零，对链条的重力矩等于对 BC 段链条的重力矩减去对 $\overset{\frown}{AB}$ 段链条的重力矩.

对 BC 段链条的重力矩为

$$M_{BC}=\frac{m}{2\pi an}\cdot a\theta\cdot ga=\frac{mga}{2\pi n}\theta$$

对 $\overset{\frown}{AB}$ 段链条的重力矩为

$$M_{\overset{\frown}{AB}}=\int_0^{\theta}\frac{m}{2\pi an}aga\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{mga}{2\pi n}\sin\theta$$

由角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=M=M_{BC}-M_{\overset{\frown}{AB}}$$

$$\left(\frac{1}{2}M+m\right)a^2\ddot{\theta}=\frac{mga}{2\pi n}\theta-\frac{mga}{2\pi n}\sin\theta$$

因为　$\ddot{\theta}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}$，上式可改写为

$$\left(\frac{1}{2}M+m\right)a\dot{\theta}\,\mathrm{d}\dot{\theta}=\frac{mg}{2\pi n}(\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

两边积分，$\dot{\theta}$ 从 $0\sim\omega$，θ 从 $0\sim\theta$，

$$\frac{1}{4}(M+2m)a\omega^2=\frac{mg}{2\pi n}\left(\frac{1}{2}\theta^2+\cos\theta-1\right)$$

$$\omega^2 = \frac{mg(\theta^2 + 2\cos\theta - 2)}{\pi n(M + 2m)a}$$

$$\omega = \left[\frac{mg(\theta^2 + 2\cos\theta - 2)}{\pi n(M + 2m)a}\right]^{1/2}$$

此题也可用动能定理求解,读者可自己去完成.

6.2.4 质量均为 m 的两个质点用一根长度为 a 的刚性的轻杆联结,开始系统静止在一光滑水平面上.在 $t=0$ 时,一力 $\boldsymbol{F}$ 作用于其中一个质点,大小保持不变,方向保持与杆垂直,用角动量定理和动能定理两种方法求杆与开始方向夹角为 φ 时的角速度.

解 在质心平动参考系中用对质心的角动量定理,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2m\left(\frac{1}{2}a\right)^2\omega\right] = F \cdot \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{2}ma^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}Fa$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{ma}, \quad \omega = \frac{Ft}{ma}$$

$$\int_0^\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{F}{ma}\int_0^t t\mathrm{d}t, \quad \varphi = \frac{F}{2ma}t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2ma\varphi}{F}}$$

$$\omega = \frac{F}{ma}\sqrt{\frac{2ma\varphi}{F}} = \sqrt{\frac{2F\varphi}{ma}}$$

在质心平动参考系中用动能定理,

$$2 \times \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}a\omega\right)^2 = F \cdot \frac{1}{2}a\varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2F\varphi}{ma}}$$

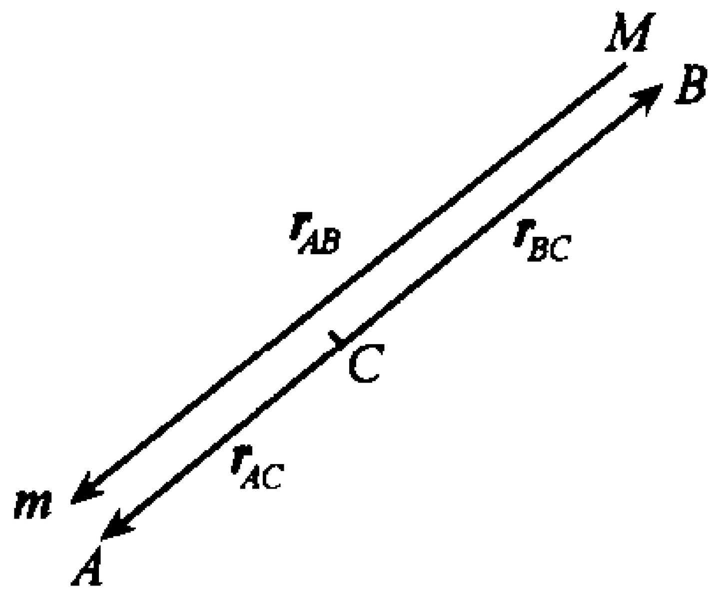


图 6.20

6.2.5 质量分别为 m 和 M 的质点 A 和 B,如质点 A 相对于质点 B 的角动量为 $\boldsymbol{J}_{AB}$,证明:在质心平动参考系中,系统相对于质心的角动量为 $\dfrac{M}{M+m}\boldsymbol{J}_{AB}$.

证明 $\boldsymbol{J}_{AB}=\boldsymbol{r}_{AB}\times m\boldsymbol{v}_{AB}$,其中 $\boldsymbol{v}_{AB}$ 是 A 相对于 B 的速度.

图 6.20 中 $\boldsymbol{r}_{AB}$ 表示质点 A 对 B 点的位矢,$\boldsymbol{r}_{AC}$、$\boldsymbol{r}_{BC}$ 分别表示质点 A、质点 B 对 C 点的位矢,C 为质心.

$$\boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_{AC} + (-\boldsymbol{r}_{BC}) = \boldsymbol{r}_{AC} - \boldsymbol{r}_{BC} \tag{1}$$

上式两边对 t 求导,

$$\boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{v}_{AC} - \boldsymbol{v}_{BC}$$

由质心的定义,

$$m\boldsymbol{r}_{AC} + M\boldsymbol{r}_{BC} = (m + M)\boldsymbol{r}_{CC} = 0 \tag{2}$$

上式 $\boldsymbol{r}_{CC}$ 表示在固连于质心平动参考系的以质心为原点坐标系中质心的位矢,$\boldsymbol{r}_{CC}=0$.

由式(1)、(2)两式可得

$$\boldsymbol{r}_{AC}=\frac{M}{m+M}\boldsymbol{r}_{AB},\quad \boldsymbol{r}_{BC}=-\frac{m}{m+M}\boldsymbol{r}_{AB}$$

在质心平动参考系中，系统对质心的角动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_C&=\boldsymbol{r}_{AC}\times m\boldsymbol{v}_{AC}+\boldsymbol{r}_{BC}\times M\boldsymbol{v}_{BC}\\&=\frac{M}{m+M}\boldsymbol{r}_{AB}\times m\boldsymbol{v}_{AC}-\frac{m}{m+M}\boldsymbol{r}_{AB}\times M\boldsymbol{v}_{BC}\\&=\boldsymbol{r}_{AB}\times\frac{mM}{m+M}(\boldsymbol{v}_{AC}-\boldsymbol{v}_{BC})\\&=\frac{M}{m+M}(\boldsymbol{r}_{AB}\times m\boldsymbol{v}_{AB})=\frac{M}{m+M}\boldsymbol{J}_{AB}\end{aligned}$$

6.2.6 在赤道无风带有一艘因无风而停着的船.船长决定将 $m=200\text{kg}$ 的锚升到长 $l=20\text{m}$ 的桅杆顶上的权宜之计使船运动，船及其负载(不包括锚)的质量 $M=1000\text{kg}$，问：

(1) 船为什么能开始运动？

(2) 说明船向哪个方向运动？

(3) 锚升到桅杆顶后船的运动速度多大？

解 (1) 由于地球的自转，地球不是严格的惯性参考系，仍把地心平动参考系视为惯性参考系，地球绕地轴以自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 转动.

当锚在桅杆上升到 x 高度时，船对地心平动参考系的转动角速度设为 $\boldsymbol{\omega}(x)$.

考虑以角速度 $\boldsymbol{\omega}(x)$ 绕地轴转动的参考系，在此参考系中，船是不动的.当锚在升至 x 高度时的速度为 $\boldsymbol{v}(x)$ 时，它受到的科里奥利力为 $-2m\boldsymbol{\omega}(x)\times\boldsymbol{v}(x)$，这个力垂直于 $\boldsymbol{v}$，因而也与桅杆垂直.锚在此方向无运动，故科氏力必与杆对锚的作用力大小相等、方向相反，锚对杆的作用力与 $-2m\boldsymbol{\omega}(x)\times\boldsymbol{v}(x)$ 相等.在锚对杆的这个力作用下，船会在这个方向获得速度的增量，这就说明原来对地球静止的船会开始运动(考虑 $x=0$，$\boldsymbol{\omega}(x)=\boldsymbol{\omega}_0$).

(2) 船运动的方向就是力 $-2m\boldsymbol{\omega}(x)\times\boldsymbol{v}(x)$ 的方向，$\boldsymbol{\omega}(x)/\!/\boldsymbol{\omega}_0$，在赤道，取坐标轴固连于对地心平动参考系绕地轴以 $\boldsymbol{\omega}(x)$ 角速度转动的参考系，z 轴向上，x 轴向北，y 轴向西.

$$\boldsymbol{\omega}(x)=\omega(x)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{v}(x)=v(x)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}-2m\boldsymbol{\omega}(x)\times\boldsymbol{v}(x)&=-2m\omega(x)\boldsymbol{i}\times v(x)\boldsymbol{k}\\&=2m\omega(x)v(x)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

船将向西运动.

(3) 用地心平动参考系.它是惯性参考系，在锚沿桅杆升起的过程中，只在沿杆的方向受到外力(地球对船和锚的引力和水面的支持力)如锚上升的速度不恒定，这个外力(合力)不为零，但它通过地轴，对地轴的力矩为零.

用对地轴的角动量守恒计算锚升到桅杆顶后船的运动速度(对地球).先算船对地心平动参考系的角速度 ω.设地球半径为 R，

$$[MR^2+m(R+l)^2]\omega=(M+m)R^2\omega_0$$

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{(M+m)R^2}{MR^2+m(R+l)^2}\omega_0\\&=\frac{(M+m)R^2}{(M+m)R^2+2mRl+ml^2}\omega_0\end{aligned}$$

$$= \frac{(M+m)R^2}{(M+m)R^2\left[1+\frac{2ml}{(M+m)R}+\frac{ml^2}{(M+m)R^2}\right]}\omega_0$$

$$\approx \left[1-\frac{2ml}{(M+m)R}\right]\omega_0$$

船对地球的运动速度为

$$V = R(\omega-\omega_0) = -\frac{2ml}{M+m}\omega_0$$

$$= -\frac{2\times 200\times 10^3\times 20}{1000\times 10^3+200\times 10^3}\times\frac{2\pi}{24\times 3600} = -4.85\times 10^{-4}\text{m/s}$$

$V<0$ 说明船的速度是向西的.

6.2.7 分别考虑地球-月球系统和火星-火星的一个卫星系统,为简单起见,考虑每个系统时不考虑它们与其他星体之间的相互作用.月球绕地球的运动比地球的自转慢得多,而火星的一个卫星绕火星的运动比火星的自转快,哪种情况卫星引起行星上的潮汐使卫星、行星之间的距离增加,而另一种情况距离减少?

解 考虑地球-月球系统,月球在地球表面引起的潮汐产生的摩擦力由于月球绕地球的运动比地球的自转慢,其产生的对地球中心的力矩将使地球的自转角速度变慢,这是在地心平动参考系用角动量定理得到的,这个参考系是转动非惯性系,需考虑科里奥利力,也不影响得出这个结论.因为潮涨潮落的影响正好抵消.

现用质心平动参考系考虑地球-月球系统,这个参考系是惯性系,在发生潮汐时,相互作用力是内力,系统对质心的角动量守恒.

设 r_e、r_m 分别是地球和月球的半径,m、M 分别是月球和地球的质量,$\boldsymbol{\Omega}$ 是地球的自转角速度,$\boldsymbol{\omega}$ 是月球绕地球的转动角速度,$\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向一致,月球绕地球转动时始终是同一个半球面朝向地球,可见月球也有自转,自转角速度为 $-\boldsymbol{\omega}$.设 R 是地球月球两中心间的距离.

地球对系统质心的角动量为

$$J_e = \frac{2}{5}Mr_e^2\Omega + M\left(\frac{m}{m+M}R\right)^2\omega$$

月球对系统质心的角动量为

$$J_m = -\frac{2}{5}mr_m^2\omega + m\left(\frac{M}{m+M}R\right)^2\omega$$

因为

$$J_e + J_m = 常量$$

$$\frac{2}{5}Mr_e^2\Omega + \left(\frac{mM}{m+M}R^2 - \frac{2}{5}mr_m^2\right)\omega = 常量$$

因 $\frac{2}{5}mr_m^2$ 比 $\frac{mM}{m+M}R^2$ 小得多,上式可近似为

$$\frac{2}{5}Mr_e^2\Omega + \frac{mM}{m+M}R^2\omega = 常量 \tag{1}$$

在质心平动参考系中对月球用质心运动定理,月球中心离系统质心的距离为 $\frac{M}{m+M}R$,

$$m\left(\frac{M}{m+M}R\right)\omega^2=\frac{GmM}{R^2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{G(m+M)}{R^3}} \tag{2}$$

用式(2)，式(1)可改写为

$$\frac{2}{5}Mr_e^2\Omega+mM\sqrt{\frac{GR}{m+M}}=\text{常量} \tag{3}$$

式(3)中 M、m、r_e、G 均为常量，Ω 减小，R 增大才能保证式(3)成立.

结论是对于卫星绕行星的转动角速度比行星的自转角速度慢(如地球-月球系统的情况)，潮汐将使卫星和行星间的距离增大，而对于火星卫星(卫星绕火星转动角速度比火星自转角速度快)情况相反，潮汐将使它们之间的距离减小.

6.3　质点系的动能定理和机械能守恒定律

6.3.1　一系统由两个轮子、杆 O_1O_2 及其平行杆 AB 组成，轮子半径为 r、质量为 M_1，均匀分布于边缘，O_1O_2 连接于两轮轴上，AB 杆与固连于轮子的 O_1A、O_2B 铰接，O_1O_2 杆及 AB 杆质量均为 M_2，O_1A、O_2B 长为 $\frac{1}{2}r$，质量可以不计. 若在图 6.21 所示位置时，轮子在直线轨道上做纯滚动，轮轴的速度为 v_0，求此系统的动能.

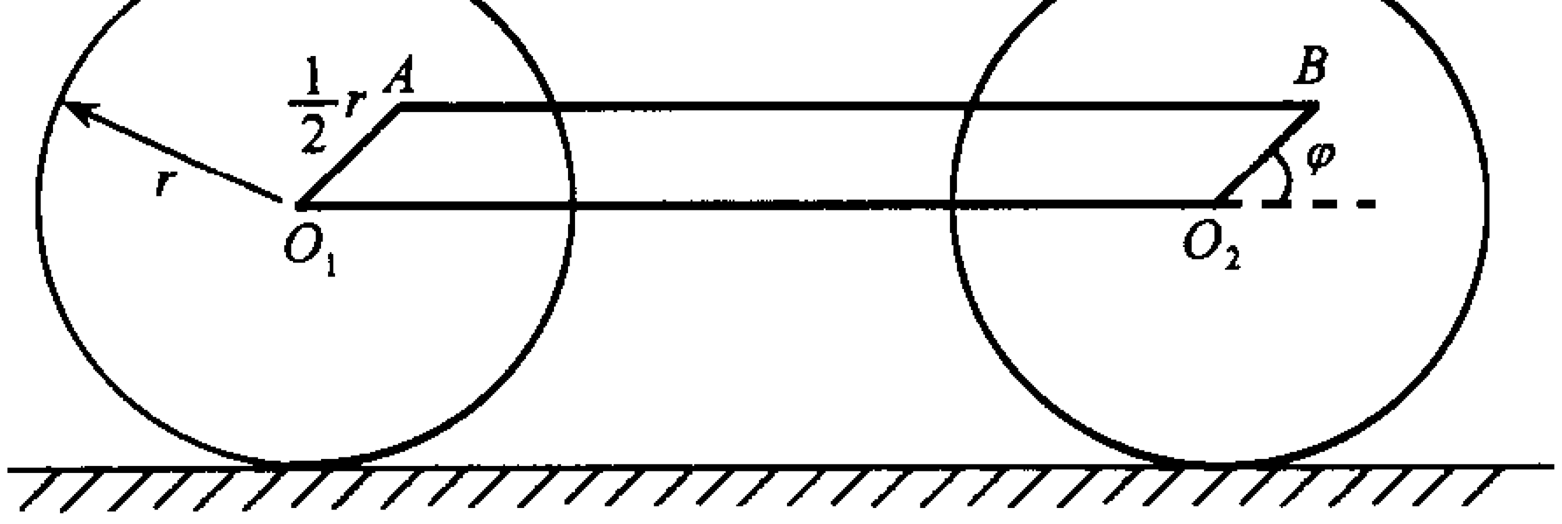


图 6.21

解　两轮子质心的速度均为 v_0，由纯滚动条件得两轮子围绕其质心的转动角速度均为 $\omega=\frac{v_0}{r}$，用柯尼希定理，两轮子的动能之和为

$$2\times\left[\frac{1}{2}M_1v_0^2+\frac{1}{2}M_1(r\omega)^2\right]=2M_1v_0^2$$

O_1O_2 杆各点的速度均为 v_0，O_1O_2 杆的动能为 $\frac{1}{2}M_2v_0^2$.

AB 杆上各点也有相同的速度，因而 AB 杆也做平动，考虑 B 点的速度，它由两部分组成：一部分是跟随 O_2 做平动的速度 v_0(沿水平方向)；另一部分是围绕 O_2 点做角速度为 ω 转动的速度 $\frac{1}{2}r\omega=\frac{1}{2}v$，如图 6.22 所示.

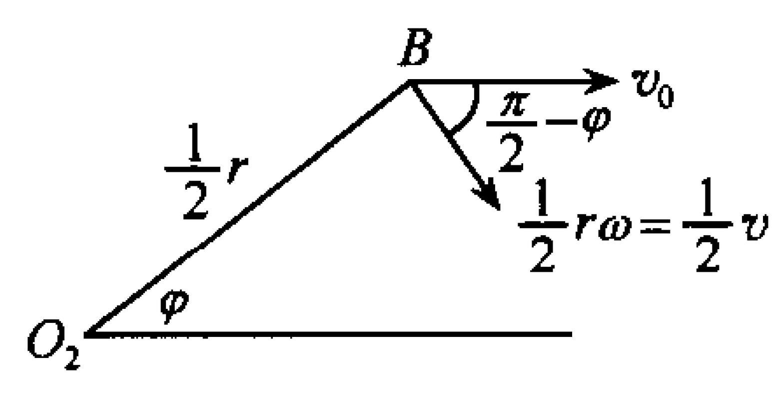


图 6.22

AB 杆的动能为

$$\frac{1}{2}M_2\left\{\left[v_0+\frac{1}{2}v_0\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]^2+\left[\frac{1}{2}v_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]^2\right\}=\frac{1}{2}M_2\left(\frac{5}{4}v_0^2+v_0^2\sin\varphi\right)$$

整个系统的动能为

$$T=2M_1v_0^2+\frac{1}{2}M_2v_0^2+\frac{1}{2}M_2\left(\frac{5}{4}v_0^2+v_0^2\sin\varphi\right)$$
$$=\frac{1}{8}v_0^2[16M_1+M_2(9+4\sin\varphi)]$$

6.3.2 质量均为 m 的两质点被一原长为 l、劲度系数为 k 的弹簧连接,原在光滑的水平面上处于静止,在 $t=0$ 时,一个质点受到一个垂直于弹簧方向的冲量 I,假定在以后的运动中弹簧始终沿着两质点的连线(即不弯曲).

(1) t 时刻两质点的总能量与总动量多大?

(2) 质心速度和相对于质心的总角动量为何值?

(3) 若 $m=1\text{kg}, k=1\text{N/m}, l=1\text{m}, I=1\text{N}\cdot\text{s}$,冲量作用后的运动过程中,两质点之间的最大距离多大?

(4) 两质点的最大瞬时速率多大?

解 (1) 在以后运动过程中,系统的机械能和动量均是守恒的,均为 $t=0$ 时的值.

所以

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{I}{m}\right)^2=\frac{I^2}{2m}$$
$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{I}$$

(2)
$$\boldsymbol{v}_C=\frac{\boldsymbol{p}}{2m}=\frac{\boldsymbol{I}}{2m}$$

在质心平动参考系中,系统对质心的角动量守恒,

$$J_C=\frac{l}{2}\times m\left(\frac{I}{m}-\frac{I}{2m}\right)+\frac{l}{2}\times m\left[0-\left(-\frac{I}{2m}\right)\right]=\frac{1}{2}Il$$

如 $t=0$ 时,受到冲击的质点对质心的位矢方向单位矢量为 $\boldsymbol{i}$,冲量 $\boldsymbol{I}$ 方向的单位矢量为 $\boldsymbol{j}$,则 J_C 沿 $\boldsymbol{k}$ 的方向.

(3) 在质心平动参考系中,任一质点的机械能守恒,对质心的角动量守恒.

用极坐标系,考虑一个质点,

$$F=-k(2r-l)=-2k\left(r-\frac{l}{2}\right)$$

$$V=\frac{1}{2}\times 2k\left(r-\frac{l}{2}\right)^2=k\left(r-\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h=(r^2\dot{\varphi})|_{t=0}=\left(\frac{l}{2}\right)^2\left(\frac{I}{2m}\Big/\frac{l}{2}\right)=\frac{Il}{4m}$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{I^2l^2}{16m^2r^2}\right)$$

因为
$$T+V=(T+V)|_{t=0}=\frac{1}{2}m\left(\frac{I}{2m}\right)^2=\frac{I^2}{8m}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{I^2l^2}{16m^2r^2}\right)+k\left(r-\frac{l}{2}\right)^2=\frac{I^2}{8m}$$

当两质点之间的距离达最大时,$r=\frac{1}{2}l_m$,$\dot{r}=0$,代入上式,即得最大距离 l_m 满足的方程:

$$2mkl_m^4 - 4mkll_m^3 + (2mkl^2 - I^2)l_m^2 + I^2l^2 = 0$$

代入 m、k、l 和 I 的数值后，l_m 满足的方程为

$$2l_m^4 - 4l_m^3 + l_m^2 + 1 = 0$$

因 l_m 的偶次幂的系数之和等于 l_m 的奇次幂的系数之和的负值，可见必有 l_m-1 的因子，其实从上述方程也是距离取极值的方程. $t=0$ 时就是处于极值的情况，由此可得出结论：

$$(l_m - 1)(2l_m^3 - 2l_m^2 - l_m - 1) = 0$$

$l_m=1$ 显然是一个极小值，所以最大距离满足的方程为

$$2l_m^3 - 2l_m^2 - l_m - 1 = 0$$

下面用牛顿法求上述方程的根：

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 4x - 1$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1,2,3,\cdots$$

取 $x_1=1.5$，

$$x_2 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.5 - \frac{(-0.25)}{6.5} = 1.538$$

$$x_3 = 1.538 - \frac{f(1.538)}{f'(1.538)} = 1.538 - \frac{7.22 \times 10^{-3}}{7.041} = 1.537$$

$$x_4 = 1.537 - \frac{f(1.537)}{f'(1.537)} = 1.537 - \frac{1.842 \times 10^{-4}}{7.026} = 1.537$$

所以最大距离为 $l_m=1.537\text{m}$.

(4) 在静参考系中，系统的机械能也是守恒的，在 $t=0$ 时，系统的势能最小，则系统的动能最大. 此时，未被冲击的质点仍处于静止，动能为零，受冲击的质点的动能等于系统的最大动能. 自然，两个质点的最大瞬时速率就是 $t=0$ 时受冲击的那个质点具有的速率，即 $v_m=\dfrac{I}{m}$.

在以后的运动中，虽然弹簧处于原长系统的动能为最大动能的情况会经常出现，但因在质心平动参考系中任一质点均有

$$\frac{h}{\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\left[\dfrac{2}{m}\left(E_0 - V - \dfrac{mh^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2}} \neq \text{有理数}$$

质点轨道是不闭合的，任何一个质点都不会再具有 $\dfrac{I}{m}$ 这个最大速率了.

6.3.3 一质量为 m 的卫星围绕地球以速度 v 在一半径为 R 的圆轨道上运动. 卫星突然吸附了一小质量 δm，这块小质量在发生碰撞前是静止不动的. 求此卫星总能量的改变量，并求这个新轨道的长半轴.

解　当卫星在半径为 R 的圆轨道上运行时，

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$$

其中 M 为地球的质量

$$GM = Rv^2$$

吸附静止的小质量 δm 后，速度变为

$$v' = \frac{m}{m+\delta m}v$$

吸附前卫星的总能量为

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2}mv^2$$

吸附后卫星的总能量为

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}(m+\delta m)v'^2 - \frac{GM(m+\delta m)}{R} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m+\delta m} - mv^2 - (\delta m)v^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(1+\frac{\delta m}{m}\right)^{-1}v^2 - mv^2 - (\delta m)v^2 = -\frac{1}{2}(m+3\delta m)v^2 \end{aligned}$$

吸附过程使卫星损失的能量为

$$-\Delta E = E - E' = \frac{3}{2}v^2\delta m$$

新轨道是一个椭圆，设其长半轴为 a，

$$E' = -\frac{GM(m+\delta m)}{2a}$$

如用上述 E' 的一级近似式，

$$E' = -\frac{1}{2}(m+3\delta m)v^2$$

则

$$-\frac{1}{2}(m+\delta m)v^2 = -\frac{GM(m+3\delta m)}{2a}$$

代入

$$GM = Rv^2$$

得

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{(m+3\delta m)}{m+\delta m}\right)R \\ &\approx \left(1+\frac{3\delta m}{m}\right)\left(1-\frac{\delta m}{m}\right)R \\ &\approx \left(1+\frac{2\delta m}{m}\right)R \end{aligned}$$

在吸附的那个时刻，卫星处于近地点.

6.3.4 两根质量为 m、长 $2a$ 完全相同的均质杆 AB 和 BC 于 B 点自由铰接，在一光滑的水平桌上运动. 用两杆的夹角 2θ、AC 和平面上固定方向间的夹角 φ 及其对时间的导数表示系统在其质心平动参考系中的动能.

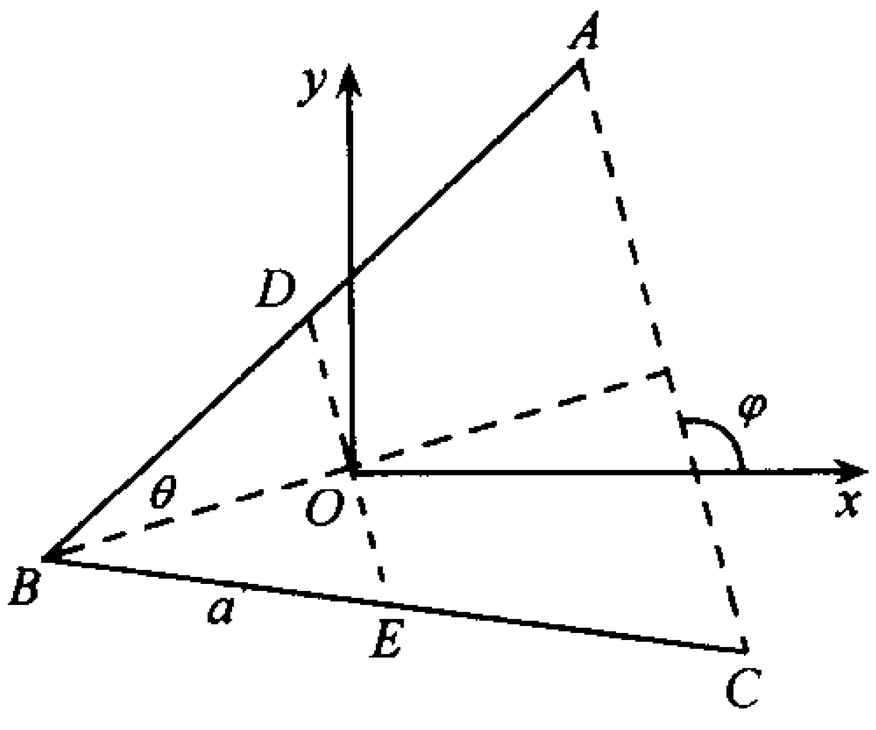


图 6.23

解　取固连于质心平动参考系的坐标系，原点位于质心，x 轴沿平面上的固定方向，如图 6.23 所示. 图中 E、D 分别为 BC 杆、AB 杆的质心.

$$OD = OE = a\sin\theta$$

$$x_D = a\sin\theta\cos\varphi$$

$$y_D = a\sin\theta\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin\theta\sin\varphi$$

$$x_E = a\sin\theta\cos(\pi - \varphi) = -a\sin\theta\cos\varphi$$
$$y_E = -a\sin\theta\sin(\pi - \varphi) = -a\sin\theta\sin\varphi$$

BO 与 x 轴的夹角为 $\varphi - \frac{\pi}{2}$，BA 与 x 轴的夹角为 $-\frac{\pi}{2} + \varphi + \theta$，$BC$ 与 x 轴的夹角为 $-\frac{\pi}{2} + \varphi - \theta$，

$$\omega_{AB} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi + \theta\right) = \dot{\varphi} + \dot{\theta}$$
$$\omega_{BC} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi - \theta\right) = \dot{\varphi} - \dot{\theta}$$

在质心平动参考系中系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2a)^2\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_E^2 + \dot{y}_E^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2a)^2\omega_{BC}^2$$

$$\dot{x}_D = a\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - a\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$\dot{y}_D = a\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + a\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$\dot{x}_E = -a\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} + a\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$\dot{y}_E = -a\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} - a\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$T = \frac{1}{3}ma^2\left[(1 + 3\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + (1 + 3\sin^2\theta)\dot{\varphi}^2\right]$$

6.3.5　两个质量均为 m、速率均为 u 的粒子做斜碰，如图 6.24 所示.

(1) 求质心平动参考系的速度 $\boldsymbol{V}$；

(2) 将在质心平动参考系中的总能量与在静参考系中的总能量进行比较.

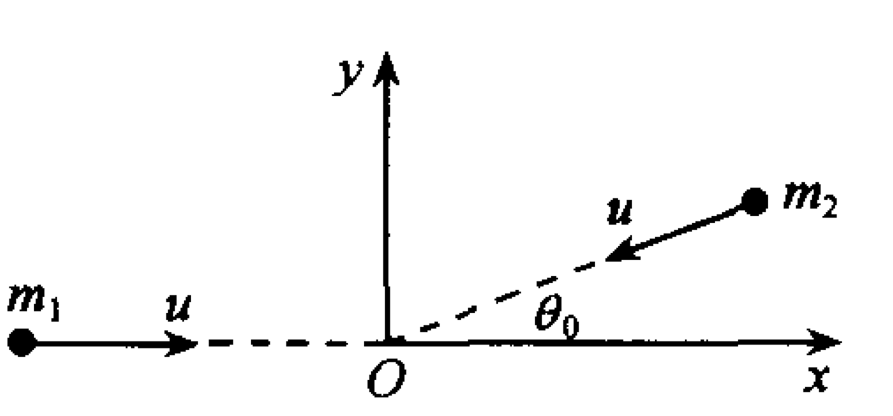


图 6.24

解　若碰撞时取为时间的零点，则 $t<0$ 时，m_1、m_2 两粒子的位矢为

$$\boldsymbol{r}_1 = ut\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = -ut(\cos\theta_0\boldsymbol{i} + \sin\theta_0\boldsymbol{j})$$

质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{2}ut[(1 - \cos\theta_0)\boldsymbol{i} - \sin\theta_0\boldsymbol{j}]$$

(1) 质心平动参考系的速度也即质心的速度

$$\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{r}}_c = \frac{1}{2}u[(1 - \cos\theta_0)\boldsymbol{i} - \sin\theta_0\boldsymbol{j}]$$

(2) 在静参考系中系统的能量为

$$E = \frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2 = mu^2$$

在质心平动参考系中两粒子的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1' = \dot{\boldsymbol{r}}_1 - \boldsymbol{V} = u\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}u[(1-\cos\theta_0)\boldsymbol{i} - \sin\theta_0\boldsymbol{j}]$$

$$= \frac{1}{2}u[(1+\cos\theta_0)\boldsymbol{i} + \sin\theta_0\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \dot{\boldsymbol{r}}_2 - \boldsymbol{V} = -u(\cos\theta_0\boldsymbol{i} + \sin\theta_0\boldsymbol{j}) - \frac{1}{2}u[(1-\cos\theta_0)\boldsymbol{i} - \sin\theta_0\boldsymbol{j}]$$

$$= -\frac{1}{2}u[(1+\cos\theta_0)\boldsymbol{i} + \sin\theta_0\boldsymbol{j}]$$

在质心平动参考系中系统的能量为

$$E' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}mu^2(1+\cos\theta_0)$$

比较 E' 与 E，

$$E' = \frac{1}{2}(1+\cos\theta_0)E$$

6.3.6 一个质量为 M、半径为 R 的匀质圆柱体置于光滑的水平面上，可绕其竖直的对称轴自由转动，两个质量均为 m 的质点，用长度均为 a 的不可伸长的轻绳连接在圆柱底部的一条直径两端的钩子上，将绳子按顺时针方向完全绕在圆柱体上，再用钩子将两质点直接挂在圆柱体上. 证明：整个系统不论以什么角速度绕对称轴逆时针转动时，先让直接钩住质点的两钩子脱钩，只要绳子长度合适，当绳子完全展开时再让直径两端的钩子脱钩，圆柱体都将停止转动. 求绳长 a 与 m、M、R 的关系.

证明 对于圆柱体与两质点组成的系统，对圆柱的对称轴角动量守恒. 绳子在光滑的水平面上展开，重力与水平面的支持力相抵消，机械能守恒.

设开始两质点相对于圆柱静止时系统的角速度为 ω_0，完全展开时圆柱体停止转动，质点的速率为 v. 则由上述的角动量守恒和机械能守恒，可列出下列两式：

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)\omega_0 = 2mva$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)\omega_0^2 = 2 \times \frac{1}{2}mv^2$$

注意：写上述第一个式子时涉及对“绳子完全展开”的理解，绳子完全展开应理解为绳子刚处于与圆柱体完全不缠绕的状态，如图 6.25 所示.

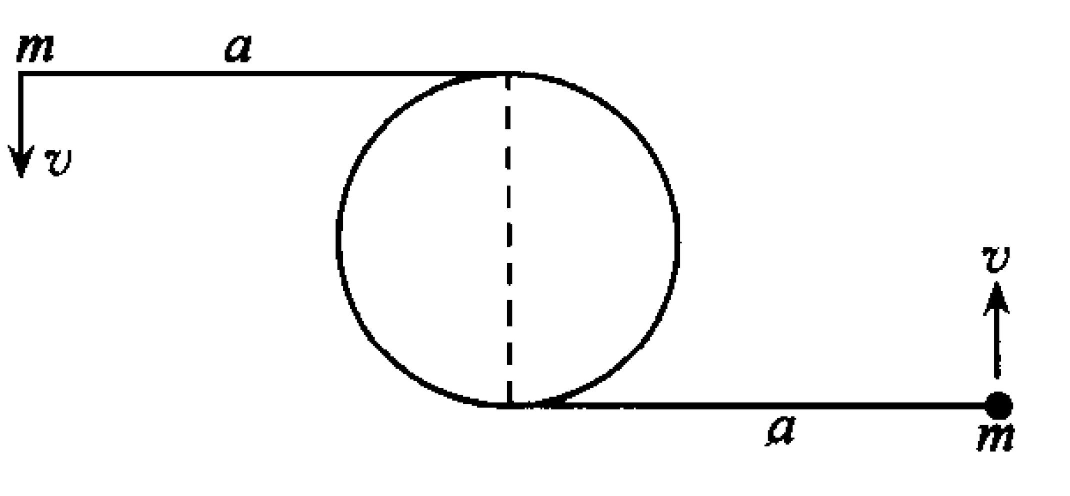


图 6.25

两式消去 v，可得

$$2ma^2 = \left(\frac{1}{2}M + 2m\right)R^2$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{M+4m}{m}\right)^{1/2}R$$

与 ω_0 无关，说明只要 a 与 M、m、R 满足上述关系，不论 ω_0 多大，完全展开后，圆柱将处于静止状态，此时使绳子脱钩，圆柱就可保持静止.

6.3.7　在光滑的水平桌上，有两个质量为 m 的质点，用一根长度为 a 的不可伸长的轻绳相连结. 两质点原先静止，绳子处于拉直状态，$t=0$ 时，给一个质点垂直于绳的冲量 I. 求证此后两质点做旋轮线运动，该质点与另一质点的能量之比为 $\cot^2\left(\frac{It}{2ma}\right)$.

证明　取固定坐标系 $O\xi\eta$，原点位于开始时两质点系统的质心，开始两质点位于 ξ 轴上，$\xi=\frac{1}{2}a$ 的那个质点于 $t=0$ 时受到冲量 I，沿 I 的方向取 η 轴.

取动坐标系 cxy，原点总取在质心 c，动坐标系随质心做平动，x、y 轴分别与 ξ、η 轴平行（y 轴与 η 轴重合）.

此质点系在水平方向未受外力，动量守恒，质心做匀速运动. 在质心平动参考系中，两质点始终受到有心力作用，力心位于质心，故每个质点对质心的角动量守恒，绳子不可伸长，每个质点均绕质心做匀速率圆周运动.

给两个质点标号，受冲击的为质点 1，另一个为质点 2.

$$t=0\text{ 时}，\quad \dot{\xi}_{10}=0，\quad \dot{\eta}_{10}=\frac{I}{m}，\quad \dot{\xi}_{20}=\dot{\eta}_{20}=0$$

$$\dot{\xi}_C=\dot{\xi}_{C0}=0，\quad \dot{\eta}_C=\dot{\eta}_{C0}=\frac{I}{2m}$$

$$\dot{y}_{10}=\dot{\eta}_{10}-\dot{\eta}_{C0}=\frac{I}{m}-\frac{I}{2m}=\frac{I}{2m}$$

在质心平动参考系中，两质点围绕质心做半径为 $\frac{1}{2}a$ 的匀速率圆周运动的角速度为

$$\omega=\omega_0=\dot{y}_{10}\Big/\frac{1}{2}a=\frac{I}{2m}\Big/\frac{1}{2}a=\frac{I}{ma}$$

根据以上所述，t 时刻两质点的位置如图 6.26 所示，

$$\xi_1=\frac{1}{2}a\cos\omega t=\frac{1}{2}a\cos\left(\frac{It}{ma}\right)$$

$$\eta_1=\dot{\eta}_c t+\frac{1}{2}a\sin\omega t$$

$$=\frac{I}{2m}t+\frac{1}{2}a\sin\left(\frac{It}{ma}\right)$$

$$\xi_2=-\frac{1}{2}a\cos\left(\frac{It}{ma}\right)$$

$$\eta_2=\frac{I}{2m}t-\frac{1}{2}a\sin\left(\frac{It}{ma}\right)$$

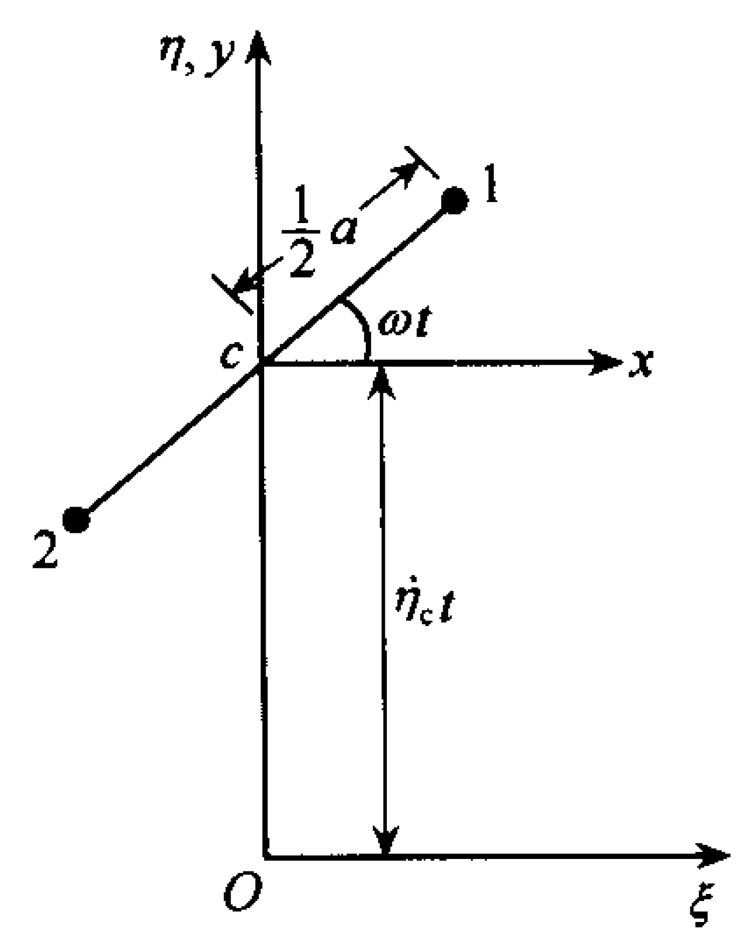


图 6.26

两质点的运动学方程已表明两质点均做旋轮线运动.

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{I}{2m}\sin\left(\frac{It}{ma}\right)$$

$$\dot{\eta}_1 = \frac{I}{2m} + \frac{I}{2m}\cos\left(\frac{It}{ma}\right)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{I}{2m}\sin\left(\frac{It}{ma}\right)$$

$$\dot{\eta}_2 = \frac{I}{2m} - \frac{I}{2m}\cos\left(\frac{It}{ma}\right)$$

两质点的能量之比为

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}m(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2)}{\frac{1}{2}m(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2)} = \cot^2\left(\frac{It}{2ma}\right)$$

6.3.8 两个质量均为 m 的质点，连在一根长 l、质量可忽略不计的刚性杆的两端，该系统在光滑水平面上以质心速度为$\boldsymbol{v}$、角速度为$\boldsymbol{\omega}$(其方向垂直于运动平面)运动时，其一端的一个质点与另一个质量也为 m 的静止质点做完全非弹性碰撞，碰撞时运动的质点的速度方向与质心的速度方向相反.求：

(1) 碰撞以后的角速度；

(2) 在碰撞中损失的机械能.

解 (1) 碰撞后三个质点构成的系统的质心速度为

$$v_C = \frac{1}{3m}(2mv) = \frac{2}{3}v$$

质心位于离质量为 $2m$ 的质点$\frac{1}{3}l$ 处.

碰撞前后系统的运动情况如图 6.27(a)、(b)所示.



图 6.27

碰撞过程系统对任何固定点的角动量都是守恒的.考虑对碰后瞬时质心所在点的角动量守恒，设碰后的角速度为 Ω，则

$$\left[2m\left(\frac{1}{3}l\right)^2 + m\left(\frac{2}{3}l\right)^2\right]\Omega = 2m\left(\frac{1}{2}l\right)^2\omega + 2mv\left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l\right)$$

可得

$$\Omega = \frac{3l\omega + 2v}{4l}$$

(2) 碰撞前系统的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}\times 2mv^2 + 2\times\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}l\right)^2\omega^2 = m\left(v^2 + \frac{1}{4}l^2\omega^2\right)$$

碰撞后系统的机械能为

$$E_2=\frac{1}{2}\times 3m\left(\frac{2}{3}v\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}l\right)^2\Omega^2+\frac{1}{2}\times 2m\left(\frac{1}{3}l\right)^2\Omega^2$$

$$=\frac{3}{4}mv^2+\frac{1}{16}m(3l^2\omega^2+4l\omega v)$$

碰撞过程中系统损失的机械能为

$$-\Delta E=E_1-E_2=\frac{1}{4}mv^2+\frac{1}{16}ml(l\omega^2-4\omega v)$$

说明：完全非弹性碰撞并不意味着碰撞的两个质点粘在一起，我们上述的计算是考虑粘在一起的，如不粘在一起，(1) 问的计算仍有效. (2) 问的计算，E_2 应改为

$$E_2=\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v+\frac{2}{3}l\Omega\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v-\frac{1}{3}l\Omega\right)^2\times 2$$

代入 Ω 值，经计算可得

$$E_2=\frac{3}{4}mv^2+\frac{1}{16}ml(3l\omega^2+4\omega v)$$

结果是一样的. 这不奇怪，因为碰后瞬时，三个质点的速度两种情况没有区别. 再以后，两种情况的运动状况是有所不同的.

6.3.9　质量均为 m 的两个质点用长度为 $4a$ 的不可伸长、不计质量的绳子连结，开始两质点均以与连线相垂直的速度 v 在光滑的水平面上运动，两质点轨道间距离为 $4a$. 突然遇到一个直径可忽略的光滑钉子，此时钉子距质点 1 的距离为 a. 若以后两质点在相反方向转动时不相碰，问在以后的运动中：

(1) 质点 1 离钉子的最大距离多大?

(2) 质点 1 离钉子最大距离时绳子张力多大?

解　(1) 根据两质点系统机械能守恒和两质点各自为系统分别对钉子这个固定点的角动量守恒，有

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}_1^2+r_1^2\dot{\varphi}_1^2)+\frac{1}{2}m(\dot{r}_2^2+r_2^2\dot{\varphi}_2^2)=2\times\frac{1}{2}mv^2$$

$$mr_1^2\dot{\varphi}_1=-mva$$

$$mr_2^2\dot{\varphi}_2=3mva$$

绳子不可伸长，

$$r_1+r_2=4a$$

在质点 1 离钉子最大距离时，$\dot{r}_1=0$.

由后四个式子消去第一个式子中的 $\dot{r}_1$、$\dot{r}_2$、r_2、$\dot{\varphi}_1$ 和 $\dot{\varphi}_2$，得 $r_{1\max}$满足的方程为

$$r_{1\max}^4-8ar_{1\max}^3+11a^2r_{1\max}^2+4a^3r_{1\max}-8a^4=0$$

由叠代法或牛顿法可得

$$r_{1\max}=1.653a$$

(2) 质点 1、质点 2 的径向运动微分方程为

$$m(\ddot{r}_1-r_1\dot{\varphi}_1^2)=-T$$

$$m(\ddot{r}_2 - r_2\dot{\varphi}_2^2) = -T$$

两式相加，考虑到 $r_1+r_2=4a$ 和角动量守恒，

$$T = \frac{1}{2}m(r_1\dot{\varphi}_1^2 + r_2\dot{\varphi}_2^2) = \frac{1}{2}m\left[\frac{a^2v^2}{r_1^2} + \frac{9a^2v^2}{(4a-r_1)^2}\right]$$

代入 $r_1=r_{1\max}=1.653a$，即得所要求的绳子张力

$$T = 0.459\,\frac{mv^2}{a}$$

6.3.10 质量为 M、半径为 a 的半球，其底面放在光滑的水平面上. 有一质量为 m 的质点沿此半球下滑，初始位置与球心的连线和铅垂线成 α 角，系统开始是静止的，求质点绕球心的角速度.

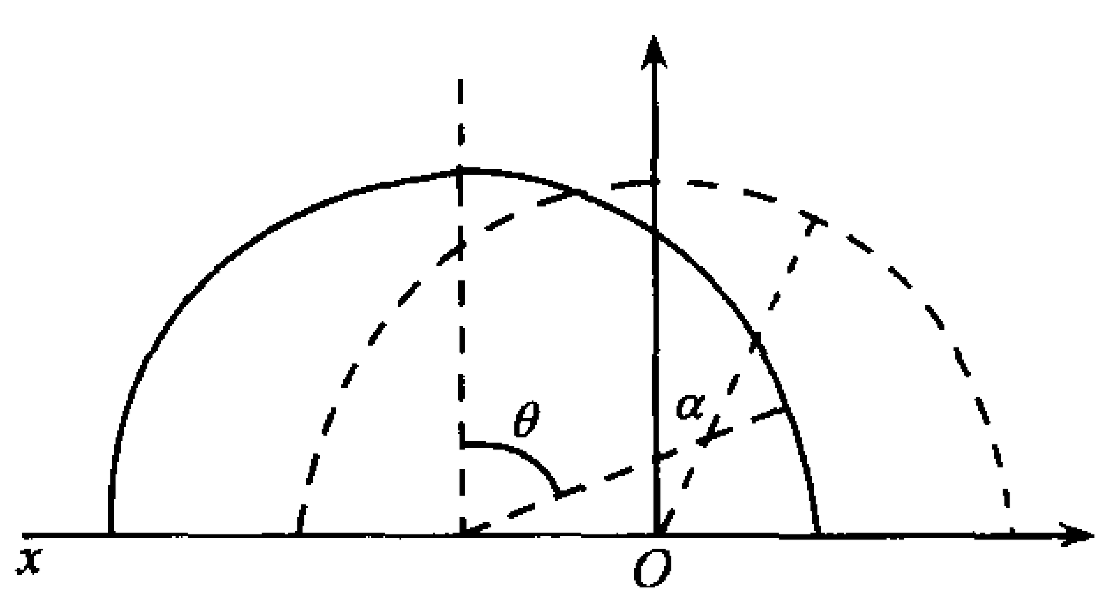


图 6.28

解 取图 6.28 所示的 x 轴沿水平方向，且是 m 与球心所在的竖直平面与水平面的交线，原点取在开始时球心的位置. 当 m 滑到与球心的连线与铅垂线成 θ 角时，半球移动了 x.

由于水平方向未受外力，m、M 系统的质心的 x 坐标 x_C 不变，

$$Mx + m(x - a\sin\theta) = (m+M)x_C = 常量$$

$$M\dot{x} + m(\dot{x} - a\cos\theta\dot{\theta}) = 0$$

$$\dot{x} = \frac{ma}{m+M}\cos\theta\dot{\theta}$$

由机械能守恒，

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}[(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (a\dot{\theta}\sin\theta)^2] + mga\cos\theta = mga\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta = mga(\cos\alpha - \cos\theta)$$

代入 $\dot{x}$，解得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g(\cos\alpha - \cos\theta)}{\frac{1}{2}a - \frac{ma}{2(m+M)}\cos^2\theta}$$

$$\dot{\theta} = \left\{\frac{2g}{a}\,\frac{\cos\alpha - \cos\theta}{1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\theta}\right\}^{1/2}$$

6.3.11 一根长为 $2a$ 不可伸长的轻绳，中点连着一个质量为 M 的质点，两端各连一个质量为 m 的质点，在一光滑的水平面上成一正好拉直的直线. 给 M 一个垂直于绳的水平初速 v. 证明：若时间 τ 以后两端的质点发生碰撞时，质量为 M 的质点从开始位置位移 $b=\dfrac{Mv\tau+2ma}{M+2m}$，并证明正要发生碰撞之前，绳子张力 $T=\dfrac{mM^2v^2}{(M+2m)^2a}$.

证明

$$v_c = \frac{Mv}{M+2m}$$

$$(2m+M)x_c = Mx_1 + 2mx_2 \tag{1}$$

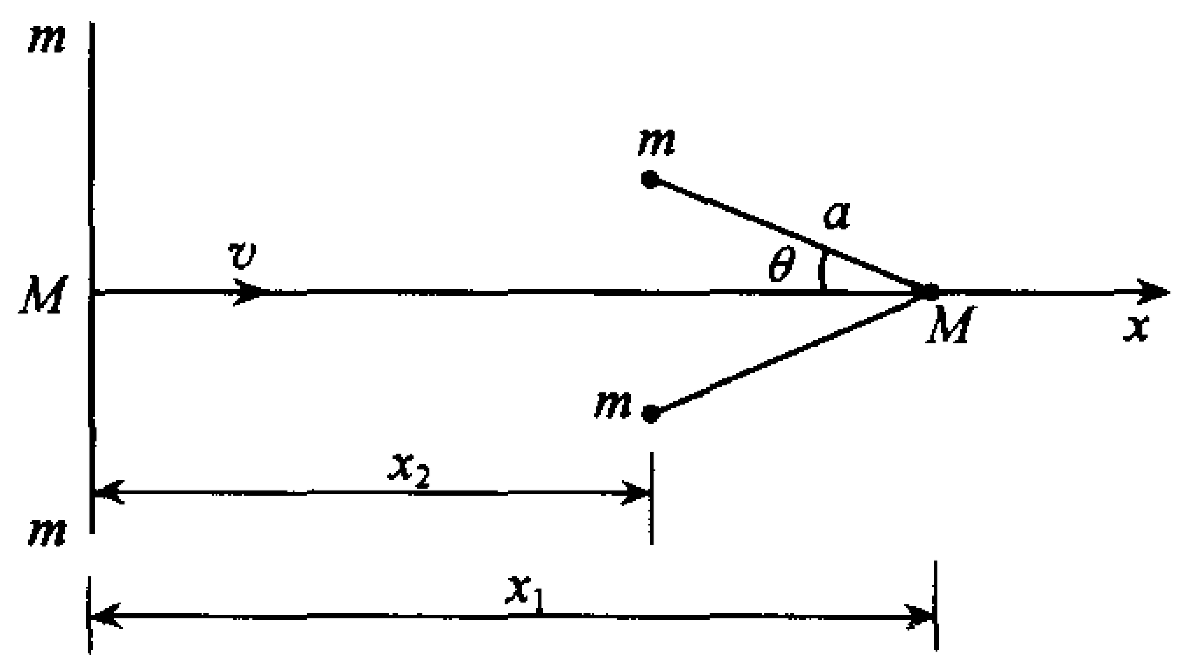


图 6.29

x_1、x_2 分别表示 M 和两个 m 在 t 时刻的位置，如图 6.29 所示.

碰撞时刻 $t=\tau$，

$$x_1 = b,\quad x_2 = b - a$$

$$x_c = v_c\tau = \frac{Mv}{M+2m}\tau$$

将碰撞时刻的 x_1、x_2 和 x_c 值代入式(1)，

$$Mv\tau = (M+2m)b - 2ma$$

$$b = \frac{1}{M+2m}(Mv\tau + 2ma)$$

在刚要碰撞时，

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = v_c = \frac{Mv}{M+2m} \tag{2}$$

机械能守恒，

$$\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + 2\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\right] = \frac{1}{2}Mv^2$$

将式(2)代入上式，解出 $\dot{y}_2^2$，得

$$\dot{y}_2^2 = \frac{M}{M+2m}v^2$$

因为　　$y_2 = a\sin\theta,\quad \dot{y}_2 = a\cos\theta\dot{\theta}$

碰撞时，$\theta=0$，$\dot{y}_2 = a\dot{\theta}$，

所以　　$a^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{Mv^2}{M+2m},\quad \dot{\theta}^2 = \dfrac{Mv^2}{(M+2m)a^2}$

动量守恒，

$$M\dot{x}_1 + 2m\dot{x}_2 = Mv \tag{3}$$

因为　　$x_2 = x_1 - a\cos\theta,\quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + a\sin\theta\,\dot{\theta}$

式(3)改写为

$$(M+2m)\dot{x}_1 + 2ma\sin\theta\dot{\theta} = Mv$$

上式两边对 t 求导，

$$(M+2m)\ddot{x}_1 + 2ma\sin\theta\ddot{\theta} + 2ma\cos\theta\dot{\theta}^2 = 0$$

在碰撞时，$\theta=0$，$\dot{\theta}^2 = \dfrac{Mv^2}{(M+2m)a^2}$，代入上式，可得碰撞时的 $\ddot{x}_1$ 为

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2mMv^2}{(M+2m)^2 a}$$

$$M\ddot{x}_1 = -2T$$

$$T = -\frac{1}{2}M\ddot{x}_1 = \frac{mM^2v^2}{(M+2m)^2 a}$$

6.3.12　一质量为 M、半径为 R 的重星以速度 $\boldsymbol{V}$ 通过质量密度为 ρ 的非常稀薄的气体,由于它的引力场,重星将吸引迎面接近它的气体分子,并将它俘获在表面上,相对于 V,气体分子的热运动可以忽略,气体分子间的相互作用力也可以忽略不计.求星体在此刻受到来自气体分子的阻力.

解　取 t 时刻的星体为参考系,气体分子在无穷远处以 $-\boldsymbol{V}$ 的速度向星体运动,在星体引力场的作用下,气体分子的轨道如图 6.30 所示.

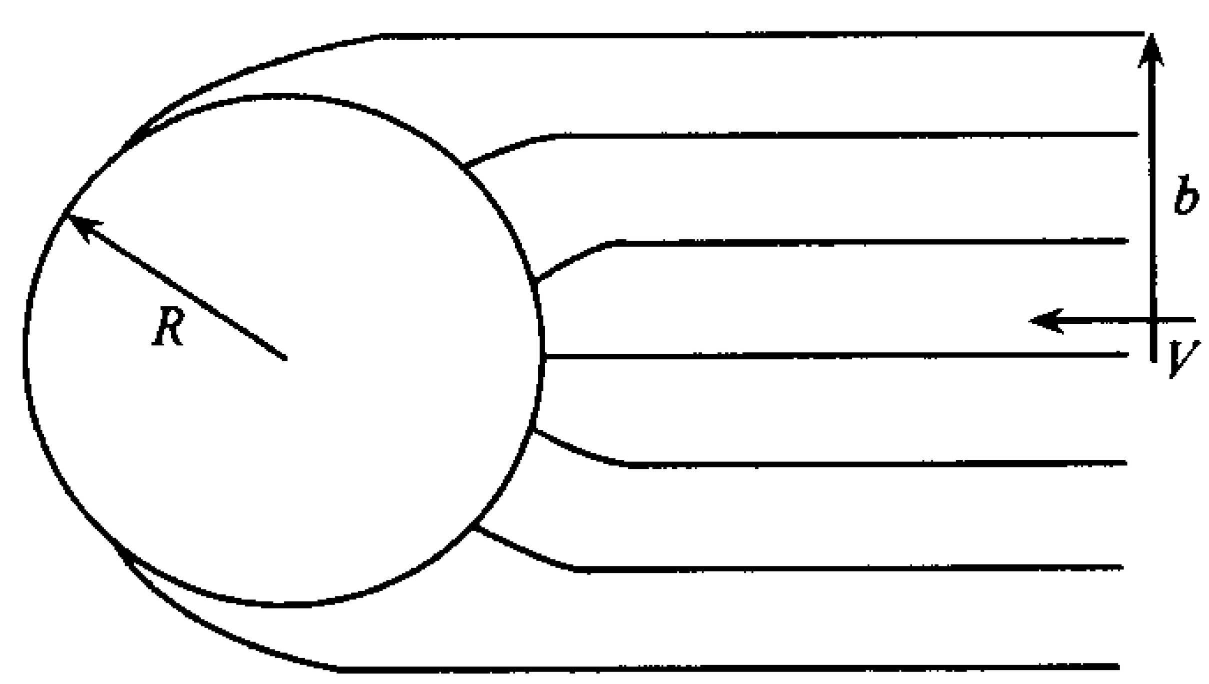


图 6.30

设刚能被星体俘获的气体分子的瞄准距离为 b,刚能被俘获的这个分子被俘获前的速率为 v,由角动量守恒

$$vR = bV \tag{1}$$

由机械能守恒,设 m 为气体分子质量,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mV^2 \tag{2}$$

由式(1)、(2)两式消去 v,解出

$$b^2 = \left(\frac{R}{V}\right)^2\left(V^2 + \frac{2GM}{R}\right)$$

式中的 V 是 t 时刻重星的速率,$\boldsymbol{V}$ 的方向向右.

星体受到的气体阻力等于单位时间俘获的气体分子的动量,

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\pi b^2 V\Delta t \cdot P(-\boldsymbol{V})}{\Delta t}$$

$$= -\pi\rho b^2 V\boldsymbol{V} = -\frac{\pi\rho}{V}R^2\left(V^2 + \frac{2GM}{R}\right)\boldsymbol{V}$$

这是重星在速度为 $\boldsymbol{V}$ 时受到的气体阻力.

方法二:作为变质量质点的运动问题,取重星为本体,m 表示星体的质量,它是 t 的函数(在方法一中 m 表示气体分子的质量,勿混淆).

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + (V-u)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = F_m^{(e)} + F_{\mathrm{d}m}^{(e)}$$

这里取静参考系，u 是微粒（气体分子）的速度，$u=0$，$F_m^{(e)}$、$F_{dm}^{(e)}$分别是作用于本体和微粒的外力（对本体和微粒组成的系统），均为零，

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho\pi b^2V$$

重星所受的阻力为

$$F=m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-F_m^{(e)}-(V-u)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-V\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\rho\pi b^2V^2$$

代入方法一中解得的 $b^2=\left(\frac{R}{V}\right)^2\left(V^2+\frac{2GM}{R}\right)$，

$$F=-\pi\rho R^2\left(V^2+\frac{2GM}{R}\right)$$

6.4　两体问题

6.4.1　两颗星的质量分别为 M 和 m，相距为 d，两星绕着不动的质心做圆周运动．两颗星近似为质点，质量为 M 的星发生爆炸，损失质量 ΔM，爆炸是瞬时的、球对称的，对残余体的合力为零，爆炸时对另一颗星无直接作用．证明：当 $\Delta M<\frac{1}{2}(M+m)$时，余下的双星系统的运动仍是有界的．

证明　方法一：用 m 星平动参考系，M 星的质量改为折合质量 $\mu=\frac{mM}{m+M}$，做半径为 d 的圆周运动，设角速度为 ω，由牛顿运动第二定律．

$$\frac{mM}{m+M}d\omega^2=\frac{GmM}{d^2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{G(m+M)}{d^3}}$$

M 星发生爆炸后，对静参考系来说，m 星的速度没变，M 星的残余体的速度也没变．可是双星系统的质心位置变了，系统的质心速度不再为零．

m、M 两星距原质心的距离分别为$\frac{M}{m+M}d$ 和 $\frac{m}{m+M}d$，m、M 两星对静参考系的速度分别为$\frac{Md}{m+M}\omega$ 和$\frac{md}{m+M}\omega$，它们也是 M 星爆炸后瞬时 m 星和 M 星残余体对静系的速度．如图 6.31 所示．

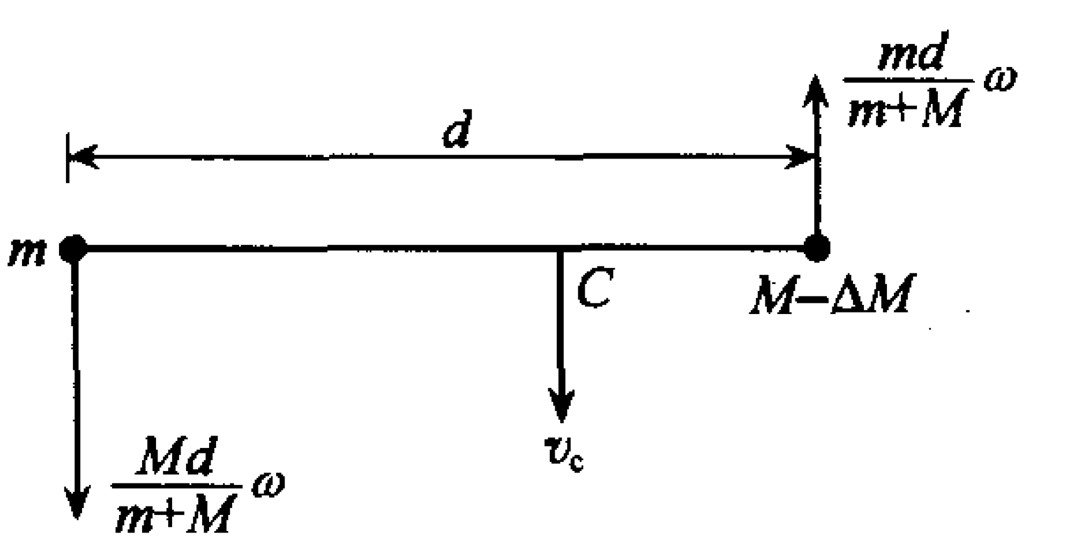


图 6.31

由质心的定义，新质心 C 的速度 v_C 由下式确定：

$$(M-\Delta M+m)v_C=m\left(\frac{Md}{m+M}\omega\right)-(M-\Delta M)\left(\frac{Md}{m+M}\omega\right)=\frac{m\Delta M}{m+M}\omega d$$

$$v_C=\frac{\Delta M}{M-\Delta M+m}\cdot\frac{m}{m+M}\omega d$$

以下采用新的质心平动参考系．

M 星残余体的速度为

$$v' = \frac{md}{m+M}\omega - (-v_c) = \frac{md}{m+M}\omega + v_c$$

$$= \frac{m}{m+M}\omega d\left(1 + \frac{\Delta M}{M - \Delta M + m}\right) = \frac{m}{M - \Delta M + m}\omega d$$

M 星残余体的动能为

$$T' = \frac{1}{2}(M - \Delta M)\frac{m^2}{(M - \Delta M + m)^2}\omega^2 d^2$$

求 M 星残余体的势能如下：

$$F = -\frac{Gm(M - \Delta M)}{r^2}$$

其中 r 是 m 星和 M 星残余体间的距离，需将 F 表成残余体离质心的距离 r' 的函数，

$$r' = \frac{M}{M - \Delta M + m}r, \quad r = \frac{M - \Delta M + m}{m}r'$$

$$F = -\frac{Gm^3(M - \Delta M)}{(M - \Delta M + m)^2 r'^2}$$

$$V'(r') = -\int_\infty^{r'} F\mathrm{d}r' = -\frac{Gm^3(M - \Delta M)}{(M - \Delta M + m)^2 r'}$$

在爆炸后的瞬时，$r' = \frac{m}{M - \Delta M + m}d$，此时，

$$V' = -\frac{Gm^3(M - \Delta M)}{(M - \Delta M + m)^2}\Big/\left(\frac{md}{M - \Delta M + m}\right) = -\frac{Gm^2(M - \Delta M)}{(M - \Delta M + m)d}$$

M 星残余体的总能量

$$E' = T' + V' = \frac{1}{2}(M - \Delta M)\frac{m^2\omega^2 d^2}{(M - \Delta M + m)^2} - \frac{Gm^2(M - \Delta M)}{(M - \Delta M + m)d}$$

代入 $\omega = \sqrt{\frac{G(m+M)}{d^3}}$，经计算可得

$$E' = \frac{Gm^2(M - \Delta M)}{(M - \Delta M + m)^2 d}\left[\Delta M - \frac{1}{2}(m + M)\right]$$

M 星残余物做有界运动也是新的双星系统做有界运动的条件是 $E' < 0$，即

$$\Delta M - \frac{1}{2}(m + M) < 0 \quad 或 \quad \Delta M < \frac{1}{2}(m + M)$$

这个有界运动是对新的质心平动参考系或对一个星体平动参考系而言的，是指 m 星与 M 星残余体之间的距离保持有限的运动. 对静参考系这个双星系统可一起运动到无限远处.

方法二：爆炸后仍用 m 星平动参考系，考虑 M 星残余体的运动，可直接写出爆炸后瞬时的势能和动能，

$$V = -\frac{Gm(M - \Delta M)}{d}$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{m(M - \Delta M)}{M - \Delta M + m}(\omega d)^2 = \frac{Gm(M - \Delta M)(m + M)}{(M - \Delta M + m)d}$$

其中 $\frac{m(M-\Delta M)}{M-\Delta M+m}$ 是 M 星残余体的折合质量，ωd 是它的速率.

$$E = T + V = \frac{Gm(M - \Delta M)}{(M - \Delta M + m)d}\left[\Delta M - \frac{1}{2}(m + M)\right]$$

在 m 星平动参考系中，M 星残余体做有界运动的条件是 $E<0$，得 $\Delta M<\frac{1}{2}(m+M)$.

用此法可以不计算 v_c 和 V'，因而简捷得多. 但需注意计算动能时别忘了用折合质量.

6.4.2 有两个质量均为 m 的质点用一根劲度系数为 k、未伸长时长 a 的轻弹簧连起来，静置在光滑的水平面上. 第三个质量也为 m 的质点以垂直于弹簧的速度 V 运动，并射中一个质点粘在上面. 要使弹簧拉伸到最大长度为 $3a$，V 应多大？

解 先用静参考系考虑碰撞过程. 因碰撞是完全非弹性碰撞，且两碰撞质点粘在一起，质量为 $2m$，由动量守恒，该质量为 $2m$ 的质点的速度为 $v=\frac{1}{2}V$.

以下用几种方法解：

方法一：作为两体问题，采用质点 1(未受碰质点)平动参考系，另一质点改用折合质量，

$$\mu=\frac{2m\cdot m}{2m+m}=\frac{2}{3}m$$

由机械能守恒，

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}k(r-a)^2=\frac{1}{2}\mu v^2=\frac{1}{8}\mu V^2 \tag{1}$$

由对质点 1(取为原点)的角动量守恒，

$$\mu r^2\dot{\varphi}=\mu va=\frac{1}{2}\mu aV \tag{2}$$

当 $r=r_{\max}=3a$ 时，$\dot{r}=0$，代入式(1)、(2)，

$$9\mu a^2\dot{\varphi}^2+4ka^2=\frac{1}{4}\mu V^2 \tag{3}$$

$$9a\dot{\varphi}=\frac{1}{2}V \tag{4}$$

从式(3)、(4)解出 V，并代入 $\mu=\frac{2}{3}m$ 得

$$V=\sqrt{\frac{18ka^2}{\mu}}=3a\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

方法二：采用碰撞后的质心平动参考系. 该参考系对静参考系的速度为

$$v_c=\frac{mV}{m+m+m}=\frac{1}{3}V$$

考虑质量为 $2m$ 的质点，刚碰后

$$v'=\frac{1}{2}V-v_c=\frac{1}{6}V$$

$$r'=\frac{1}{3}a$$

对原点(质心)的角动量为

$$2m\cdot\frac{1}{6}V\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{9}maV$$

仍用 r 表示弹簧的长度，该质点受到的弹簧力

$$F=-k(r-a)=-k(3r'-a)$$
$$=-3k\left(r'-\frac{1}{3}a\right)=-k'\left(r'-\frac{1}{3}a\right)$$
$$V'=-\int_0^{r'}F(r')\mathrm{d}r'=\frac{1}{2}k'\left(r'-\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{3}{2}k\left(r'-\frac{1}{3}a\right)^2$$

最大伸长时，

$$r=r_{\max}=3a,\quad r'=r'_{\max}=\frac{1}{3}r_{\max}=a$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}\times 2m(\dot{r}'^2+r'^2\dot{\varphi}^2)+\frac{3}{2}k\left(r'-\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{1}{2}\times 2m\left(\frac{1}{6}V\right)^2$$

对质心的角动量守恒，

$$2mr'^2\dot{\varphi}=\frac{1}{9}maV$$

代入 $r'=r'_{\max}=a, \dot{r}'=0$，消去 $\dot{\varphi}$，解出

$$V=3a\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

方法三：采用碰撞后的质心转动参考系，既跟随质心平动、又随两质点连线转动. 用这个非惯生参考系，对于质量为 $2m$ 的质点，除受弹簧力这个真实力外，还受到惯性力：惯性离轴力、$-2m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'$ 和科里奥利力，后两个惯性力不做功，用有效势能考虑弹簧力和惯性离轴力做的功.

机械能(包括动能和有效势能)守恒，

$$\frac{1}{2}(2m)\dot{r}'^2+\frac{1}{2}(3k)\left(r'-\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{(2m)h'^2}{2r'^2}=\frac{(2m)h'^2}{2\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)^2}$$

其中
$$h'=\frac{1}{6}V\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{18}aV$$

当 $r'=r'_{\max}=a$ 时，$\dot{r}'=0$，把它们及 $h'=\frac{1}{18}aV$ 代入上式，可解出

$$V=3a\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

6.4.3 一个质量为 m 的中子以速率 v 与一个质量为 M 的静止的原子发生弹性碰撞. 试用静参考系和作为两体问题引入折合质量的办法，证明碰后原子的最大速率为 $V=\dfrac{2m}{m+M}v$.

证明 方法一：用静参考系，要碰后原子得到最大速率只能是正碰.

设正碰后中子的速度为 v'，原子的速度为 V，均沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向为正.

由动量守恒和机械能守恒，

$$mv'+MV=mv$$

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}mv^2$$

解出
$$V=\frac{2m}{m+M}v$$

关于正碰时原子获得的速率最大说明如下：将中子的碰前速度$\boldsymbol{v}$按碰撞时连心线方向及其垂直的方向分解：

$$mv'_{/\!/}+MV=mv\cos\theta \tag{1}$$

$$mv'_{\perp}=mv\sin\theta \tag{2}$$

其中θ是$\boldsymbol{v}$与连心线间的夹角，

$$\frac{1}{2}m(v'^2_{/\!/}+v'^2_{\perp})+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

式(1)的平方＋式(2)的平方－式(3)×$2m$，约去各项的MV，可得

$$MV+2mv'_{/\!/}-mV=0 \tag{4}$$

用式(1)消去式(4)中的$v'_{/\!/}$，可得

$$MV+2(mv\cos\theta-MV)-mV=0$$

$$V=\frac{2mv\cos\theta}{m+M}$$

显然当$\cos\theta=1$，即$\theta=0$，发生正碰时，V最大，且为$V=\frac{2mv}{m+M}$.

方法二：作为两体问题．采用中子平动参考系，原子的质量改用折合质量$\mu=\frac{mM}{m+M}$.

考虑正碰，碰前原子的速度为$-v$，因弹性碰撞，改用折合质量后也有机械能守恒，碰后原子的速度为v.

碰后中子对静参考系的速度不再是v，设为v'，由静参考系中中子、原子系统动量守恒，

$$mv'+M(v'+v)=mv$$

其中$v'+v$是碰后原子对静参考系的速度，

$$v'=\frac{m-M}{m+M}v$$

碰后原子在静参考系中的速度为

$$V=v'+v=\frac{m-M}{m+M}v+v=\frac{2m}{m+M}v$$

在方法一中，采用静参考系，证明了要使原子获得最大速率必须是正碰．在方法二中，作为两体问题，要作这样的证明是困难的，因为要求碰后中子的速度，还得用静参考系．

一般地讲，不受外力的两个质点系统，如求与它们的相对运动有关的量，作为两体问题处理较为有利，如求一个质点的绝对运动有关的量，作为两体问题处理没有优越性．

6.4.4　两个质量分别为m_1和m_2的行星围绕太阳做长半轴分别为a_1和a_2的椭圆轨道运动，证明它们的周期比为

$$\frac{T_1}{T_2}=\left[\frac{a_1^3(M+m_2)}{a_2^3(M+m_1)}\right]^{1/2}$$

其中 M 是太阳的质量.

证明 可以证明,对于平方反比律力作用下的有心运动,有下列形式的运动微分方程:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{m\alpha}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

$\alpha>0$,且做椭圆轨道运动,则运动周期

$$T=\frac{2\pi}{\alpha^{1/2}}a^{3/2}$$

其中 a 是椭圆轨道的长半轴.

今考虑太阳的质量 M 不大于行星的质量 m,则取太阳平动参考系,用折合质量 $\dfrac{mM}{m+M}$取代行星质量 m,行星的运动微分方程可写为

$$\frac{mM}{m+M}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{GmM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

将式(2)改写成式(1)形式,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{m+M}{M}\cdot\frac{GmM}{r^3}\boldsymbol{r}=-\frac{mG(m+M)}{r^3}\boldsymbol{r}$$

把等号右边写成$-\dfrac{m\alpha}{r^3}\boldsymbol{r}$,其中 $\alpha=G(m+M)$,则

$$T=\frac{2\pi}{\alpha^{1/2}}a^{3/2}=\frac{2\pi}{[G(m+M)]^{1/2}}a^{3/2}$$

所以

$$T_1=\frac{2\pi}{[G(m_1+M)]^{1/2}}a_1^{3/2}$$

$$T_2=\frac{2\pi}{[G(m_2+M)]^{1/2}}a_2^{3/2}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\left[\frac{a_1^3(m_2+M)}{a_2^3(m_1+M)}\right]^{1/2}$$

6.4.5 质量分别为 $4m$ 和 m 的两质点 A 和 B 能沿 x 轴无摩擦地运动,两质点间有大小为 kr 的相互吸引力,其中 k 是正值常量,r 是两质点间的距离. $t=0$ 时,质点 A 位于 $x=5a$处,质点 B 位于 $10a$ 处,均处于静止状态. 求:

(1) 两质点发生碰撞的 x 值;

(2) 在将发生碰撞的时刻两质点的相对速度;

(3) 如碰撞是弹性的,碰撞后到再次发生碰撞经历的时间.

解 (1) 取质点 A 参考系,质点 B 的运动微分方程为

$$\frac{4m\cdot m}{4m+m}\ddot{r}=-kr,\quad 即\quad \frac{4}{5}m\ddot{r}+kr=0$$

$t=0$ 时, $x_1=5a$, $x_2=10a$, $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$,

$$r=x_2-x_1=5a,\quad \dot{r}=\dot{x}_2-\dot{x}_1=0$$

微分方程的通解为

$$r=C\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t+\alpha\right)$$

由初条件定出 $C=5a$，$\alpha=0$.

$$r=5a\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right) \tag{1}$$

$$\dot{x}_2-\dot{x}_1=\dot{r}=-5a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right) \tag{2}$$

由动量守恒，

$$4m\dot{x}_1+m\dot{x}_2=0 \tag{3}$$

由式(2)、(3)两式解出

$$\dot{x}_1=a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)$$

积分上式，用初始条件：$t=0$ 时，$x_1=5a$，得

$$x_1=5a+\int_0^t a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=5a-a\left[\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)-1\right]$$

碰撞时，$r=0$，由式(1)知，此时 $t=t_1$，

$$\sqrt{\frac{5k}{4m}}t_1=\frac{\pi}{2},\quad t_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4m}{5k}}=\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}$$

$$x_1=5a-a\left[\cos\frac{\pi}{2}-1\right]=6a$$

自然，碰撞时，$x_2=x_1=6a$.

(2) 在将发生碰撞的时刻，相对速率为

$$|\dot{x}_2(t_1)-\dot{x}_1(t_1)|=\left|-5a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t_1\right)\right|$$

$$=\left|-5a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\right|=\frac{5a}{2}\sqrt{\frac{5k}{m}}$$

(3) 方法一：考虑到完全弹性碰撞，$\dot{x}_2$、$\dot{x}_1$ 在碰撞后仅改变正负号，$\dot{r}$ 也因此改变正负号. 式(2)的定义域为 $0\leqslant t\leqslant t_1$，

$$\dot{r}=5a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)\quad t_1\leqslant t<t_2$$

t_2 是再次发生碰撞的时刻.

上式对 t 积分，积分下限为 $t=t_1=\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}$，则

$$r=\int_{\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}}^t\dot{r}\,\mathrm{d}t=\int_{\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}}^t 5a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)\mathrm{d}t=-5a\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)$$

再次发生碰撞时，$r=0$，$t=t_2$，所以

$$\sqrt{\frac{5k}{4m}}t_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad t_2 = 3\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}$$

相继两次碰撞间经历的时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3\pi\sqrt{\frac{m}{5k}} - \pi\sqrt{\frac{m}{5k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}$$

方法二:和方法一不同之处仅在时间的零点重新规定. 令第一次碰撞时为 $t=0$.

考虑到完全弹性碰撞. $t=0$ 时,$\dot{x}_1=-a\sqrt{\frac{5k}{4m}}$,$\dot{x}_2=-4\dot{x}_1=4a\sqrt{\frac{5k}{4m}}$,$t$ 时刻,

$$\dot{x}_1 = -a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\sin\left[\sqrt{\frac{5k}{4m}}(t+t_1)\right] = -a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)$$

$$\dot{x}_2 = 4a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)$$

$$\dot{r} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 5a\sqrt{\frac{5k}{4m}}\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)$$

$$r = \int_0^t \dot{r}\,\mathrm{d}t = 5a\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t\right)$$

再次发生碰撞时,

$$\sqrt{\frac{5k}{4m}}t = \pi$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{4m}{5k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}$$

6.4.6 质量分别为 m 和 M 的两个质点分别连在一个原长为 a、劲度系数为 k 的轻弹簧的两端,开始两质点均处于静止状态,m 位于 M 正上方 a 处. $t=0$ 时给 m 一个竖直向上的速率 v,求以后任何时刻两质点的位置.

解 采用 M 平动参考系,取固连于它的 y 坐标,原点取在质点 M 处,向上为正.

另一质点的运动微分方程为

$$\frac{mM}{m+M}\ddot{y} = -k(y-a)$$

初始条件:$t=0$ 时,$y=a$,$\dot{y}=v$,解得

$$y = a + v\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}\sin\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t\right)$$

用静参考系,由质心运动定理,

$$(m+M)\ddot{x}_c = -(m+M)g$$

x 轴是固定的竖直向上的坐标,原点取在 $t=0$ 时质点 M 所在位置,则

$t=0$ 时,$x_c=\frac{m}{m+M}a$,$\dot{x}_c=\frac{m}{m+M}v$,积分得

$$x_c=\frac{ma}{m+M}+\frac{mv}{m+M}t-\frac{1}{2}gt^2$$

m、M 两质点的位置为

$$x_m=x_c+\frac{M}{m+M}y$$

$$=a+\frac{mv}{m+M}t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{Mv}{m+M}\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}\sin\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t\right)$$

$$x_M=x_c-\frac{m}{m+M}y$$

$$=\frac{mv}{m+M}t-\frac{1}{2}gt^2-\frac{mv}{m+M}\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}\sin\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}t\right)$$

6.4.7　质量为 m、带电荷 e 的两个相同的带电粒子，开始相距很远，一个粒子是静止的，另一个以速率 v、瞄准距离 $\rho=2ke^2/mv^2$ 向静止的粒子方向运动. 求质心系中和实验室参考系中的散射角 θ_c、θ_r，两粒子的最近距离及最近距离时两粒子的相对速率和绝对速率，其中 k 是 $F=\frac{ke^2}{r^2}$中的系数.

解　方法一：采用散射粒子平动参考系，

$$\mu=\frac{m\cdot m}{m+m}=\frac{1}{2}m$$

$$F=\frac{ke^2}{r^2}=-\frac{\mu\alpha}{r^2}=-\frac{1}{2}m\left(\frac{ke^2}{-\frac{1}{2}m}\right)\frac{1}{r^2}$$

$$\alpha=-\frac{2ke^2}{m}<0$$

$$h=\rho v=\frac{2ke^2}{mv^2}v=\frac{2ke^2}{mv}$$

$$E=\frac{1}{2}\mu v^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{4}mv^2$$

用平方反比律力作用下运动学方程的公式，因 $\alpha<0$，用公式 $r=\dfrac{h^2/(-\alpha)}{-1+\frac{Ah^2}{(-\alpha)}\cos\varphi}$（参看《经典力学》上册，强元棨编著. 科学出版社. §4.4）

$$r_{12}=\frac{h^2/(-\alpha)}{-1+e\cos\varphi_{12}}$$

$$\frac{h^2}{-\alpha}=\left(\frac{2ke^2}{mv}\right)^2\Big/\frac{2ke^2}{m}=\frac{2ke^2}{mv^2}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2h^2E}{m\alpha^2}}=\sqrt{1+\frac{2\left(\frac{2ke^2}{mv}\right)^2\cdot\frac{1}{4}mv^2}{m\left(-\frac{2ke}{m}\right)^2}}=\sqrt{2}$$

$$r_{12}=\frac{2ke^2/mv^2}{-1+\sqrt{2}\cos\varphi_{12}}$$

当 $\varphi_{12}=0$ 时，$$r_{12}=r_{\min}=\frac{2ke^2}{mv^2}(1+\sqrt{2})$$

当 $-1+\sqrt{2}\cos\varphi_{12}=0$ 时，$r_{12}\to\infty$，

$$\varphi_{12}(\infty)=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\pi}{4}$$

$$\theta_c=\theta_{12}=\pi-2|\varphi_{12}(\infty)|=\frac{\pi}{2}$$

由实验室参考系中的散射角 θ_r 与质心平动参考系中的散射角 θ_c 之间的关系

$$\tan\theta_r=\frac{\sin\theta_c}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\theta_c}=1,\quad \theta_r=\frac{\pi}{4}$$

其中 m_1、m_2 分别是被散射粒子和散射粒子的质量，这里 $m_1=m_2=m$.

最近距离处两粒子的相对速率为 v_r，

$$v_r\cdot r_{\min}=h$$

$$v_r=\frac{h}{r_{\min}}=\frac{2ke^2/mv}{2ke^2(1+\sqrt{2})/mv^2}=\frac{v}{1+\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)v$$

设粒子 1、2 相对于质心平动参考系的速度分别为$\boldsymbol{v}_{1c}$、$\boldsymbol{v}_{2c}$，它们是平行的，方向相反，因为 $$m_1=m_2=m,\quad v_{1c}=v_{2c},$$

$$v_r=v_{1c}-(-v_{2c})=v_{1c}+v_{2c}=2v_{1c}$$

所以 $$v_{1c}=v_{2c}=\frac{1}{2}v_r=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)v$$

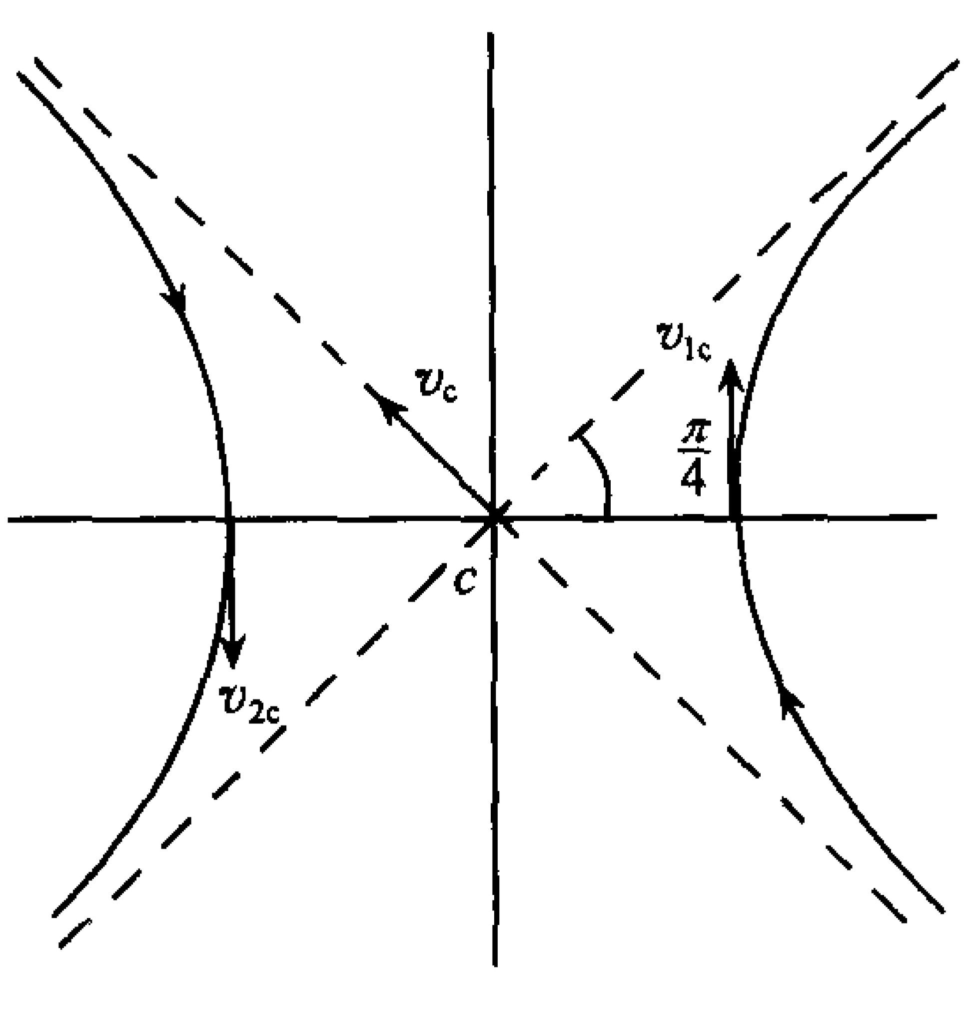


图 6.32

由图 6.32 可知，在 $r=r_{\min}$处，

$\boldsymbol{v}_c$ 与$\boldsymbol{v}_{1c}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，$\boldsymbol{v}_c$ 与$\boldsymbol{v}_{2c}$的夹角为$\frac{3}{4}\pi$.

$$v_c=\frac{mv}{m+m}=\frac{1}{2}v$$

$$v_1^2=v_c^2+v_{1c}^2+2v_cv_{1c}\cos\frac{\pi}{4}=v^2\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$$

$$v_1=\frac{v}{2}\sqrt{3(2-\sqrt{2})}$$

$$v_2^2=v_c^2+v_{2c}^2+2v_cv_{2c}\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{4}v^2(2-\sqrt{2})$$

$$v_2=\frac{1}{2}v\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

方法二：采用质心平动参考系，

$$F=\frac{ke^2}{r^2}=\frac{ke^2}{(2r')^2}=\frac{ke^2}{4r'^2}=-\frac{m\alpha'}{r'^2}$$

$$\alpha'=-\frac{ke^2}{4m}$$

$$h'=\rho'v'=\frac{1}{2}\rho\cdot\frac{1}{2}v=\frac{1}{4}\rho v=\frac{ke^2}{2mv}$$

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{8}mv^2$$

$$e' = \sqrt{1 + \frac{2h'^2E'}{mv'^2}} = \sqrt{2}$$

$$r' = \frac{h'^2/(-\alpha')}{-1 + e\cos\varphi_c} = \frac{ke^2/mv^2}{-1 + \sqrt{2}\cos\varphi_c}$$

$$r'_{\min} = \frac{ke^2/mv^2}{-1 + \sqrt{2}} = \frac{ke^2}{mv^2}(\sqrt{2} + 1)$$

在 $r' = r'_{\min}$ 处，

$$v'_{1c} = \frac{h'}{r'_{\min}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)v$$

由 $r'(\varphi_c)$ 的表达式可知，当 $\sqrt{2}\cos\varphi_c = 1$ 时，$r' \to \infty$，由此得出，

$$\varphi_c(\infty) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{\pi}{4}$$

在质心平动参考系中粒子 1 的散射角（考虑到对称性，也是粒子 2 的散射角）为

$$\theta_c = \pi - 2|\varphi_c(\infty)| = \frac{\pi}{2}$$

两粒子的相对速率为

$$v_r = 2v_{1c} = (\sqrt{2} - 1)v$$

以下求两粒子的绝对速率 v_1、v_2 同方法一.

方法三：用散射粒子平动参考系，不同于方法一之处在于不用关于平方反比律力作用下运动学方程的公式，而用 $r_{\min}$ 满足的方程和比耐公式：

$$\mu = \frac{1}{2}m, \quad h = \rho v = \frac{2ke^2}{mv}$$

$r_{\min}$ 满足的方程 $U(r_{\min}) = E$（其中 U 为被散射粒子的有效势能），具体写为

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}m\left(\frac{2ke^2}{mv}\right)^2\frac{1}{r_{\min}^2} + \frac{ke^2}{r_{\min}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mv^2$$

这里用了在 $r = r_{\min}$ 处 $\dot{r} = 0$. 解出 $r_{\min}$ 为

$$r_{\min} = \frac{2ke^2}{mv^2}(1 + \sqrt{2})$$

（已舍去了另一无物理意义的负根）.

$$v_r = \frac{h}{r_{\min}} = (\sqrt{2} - 1)v$$

由比耐公式，

$$-\frac{1}{2}m\left(\frac{2ke^2}{mv}\right)^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u\right) = ke^2u^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{mv^2}{2ke^2}$$

令 $u' = u + \frac{mv^2}{2ke^2}$，上述方程变为

$$\frac{d^2u'}{d\varphi^2}+u'=0$$

$$u'=A\cos\varphi,\quad u=-\frac{mv^2}{2ke^2}+A\cos\varphi$$

当 $\varphi=0$ 时，$u=u_{\max}$，

$$u_{\max}=\frac{1}{r_{\min}}=\frac{mv^2}{2ke^2(1+\sqrt{2})}$$

由此定出

$$A=\frac{\sqrt{2}\,mv^2}{2ke^2}$$

$$u=-\frac{mv^2}{2ke^2}+\frac{\sqrt{2}\,mv^2}{2ke^2}\cos\varphi$$

$r\to\infty$时，$u=0$，此时 $\varphi=\varphi(\infty)$，

$$\cos\varphi(\infty)=\frac{\dfrac{mv^2}{2ke^2}}{\dfrac{\sqrt{2}\,mv^2}{2ke^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi(\infty)=\pm\frac{\pi}{4}$$

以下同方法一.

6.5 变质量质点的运动

6.5.1 初始质量为 m_0 的火箭在均匀重力场中以不变加速度 ng(其中 g 是重力加速度)铅直地上升，不计空气阻力，燃气喷射的相对速率 v_r 不变，求火箭质量的变化规律.

解

$$m\frac{dv}{dt}+v_r\frac{dm}{dt}=-mg$$

$$\frac{dv}{dt}=ng$$

$$v_r\frac{dm}{dt}=-m(n+1)g$$

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=-\int_0^t\frac{(n+1)g}{v_r}dt$$

$$m=m_0\exp\left(-\frac{n+1}{v_r}gt\right)$$

6.5.2 火箭在均匀重力场中以不变的加速度 a 向上运动，不计空气阻力，燃气喷射的相对速率 v_r 不变. 求火箭质量降为二分之一所需的时间.

解

$$m\frac{dv}{dt}+v_r\frac{dm}{dt}=-mg,\quad \frac{dv}{dt}=a$$

$$v_r\frac{dm}{dt}=-m(g+a)$$

$$-\int_{m_0}^{\frac{1}{2}m_0}\frac{dm}{m}=\int_0^t\frac{g+a}{v_r}dt$$

$$\ln\left(\frac{m_0}{\frac{1}{2}m_0}\right) = \frac{g+a}{v_r}t$$

其中 t 为火箭质量降为二分之一所需的时间.

$$t = v_r\ln 2/(g+a)$$

6.5.3　初速为零的变质量质点，以不变的加速度 a 沿水平方向运动，燃气喷射的相对速率 v_r 是常量，不计阻力，求质量减为 $\frac{1}{k}$ 时所走过的路程.

解

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a$$

$$\int_{m_0}^{\frac{1}{k}m_0}\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\int_0^t\frac{a}{v_r}\mathrm{d}t$$

$$\ln\frac{1}{k} = -\frac{a}{v_r}t$$

$$t = \frac{1}{a}v_r\ln k$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2a}(v_r\ln k)^2$$

6.5.4　如上题的变质量质点受到滑动摩擦力，摩擦因数为 μ. 求所走过的路程.

解

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\mu mg$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$$

$$\int_{m_0}^{\frac{1}{k}m_0}\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\int_0^t\frac{\mu g+a}{v_r}\mathrm{d}t$$

$$\ln\frac{1}{k} = -\frac{\mu g+a}{v_r}t$$

$$t = \frac{1}{\mu g+a}v_r\ln k$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{a(v_r\ln k)^2}{2(\mu g+a)^2}$$

6.5.5　初始质量为 m_0 的火箭在自由空间由静止出发，火箭的排气速率为常量 v_0，求火箭的动量达到最大值时火箭的剩余质量.

解

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$$v_r = v_0$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v_0\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^v\mathrm{d}v = -\int_{m_0}^m v_0\frac{\mathrm{d}m}{m},\quad v = -v_0\ln\frac{m}{m_0}$$

$$p = mv = -mv_0\ln\frac{m}{m_0}$$

火箭的动量为最大值时，有$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m}=0$，即

$$-v_0\ln\frac{m}{m_0}-v_0=0$$

$$\ln\frac{m}{m_0}=-1,\quad \frac{m}{m_0}=\mathrm{e}^{-1}$$

所以此时火箭的剩余质量为

$$m=\frac{m_0}{e}$$

6.5.6 一火箭无初速、垂直向上发射.它靠喷射质量推进，相对于火箭喷射速率 u 不变，质量变化率为常量，此常量由火箭的初加速度为零确定，设重力加速度为常量.求：

(1) 火箭的加速度与时间的关系；

(2) 火箭的高度与时间的关系(不必求出积分).

解 (1)

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-mg$$

设 $t=0$ 时 $m=m_0$，又因$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=$常量，$t=0$ 时$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，在 $t=0$ 时用上式，

$$u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-m_0g,\quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\frac{m_0}{u}g$$

积分上式，可得火箭质量 m 随时间的变化关系：

$$m=m_0-\frac{m_0}{u}gt$$

用 m、$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$与 t 的关系，运动微分方程可改写为

$$\left(m_0-\frac{m_0g}{u}t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0g^2}{u}t$$

$$\left(1-\frac{g}{u}t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g^2}{u}t$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g^2t}{u-gt}$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g^2t}{u-gt}$$

$$\begin{aligned}v&=\int_0^t\frac{g^2t}{u-gt}\mathrm{d}t\\&=g\left[\int_0^t\frac{-u+gt}{u-gt}\mathrm{d}t+u\int_0^t\frac{1}{u-gt}\mathrm{d}t\right]\\&=-gt+u\ln\frac{u}{u-gt}\end{aligned}$$

$$h=\int_0^t v\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}gt^2+u\int_0^t\ln\frac{u}{u-gt}\mathrm{d}t$$

到此已符合题目要求，其实积分也不难积，可得

$$h=-\left(ut+\frac{1}{2}gt^2\right)+\frac{u}{g}(u+gt)\ln\frac{u}{u-gt}$$

6.5.7　质量为 M_0 并装了质量为 m_0 的燃料的火箭船在均匀重力场中垂直起飞，如图 6.33 所示. 相对于火箭船以速率 u_0 喷射燃料，在 T_0 时间内全部喷出. 求 T_0 时火箭船的速度.

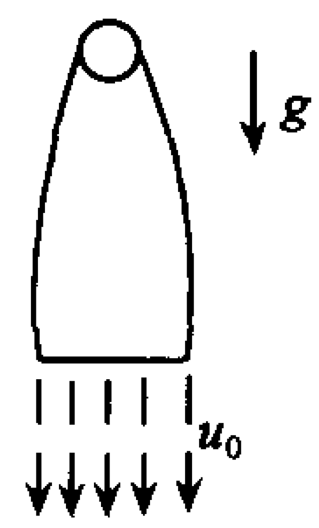


图 6.33

解　设 M 是火箭船(包括尚未喷出的燃料)的质量，

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+u_0\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-Mg$$

$$\mathrm{d}v=-g\mathrm{d}t-\frac{u_0}{M}\mathrm{d}M$$

$$\int_0^v\mathrm{d}v=-g\int_0^{T_0}\mathrm{d}t-u_0\int_{M_0+m_0}^{M_0}\frac{1}{M}\mathrm{d}M$$

$$v(T_0)=-gT_0+u_0\ln\frac{M_0+m_0}{M_0}$$

6.5.8　一个瞬时质量为 m 的火箭受到一个恒定推力 F 的作用，此推力是由发射推进剂取得的，发射的相对速率较大，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$较小，推力总沿速度方向. 火箭沿在一个平面内的近似螺旋线的轨道从开始离地球中心距离 r_1 运动到 r_2，r_1 与地球半径 r_0 接近，那里的重力加速度为 g_0，$r_2\gg r_0$，火箭离地球中心的角坐标为 φ.

(1) 火箭的单位质量角动量是否是运动常数？

(2) 导出关于瞬时速率和重力加速度用 r、r_0、$\dot r$ 及 $\dot\varphi$表达的式子；

(3) 导出用上述各量及 m 表示的 $\ddot r$ 及 $\ddot\varphi$ 的表达式.

解　(1) 在火箭运动的平面取极坐标系，原点位于地球中心.

火箭的角动量 $J=mr^2\dot\varphi$，单位质量角动量为 $j=\frac{J}{m}=r^2\dot\varphi$；受到的力，重力是有心力，推力不是有心力，合力不是有心力，对地球中心的力矩不为零，j 显然不是运动常数.

(2) 瞬时速率的表达式为

$$v=\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}$$

重力加速度的表达式为

$$g=\frac{GM}{r^2}=\frac{GM}{r_0^2}\frac{r_0^2}{r^2}=g_0\frac{r_0^2}{r^2}$$

(3)

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{g}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+m\boldsymbol{g}=\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g}$$

将上式写成极坐标系的分量表达式，

$$m(\ddot r-r\dot\varphi^2)=\frac{F\dot r}{\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}}-\frac{mg_0r_0^2}{r^2}$$

$$m(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi)=\frac{Fr\dot\varphi}{\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}}$$

解出 $\ddot r$、$\ddot\varphi$即得它们用 r、r_0、$\dot r$、$\dot\varphi$和 m 表示的式子.

6.5.9 火箭在无引力场和无阻力的情况下做直线运动,设火箭的初始质量为 m_0,最终质量为 m_1,喷射的相对速率为常量 v_r. 求从开始到全部燃料烧完时推力所做的功.

解
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\mathrm{d}v=-v_r\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$v=-v_r\ln\frac{m}{m_0}$$

$$W=\int\left(-v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)v\mathrm{d}t=\int_{m_0}^{m_1}\left(-v_r\ln\frac{m}{m_0}\right)(-v_r)\mathrm{d}m$$

$$=v_r^2\left[\left(m\ln\frac{m}{m_0}\right)\Big|_{m_0}^{m_1}-\int_{m_0}^{m_1}m\frac{1}{m}\mathrm{d}m\right]$$

$$=v_r^2\left[m_1\ln\frac{m_1}{m_0}-(m_1-m_0)\right]=m_1v_r^2\left(\frac{m_0}{m_1}-1-\ln\frac{m_0}{m_1}\right)$$

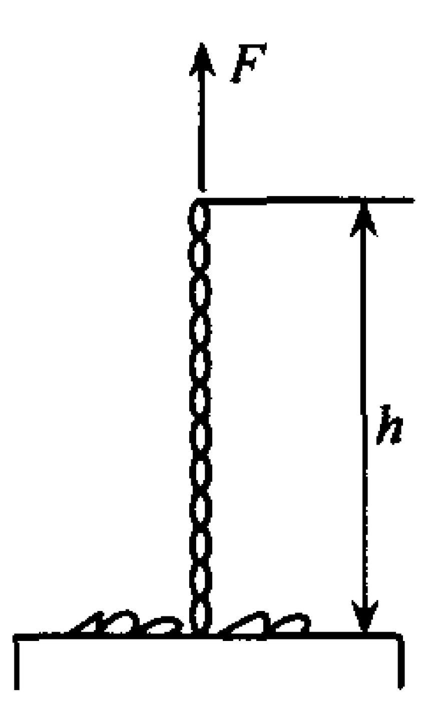


图 6.34

6.5.10 一根其上端受到一个向上的力 F 作用的线密度为 μ 的均质链条,垂直地下放到桌面上,如图 6.34 所示. 求桌面以上的链条端点高度 h 所满足的运动微分方程.

解
$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_m^{(e)}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}m}^{(e)}$$

取桌面以上的链条段为本体,则 $m=\mu h$,规定向上为正,$v=\dot{h}$,$u=0$

$$F_m^{(e)}=F-\mu hg,\quad F_{\mathrm{d}m}^{(e)}=N$$

其中 N 是桌面或已落到桌面上的链条段对微粒(将落到桌面上的链条元)的作用力

$$\mu h\ddot{h}+\dot{h}(\mu\dot{h})=F-\mu hg+N \tag{1}$$

对微粒在 $t\sim t+\Delta t$ 间用动量定理,

$$\mu(-\Delta h)(0-\dot{h})=N\Delta t \tag{2}$$

注意:由于本体与微粒分离时处于松弛状态,相互间无作用力.

由式(2)可得(令 $\Delta t\to 0$)

$$N=\mu\dot{h}^2 \tag{3}$$

将式(3)代入式(1),即得 h 满足的运动微分方程为

$$\mu h\dot{h}=F-\mu hg$$

方法二:由于微粒从本体分离时,对本体无作用力,可直接对 t 时刻的本体用牛顿运动第二定律,

$$\mu h\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F-\mu hg$$

$$v=\dot{h}$$

所以
$$\mu g\ddot{h}=F-\mu hg$$

6.5.11 火箭在真空和无引力情况下做直线运动,初始质量和最终质量分别为 m_0

和 m_1. 定义火箭的机械效率为燃料烧完后火箭的动能与所消耗的能量之比，问齐奥尔可夫斯基数 $z=\dfrac{m_0}{m_1}$ 多大时火箭的效率最大. 设喷射速率 v_r 不变.

解

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v=-\int_{m_0}^{m_1} v_r\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

燃料烧完后火箭的速度为

$$v=-v_r\ln\frac{m_1}{m_0}=v_r\ln\frac{m_0}{m_1}$$

燃料烧完后火箭的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1v^2=\frac{1}{2}m_1v_r^2\left(\ln\frac{m_0}{m_1}\right)^2$$

燃料烧完所消耗的能量等于 6.5.9 题中计算的从开始到全部燃料烧完时推力所做的功，

$$W=m_1v_r^2\left(\frac{m_0}{m_1}-1-\ln\frac{m_0}{m_1}\right)$$

火箭的机械效率为

$$\eta=\frac{T}{W}=\frac{\frac{1}{2}m_1v_r^2\left(\ln\frac{m_0}{m_1}\right)}{m_1v_r^2\left(\frac{m_0}{m_1}-1-\ln\frac{m_0}{m_1}\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{(\ln z)^2}{(z-1-\ln z)}$$

η 最大所要求的 z 值满足下列方程：

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z}=0$$

即

$$\frac{1}{z}(z-1-\ln z)-\frac{1}{2}\ln z\left(1-\frac{1}{z}\right)=0$$

化简后可得

$$\ln z=\frac{2(z-1)}{z+1}$$

用牛顿法可得齐奥尔可夫斯基数 $z=\dfrac{m_0}{m_1}=1.031$ 时火箭的机械效率最大，$\eta=0.9898$.

6.5.12　物体沿水平轨道滑行，燃气以不变的相对于物体的速率 v_r 铅直地向下排出，物体的初速度为 v_0. 设物体的质量按规律 $m=m_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$(其中 α 为常量)变化，滑动摩擦因数为 μ，求此物体速度和位移的变化规律. 又问：当 α 值多大时，物体将以不变的速度运动？

解

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_m^{(e)}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}m}^{(e)} \tag{1}$$

$$m=m_0\mathrm{e}^{-\alpha t},\quad \boldsymbol{v}=v\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v}_r=-v_r\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F}_m^{(e)}=-\mu N\boldsymbol{i}+(N-mg)\boldsymbol{j}=-\mu N\boldsymbol{i}+(N-m_0\mathrm{e}^{-\alpha t}g)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F}_{dm}^{(e)}=0$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 是沿水平向前方向的单位矢量，$\boldsymbol{j}$ 是沿竖直向上方向的单位矢量，N 是水平轨道的支持力.

式(1)的分量方程为

$$m_0 e^{-\alpha t}\frac{dv}{dt} = -\mu N \tag{2}$$

$$v_r\frac{dm}{dt} = N - m_0 e^{-\alpha t} g \tag{3}$$

由式(3)及 $m=m_0 e^{-\alpha t}$，可得

$$N = m_0 e^{-\alpha t} g - \alpha v_r m_0 e^{-\alpha t} = m_0(g-\alpha v_r)e^{-\alpha t}$$

将 N 代入式(2)，约去等号两边的共同因子 $m_0 e^{-\alpha t}$，

$$\frac{dv}{dt} = -\mu(g-\alpha v_r)$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_0^t \mu(g-\alpha v_r)dt$$

$$v = v_0 - \mu(g-\alpha v_r)t$$

$$s = \int_0^s v dt = v_0 t - \frac{1}{2}\mu(g-\alpha v_r)t^2$$

物体要以不变的速度运动，即$\frac{dv}{dt}=0$，则

$$g-\alpha v_r = 0,\quad \alpha = \frac{g}{v_r}$$

6.5.13 一球状尘埃在均匀密度的水蒸气云雾中形成液滴，降落时液滴上的沉积率正比于单位时间内液滴扫过的体积. 如果液滴在云雾中由静止开始运动，求液滴的加速度值.

解 水蒸气是静止的，故微粒的速度 $u=0$，

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = mg \tag{1}$$

$t=0$ 时，因尘埃的半径极小，形成的液滴的半径也是很小的，可作 $t=0$ 时，$r=0$ 近似.

设液滴的密度为 ρ，t 时液滴半径为 r，则

$$m(t) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \tag{2}$$

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}\rho \tag{3}$$

根据题意，液滴上的沉积率正比于单位时间内液滴扫过的体积，

$$\frac{dm}{dt} = \alpha\pi r^2 v \tag{4}$$

其中 α 为液滴扫过单位体积云雾时增加的质量.

比较式(3)、(4)两式，可得

$$v = \frac{4\rho}{\alpha}\frac{dr}{dt} \tag{5}$$

将式(2)、(4)、(5)代入式(1)，约去共同因子后，可得

$$r\ddot{r}+3\dot{r}^2=\frac{\alpha g}{4\rho}r$$

因为　$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}\dot{r}$，上式可改写为

$$r\dot{r}\,\mathrm{d}\dot{r}+3\dot{r}^2\mathrm{d}r=\frac{\alpha g}{4\rho}r\mathrm{d}r$$

$$\frac{1}{2}r\mathrm{d}\dot{r}^2+3\dot{r}^2\mathrm{d}r=\frac{\alpha g}{4\rho}r\mathrm{d}r$$

试用积分因子 $f(r)$，由恰当微分条件，$f(r)$应为下列常微分方程的解：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}rf(r)\right]=\frac{\partial}{\partial\dot{r}^2}[3\dot{r}^2f(r)]$$

$$\frac{1}{2}f(r)+\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}=3f(r)$$

$$r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}=5f(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{f}=5\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

解出

$$f(r)=r^5$$

$$\frac{1}{2}r\cdot r^5\mathrm{d}\dot{r}^2+3\dot{r}^2\cdot r^5\mathrm{d}r=\frac{\alpha g}{4\rho}r\cdot r^5\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}r^6\dot{r}^2\right)=\frac{\alpha g}{28\rho}\mathrm{d}r^7$$

用初始条件：$t=0$ 时，$r=0$，$\dot{r}=0$，积分上式得

$$\frac{1}{2}r^6\dot{r}^2=\frac{\alpha g}{28\rho}r^7$$

$$\dot{r}^2=\frac{\alpha g}{14\rho}r$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}=\sqrt{\frac{\alpha g}{14\rho}}\sqrt{r}$$

$$\int_0^r\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r}}=\int_0^t\sqrt{\frac{\alpha g}{14\rho}}\mathrm{d}t$$

$$2\sqrt{r}=\sqrt{\frac{\alpha g}{14\rho}}t,\quad r=\frac{\alpha g}{56\rho}t^2$$

用式(5)，

$$v=\frac{4\rho}{\alpha}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{7}gt$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{7}g$$

6.5.14　一质量为 m_0、横截面积为 A 的宇宙飞船以速度 v_0 航行，穿过一密度为 ρ 的处于静止状态的尘云，如尘埃粘贴到宇宙飞船上．求以后宇宙飞船的运动（设 A 不随时间变化）．

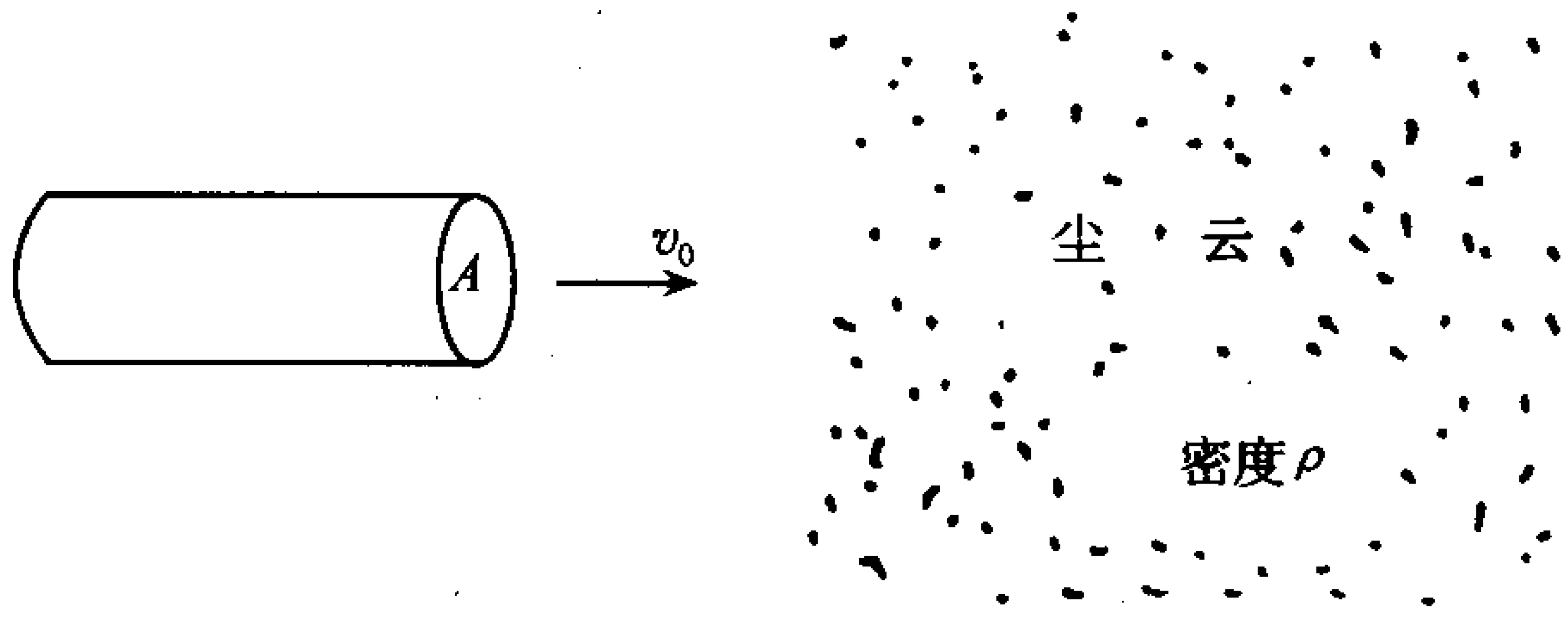


图 6.35

解　因尘埃是静止的，微粒的速度 $u=0$，

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=0$$

$$mv=m_0v_0$$

$$\mathrm{d}m=\rho vA\mathrm{d}t$$

因为

$$m=\frac{m_0v_0}{v}$$

$$\mathrm{d}m=-m_0v_0\frac{1}{v^2}\mathrm{d}v=\rho vA\mathrm{d}t$$

$$-\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^3}=\frac{\rho A}{m_0v_0}\int_0^t\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v_0^2}\right)=\frac{\rho A}{m_0v_0}t$$

解出

$$v^2=\frac{m_0v_0^2}{m_0+2\rho Av_0t}$$

$$v=\sqrt{\frac{m_0}{m_0+2\rho Av_0t}}v_0$$

$$s=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{\frac{m_0}{m_0+2\rho Av_0t}}v_0\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{m_0}}{\rho A}\left(\sqrt{m_0+2\rho Av_0t}-\sqrt{m_0}\right)$$

以上均取飞船进入尘云时为 $t=0$.

6.5.15　一股横截面积为 A、密度为 ρ，以绝对速度 v_0 在水平方向运动的水流中，无弹性地射中一质量为 m 的木块，即水离开木块时有相对于木块的水平速度分量为零. 若木块与它在其上滑动的水平面间的摩擦因数为 μ. 求木块的最终速度.

解　方法一：先作为变质量质点的运动问题来处理. 木块视为本体，入射到木块的水流是微粒 1，使本体质量增加，离开木块的水流是微粒 2，使本体的质量减少，总的结果，木块的质量不变.

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}=0$$

其中
$$\frac{dm_1}{dt}>0,\quad \frac{dm_2}{dt}<0$$
$$\frac{dm_1}{dt}=\rho(v_0-v)A$$

这是由 $t\sim t+dt$ 时间内,射到木块上的水的质量 $dm=\rho(v_0-v)Adt$ 得出的.
$$\frac{dm_2}{dt}=-\frac{dm_1}{dt}=-\rho(v_0-v)A$$

微粒 1 并入本体前的水平速度为 v_0,微粒 2 从本体分离后的水平速度为 v,与木块的速度相同,
$$m\frac{dv}{dt}+(v-v_0)\frac{dm_1}{dt}+(v-v)\frac{dm_2}{dt}=-\mu mg$$

代入$\frac{dm_1}{dt}$的表达式,上式变为
$$m\frac{dv}{dt}-\rho(v-v_0)^2A=-\mu mg$$

达到最终速度时,$\frac{dv}{dt}=0$,此时,
$$\rho(v-v_0)^2A=\mu mg$$

注意 $v<v_0$,
$$v_0-v=\left(\frac{\mu mg}{\rho A}\right)^{1/2}$$

木块的最终速度
$$v=v_0-\left(\frac{\mu mg}{\rho A}\right)^{1/2}$$

方法二:不用变质量质点的运动微分方程,而用质点系的动量定理.

考虑木块已达到最终速度 v 后的 dt 时间内对以木块和在此期间与之发生无弹性碰撞的水流为系统用动量定理.

在此 $t\sim t+dt$ 时间内,木块的动量无增量,水流的质量为 $\rho(v_0-v)Adt$,速度从 v_0 变为 v,水流的动量的增量为
$$\rho(v_0-v)Adt\cdot(v-v_0)=-\rho(v_0-v)^2Adt$$
它也是所述系统的动量增量,由动量定理,它应等于摩擦力对木块的冲量 $-\mu mgdt$,
$$-\rho(v_0-v)^2Adt=-\mu mgdt$$

解出
$$v=v_0-\left(\frac{\mu mg}{\rho A}\right)^{1/2}$$

6.5.16 一质量为 M(无水时)的水桶开始处于静止状态,桶中装有质量为 m 的水,通过一根绳子施以恒力 F 将桶从井中提上来,桶中的水以不变的速率从桶中漏出来,经过时间 T 桶变成空的.求变成空桶的瞬间桶的速度.

解 方法一:取水桶及桶中的水为变质量质点,

$t=0$ 时,该质点质量为 $M+m$. 桶中的水以不变的速率从桶中漏出,说明$\frac{dm}{dt}$为常量.

经过时间 T,桶中的水全部漏掉,可见桶中的水的质量为 $m-\frac{m}{T}t$. 系统在 t 时刻的质量为

$M+m-\frac{m}{T}t$.

水从桶中漏出时对桶的相对速度为零.变质量质点的运动微分方程为

$$\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F-\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)g$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^T\left(\frac{F}{M+m-\frac{m}{T}t}-g\right)\mathrm{d}t$$

$t=T$ 时,水桶的速度

$$v=-\frac{FT}{m}\ln\left(\frac{M+m-\frac{m}{T}T}{M+m}\right)-gT$$

$$=\frac{FT}{m}\ln\left(\frac{M+m}{M}\right)-gT$$

方法二:不用变质量质点的运动微分方程,而用对质点系(系统的质量必须是不变的)的动量定理.

这里考虑的系统是 t 时刻的水桶及桶中的水,在 $t\sim t+\mathrm{d}t$ 时间内用动量定理.

t 时刻,系统的质量为 $M+m-\frac{m}{T}t$,速度为 v,动量为$\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)v$;

$t+\mathrm{d}t$ 时刻,桶中的水有$\frac{m}{T}\mathrm{d}t$ 质量的水漏出.它们的速度为 v,动量为$\frac{m}{T}v\mathrm{d}t$,桶和桶中的水的质量为 $M+m-\frac{m}{T}t-\frac{m}{T}\mathrm{d}t$,速度为 $v+\mathrm{d}v$,它们的动量为$\left(M+m-\frac{m}{T}t-\frac{m}{T}\mathrm{d}t\right)(v+\mathrm{d}v)$,系统的动量为$\left(M+m-\frac{m}{T}t-\frac{m}{T}\mathrm{d}t\right)(v+\mathrm{d}v)+\frac{m}{T}v\mathrm{d}t$.

外力在此期间对系统的冲量为$\left[F-\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)g\right]\mathrm{d}t$.

由动量定理,

$$\left(M+m-\frac{m}{T}t-\frac{m}{T}\mathrm{d}t\right)(v+\mathrm{d}v)+\frac{m}{T}v\mathrm{d}t-\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)v$$
$$=\left[F-\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)g\right]\mathrm{d}t$$

略去二级小量,可得

$$\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)\mathrm{d}v=\left[F-\left(M+m-\frac{m}{T}t\right)g\right]\mathrm{d}t$$

以下积分略.

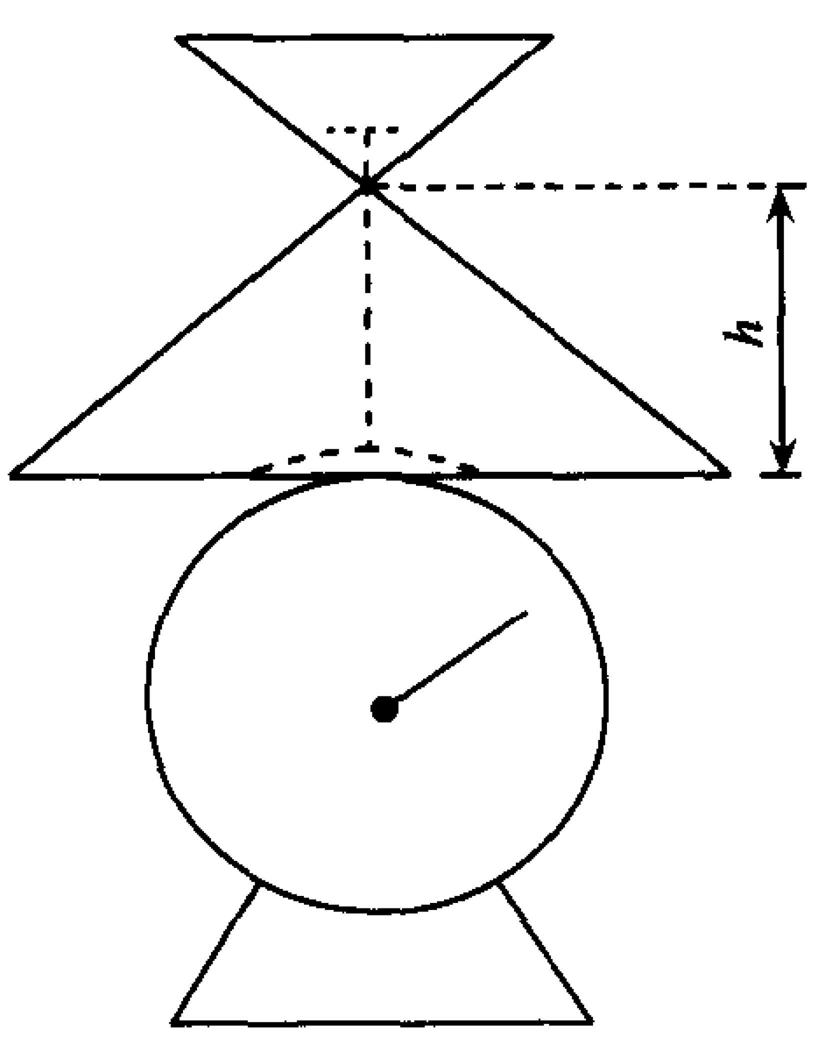


图 6.36

6.5.17　一个砂漏如图 6.36 所示,置于一个磅秤上,容器的质量为 M,砂子质量为 m.在 $t<0$ 时,砂子置于容器的上部;$t=0$ 时,打开中间的活门,让砂子下落,若单位时间内有 λ(正的常数)的砂子离开容器的上部,自由下落的距离为 h.问 $t\geqslant 0$ 时,磅秤的读数将如何变化?设砂子刚到达容器底部时,上部还有砂子.

解　砂子自由下落至底部所需时间为 t_1,

$$t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

设 $t=t_2$ 时，砂子刚全部离开容器上部，$t_2=\frac{m}{\lambda}$；$t=t_1+t_2$ 时，砂子刚全部到达底部.

$0\leqslant t\leqslant t_1$ 期间：

变质量质点取容器及在其上部的砂子，在此期间，底部尚无砂子.

变质量质点的质量为 $M+m-\lambda t$，速度 $v=0$ 不变，故$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，砂子离开上部时速度 $u=0$，

$$(M+m-\lambda t)\cdot 0+(0-0)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-N+(M+m-\lambda t)g$$

其中 N 是磅秤对容器的支持力，其数值也是磅秤的读数.

$$N=(M+m-\lambda t)g$$

$t_1\leqslant t<t_2$ 期间：

变质量质点取容器及其上部和已到达底部的砂子，在此期间，上部始终有离开下落的砂子，底部始终有到达的砂子，离开的砂子和到达的砂子始终相抵，变质量质点的质量为 $M+m-\lambda t_1$，始终不变. 有两种微粒：

一种微粒从本体中分离出来，$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}=-\lambda<0$ 分离后速度为零.

另一种微粒并入本体，$\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}=\lambda>0$，并入前速度为$\sqrt{2gh}$.

本体速度 v 和加速度$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$始终为零，

$$\begin{aligned}&(M+m-\lambda t_1)\cdot 0+(0-0)(-\lambda)+(0-\sqrt{2gh})\lambda\\=&-N+(M+m-\lambda t_1)g\end{aligned}$$

$$N=(M+m-\lambda t_1)g+\lambda\sqrt{2gh}$$

代入 $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，可得

$$N=(M+m)g$$

$t_2\leqslant t<t_1+t_2$ 期间：

变质量质点取容器和已到达底部的砂子，在此期间，容器上部已无砂子，变质量质点的质量为上一阶段的质量加上 $t\sim t_2$ 期间到达底部的砂子，故质量为 $M+m-\lambda t_1+\lambda(t-t_2)$，变质量质点的速度 $v=0$，加速度$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$.

只有一种微粒并入本体，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\lambda$，并入前微粒速度为$\sqrt{2gh}$，

$$\begin{aligned}&[M+m-\lambda t_1+\lambda(t-t_2)]\cdot 0+(0-\sqrt{2gh})\lambda\\=&-N+[M+m-\lambda t_1+\lambda(t-t_2)]g\end{aligned}$$

其中 $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，$t_2=\frac{m}{\lambda}$，

$$N=[M+m-\lambda t_1+\lambda(t-t_2)]g+\lambda\sqrt{2gh}=(M+\lambda t)g$$

$t\geqslant t_1+t_2$ 期间：

在此期间，砂子已全部到达容器底部，质点已不再是变质量的，质量为 $M+m$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，

$$(M+m)\cdot 0=-N+(M+m)g$$
$$N=(M+m)g$$

磅秤读数与时间的关系如图 6.37 所示.

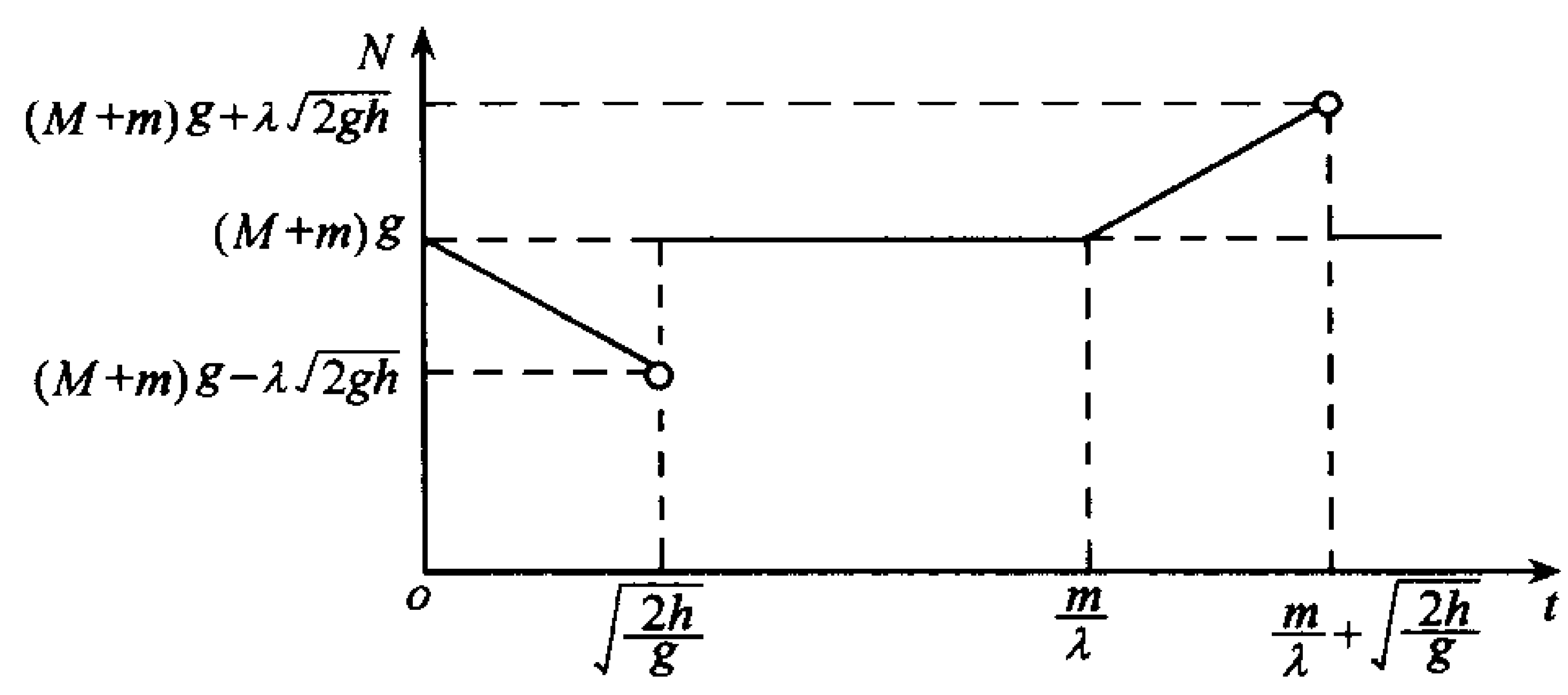


图 6.37

此题也可用质点系的动量定理求解.

6.6　位力定理

6.6.1　质点系中各质点的质量和矢径分别为 m_i 和 $\boldsymbol{r}_i$，分别受到净作用力 $\boldsymbol{F}_i$.

(1) 如果 $\sum\limits_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}_i$ 始终保持有限，证明位力定理：

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{r}_i}$$

其中 T 为系统的总动能，"——"表示对时间求平均；

(2) 对于一个质点只受平方反比有心力的情况，证明

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{V}$$

其中 V 是势能.

证明　(1) 令

$$S=\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\sum_i(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}_i+m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{r}_i+2T$$

在 $0\sim\tau$ 时间内求平均值，

$$\overline{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Big(\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{r}_i+2T\Big)\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{\tau}[S(\tau)-S(0)]=\overline{\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{r}_i}+\overline{2T}$$

如果运动是周期的，取 τ 为周期或周期的整数倍，则 $S(\tau)=S(0)$，如运动不是周期的，只要 τ 足够长，因 S 是有限的，上式左边等于零(周期运动)或趋于零(非周期运动)，

所以

$$\overline{\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i}+\overline{2T}=0$$

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i}$$

(2) 质点受平方反比有心力的情况，

$$\boldsymbol{F}=\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}$$

其中 k 为常量，

$$V=-\int_\infty^r \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_\infty^r \frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^\infty \frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int \frac{k}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{k}{r}$$

用位力定理，

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i}=-\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{r}}=-\frac{1}{2}\frac{\overline{k}}{r}=-\frac{1}{2}\overline{V}$$

注意：质点受平方反比有心力的情况，质点的运动轨道可能是椭圆，也可能是抛物线、双曲线，只有轨道是椭圆才符合位力定理成立的条件. 因此，对于质点受平方反比有心力的情况，如质点的运动轨道为抛物线或双曲线，$\overline{T}\neq -\frac{1}{2}\overline{V}$.

6.6.2 用位力定理解 6.1.15 题.

提示：在质心平动参考系中对系统中一个质点使用位力定理.

解 用 6.1.15 题已得到的、在质心平动参考系中质量为 m_1 的质点受到的力为

$$\boldsymbol{F}_1=-\frac{Gm_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\boldsymbol{r}_1$$

该质点绕系统质心作半径为 r_1 的圆周运动，动能为

$$T_1=\frac{1}{2}m_1(\omega r_1)^2$$

$$\boldsymbol{F}_1\cdot \boldsymbol{r}_1=-\frac{Gm_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}r_1^2$$

由位力定理，$\overline{T}_1=-\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{F}_1\cdot \boldsymbol{r}_1}$，并注意到 r_1 为常量，

$$\frac{1}{2}m_1(\omega r_1)^2=\frac{Gm_1(m_1+m_2+m_3)}{2a^3}r_1^2$$

∴

$$\omega=\sqrt{\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{a^3}}$$

6.6.3 有一群质量为 m 的粒子，它们围绕同一个中心做圆轨道运动，每个粒子具有相同的动能 T，作用力只有相互间的万有引力. 求粒子数密度与离中心的距离 r 间的函数关系(假设密度是球对称的).

解 由于粒子数密度和质量密度是球对称的，都围绕同一中心做圆周运动，处于做半径为 r 的圆周运动上的粒子，其势能如同处于中心的质量为 $M(r)$ 的粒子引起，$M(r)$ 是在半径为 r 的球内的粒子的总质量.

对这个粒子用位力定理，

$$V(r)=-\frac{GM(r)m}{r}$$

$$\boldsymbol{F}(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r=-\frac{GM(r)m}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

注意:$M(r)$中的 r 只是标记半径为 r 的球内的粒子总质量,求$\frac{\partial V}{\partial r}$时不对 $M(r)$求导.

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{F}(r)\cdot\boldsymbol{r}}$$

这个粒子做半径为 r 的圆周运动,

$$T=-\frac{1}{2}\left[-\frac{GM(r)m}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot r\boldsymbol{e}_r\right]=\frac{GM(r)m}{2r}$$

$$M(r)=\frac{2Tr}{Gm}$$

$$\mathrm{d}M(r)=\frac{2T}{Gm}\mathrm{d}r$$

用粒子数密度 $n(r)$来表达 $\mathrm{d}M(r)$,

$$\mathrm{d}M(r)=m\cdot n(r)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

所以

$$m\cdot n(r)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{2T}{Gm}\mathrm{d}r$$

$$n(r)=\frac{T}{2\pi Gm^2r^2}$$

6.6.4 证明:如果作用于质点系的力 $\boldsymbol{F}_i$ 是非摩擦力 $\boldsymbol{F}_i'$ 和正比于速度的摩擦力 $\boldsymbol{f}_i$ 之和,位力只与 $\boldsymbol{F}_i'$ 有关,没有来自 $\boldsymbol{f}_i$ 的贡献.

证明 由位力定理,

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{r}_i}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_i\boldsymbol{F}_i'\cdot\boldsymbol{r}_i}-\frac{1}{2}\overline{\sum_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{r}_i}$$

$$\begin{aligned}\sum_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{r}_i&=k\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}_i\\&=k\sum_i\frac{1}{2}m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i)=\frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\\\overline{\sum_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{r}_i}&=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{k}{2\tau}\left(\sum_i m_ir_i^2-\sum_i m_ir_{i0}^2\right)\end{aligned}$$

∵ $\sum_i m_ir_i^2$ 有限(这是位力定理适用范围要求的),即使不是周期运动,τ 足够长,上式右边趋于零,故有

$$\overline{\sum_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{r}_i}=0$$

$\boldsymbol{f}_i$ 对位力无贡献.

第七章　刚体动力学

7.1　刚体的平衡和平动

7.1.1　轴 AB 与铅直的 ζ 轴成 α 角，长度为 a 的悬臂 CD 垂直地固连在轴上，CD 与铅直面 ζAB 成 θ 角，如图 7.1 所示. 一铅直向下的力 $\boldsymbol{P}$ 作用于 D 点，求此力对 AB 轴的力矩.

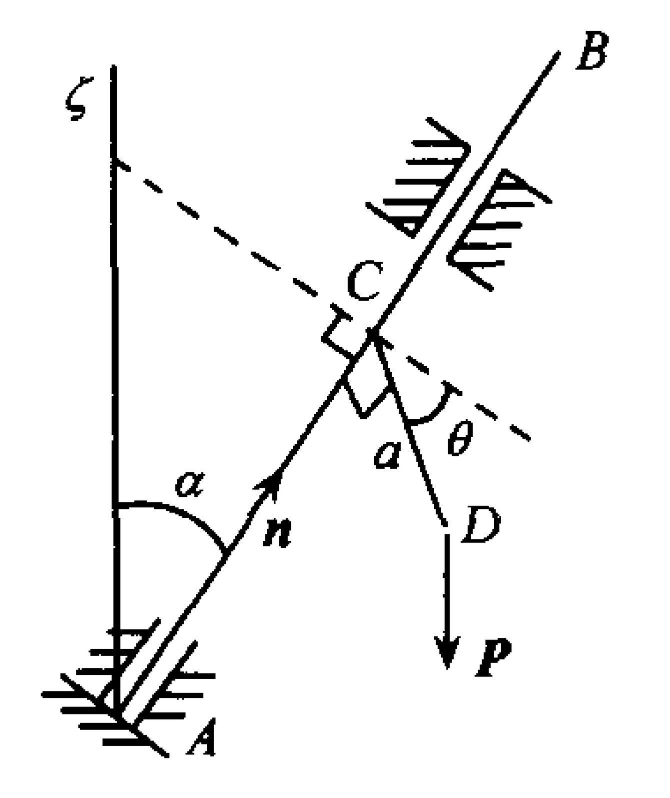


图 7.1

解　取坐标系 $\xi\eta\zeta$，AB 轴位于 $\eta\zeta$ 平面内，ξ 轴垂直纸面向上

$$\overrightarrow{CD} = a(\sin\theta\boldsymbol{\xi}^\circ + \cos\theta\cos\alpha\boldsymbol{\eta}^\circ - \cos\theta\sin\alpha\boldsymbol{\zeta}^\circ)$$

$$\boldsymbol{P} = -P\boldsymbol{\zeta}^\circ$$

AB 轴的单位矢量

$$\boldsymbol{n} = \sin\alpha\boldsymbol{\eta}^\circ + \cos\alpha\boldsymbol{\zeta}^\circ$$

力 $\boldsymbol{P}$ 对 $\overrightarrow{AB}$ 轴的力矩为

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \boldsymbol{n}\cdot(\overrightarrow{CD}\times\boldsymbol{P}) \\ &= (\sin\alpha\boldsymbol{\eta}^\circ + \cos\alpha\boldsymbol{\zeta}^\circ)\cdot[a(\sin\theta\boldsymbol{\xi}^\circ + \cos\theta\cos\alpha\boldsymbol{\eta}^\circ - \cos\theta\sin\alpha\boldsymbol{\zeta}^\circ)\times(-P\boldsymbol{\zeta}^\circ)] \\ &= (\sin\alpha\boldsymbol{\eta}^\circ + \cos\alpha\boldsymbol{\zeta}^\circ)\cdot[-aP\cos\theta\cos\alpha\boldsymbol{\xi}^\circ + aP\sin\theta\boldsymbol{\eta}^\circ] \\ &= aP\sin\alpha\sin\theta \end{aligned}$$

7.1.2　一个力系由三个力组成：$\boldsymbol{F}_1 = 3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k}$，作用于原点；$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，作用于(2,1,0)点；$\boldsymbol{F}_3 = 2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，作用于(0,−1,−2)点，力的单位为牛顿，坐标取米为单位. 问 a 取何值时，可等效于一个单力，该等效的单力作用线在何处?

解　$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$

$$= (3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})+(-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}) = 4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(3+a)\boldsymbol{k}$$

先取原点为矩心最方便，因为：第一，各力的作用点对矩心的位矢写起来方便；第二，有一个力的作用点就在原点，此力对此矩心的力矩为零.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_0 &= \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_3 \\ &= (2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times(-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}) + (-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}) = -9\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

要力系能等效于一个单力，必须 $\boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{M}_0$，即 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{M}_0 = 0$，

$$[4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(3+a)\boldsymbol{k}]\cdot(-9\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{k}) = 0$$

$$-36+9(3+a) = 0$$

得

$$a = 1$$

$$\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

设该单力的作用点位于 O' 点，即以 O 为简化中心时，力系等效于作用于 O 点的力 $\boldsymbol{F}$

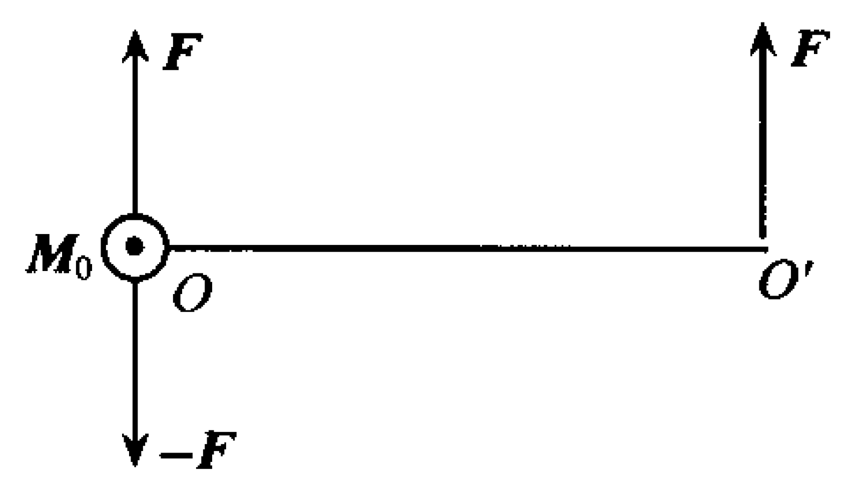


图 7.2

和力矩 $\boldsymbol{M}_0$，图 7.2 中所用符号表示力矩的方向垂直纸面向上，改用 O' 为简化中心，力系可简化为作用于 O' 点的一个单力. 因此 $\boldsymbol{M}_0$ 应等于作用于 O 点的力 $-\boldsymbol{F}$ 和作用于 O' 点的力 $\boldsymbol{F}$ 这一对力偶的力矩，

$$OO' = \frac{M_0}{F} \quad 或 \quad \overrightarrow{OO'} = \frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{M}_0}{F^2}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{4(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(-9\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{k})}{4^2+4^2+4^2} = \frac{3}{4}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

作用点 O' 为 $\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$，作用线方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{F}}{F} = \frac{4(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})}{\sqrt{4^2+4^2+4^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

作用线方程为

$$x = \frac{3}{4}+t,\quad y = -\frac{3}{2}+t,\quad z = \frac{3}{4}+t$$

其中 t 为参量.

在作用线上的任何点作为简化中心，力系都简化为一个单力.

7.1.3　一条螺旋线的弧形的金属丝，螺旋线的方程为 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=a\theta\tan\alpha$，$\theta$ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，金属丝每一线元 $\mathrm{d}s$ 受外力，大小为 $p\mathrm{d}s$，方向从线元作 z 轴的垂线离开 z 轴的指向. 证明整个金属丝所受的力等效于一个力螺旋的作用，作用线为 $x=y, z=\frac{1}{4}\pi a\tan\alpha$，并求这个力螺旋的螺距(螺距为沿作用线的主矩与主矢之比，力矩的正方向规定与主矢的正方向一致).

解　$\boldsymbol{F} = \int p(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})\mathrm{d}s$

$$\mathrm{d}s = [(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [(-a\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2+(a\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2+(a\tan\alpha\mathrm{d}\theta)^2]^{\frac{1}{2}} = a\sec\alpha\mathrm{d}\theta$$

$$\boldsymbol{F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})a\sec\alpha\mathrm{d}\theta$$

$$= pa\sec\alpha(\sin\theta\boldsymbol{i}-\cos\theta\boldsymbol{j})\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = pa\sec\alpha(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{M}_0 = \int \boldsymbol{r}\times p(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+a\theta\tan\alpha\boldsymbol{k})\times p(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})\cdot a\sec\alpha\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} pa^2\sec\alpha\tan\alpha(-\theta\sin\theta\boldsymbol{i}+\theta\cos\theta\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta$$

$$= pa^2\sec\alpha\tan\alpha\left[-\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\boldsymbol{j}\right]$$

将 $\boldsymbol{M}_0$ 按平行于 $\boldsymbol{F}$ 和垂直于 $\boldsymbol{F}$ 的方向分解，

$$M_{0/\!/}=\boldsymbol{M}_0\cdot\frac{\boldsymbol{F}}{F}=\boldsymbol{M}_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}pa^2\sec\alpha\tan\alpha\left(\frac{\pi}{2}-2\right)$$

$$\boldsymbol{M}_{0/\!/}=M_{0/\!/}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=\frac{1}{2}pa^2\sec\alpha\tan\alpha\left(\frac{\pi}{2}-2\right)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$=pa^2\sec\alpha\tan\alpha\left(\frac{\pi}{4}-1\right)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{M}_{0\perp}=\boldsymbol{M}_0-\boldsymbol{M}_{0/\!/}$$

$$=pa^2\sec\alpha\tan\alpha\left[-\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\boldsymbol{j}\right]-pa^2\sec\alpha\tan\alpha\left(\frac{\pi}{4}-1\right)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$=pa^2\sec\alpha\tan\alpha\left(-\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

简化中心从 O(原点)改为 O' 点，

$$\overrightarrow{OO'}=\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{M}_{0\perp}}{F^2}=a\tan\alpha\frac{(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})}{(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{4}a\pi\tan\alpha\boldsymbol{k}$$

力螺旋的作用点为 $(0,0,\frac{1}{4}a\pi\tan\alpha)$，作用线通过作用点，沿 $\boldsymbol{F}$ 的方向.

作用线方向的单位矢量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{F}}{F}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

作用线方程可写成

$$x=t,\quad y=t,\quad z=\frac{1}{4}a\pi\tan\alpha$$

消去参数 t，也可写成

$$x=y,\quad z=\frac{1}{4}a\pi\tan\alpha$$

$$\text{螺距}=\frac{M_{0/\!/}}{F}=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)a\tan\alpha$$

7.1.4　证明一个力系总能简化为通过一给定点 O 的一个力和作用在任一个给定的不包含 O 点的平面上的一个力.

证明　一个力系能简化为通过 O 点的一个力 $\boldsymbol{F}$ 和对 O 点的力矩 $\boldsymbol{M}_O$. 过 O 点作 $\boldsymbol{M}_O$ 的垂直平面 I，如图 7.3 所示，图中 O 点和 $\boldsymbol{M}_O$ 的作用线在纸面上，$\boldsymbol{F}$ 的作用线一般不在纸面上，平面 I 是垂直于纸面的，给定平面(图中未画)不垂直于纸面，给定平面与平面 I 的交线通过纸面上的 O' 点，交线不垂直于纸面. 这条交线就是要找的在一给定的不包含 O 点的

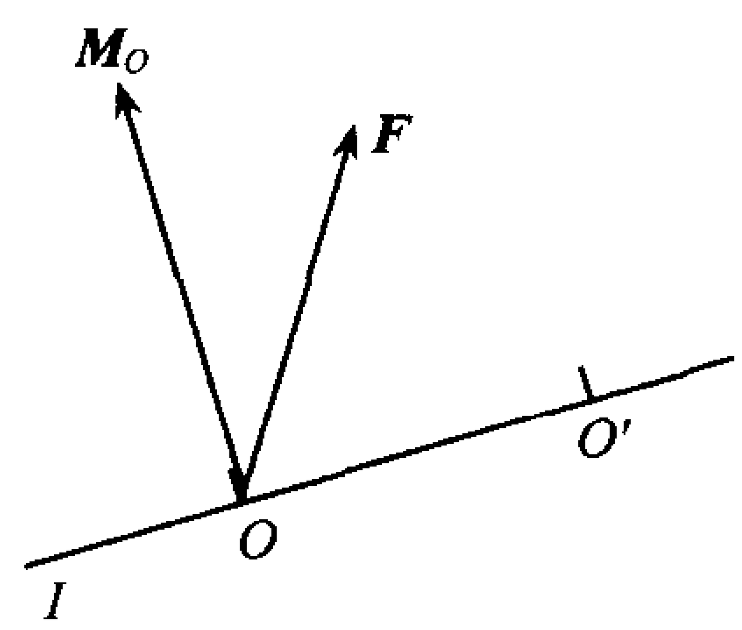


图 7.3

平面上的一个力 $\boldsymbol{f}$ 的作用线.

$$\overrightarrow{OO'} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{M}_O$$

设$\overrightarrow{OO'}$与 $\boldsymbol{f}$ 的夹角为 α,

$$OO' \cdot f\sin\alpha = M_O$$

$$f = \frac{M_O}{OO'\sin\alpha}$$

$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{M}_O$ 以及 OO'、$\boldsymbol{f}$ 的作用线位置和 α 均是可求的,因而 $\boldsymbol{f}$ 也可求,原力系可简化为作用于 O 点的力 $\boldsymbol{F}-\boldsymbol{f}$ 和在给定平面(不包含 O 点)上的一个力 $\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{f}$ 的作用线是上述的交线,作用点可以是 O' 点或作用线上的任何点.

7.1.5 一个力系由四个力组成,其作用线组成四面体 $ABCD$,这四个力 $\boldsymbol{f}_1=k\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{f}_2=k\overrightarrow{BC}$,$\boldsymbol{f}_3=k\overrightarrow{CD}$,$\boldsymbol{f}_4=k\overrightarrow{DA}$,其中 k 是一常量.证明这个力系等效于一个力偶,其大小为 $\dfrac{6kV}{d}$,其中 V 是四面体的体积,d 是两条边 AC 和 BD 间的最短距离.

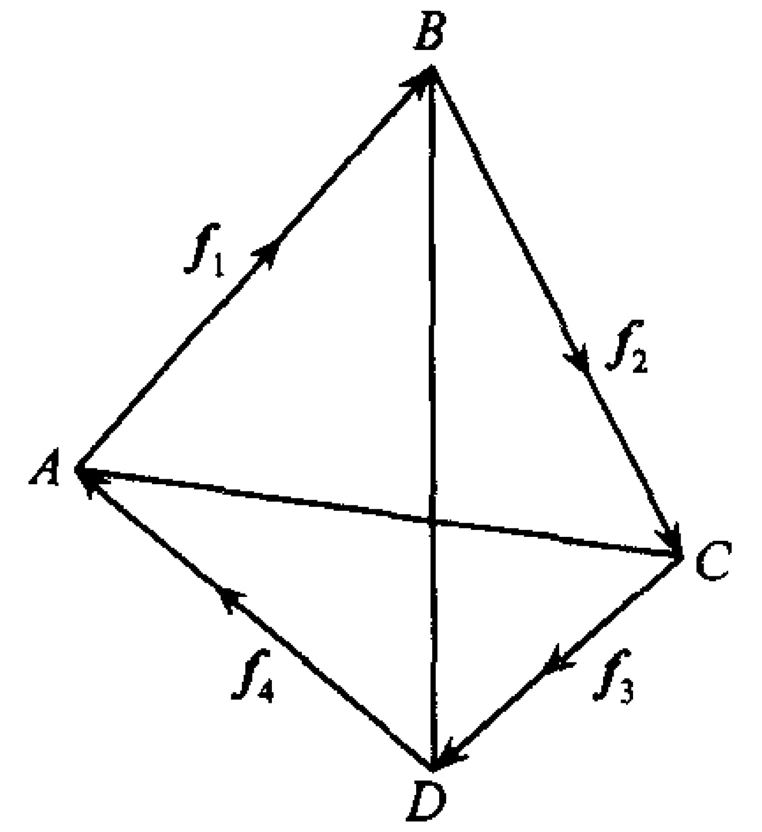


图 7.4

提示:任意两条直线 l_1、l_2,若分别通过 M_1、M_2 点,方向矢量分别为 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$,则此两直线间的最短距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{S}_1 \times \boldsymbol{S}_2)|}{|\boldsymbol{S}_1 \times \boldsymbol{S}_2|}$$

证明 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3+\boldsymbol{f}_4=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CD}+k\overrightarrow{DA}=0$

主矢为零时,对任何简化中心,主矩都一样,今取 A 点为简化中心,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_A &= \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{f}_2 + \overrightarrow{AC} \times \boldsymbol{f}_3 \\ &= \overrightarrow{AB} \times k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \times k\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} \times k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \times k\overrightarrow{CD} \\ &= k\overrightarrow{AC} \times (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

由提示,

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \left(\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC} \times \dfrac{\overrightarrow{BD}}{BD}\right)\right|}{\left|\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC} \times \dfrac{\overrightarrow{BD}}{BD}\right|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD})|}{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|}$$

$$|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD})| = |\overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| = 6V$$

所以

$$M = M_A = k|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}| = \frac{k|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD})|}{d} = \frac{6kV}{d}$$

7.1.6 两个相同的长度为 $2a$、质量为 M 的均质梯子 AB 和 BC 在 B 点光滑铰接在一起,端点 A、C 静置于粗糙的水平面上,梯子与水平面间摩擦因数为 μ,$\angle ABC=2\alpha$.一个质量为 m 的人要能爬到 B 点,求 μ 需满足的条件.

解 取两个梯子和人为系统,受力情况如图 7.5 所示.平衡方程为

$$(2M+m)g = N_1 + N_2$$

$$f_1 = f_2$$

$$M_A = Mg(a+3a)\sin\alpha + mg(4a-x)\sin\alpha - N_1 \cdot 4a\sin\alpha = 0$$

可得

$$N_1 = Mg + \frac{mg}{4a}(4a-x)$$

$$N_2 = Mg + \frac{mg}{4a}x$$

因为 $0\leqslant x\leqslant 2a$，所以 $N_1\geqslant N_2$.

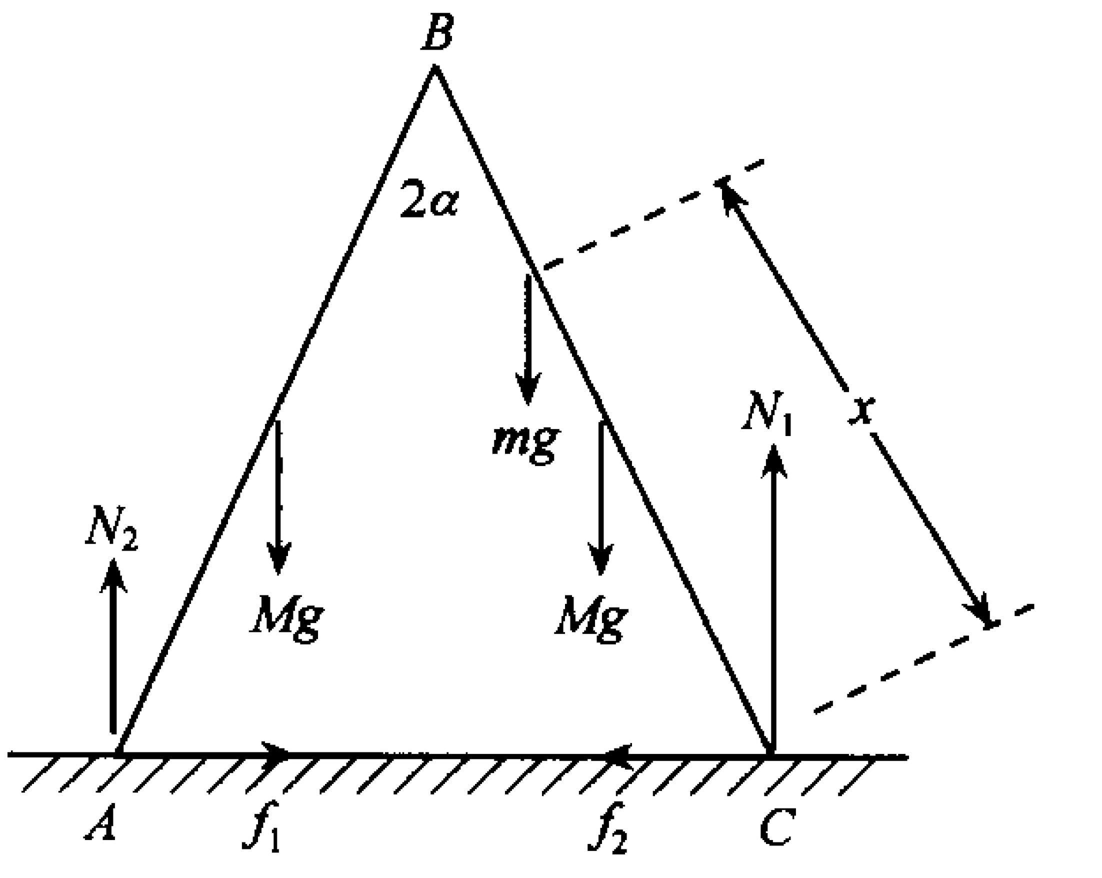


图 7.5

平衡时的摩擦力不能超过最大静摩擦力，$\mu N_2\geqslant f_2$，$\mu N_1\geqslant f_1$. 今 $N_1\geqslant N_2$. 如有 $\mu N_2\geqslant f_2$，因为 $f_1=f_2$，必有 $\mu N_1\geqslant f_1$.

求 f_2 必须另取矩心，今取梯子 AB 为系统，取 B 为矩心，

$$M_B = -f_2\cdot 2a\cos\alpha - Mga\sin\alpha + N_2\cdot 2a\sin\alpha = 0$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(2N_2 - Mg)\tan\alpha$$

用 $\mu N_2\geqslant f_2$，

$$\mu N_2 \geqslant \frac{1}{2}(2N_2 - Mg)\tan\alpha$$

$$\mu \geqslant \frac{(2N_2 - Mg)\tan\alpha}{2N_2}$$

代入 N_2 的式子，得

$$\mu \geqslant \frac{Mg + \frac{1}{2a}mgx}{2Mg + \frac{1}{2a}mgx}\tan\alpha = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{Mmg^2\tan\alpha}{2a\left(2Mg + \frac{1}{2a}mgx\right)^2} > 0$$

不等式右边的项是 x 的单调递增函数，当 $x=2a$ 时，右边的项达最大值，要能爬到 B 点，必须

$$\mu \geqslant f(2a)$$

即

$$\mu \geqslant \frac{M+m}{2M+m}\tan\alpha$$

7.1.7　两个相同的质量为 M、半径为 a 的粗糙的均质圆柱体置于粗糙的水平面上，两轴线相距 $2\sqrt{2}a$. 第三个半径为 a、质量为 $2M$ 的粗糙均质圆柱体对称地置于上述两个圆柱体上面. 证明：要能平衡，圆柱体间的摩擦因数必须大于 $\tan\frac{\pi}{8}$，圆柱体与平面间的摩擦因数必须大于 $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8}$.

证明　$AB=2\sqrt{2}a$，

$$AD = \sqrt{2}\,a, AC = 2a$$

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{2}\,a$$

所以
$$\angle CAB = \angle ACD = 45°$$

图 7.6 画出了圆柱体 C 和圆柱体 A 的受力情况，数值相等的作用力反作用力用同一文字表示.

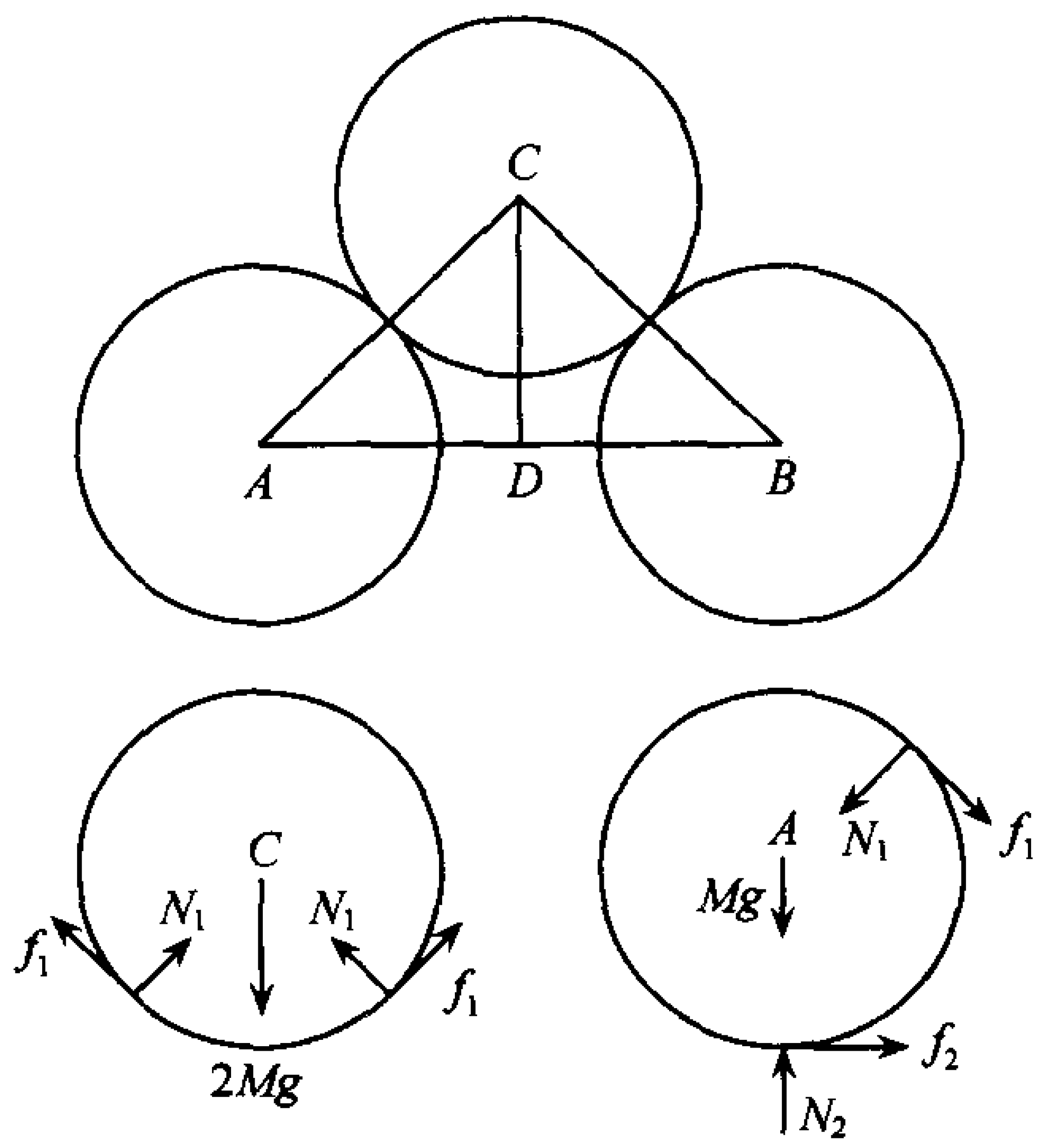


图 7.6

对圆柱体 C 列平衡方程，

$$2f_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2Mg$$

可化为

$$f_1 + N_1 = \sqrt{2}\,Mg \qquad (1)$$

对圆柱体 A 列平衡方程，

$$N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + Mg = N_2 \qquad (2)$$

$$N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = f_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f_2 \qquad (3)$$

$$f_1 a = f_2 a \qquad (4)$$

由式(4)，$f_1 = f_2$，式(3)可改为

$$f_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) - N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (5)$$

式(1)$\times\frac{\sqrt{2}}{2}$+(5)式得

$$f_1 = \frac{Mg}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2} - 1)Mg$$

$$N_1 = \sqrt{2}\,Mg - f_1 = Mg$$

摩擦力不能大于最大静摩擦，即

$$\mu_1 N_1 \geqslant f_1$$

所以
$$\mu_1 \geqslant \sqrt{2} - 1$$

因为
$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

所以
$$\mu_1 \geqslant \tan\frac{\pi}{8}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + Mg = 2Mg$$

$$f_2 = f_1 = (\sqrt{2} - 1)Mg$$

$$\mu_2 N_2 \geqslant f_2$$

所以
$$\mu_2 \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8}$$

7.1.8　一个均质的梯子靠在粗糙的地板和同样粗糙的墙上，摩擦角为 ε，处于平衡的极限状态，求梯子与水平线间的夹角.

解　先说明一下摩擦角的定义：摩擦角是指逐渐增大斜面的倾角，增大到摩擦角 ε 时，原静置于斜面上的物体刚能不发生滑动. 此时摩擦力正好等于最大静摩擦，见解图 7.7，

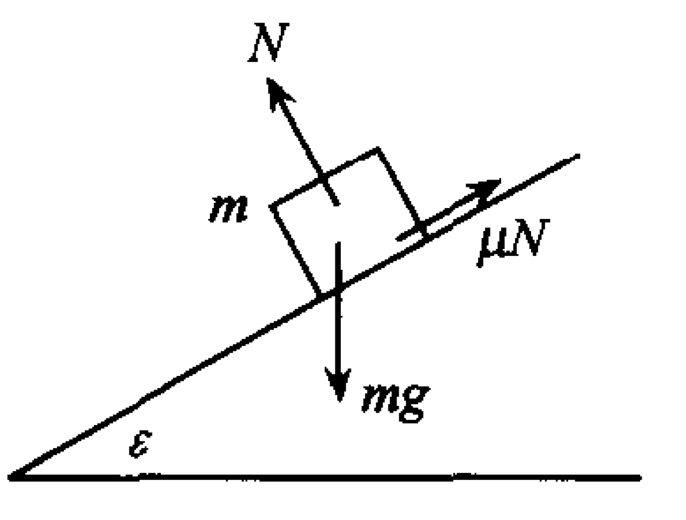


图 7.7

$$N = mg\cos\varepsilon$$

$$mg\sin\varepsilon - \mu N = 0$$

消去 N 得

$$\mu = \tan\varepsilon$$

可见静摩擦因数等于摩擦角的正切.

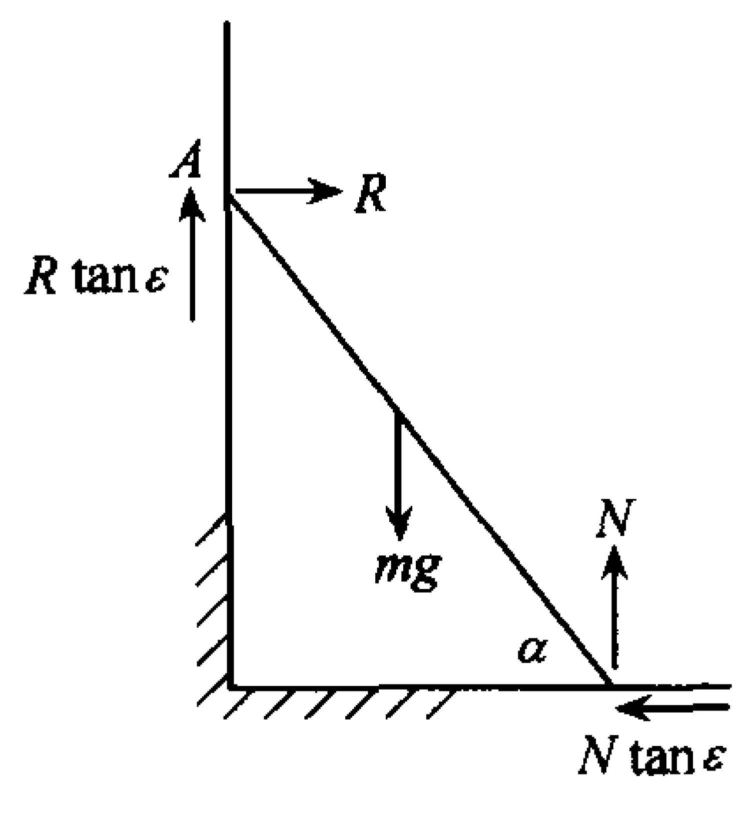


图 7.8

处于平衡的极限状态，梯子与地板间、梯子与墙间的摩擦力均已达到最大静摩擦，此时梯子受力情况如图 7.8 所示.

设梯子质量为 m、长 l，

$$N + R\tan\varepsilon = mg \tag{1}$$

$$R = N\tan\varepsilon \tag{2}$$

$$M_A = mg \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha + Nl\tan\varepsilon\sin\alpha - Nl\cos\alpha = 0 \tag{3}$$

由式(1)、(2)解出

$$N = mg\cos^2\varepsilon \tag{4}$$

由式(3)、(4)得

$$\tan\alpha = \frac{2\cos^2\varepsilon - 1}{2\sin\varepsilon\cos\varepsilon} = \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \cot 2\varepsilon = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right)$$

所以
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$$

7.1.9　长为 l 的均质重杆 AB 的 A 端能在一光滑的铅垂线上运动，B 端能沿一条粗糙的水平直线运动，两条直线间的最短距离为 a，$a<l$，B 端与水平直线间的静摩擦因数为 μ，若 $l>a\sqrt{1+\mu^2}$，A 端高于 B 端，证明杆在位置

$$\arcsin\frac{a}{l} \leqslant \theta \leqslant \arccos\left[\sqrt{\frac{l^2 - a^2(1+\mu^2)}{l^2(1+4\mu^2)}}\right]$$

（其中 θ 是 AB 杆与竖直向下直线间的夹角）平衡.

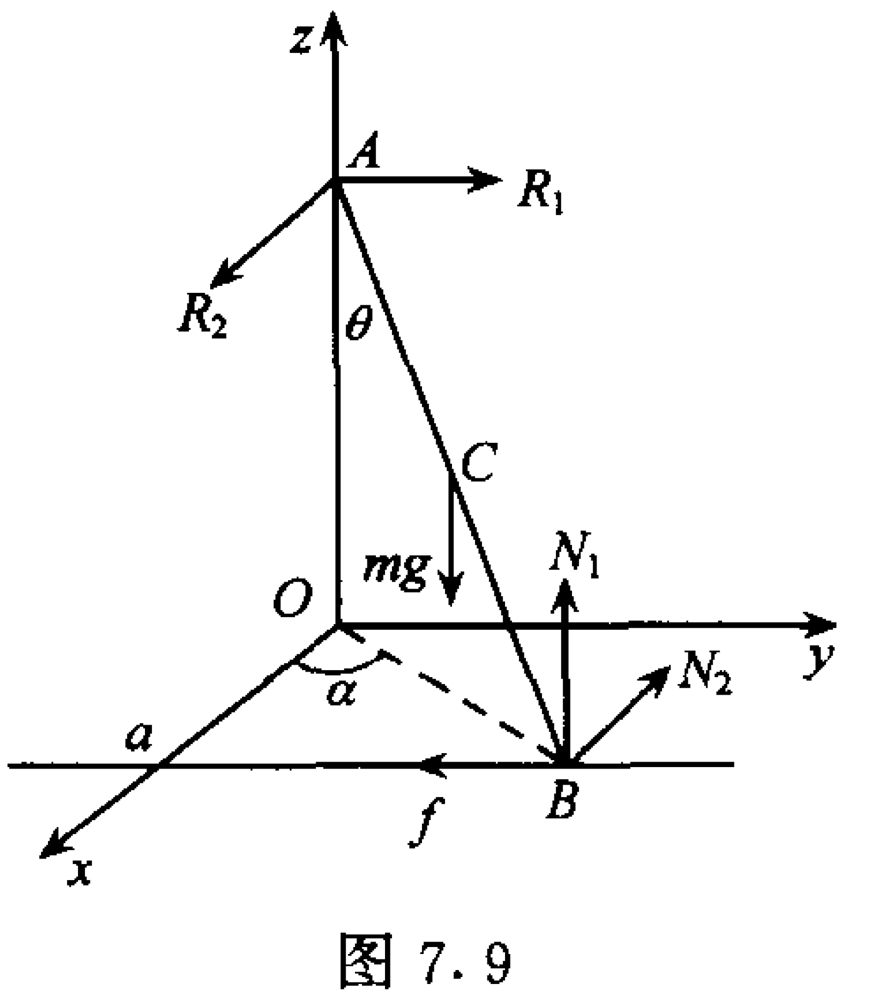


图 7.9

证明　设杆的质量为 m，取图 7.9 坐标 $Oxyz$，光滑的铅垂线为 z 轴，粗糙的水平直线位于 xy 平面上 $x=a$ 处. 图中所画的杆的位置是能平衡的极限位置，图中画出了杆的

受力情况.

$$AO = l\cos\theta,\quad OB = l\sin\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{OB} = \frac{a}{l\sin\theta},\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2\sin^2\theta - a^2}}{l\sin\theta}$$

A 点坐标为 $(0,0,l\cos\theta)$，B 点坐标为 $\left(a,\sqrt{l^2\sin^2\theta-a^2},0\right)$，$C$ 点坐标为 $\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2}\sqrt{l^2\sin^2\theta-a^2},\frac{1}{2}l\cos\theta\right)$.

由主矢 $\boldsymbol{F}=0$ 和对 A 点的主矩 $\boldsymbol{M}_A=0$，有

$$N_1 = mg$$

$$\overrightarrow{AB}\times(-N_2\boldsymbol{i} - f\boldsymbol{j} + N_1\boldsymbol{k}) + \overrightarrow{AC}\times(-mg)\boldsymbol{k} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = a\boldsymbol{i} + \sqrt{l^2\sin^2\theta - a^2}\boldsymbol{j} - l\cos\theta\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

将$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的式子及 $N_1=mg$ 代入上式.

$$(a\boldsymbol{i} + \sqrt{l^2\sin^2\theta - a^2}\boldsymbol{j} - l\cos\theta\boldsymbol{k})\times\left[-N_2\boldsymbol{i} - f\boldsymbol{j} + \left(mg - \frac{1}{2}mg\right)\boldsymbol{k}\right] = 0$$

可得

$$\frac{1}{2}mg\sqrt{l^2\sin^2\theta - a^2} - fl\cos\theta = 0$$

$$N_2 l\cos\theta - \frac{1}{2}mga = 0$$

$$-af + N_2\sqrt{l^2\sin^2\theta - a^2} = 0$$

解出

$$f = \frac{mg}{2l\cos\theta}\sqrt{l^2\sin^2\theta - a^2}$$

$$N_2 = \frac{mga}{2l\cos\theta}$$

$$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{mg}{2l\cos\theta}\sqrt{4l^2\cos^2\theta + a^2}$$

$$\mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = f \quad \text{(平衡的极限状态)}$$

$$\frac{\mu mg}{2l\cos\theta}\sqrt{4l^2\cos^2\theta + a^2} = \frac{mg}{2l\cos\theta}\sqrt{l^2\sin^2\theta - a^2}$$

从上式可解出

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{l^2 - (1+\mu^2)a^2}{(1+4\mu^2)l^2}}$$

所以

$$\theta_{\max} = \arccos\sqrt{\frac{l^2 - (1+\mu^2)a^2}{(1+4\mu^2)l^2}}$$

当杆端 B 处于坐标$(a,0,0)$时，显然也可以平衡，此处 $\theta=\theta_{\min}=\arcsin\frac{a}{l}$.

故杆能处于平衡的 θ 值处于下列范围：

$$\arcsin \frac{a}{l} \leqslant \theta \leqslant \arccos \sqrt{\frac{l^2-(1+\mu^2)a^2}{(1+4\mu^2)l^2}}$$

7.1.10　一圆筒形玻璃杯盛满了冰，重量为空杯时的六倍. 若空杯时质心位于离底面四分之一高度处，问将冰装到什么高度杯子最不容易倾倒.

解　设杯子高度为 h，质量为 m. 冰装到离底面高度为 x 时，冰的质量为$\frac{x}{h}\times 6m$，此时装了冰的杯子的质心高度为 h_c，由质心的定义，

$$\left(\frac{x}{h}\times 6m+m\right)h_c=\frac{x}{h}\times 6m\cdot\frac{x}{2}+m\cdot\frac{h}{4}$$

解出

$$h_c=\frac{12x^2+h^2}{4(6x+h)}$$

显然，质心高度越低，越不容易倾倒，质心越靠近底面，放在斜面上不发生倾倒所允许的斜面最大倾角越大.

求 $h_c(x)$最小的 x 值，

$$\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}x}=\frac{24x(6x+h)-6(12x^2+h^2)}{4(6x+h)^2}=0$$

化简后得

$$12x^2+4hx-h^2=0$$

$$(2x+h)(6x-h)=0$$

$$x=-\frac{1}{2}h,\quad 及\quad x=\frac{1}{6}h$$

$x=-\frac{1}{2}h$ 的解无物理意义，所以 $x=\frac{1}{6}h$，

$$h_c\left(\frac{1}{6}h\right)=\frac{12\left(\frac{h}{6}\right)^2+h^2}{4\left(6\times\frac{h}{6}+h\right)}=\frac{1}{6}h$$

$$h_c(0)=\frac{1}{4}h$$

可见 $x=\frac{1}{6}h$，即冰装到六分之一高度，质心最低，最不容易倾倒.

7.1.11　杆 BC、BD、CD、CE、CG、DG 由铰链连接，位于立方体的边和对角线上，如图 7.10 所示. 铰链 B、E、G 是固定的，各杆不计质量，在节点 D 有作用力 Q 沿对角线 ED 方向，在节点 C 有作用力 P 沿 CG 方向，处于平衡状态，求各杆的内力.

解　设立方体边长为 a，六个面上的对角线长均为$\sqrt{2}a$，立方体对角线如 CE 等长 $\sqrt{3}a$.

EC 方向的单位矢量 $\boldsymbol{n}_{E\to C}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$，照此表示法，$\boldsymbol{n}_{B\to D}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$，$\boldsymbol{n}_{D\to G}$

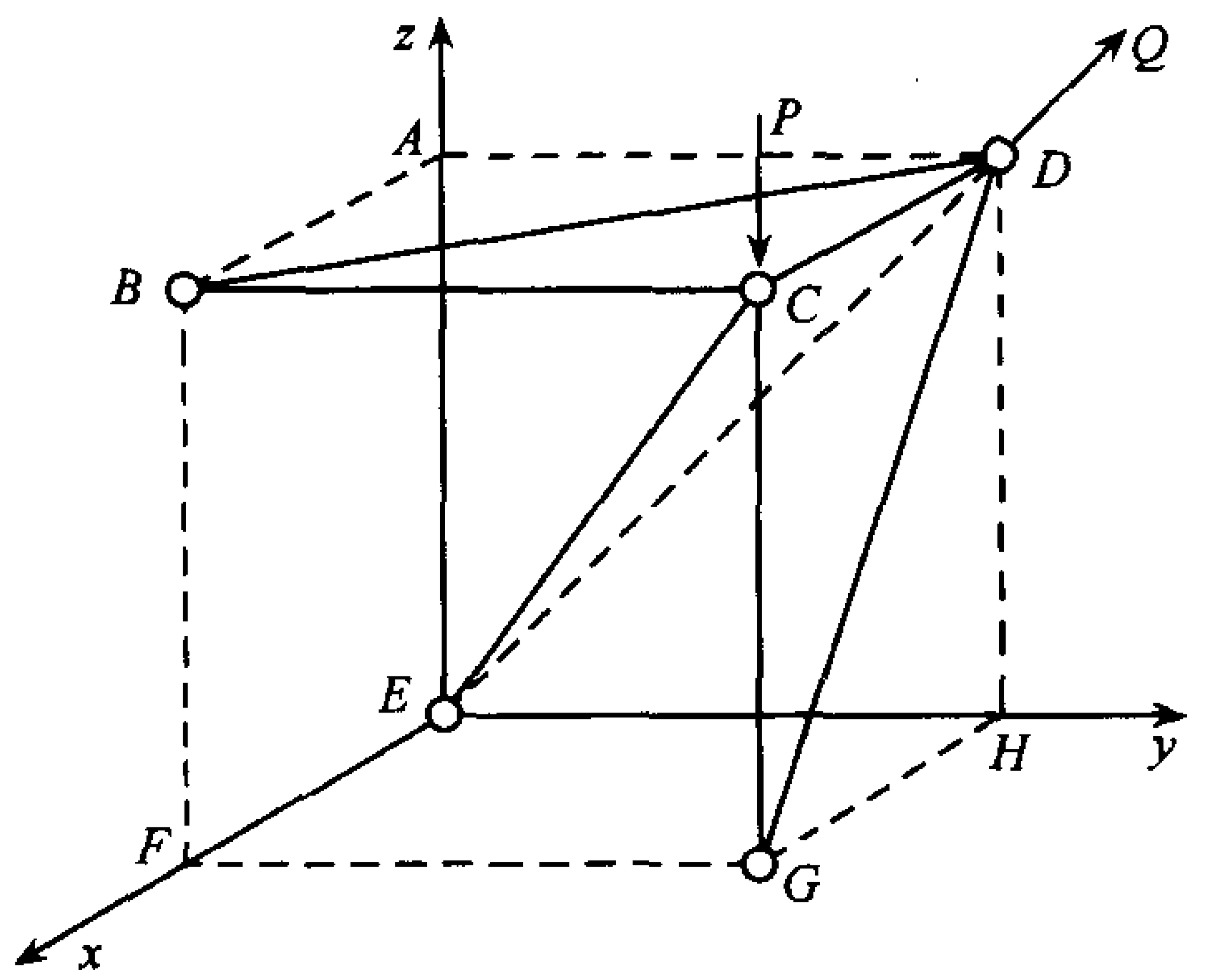


图 7.10

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}).$$

假设各杆的内力均为拉力,即杆中任何一点的两边都是互相拉伸的力,用 S_{CE}表示杆 CE 中的内力.

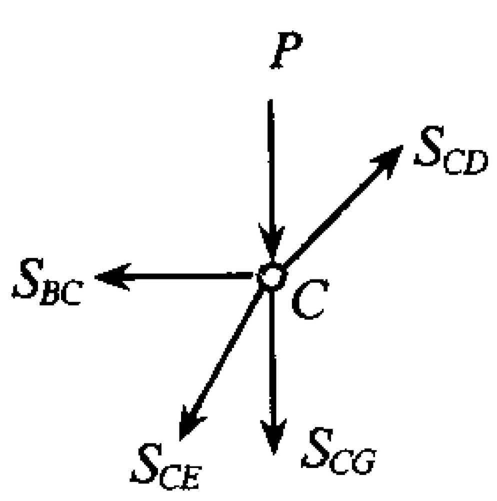


图 7.11

铰链 C 受到的力如图 7.11 所示.

$$\boldsymbol{P}=-P\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{S}_{BC}=-S_{BC}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{S}_{CG}=-S_{CG}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{S}_{CD}=-S_{CD}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{S}_{CE}=-S_{CE}\boldsymbol{n}_{E\to C}=-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

铰链 C 所受合力为零,

$$-S_{CD}-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}=0 \qquad (1)$$

$$-S_{BC}-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}=0 \qquad (2)$$

$$-P-S_{CG}-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}=0 \qquad (3)$$

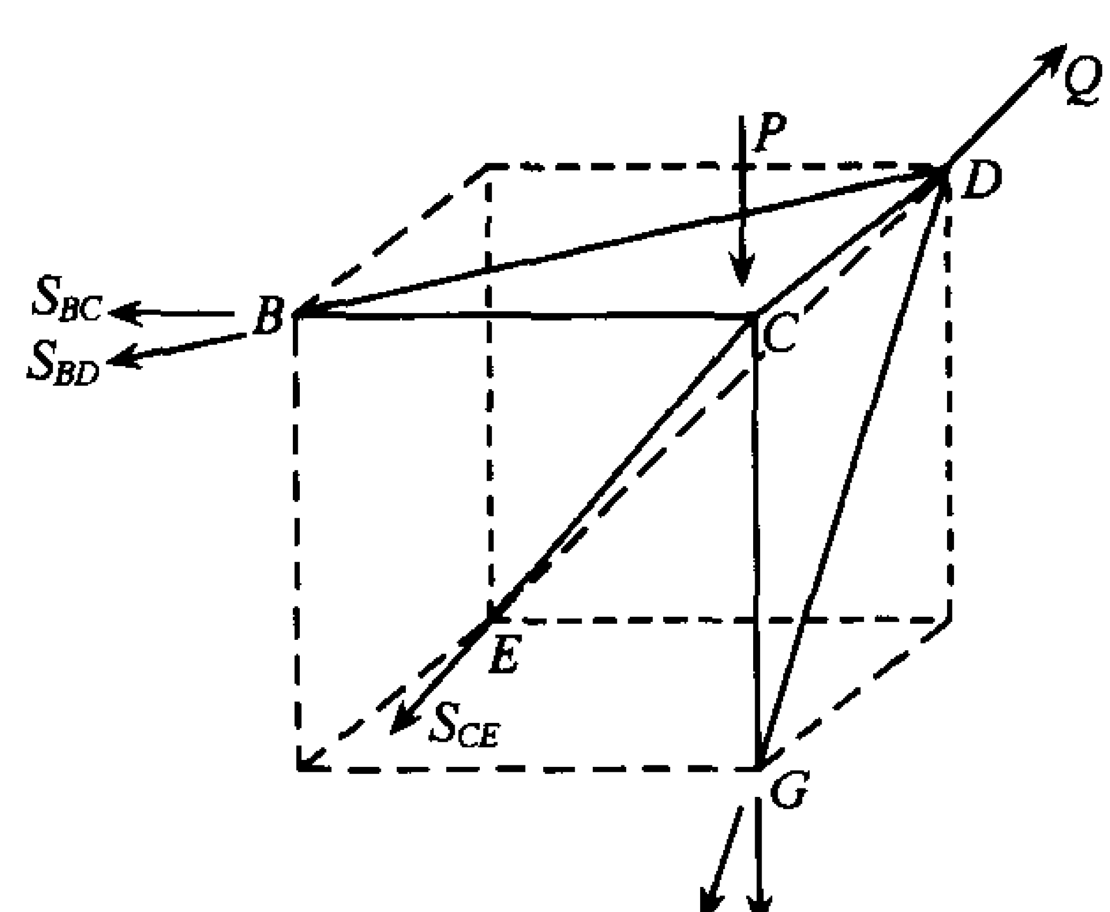


图 7.12

系统所受的外力如图 7.12 所示,其中作用于 B 点的外力 S_{BC}、S_{BD}分别与 BC 杆、BD 杆的内力数值相等,是考虑 B 点所受合力为零得出的.

系统所受外力对 C 点的力矩为零,

$$\boldsymbol{M}_C=-a\boldsymbol{j}\times(-S_{BD})\boldsymbol{n}_{B\to D}-a\boldsymbol{k}\times S_{DG}\boldsymbol{n}_{D\to G}-a\boldsymbol{i}\times Q\boldsymbol{n}_{E\to D}$$

$$=-a\boldsymbol{j}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}S_{BD}\right)(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-a\boldsymbol{k}\times\frac{\sqrt{2}}{2}S_{DG}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})-a\boldsymbol{i}\times\frac{\sqrt{2}}{2}Q(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a(Q-S_{DG})\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}a(S_{BD}-Q)\boldsymbol{k}=0$$

可得

$$S_{DG}=Q \tag{4}$$

$$S_{BD}=Q \tag{5}$$

系统所受的合外力为零，

$$\boldsymbol{S}_{BC}+\boldsymbol{S}_{BD}+\boldsymbol{S}_{CE}+\boldsymbol{S}_{CG}+\boldsymbol{S}_{DG}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=0$$

代入

$$\boldsymbol{S}_{BC}=-S_{BC}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{S}_{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}S_{BD}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{S}_{CE}=-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),\quad \boldsymbol{S}_{CG}=-S_{CG}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{S}_{DG}=\frac{\sqrt{2}}{2}S_{DG}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}),\quad \boldsymbol{P}=-P\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{Q}=\frac{\sqrt{2}}{2}Q(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

可得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}S_{BD}-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}+\frac{\sqrt{2}}{2}S_{DG}=0 \tag{6}$$

$$-S_{BC}-\frac{\sqrt{2}}{2}S_{BD}-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}+\frac{\sqrt{2}}{2}Q=0 \tag{7}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}S_{CE}-S_{CG}-\frac{\sqrt{2}}{2}S_{DG}-P+\frac{\sqrt{2}}{2}Q=0 \tag{8}$$

将式(4)、(5)代入式(6)，得

$$S_{CE}=\sqrt{6}Q \tag{9}$$

将式(5)、(9)代入式(7)得或由式(2)、(9)得

$$S_{BC}=-\sqrt{2}Q \tag{10}$$

由式(1)、(9)得

$$S_{CD}=-\sqrt{2}Q$$

由式(3)、(9)得

$$S_{CG}=-P-\sqrt{2}Q$$

正值表示内力为拉力，负号表示内力为压力.

7.1.12　一桁架由 11 根等长的杆组成，A、B、…、G 是铰链，如图 7.13 所示. A 点刚性固定，G 点只在竖直方向支撑住，忽略杆的重量，一重物 W 挂在 E 处，求 A、G 点的竖直

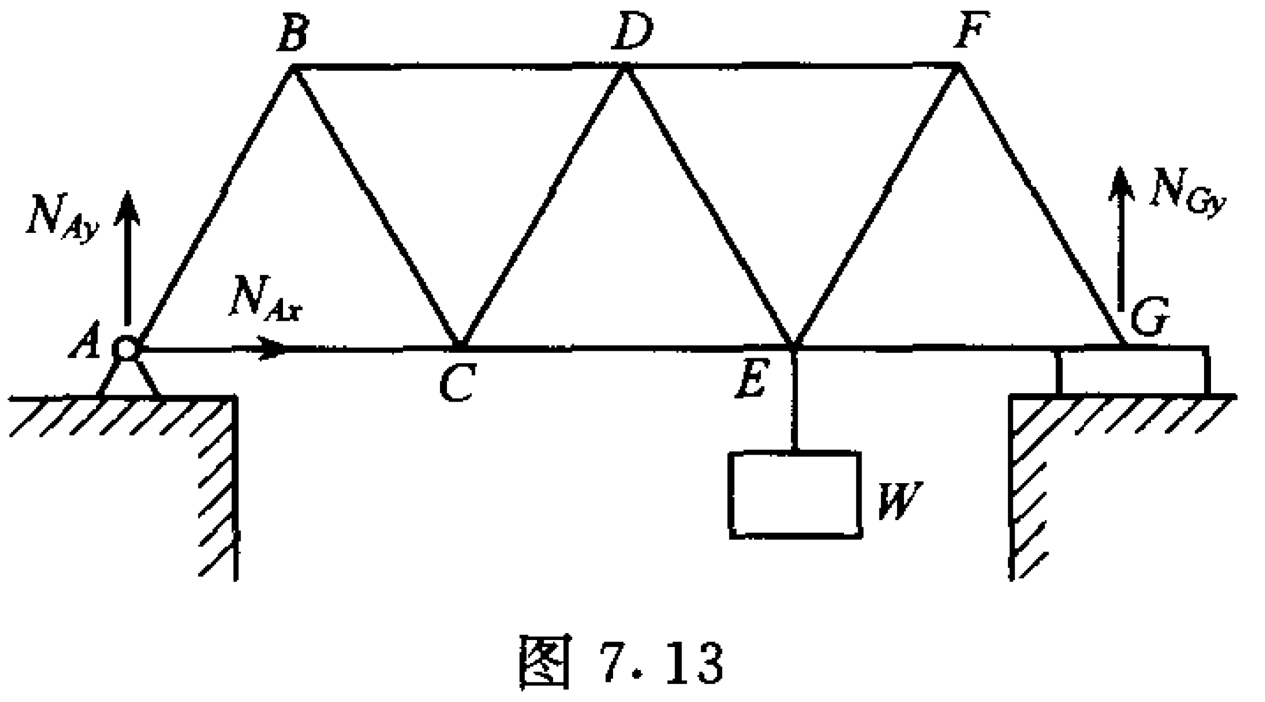


图 7.13

支撑力和每根杆的内力.

解　对整个桁架列列平衡方程:

$$N_{Ax}=0$$
$$N_{Ay}+N_{Gy}-W=0$$
$$W\cdot AE-N_{Gy}\cdot AG=0$$

可得

$$N_{Ax}=0,\quad N_{Gy}=\frac{2}{3}W,\quad N_{Ay}=\frac{1}{3}W$$

设每根杆的内力均为张力. 根据这种假设画出铰链 A、B、…、F 的受力图如图 7.14 所示.

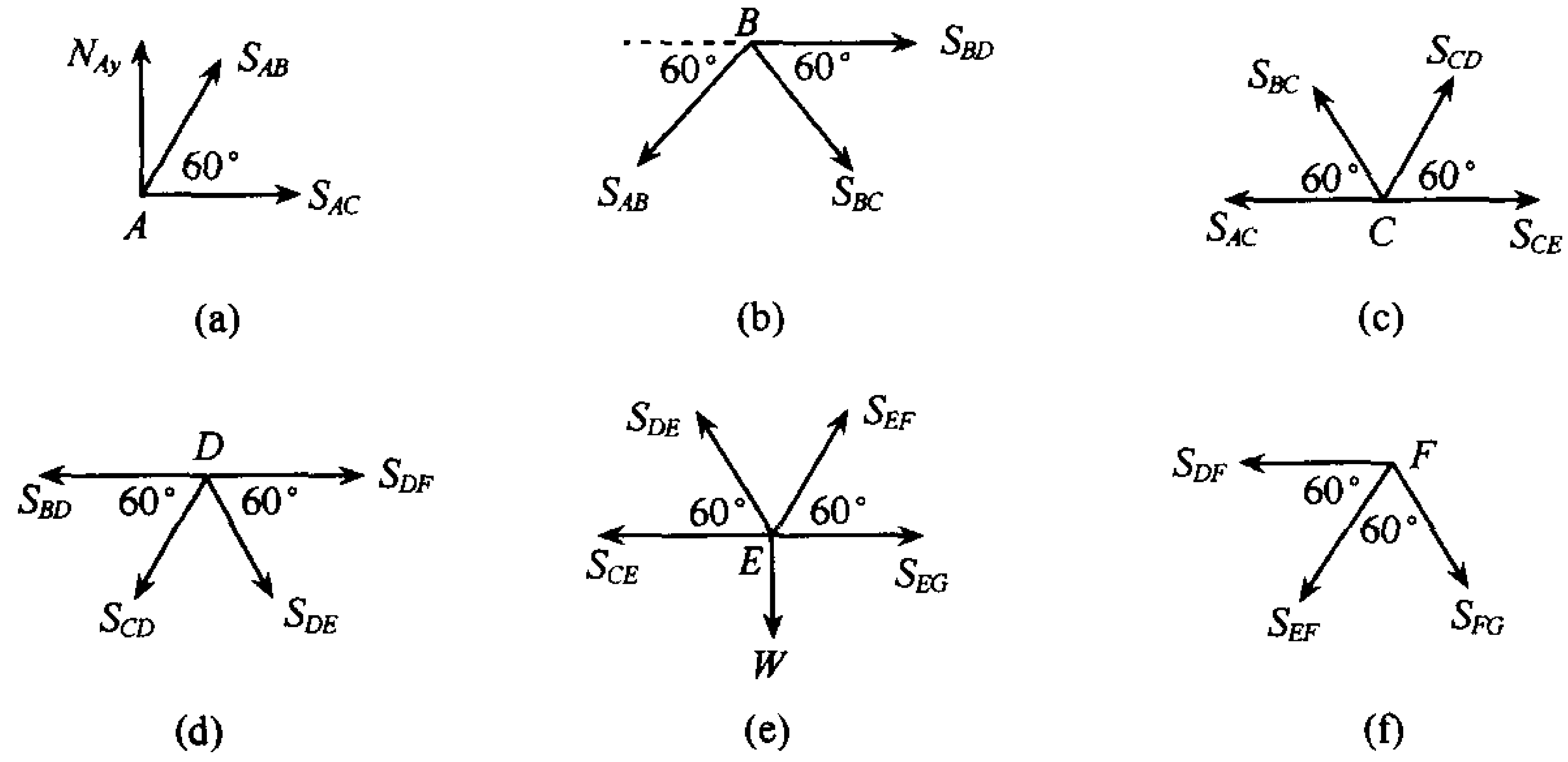


图 7.14

列出各铰链所受合力为零的分量方程.

A:

$$S_{AB}\cos 30°+N_{Ay}=0$$
$$S_{AB}\cos 60°+S_{AC}=0$$

解出

$$S_{AB}=-\frac{N_{Ay}}{\cos 30°}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}W$$

$$S_{AC}=-S_{AB}\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{9}W$$

B:

$$S_{AB}\sin 60°+S_{BC}\sin 60°=0$$
$$S_{BD}+S_{BC}\cos 60°-S_{AB}\cos 60°=0$$

解出

$$S_{BC}=-S_{AB}=\frac{2\sqrt{3}}{9}W$$

$$S_{BD}=(S_{AB}-S_{BC})\cos 60°=-\frac{2\sqrt{3}}{9}W$$

C:

$$S_{BC}\sin 60°+S_{CD}\sin 60°=0$$
$$S_{CE}+S_{CD}\cos 60°-S_{BC}\cos 60°-S_{AC}=0$$

解出

$$S_{CD}=-S_{BC}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}W$$

$$S_{CE} = S_{AC} - S_{CD}\cos 60° + S_{BC}\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}W$$

D：
$$S_{DE}\sin 60° + S_{CD}\sin 60° = 0$$
$$S_{DF} + S_{DE}\cos 60° - S_{BD} - S_{CD}\cos 60° = 0$$

解出
$$S_{DE} = -S_{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{9}W$$
$$S_{DF} = S_{BD} - S_{DE}\cos 60° + S_{CD}\cos 60° = -\frac{4\sqrt{3}}{9}W$$

E：
$$S_{EF}\sin 60° + S_{DE}\sin 60° - W = 0$$
$$S_{EG} + S_{EF}\cos 60° - S_{CE} - S_{DE}\cos 60° = 0$$

解出
$$S_{EF} = -S_{DE} + \frac{W}{\sin 60°} = \frac{4\sqrt{3}}{9}W$$
$$S_{EG} = S_{CE} + S_{DE}\cos 60° - S_{EF}\cos 60° = \frac{2\sqrt{3}}{9}W$$

F：
$$S_{FG}\sin 60° + S_{EF}\sin 60° = 0$$
$$S_{FG}\cos 60° - S_{DF} - S_{EF}\cos 60° = 0$$

解出
$$S_{FG} = -S_{EF} = -\frac{4\sqrt{3}}{9}W$$

最后的方程中各量前已算出，代入可作为验算用. S_{AB}、S_{BD}、S_{CD}、S_{DF}、S_{FG}均为负值，说明杆 AB、BD、CD、DF、FG 的内力不是张力而是压力.

7.1.13　一桁架结构及负荷情况如图 7.15 所示，所有的杆质量不计，用光滑铰链连接，求 CE、ED、FD 三杆的内力.

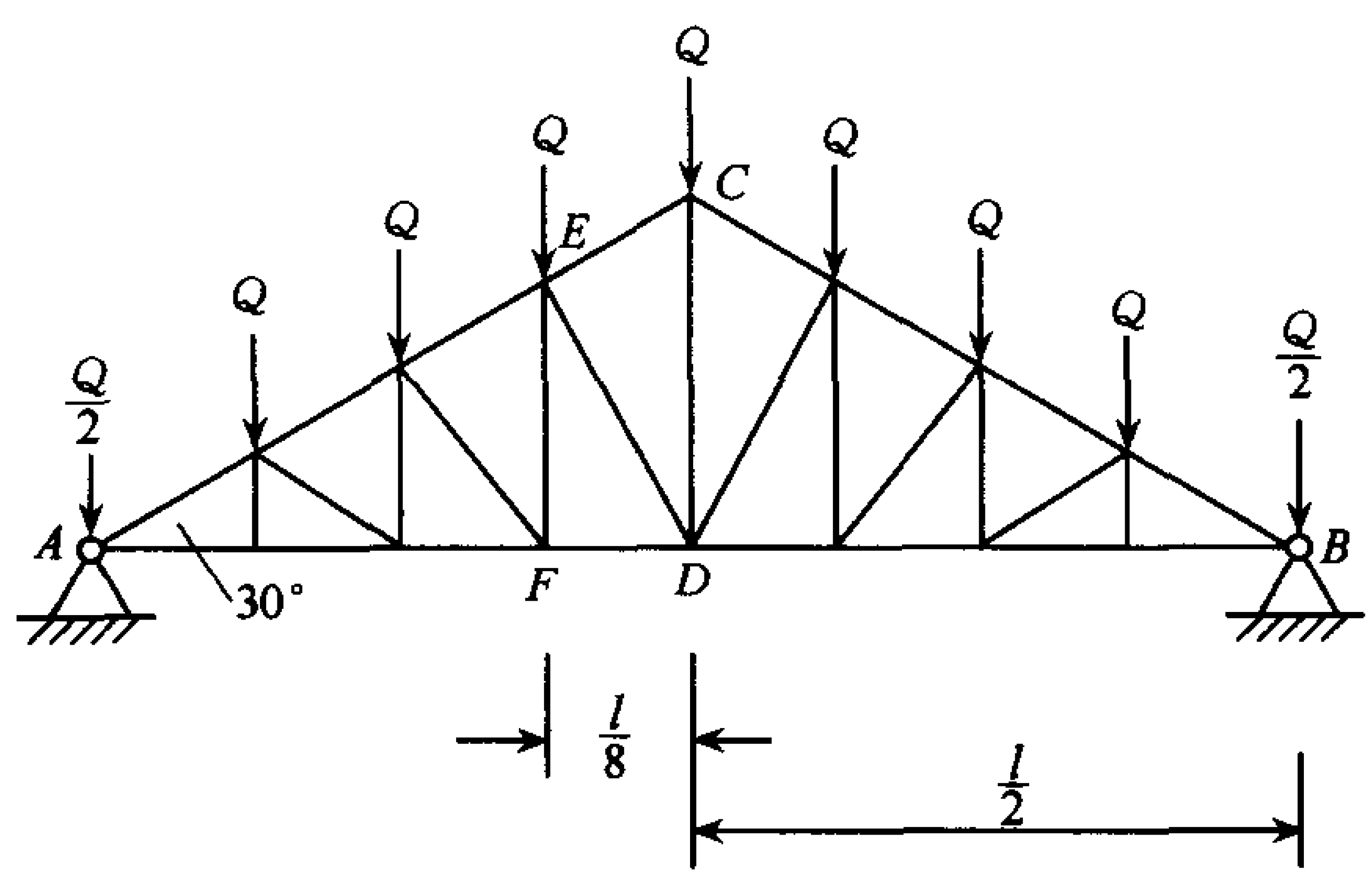


图 7.15

解　由于结构及负荷具有对称性，A、B 处底座的支撑力 $N_{Ay}=N_{By}$，$N_{Ax}+N_{Bx}=0$. 这里取 y 轴竖直向上，x 轴水平向右，

$$N_{Ay} = N_{By} = \frac{1}{2}\left(7Q + 2\times\frac{Q}{2}\right) = 4Q$$

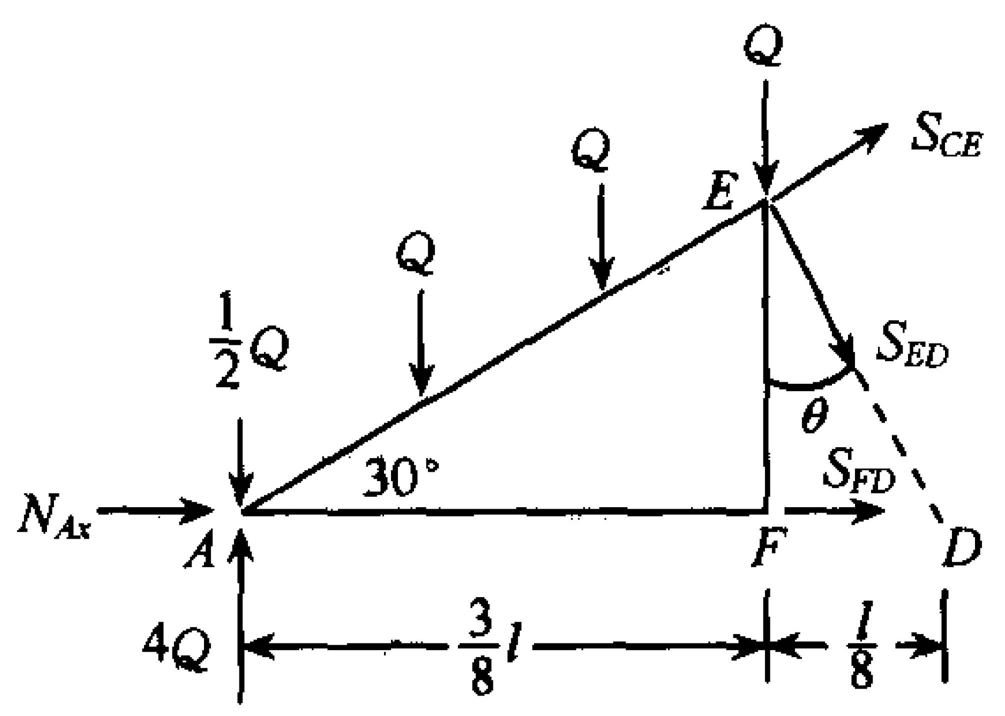


图 7.16

取结构中 AEF 部分为系统,受力情况如图 7.16 所示,

$$EF=\frac{3}{8}l\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}l$$

$$ED=\sqrt{EF^2+FD^2}=\sqrt{\frac{3}{64}l^2+\frac{1}{64}l^2}=\frac{1}{4}l$$

$$\sin\theta=\frac{FD}{ED}=\frac{1}{2},\quad \theta=30^\circ$$

这个桁架结构安装得好,可使 $N_{Ax}=N_{Bx}=0$,安装不好,N_{Ax}可取任何值,变成静不定问题,这里考虑理想情况,$N_{Ax}=N_{Bx}=0$.

平衡方程为

$$S_{FD}+S_{CE}\cos30^\circ+S_{ED}\sin30^\circ=0 \tag{1}$$

$$4Q+S_{CE}\sin30^\circ-S_{ED}\cos30^\circ-\frac{7}{2}Q=0 \tag{2}$$

$$M_E=S_{FD}\cdot EF+Q\cdot\frac{l}{8}+Q\cdot\frac{l}{4}-\left(4Q-\frac{Q}{2}\right)\cdot\frac{3}{8}l=0$$

代入 $EF=\frac{\sqrt{3}}{8}l$,由上式可解出

$$S_{FD}=\frac{5}{2}\sqrt{3}Q \tag{3}$$

由式(1)、(2)、(3)可得

$$S_{CE}=-4Q,\quad S_{ED}=-\sqrt{3}Q$$

作为验证,再算 $M_D=0$,

$$M_D=Q\cdot\frac{1}{8}l+Q\cdot\frac{1}{4}l+Q\cdot\frac{3}{8}l-\frac{7}{2}Q\cdot\frac{1}{2}l$$

$$-S_{CE}\cos60^\circ\cdot\frac{l}{8}-S_{CE}\cos30^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}l=0$$

可得 $S_{CE}=-4Q$,结果相同,说明计算正确.

7.1.14 一根质量为 M 的刚性细杆由两个距离为 a 的快速旋转的转轮支撑着.设开始时细杆不对称地静止地放在此两轮上,转轮与细杆之间的动摩擦因数为 μ.

(1) 设转轮的旋转方向互为反向,如图 7.17(a)所示,试写出杆的运动微分方程,并由此解出杆的质心相对于转轮 1 的位移 $x(t)$,设开始时 $x(0)=x_0,\dot{x}(0)=0$;

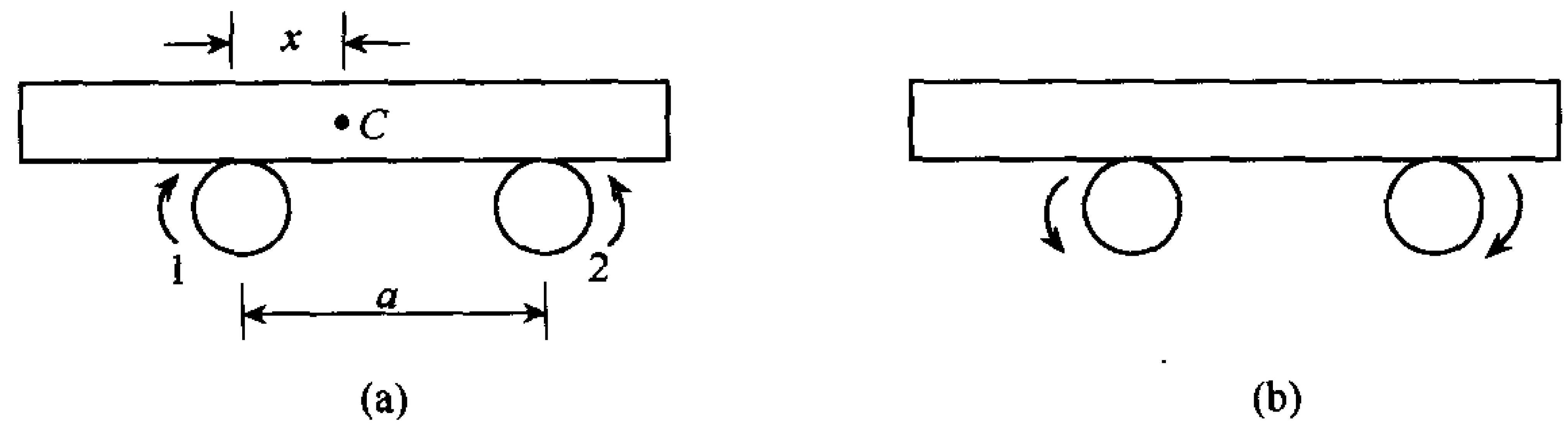


图 7.17

(2) 如两转轮的转向都反向，如图 7.17(b)所示，再计算 $x(t)$，仍设 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=0$.

解　(1) 设细杆受到轮 1、轮 2 竖直向上的支持力为 N_1、N_2. 由质心运动定理.

$$M\ddot{x} = \mu N_1 - \mu N_2 \tag{1}$$

$$N_1 + N_2 - Mg = 0 \tag{2}$$

再由细杆作平动的条件，在质心平动参考系中对质心的力矩之和等于零，

$$N_1 x - N_2(a - x) = 0 \tag{3}$$

由式(2)、(3)可解出 N_1、N_2 为

$$N_1 = \frac{a-x}{a}Mg,\quad N_2 = \frac{x}{a}Mg$$

代入式(1)，得细杆的运动微分方程为

$$M\ddot{x} = \frac{\mu Mg}{a}(a - 2x)$$

令 $x' = x - \dfrac{a}{2}$，

$$\ddot{x}' + \frac{2\mu g}{a}x' = 0$$

$$x = x' + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + A\cos\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t + B\sin\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t$$

由初始条件：$t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=0$ 定 A、B，得

$$x = \frac{a}{2} + \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cos\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t$$

(2) 如两转轮的转向都反向，微分方程改为

$$M\ddot{x} = -\mu N_1 + \mu N_2$$

$$\ddot{x} = \frac{\mu g}{a}(2x - a)$$

令 $x' = x - \dfrac{a}{2}$，

$$\ddot{x}' - \frac{2\mu g}{a}x' = 0$$

$$x = x' + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + Ae^{\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t}$$

由初始条件：$t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=0$ 定 A、B，得

$$x = \frac{a}{2} + \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t\right)$$

7.2　转动惯量和惯量张量

7.2.1　两个金属圆盘具有相同的质量 M 和相同的厚度 t，都是均质的，盘 1 的密度为 ρ_1，盘 2 的密度为 ρ_2，且 $\rho_2 < \rho_1$. 问哪个盘的转动惯量较大？

解　设 R_1、R_2 分别是盘 1 和盘 2 的半径,因两盘的质量相同.

$$\rho_1\pi R_1^2 t = \rho_2\pi R_2^2 t$$

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

比较绕通过盘心的垂直轴的两个转动惯量,

$$I_1 = \frac{1}{2}MR_1^2,\quad I_2 = \frac{1}{2}MR_2^2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1,\quad I_1 < I_2$$

比较绕通过一条半径的中点的垂直轴的两个转动惯量,

$$I_1 = \frac{1}{2}MR_1^2 + M\left(\frac{1}{2}R_1\right)^2 = \frac{3}{4}MR_1^2$$

同样

$$I_2 = \frac{3}{4}MR_2^2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1,\quad I_1 < I_2$$

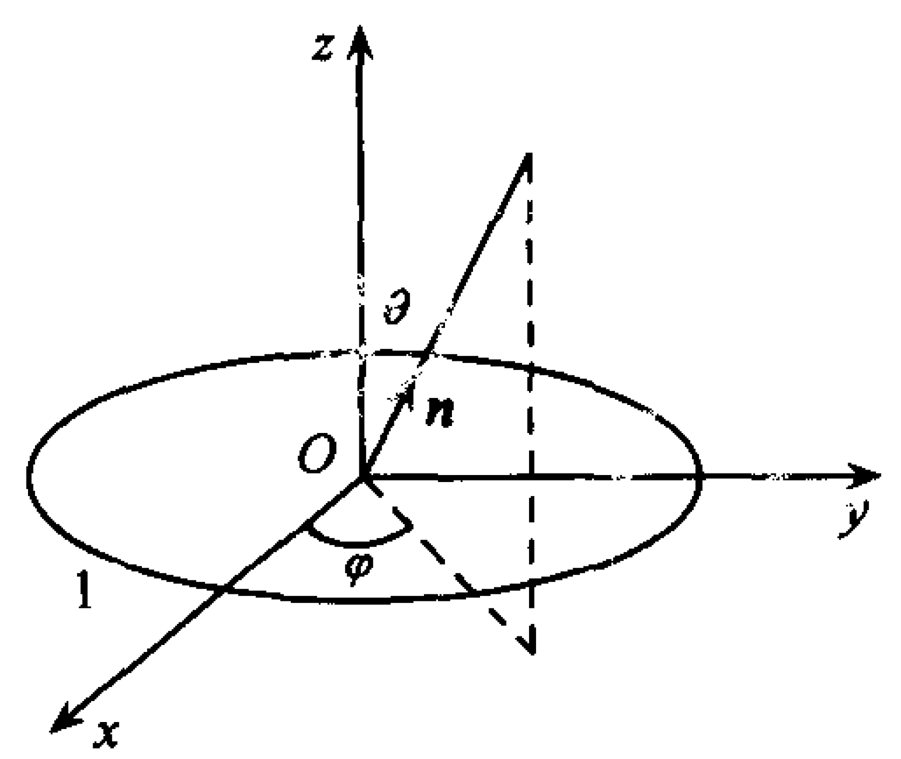


图 7.18

比较绕通过盘心与垂线成 θ 角的轴的两个转动惯量:取图所示的坐标,圆盘 1 对质心 O 的惯量张量为

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR_1^2 \end{pmatrix}$$

转轴的方向矢量为 $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

对此转轴的转动惯量为

$$I_1 = (\sin\theta\cos\varphi\quad \sin\theta\sin\varphi\quad \cos\theta)\begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}MR_1^2(1 + \cos^2\theta)$$

同样

$$I_2 = \frac{1}{4}MR_2^2(1 + \cos^2\theta)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1, I_1 < I_2$$

再用关于转动惯量的平行轴定理，对通过半径上离盘心$\frac{R_i}{n}$的一点的平行轴，也有 $I_1<I_2$.

综上所述，圆盘 2 的转动惯量较大，但如果转轴通过圆盘的不是上述的对应位置或轴的方向矢量不同，谁大谁小是不能一概而论的.

7.2.2 已知一个均质立方体对于通过其质心和一个面的中心的轴的转动惯量为 I_0，求对通过质心和一个角的轴的转动惯量.

解 取坐标系原点位于质心，取通过相互垂直的三个面的中心的三个轴为 x、y、z 轴，则由对称性可知，

$$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=I_0,\quad I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$$

对于通过质心的任何轴，其方向余弦为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$\begin{aligned}I&=I_0\cos^2\alpha+I_0\cos^2\beta+I_0\cos^2\gamma\\&=I_0(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=I_0\end{aligned}$$

7.2.3 一半径为 R、质量为 M 的均质薄圆盘，另有一点质量 $m=\frac{5}{4}M$ 附在它的边缘上，取图 7.19 的坐标(z 轴垂直纸面向上). 求：

(1) 圆盘与点质量系统关于 A 点的惯量张量；

(2) 关于 A 点的惯量主轴和主转动惯量.

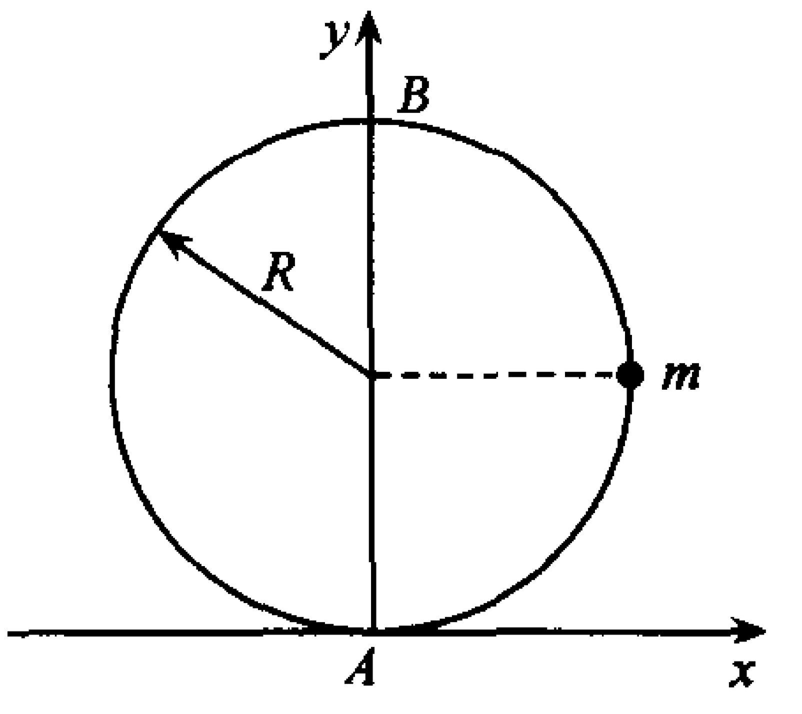


图 7.19

解 (1) $I_{xx}=\frac{5}{4}MR^2+mR^2=\frac{5}{4}MR^2+\frac{5}{4}MR^2=\frac{5}{2}MR^2$，

其中$\frac{5}{4}MR^2$ 是圆盘对 I_{xx}的贡献，用了平行轴定理$\frac{1}{4}MR^2+MR^2=\frac{5}{4}MR^2$，

$$I_{yy}=\frac{1}{4}MR^2+mR^2=\frac{1}{4}MR^2+\frac{5}{4}MR^2=\frac{3}{2}MR^2$$

用关于转动惯量的垂直轴定理，

$$I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=\frac{5}{2}MR^2+\frac{3}{2}MR^2=4MR^2$$

$$I_{xy}=-\sum_i m_i x_i y_i=-\frac{5}{4}MR^2,I_{yx}=-\frac{5}{4}MR^2$$

其中考虑到圆盘对 I_{xy}的贡献为零，

$$I_{xz}=I_{yz}=0$$

系统关于 A 点的惯量张量为

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{2}MR^2 & -\frac{5}{4}MR^2 & 0\\ -\frac{5}{4}MR^2 & \frac{3}{2}MR^2 & 0\\ 0 & 0 & 4MR^2\end{pmatrix}$$

(2) 因为 $I_{xz}=0,I_{yz}=0$，可见 z 轴是一个惯量主轴，$I_3=I_{zz}=4MR^2$ 为一个主转动

惯量.

另两个主转动惯量为下列二次方程的根：

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2}MR^2 - I & -\frac{5}{4}MR^2 \\ -\frac{5}{4}MR^2 & \frac{3}{2}MR^2 - I \end{vmatrix} = 0$$

$$I^2 - 4MR^2 I + \frac{35}{16}(MR^2)^2 = 0$$

解出

$$I_1 = \left(2 + \frac{1}{4}\sqrt{29}\right)MR^2 = 3.346MR^2$$

$$I_2 = \left(2 - \frac{1}{4}\sqrt{29}\right)MR^2 = 0.654MR^2$$

设惯量主轴 1、2 的单位矢量分别为(e_{1x}, e_{1y})和(e_{2x}, e_{2y})，则

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \left(2 + \frac{1}{4}\sqrt{29}\right) & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} - \left(2 + \frac{1}{4}\sqrt{29}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{pmatrix} = 0$$

$$e_{1x}^2 + e_{1y}^2 = 1$$

只有两个独立方程，即

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{29}\right)e_{1x} - \frac{5}{4}e_{1y} = 0$$

$$e_{1x}^2 + e_{1y}^2 = 1$$

解出

$$e_{1x} = \frac{5}{\sqrt{58 - 4\sqrt{29}}} = 0.828$$

$$e_{1y} = \frac{2 - \sqrt{29}}{\sqrt{58 - 4\sqrt{29}}} = -0.561$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \left(2 - \frac{1}{4}\sqrt{29}\right) & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} - \left(2 - \frac{1}{4}\sqrt{29}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \end{pmatrix} = 0$$

$$e_{2x}^2 + e_{2y}^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{29}\right)e_{2x} - \frac{5}{4}e_{2y} = 0$$

$$e_{2x}^2 + e_{2y}^2 = 1$$

解出

$$e_{2x} = \frac{5}{\sqrt{58 + 4\sqrt{29}}} = 0.561$$

$$e_{2y}=\frac{2+\sqrt{29}}{\sqrt{58+4\sqrt{29}}}=0.828$$

三个主转动惯量及相应惯量主轴的单位矢量如下：

$$I_1=3.346MR^2,\qquad \boldsymbol{e}_1=(0.828,-0.561,0)$$
$$I_2=0.654MR^2,\qquad \boldsymbol{e}_2=(0.561,0.828,0)$$
$$I_3=4MR^2,\qquad \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$$

7.2.4 如图 7.20 所示，四个质量均为 m 的质点位于 xy 平面上，坐标分别为 $(a,0)$、$(-a,0)$、$(0,2a)$、$(0,-2a)$，它们被可不计质量的杆连成一刚体，求：

(1) 对原点的惯量张量；

(2) 绕过原点的与 x、y、z 轴的夹角都相等的轴的转动惯量；

(3) 在某时刻沿(2)问所述的轴转动，求此时刚体对原点的角动量矢量和该轴的夹角.

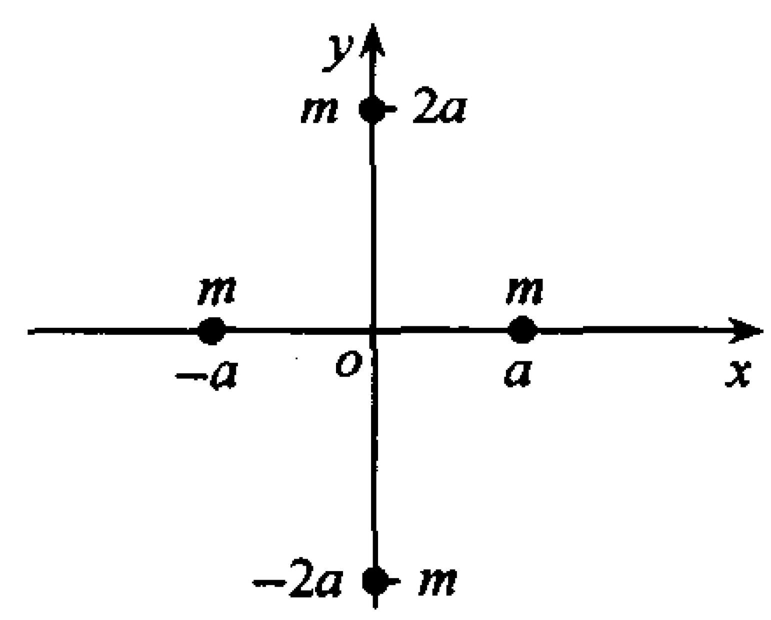


图 7.20

解 (1)

$$I_{xx}=2m(2a)^2=8ma^2$$
$$I_{yy}=2ma^2,I_{zz}=10ma^2$$
$$I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$$

关于原点的惯量张量为

$$\mathbf{I}(0)=\begin{pmatrix}8ma^2 & 0 & 0\\ 0 & 2ma^2 & 0\\ 0 & 0 & 10ma^2\end{pmatrix}$$

(2) 该转轴的单位矢量

$$\mathbf{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$$
$$\alpha=\beta=\gamma,\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$
$$3\cos^2\alpha=1,\quad \alpha=\beta=\gamma=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$I=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{I}(0)\cdot\boldsymbol{n}=8ma^2\cos^2\alpha+2ma^2\cos^2\beta+10ma^2\cos^2\gamma=\frac{20}{3}ma^2$$

(3) $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

$$\boldsymbol{J}=\mathbf{I}(0)\cdot\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}8ma^2 & 0 & 0\\ 0 & 2ma^2 & 0\\ 0 & 0 & 10ma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\omega\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\omega\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\omega\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega ma^2(8\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})$$

$$J=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega ma^2\sqrt{8^2+2^2+10^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{168}ma^2\omega$$

设 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角 θ,

$$\theta=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}}{J}\right)=\arccos\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\omega ma^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(8+2+10)}{\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{168}ma^2\omega}\right]$$

$$=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\frac{20}{\sqrt{168}}\right)=\arccos0.8909=27^\circ$$

7.2.5　一个质点系由位于点$(a,-a,a)$质量为 $4m$ 的质点、位于点$(-a,a,a)$质量为 $3m$ 的质点和位于点(a,a,a)质量为 $2m$ 的质点组成.

(1) 求关于坐标原点的惯量张量;

(2) 用(1)问的结果求通过原点、单位方向矢量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$ 的轴的转动惯量.

解　(1)

$$I_{xx}=4m[(-a)^2+a^2]+3m(a^2+a^2)+2m(a^2+a^2)=18ma^2$$

$$I_{yy}=4m(a^2+a^2)+3m[a^2+(-a)^2]+2m(a^2+a^2)=18ma^2$$

$$I_{zz}=4m[a^2+(-a)^2]+3m[(-a)^2+a^2]+2m(a^2+a^2)=18ma^2$$

$$I_{xy}=I_{yx}=-[4ma(-a)+3m(-a)a+2ma\cdot a]=5ma^2$$

$$I_{xz}=I_{zx}=-[4ma\cdot a+3m(-a)\cdot a+2ma\cdot a]=-3ma^2$$

$$I_{yz}=I_{zy}=-[4m(-a)a+3ma\cdot a+2ma\cdot a]=-ma^2$$

关于原点的惯量张量为

$$\mathbf{I}(0)=ma^2\begin{pmatrix}18 & 5 & -3\\ 5 & 18 & -1\\ -3 & -1 & 18\end{pmatrix}$$

$$(2)\ I=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{J}(0)\cdot\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & 5 & -3\\ 5 & 18 & -1\\ -3 & -1 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}ma^2=23ma^2$$

7.2.6　一个质点系包括位于点$(a,-a,0)$质量为 $4m$ 的质点、位于$(-a,a,0)$质量为 $3m$ 的质点和位于$(a,a,0)$质量为 $2m$ 的质点. 求:

(1) 关于坐标原点的惯量张量;

(2) 关于原点的主转动惯量.

解　(1)

$$I_{xx}=4m[(-a^2)+0^2]+3m(a^2+0^2)+2m(a^2+0^2)=9ma^2$$

$$I_{yy}=4m(0^2+a^2)+3m[0^2+(-a)^2]+2m(0^2+a^2)=9ma^2$$

$$I_{zz}=4m[(-a)^2+a^2]+3m[(-a)^2+a^2]+2m(a^2+a^2)=18ma^2$$

$$I_{xy}=I_{yx}=-\left[4ma(-a)+3m(-a)a+2ma\cdot a\right]=5ma^2$$
$$I_{xz}=I_{zx}=-\left[4ma\cdot 0+3m(-a)\cdot 0+2ma\cdot 0\right]=0$$
$$I_{yz}=I_{zy}=-\left[4m(-a)\cdot 0+3ma\cdot 0+2ma\cdot 0\right]=0$$

所以
$$\mathbf{I}(0)=ma^2\begin{pmatrix}9&5&0\\5&9&0\\0&0&18\end{pmatrix}$$

(2) 因为 $I_{xz}=I_{yz}=0$，z 轴已是惯量主轴，$I_3=I_{zz}=18ma^2$ 已是一个主转动惯量.

另两个主转动惯量是下列方程的根：
$$\begin{vmatrix}9ma^2-I & 5ma^2\\ 5ma^2 & 9ma^2-I\end{vmatrix}=0$$
$$I^2-18ma^2I+56(ma^2)^2=0$$
$$(I-4ma^2)(I-14ma^2)=0$$

所以另两个主转动惯量为
$$I_1=4ma^2,\quad I_2=14ma^2$$

7.2.7 求底面半径为 r、高为 h、质量为 m 的均质圆锥体相对于底面中心的惯量张量.当 r 与 h 之比为何值时，过此点的任何轴都是惯量主轴，并在此情况下，找出质心的位置以及关于质心的主转动惯量.

解 取坐标轴原点位于底面中心，x、y 在底面上，z 轴为圆锥的对称轴，顶点的坐标为 $(0,0,h)$. 设圆锥密度为 ρ，

$$m=\rho\int_0^h \mathrm{d}z\int_0^{\frac{h-z}{h}r}2\pi r'\mathrm{d}r'=2\pi\rho\int_0^h\frac{1}{2}\left(\frac{h-z}{h}r\right)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\rho\pi r^2h$$
$$\rho=\frac{3m}{\pi r^2h}$$
$$I_{xx}=I_{yy}=\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m$$
$$\mathrm{d}m=\rho r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$
$$y=r'\sin\varphi$$
$$\begin{aligned}I_{xx}=I_{yy}&=\rho\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^{\frac{h-z}{h}r}r'\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi}(r'^2\sin^2\varphi+z^2)\mathrm{d}\varphi\\&=\rho\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^{\frac{h-z}{h}r}r'\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2}r'^2+z^2\right)\mathrm{d}r'\\&=\rho\int_0^h\pi\left[\frac{1}{4}\left(\frac{h-z}{h}r\right)^4+z^2\left(\frac{h-z}{h}r\right)^2\right]\mathrm{d}z\\&=\rho\pi\left(\frac{1}{20}r^4h+\frac{1}{30}r^2h^3\right)=\frac{1}{20}m(3r^2+2h^2)\end{aligned}$$
$$I_{zz}=\int\frac{1}{2}r'^2\mathrm{d}m,\quad \mathrm{d}m=\rho\pi r'^2\mathrm{d}z$$
$$I_{zz}=\int_0^h\frac{1}{2}r'^2\cdot\rho\pi r'^2\mathrm{d}z$$

$$r' = \frac{h-z}{h}r$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}\rho\pi\int_0^h \left(\frac{h-z}{h}r\right)^4 \mathrm{d}z = \frac{1}{10}\rho\pi r^4 h = \frac{3}{10}mr^2$$

根据质量分布的对称性,可知

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$\mathbf{I}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}m(3r^2+2h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}m(3r^2+2h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2 \end{pmatrix}$$

如

$$\frac{1}{20}m(3r^2+2h^2) = \frac{3}{10}mr^2$$

即

$$3r^2+2h^2 = 6r^2, \quad 2h^2 = 3r^2$$

则 $h=\sqrt{\frac{3}{2}}r$ 时,过 O 点的任何轴都是惯量主轴,且转动惯量 $I=\frac{3}{10}mr^2$.

下面求质心 C 的坐标,显然,$x(C)=y(C)=0$.

$$z(C) = \frac{1}{m}\int_0^h \rho\pi r'^2 z\mathrm{d}z = \frac{1}{m}\int_0^h \rho\pi\left(\frac{h-z}{h}r\right)^2 z\mathrm{d}z = \frac{1}{4}h$$

现考虑 $h=\sqrt{\frac{3}{2}}r$ 的情况.

$$z(C) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}r = \frac{1}{8}\sqrt{6}\,r$$

由关于转动惯量的平行轴定理.

$$I_{xx}(C) = I_{yy}(C) = I_{xx}(O) - m[z(C)]^2 = \frac{3}{10}mr^2 - m\left(\frac{1}{8}\sqrt{6}\,r\right)^2 = \frac{33}{160}mr^2$$

$$I_{zz}(C) = I_{zz}(O) = \frac{3}{10}mr^2$$

由质量分布的对称性,通过质心的 x、y、z 轴(z 轴是对称轴)仍是关于质心的惯量主轴;上述 I_{xx}(C)、I_{yy}(C)、I_{zz}(C)是关于质心的主转动惯量.

7.2.8　半径为 R 的非均匀圆球,在距中心 r 处的密度可用下式表示:

$$\rho = \rho_0\left(1 - a\frac{r^2}{R^2}\right)$$

式中 ρ_0 及 a 为常量.试求:

(1) 绕过球心的任何轴的转动惯量;

(2) 关于球面上一点的三个主转动惯量;

(3) 关于球面上一点的惯量张量,要用下列坐标表达它,取 x、y、z 坐标后,球心的坐

标为$(R\cos\alpha, R\cos\beta, R\cos\gamma)$.

解

$$m=\int \rho r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^\pi\rho_0\left(1-a\frac{r^2}{R^2}\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{4}{15}\pi\rho_0(5-3a)R^3$$

(1)

$$I=\int(r\sin\theta)^2\rho r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\pi\int_0^R\rho_0\left(1-a\frac{r^2}{R^2}\right)r^4\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{8\pi}{3}\rho_0\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}a\right)R^5=\frac{14-10a}{35-21a}mR^2$$

(2) 取所考虑的球面上的那点为坐标原点，z 轴通过质心(球心)，则

$$I_3=\frac{14-10a}{35-21a}mR^2$$
$$I_1=I_2=\frac{14-10a}{35-21a}mR^2+mR^2=\frac{49-31a}{35-21a}mR^2$$

(3) 用关于任何一点的惯量张量元素与关于质心的惯量张量元素间的下列关系：

$$I_{jk}(A)=I_{jk}(C)+m[R_c^2(A)\delta_{jk}-x_{jC}(A)x_{kC}(A)]$$

其中 $\boldsymbol{R}_C(A)$是质心 C 相对于 A 的位矢.

今

$$\boldsymbol{I}(C)=\begin{pmatrix}\frac{14-10a}{35-21a}mR^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{14-10a}{35-21a}mR^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{14-10a}{35-21a}mR^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_C(A)=R\cos\alpha\boldsymbol{i}+R\cos\beta\boldsymbol{j}+R\cos\gamma\boldsymbol{k}$$

$$I_{xx}(A)=I_{xx}(C)+m[(R\cos\alpha)^2+(R\cos\beta)^2+(R\cos\gamma)^2-R\cos\alpha\cdot R\cos\alpha]$$
$$=I_{xx}(C)+mR^2\sin^2\alpha$$
$$I_{yy}(A)=I_{yy}(C)+mR^2\sin^2\beta$$
$$I_{zz}(A)=I_{zz}(C)+mR^2\sin^2\gamma$$
$$I_{xy}(A)=I_{xy}(C)+m[-R\cos\alpha\cdot R\cos\beta]=-mR^2\cos\alpha\cos\beta$$
$$I_{xz}(A)=-mR^2\cos\alpha\cos\gamma$$
$$I_{yz}(A)=-mR^2\cos\beta\cos\gamma$$

关于球面上一点 A 的惯量张量为

$$\mathbf{I}(A)=\begin{pmatrix}\left(\frac{14-10a}{35-21a}+\sin^2\alpha\right)mR^2 & -mR^2\cos\alpha\cos\beta & -mR^2\cos\alpha\cos\gamma\\ -mR^2\cos\alpha\cos\beta & \left(\frac{14-10a}{35-21a}+\sin^2\beta\right)mR^2 & -mR^2\cos\beta\cos\gamma\\ -mR^2\cos\alpha\cos\gamma & -mR^2\cos\beta\cos\gamma & \left(\frac{14-10a}{35-21a}+\sin^2\gamma\right)mR^2\end{pmatrix}$$

当 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$，$\gamma=\pi$ 时，x、y、z 轴是关于 A 的三个惯量主轴，代入上式，得到的惯量张量正是所期待的，与用平行轴定理由 $\mathbf{I}(C)$ 得到的结果相同.

7.2.9 质量为 m 的均质椭球，椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

试求此椭球绕过其质心的三个惯量主轴的转动惯量.

解 设均质椭球的密度为 ρ.

$$\begin{aligned}m&=\rho\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\\ &=8\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_0^{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\\ &=8\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

用积分公式：

$$\int(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

$$m=8\rho bc\int_0^a\left[\frac{1}{2}\frac{y}{b}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\left(\frac{y}{b}\Big/\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\Bigg|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\rho\pi abc$$

$$\begin{aligned}I_1&=\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m=\int(y^2+z^2)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=8\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}(y^2+z^2)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

在以下的运算中将用以下积分公式：

$$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{u}{a}$$

$$\int (a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u=\frac{u}{8}(5a^2-2u^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{u}{a}$$

可得

$$I_1=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$$

同样可得

$$I_2=\frac{1}{5}m(c^2+a^2),\quad I_3=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$$

7.2.10　上题如不取三个惯量主轴为坐标，而取上述坐标绕 z 轴转 α 角的 x、y、z 坐标，求关于质心的惯量张量.

解　右图 7.21 中 O 为质心，x'、y'轴是惯量主轴，x、y 轴是题目所要取的坐标.

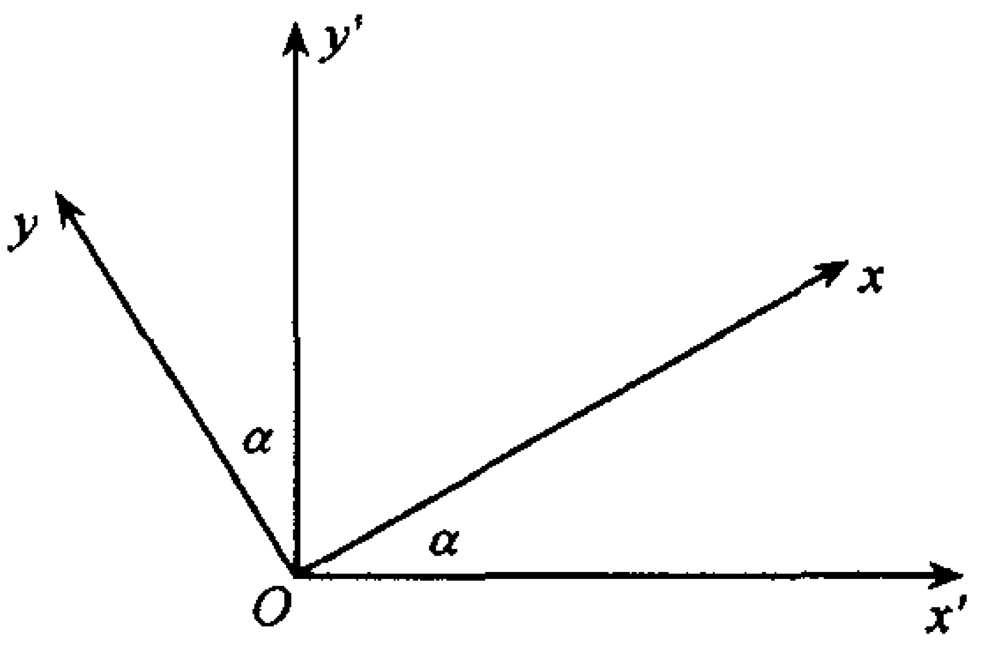


图 7.21

$$\boldsymbol{i}=\cos\alpha\boldsymbol{i}'+\sin\alpha\boldsymbol{j}'$$
$$\boldsymbol{j}=-\sin\alpha\boldsymbol{i}'+\cos\alpha\boldsymbol{j}'$$
$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$$

用 x'、y'、z'坐标，关于质心的惯量张量为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{5}m(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}m(c^2+a^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2+b^2)\end{pmatrix}$$

用 x、y、z 坐标，关于质心的惯量张量各元素计算如下：

用《经典力学》下册 p.116(9.3.12′)式

$$I_{xx}=(\cos\alpha\quad\sin\alpha\quad 0)\begin{pmatrix}\frac{1}{5}m(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}m(c^2+a^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2+b^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}m[b^2+c^2+(a^2-b^2)\sin^2\alpha]$$

$$I_{yy}=(-\sin\alpha\quad\cos\alpha\quad 0)\begin{pmatrix}\frac{1}{5}m(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}m(c^2+a^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2+b^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}m[c^2 + a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2\alpha]$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = (\cos\alpha \quad \sin\alpha \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{5}m(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}m(c^2+a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2+b^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}m(a^2 - b^2)\sin\alpha\cos\alpha$$

用式(9.3.12′)计算 I_{xz}、I_{yz}或考虑到 z 轴仍是惯量主轴均有

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

用题目规定的 xyz 坐标,关于质心的惯量张量为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}m[b^2+c^2+(a^2-b^2)\sin^2\alpha] & \frac{1}{5}m(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \frac{1}{5}m(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{1}{5}m[c^2+a^2+(b^2-a^2)\sin^2\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

当 $\alpha=0$ 时可得应有的结果.

7.2.11　一个质量为 m、边长为 a 的均质立方体,试求:

(1) 关于质心的惯量张量;

(2) 关于一个顶点取过此点的三条边为 x、y、z 轴时的惯量张量;

(3) 关于一个顶点的三个主转动惯量;

(4) 写出(2)、(3)问两种取法时的惯量椭球方程.

解　(1) 取过质心 C 的三个笛卡儿坐标分别平行于通过一个顶点的三条边.它们都是惯量主轴,而且惯量椭球是球型的.

$$I_1 = I_2 = I_3 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\rho\,dx\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dy\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}(y^2+z^2)dz$$

$$= 8\rho\cdot\frac{a}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\left[\frac{a}{2}y^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]dy = \frac{1}{6}\rho a^5 = \frac{1}{6}ma^2$$

所有惯量积均为零,因为惯量椭球是球型的,过质心任取互相垂直的三个坐标为 x、y、z 轴,惯量张量均为

$$\mathbf{I}(C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{pmatrix}$$

（2）用关于转动惯量的平行轴定理可得

$$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=I_{xx}(C)+md^2$$

其中 d 为两个平行轴间的距离，这里 d 等于立方体一个面的对角线长度的一半，$d=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{1}{6}ma^2+m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{2}{3}ma^2$$

$$I_{xy}=-\int_0^a\rho x\mathrm{d}x\int_0^a y\mathrm{d}y\int_0^a\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\rho a^5=-\frac{1}{4}ma^2$$

同样可得

$$I_{xz}=I_{yz}=-\frac{1}{4}ma^2$$

惯量张量为

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2\end{pmatrix}$$

（3）取过此顶点的立方体的对角线为 z 轴，它通过质心，且是关于质心的惯量主轴. 对这个轴上的任何点来说，这个轴都是惯量主轴. 因此对此顶点，z 轴是一个惯量主轴.

$$I_3=\frac{1}{6}ma^2$$

因为过质心的任何轴都是关于质心的惯量主轴，且主转动惯量均为$\frac{1}{6}ma^2$. 根据平行轴定理，对顶点而言，与 z 轴垂直的任何两个互相垂直的轴作 x、y 轴，都有相同的转动惯量，都是惯量主轴.

$$I_1=I_2=I_{xx}(C)+md^2=\frac{1}{6}ma^2+m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\frac{11}{12}ma^2$$

（4）取(2)问的坐标系，将(2)问中得到的 I_{xx}等代入下式：

$$I_{xx}x^2+I_{yy}y^2+I_{zz}z^2+2I_{xy}xy+2I_{xz}xz+2I_{yz}yz=1$$

得惯量椭球方程为

$$\frac{2}{3}ma^2(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}ma^2(xy+xz+yz)=1$$

取(3)问的坐标系，惯量椭球方程为

$$\frac{11}{12}ma^2(x^2+y^2)+\frac{1}{6}ma^2z^2=1$$

7.2.12　上题所述的立方体，取一个角为坐标系原点，三条边为 x、y、z 轴，求绕过原点方向矢量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$的轴的转动惯量，并给出此轴与惯量椭球面交点的坐标.

解　上题已求得用此坐标系的惯量张量为

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2\end{pmatrix}$$

绕过原点方向矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的轴的转动惯量为

$$I=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}(8-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})ma^2$$

也可用上题得到的椭球方程

$$\frac{2}{3}ma^2(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}ma^2(xy+xz+yz)=1$$

考虑到该轴与椭球面的交点 Q 的 x、y、z 坐标为$\left(\frac{n_x}{\sqrt{I}},\frac{n_y}{\sqrt{I}},\frac{n_z}{\sqrt{I}}\right)$,代入椭球方程,

$$\frac{2}{3}ma^2\left[\left(\frac{n_x}{\sqrt{I}}\right)^2+\left(\frac{n_y}{\sqrt{I}}\right)^2+\left(\frac{n_z}{\sqrt{I}}\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}ma^2\left[\frac{n_x}{\sqrt{I}}\frac{n_y}{\sqrt{I}}+\frac{n_x}{\sqrt{I}}\frac{n_z}{\sqrt{I}}+\frac{n_y}{\sqrt{I}}\frac{n_z}{\sqrt{I}}\right]=1$$

解出

$$I=\frac{2}{3}ma^2(n_x^2+n_y^2+n_z^2)-\frac{1}{2}ma^2(n_xn_y+n_xn_z+n_yn_z)$$

代入 $n_x=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$n_y=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$n_z=\frac{\sqrt{6}}{6}$,即得

$$I=\frac{1}{12}(8-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})ma^2$$

交点 Q 的坐标为 $\frac{1}{\sqrt{I}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,另一个交点的坐标为 $-\frac{1}{\sqrt{I}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

7.2.13 考虑一薄板位于 x-y 平面,证明对板上任何一点的惯量张量有如下形式:

$$\begin{pmatrix}A & -C & 0\\ -C & B & 0\\ 0 & 0 & A+B\end{pmatrix}$$

证明 由惯量积的定义可得 $I_{xz}=I_{yz}=0$. 设 $I_{xx}=A$,$I_{yy}=B$,$I_{xy}=-C$,要证明 $I_{zz}=A+B$.

$$I_{zz}=\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m=\int(x^2+z^2)\mathrm{d}m+\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m=I_{yy}+I_{xx}=B+A$$

这里用了薄板上各质元的 z 坐标均为零.

7.2.14 若上题的坐标改用绕 z 轴旋转 θ 角后的坐标,证明惯量张量为

$$\begin{pmatrix} A' & -C' & 0 \\ -C' & B' & 0 \\ 0 & 0 & A'+B' \end{pmatrix}$$

其中

$$A'=A\cos^2\theta+B\sin^2\theta-C\sin2\theta$$
$$B'=A\sin^2\theta+B\cos^2\theta+C\sin2\theta$$
$$C'=C\cos2\theta-\frac{1}{2}(B-A)\sin2\theta$$

并由此证明:如转角

$$\theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2C}{B-A}\right)$$

转后的 x、y 轴为惯量主轴.

证明 设原来的坐标为 x、y、z,转后的坐标表示为 x'、y'、z',

$$\boldsymbol{i}'=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{j}'=-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$$

与解 7.2.10 题一样,

$$I_{x'x'}=(\cos\theta\quad\sin\theta\quad0)\begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=A\cos^2\theta-2C\sin\theta\cos\theta+B\sin^2\theta$$
$$=A\cos^2\theta+B\sin^2\theta-C\sin2\theta=A'$$

$$I_{y'y'}=(-\sin\theta\quad\cos\theta\quad0)\begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=A\sin^2\theta+B\cos^2\theta+C\sin2\theta=B'$$

$$I_{z'z'}=I_{x'x'}+I_{y'y'}=A'+B'\quad\text{(上题已证明)}$$

$$I_{x'y'}=(\cos\theta\quad\sin\theta\quad0)\begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=-C\cos2\theta+\frac{1}{2}(B-A)\sin2\theta=-C'$$

由惯量积的定义,$I_{x'z'}=I_{y'z'}=0$.

把上述惯量张量各元素代入惯量张量的矩阵,正是所要证明的惯量张量.

如

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2C}{B-A}\right)$$

$$C' = C\cos\left[\arctan\left(\frac{2C}{B-A}\right)\right] - \frac{1}{2}(B-A)\sin\left[\arctan\left(\frac{2C}{B-A}\right)\right]$$

因为

$$\arctan\left(\frac{2C}{B-A}\right) = 2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2C}{B-A}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} = \frac{B-A}{\sqrt{(B-A)^2+4C^2}}$$

$$\sin 2\theta = \cos 2\theta \cdot \tan 2\theta = \frac{2C}{\sqrt{(B-A)^2+4C^2}}$$

$$C' = C\cos 2\theta - \frac{1}{2}(B-A)\sin 2\theta$$

$$= C\frac{B-A}{\sqrt{(B-A)^2+4C^2}} - \frac{1}{2}(B-A)\frac{2C}{\sqrt{(B-A)^2+4C^2}} = 0$$

所以

$$I_{x'y'} = I_{y'x'} = 0$$

$I_{x'y'}=0, I_{x'z'}=0$ 说明 x' 轴是惯量主轴. $I_{y'x'}=0, I_{y'z'}=0$ 说明 y' 轴是惯量主轴.

或反过来证明,转后的 x、y 轴要成为惯量主轴,必须 $C'=0$,立即得

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2C}{B-A}\right)$$

7.2.15 如图 7.22 所示,一个质量为 m 的均质圆锥,其底面边缘的方程为 $(x-a)^2+z^2=a^2$ 和 $y=0$,顶点位于 $(a,ka,0)$. 求关于原点的惯量张量.

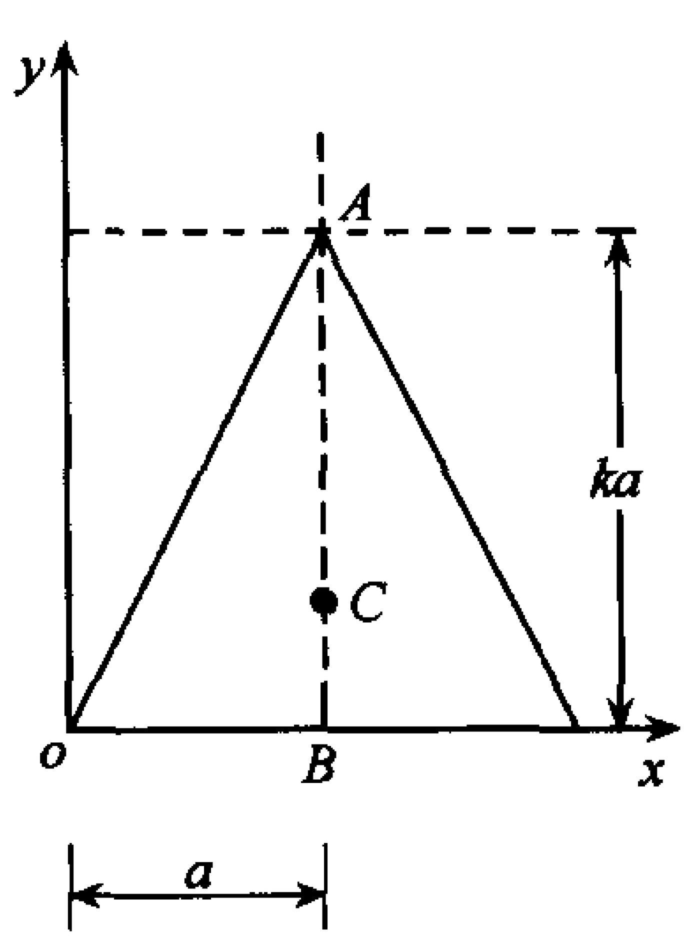


图 7.22

解 $m=\frac{1}{3}\rho\pi a^2 ka=\frac{1}{3}\rho\pi k a^3$,质心坐标:$x_C=a, z_C=0$.

$$y_C = \frac{1}{m}\int_0^{ka} y\rho\pi\left(\frac{ka-y}{ka}a\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{12}\frac{\rho\pi}{m}k^2a^4 = \frac{1}{4}ka$$

利用 7.2.7 题已算得的结果,关于底面中心 B 的惯量张量可写出

$$\mathbf{I}(B) = \frac{1}{20}ma^2\begin{pmatrix} 3+2k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3+2k^2 \end{pmatrix}$$

注意写上述惯量张量时,坐标系原点位于 B,须将上图中的 xyz 轴向右平移.

用关于任何一点的惯量张量元素与关于质心的惯量张量元素间的下列关系:

$$I_{jk}(C) = I_{jk}(B) - m[R_C^2(B)\delta_{jk} - x_{jC}(B)x_{kC}(B)]$$

$$\boldsymbol{R}_C(B) = x_C(B)\boldsymbol{i} + y_C(B)\boldsymbol{j} + z_C(B)\boldsymbol{k}$$

是质心 C 相对于 B 点的位矢,

$$\boldsymbol{R}_C(B) = \frac{1}{4}ka\boldsymbol{j}$$

$$I_{xx}(C)=\frac{1}{20}ma^2(3+2k^2)-m\left(\frac{1}{4}ka\right)^2=\frac{3}{80}ma^2(4+k^2)$$

$$I_{yy}(C)=\frac{6}{20}ma^2-m\left[\left(\frac{1}{4}ka\right)^2-\left(\frac{1}{4}ka\right)^2\right]=\frac{3}{10}ma^2$$

$$I_{zz}(C)=I_{xx}(C)=\frac{3}{80}ma^2(4+k^2)$$

以质心为原点的 x、y、z 轴都是关于质心的惯量主轴.

$$I_{xy}(C)=I_{xz}(C)=I_{yz}(C)=0$$

$$\mathbf{I}(C)=\frac{3}{80}ma^2\begin{pmatrix}4+k^2 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 4+k^2\end{pmatrix}$$

$$I_{jk}(O)=I_{jk}(C)+m[R_C^2(O)\delta_{jk}-x_{jC}(O)x_{kC}(O)]$$

$$\boldsymbol{R}_C(0)=a\boldsymbol{i}+\frac{1}{4}ka\boldsymbol{j}$$

$$I_{xx}(O)=\frac{3}{80}ma^2(4+k^2)+m\left[a^2+\left(\frac{1}{4}ka\right)^2-a^2\right]=\frac{1}{20}ma^2(3+2k^2)$$

$$I_{yy}(O)=\frac{3}{10}ma^2+m\left[a^2+\left(\frac{1}{4}ka\right)^2-\left(\frac{1}{4}ka\right)^2\right]=\frac{13}{10}ma^2$$

$$I_{zz}(O)=\frac{3}{80}ma^2(4+k^2)+m\left[a^2+\left(\frac{1}{4}ka\right)^2-0\right]=\frac{1}{20}ma^2(23+2k^2)$$

$$I_{xy}(O)=0+m\left(-a\cdot\frac{1}{4}ka\right)=-\frac{1}{4}mka^2$$

$$I_{xz}(O)=0+m(-a\cdot 0)=0$$

$$I_{yz}(O)=0+m\left(-\frac{1}{4}ka\cdot 0\right)=0$$

$$\mathbf{I}(O)=\frac{1}{20}ma^2\begin{pmatrix}3+2k^2 & -5k & 0\\ -5k & 26 & 0\\ 0 & 0 & 23+2k^2\end{pmatrix}$$

7.2.16　证明：(1) 对于过一点的三个互相垂直的轴的转动惯量，对任一个轴的转动惯量都不能超过对另两个轴的转动惯量之和；

(2) 在刚体上取 $Oxyz$ 与 $Ox'y'z'$ 两坐标系，如两坐标系不仅有公共的原点，x、y、x'、y' 轴还在同一平面上，则刚体对各轴的转动惯量有下列关系：

$$I_{xx}+I_{yy}=I_{x'x'}+I_{y'y'}$$

并给予物理解释.

证明　(1)

$$I_{xx}=\int(y^2+z^2)=\mathrm{d}m$$

$$I_{yy}=\int(z^2+x^2)\mathrm{d}m,\quad I_{zz}=\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m$$

$$I_{xx}+I_{yy}=\int(x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}m\geqslant I_{zz}$$

除了刚体的所有质元的 z 坐标均为零，即刚体是位于 xy 平面的薄板有 $I_{xx}+I_{yy}=I_{zz}$ 外，均

有 $I_{xx}+I_{yy}>I_{zz}$.

同样有　$I_{yy}+I_{zz}\geqslant I_{xx}$，$I_{zz}+I_{xx}\geqslant I_{yy}$. 这就证明了对任一轴的转动惯量不能超过对另两个轴的转动惯量之和.

(2) 方法一：两个坐标系有公共的原点，且 x、y、x'、y' 轴在同一平面上，则 z、z' 轴必共线，可以是同向的，也可以是反向的，

$$I_{xx}=\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m$$

$$I_{yy}=\int(z^2+x^2)\mathrm{d}m$$

$$I_{xx}+I_{yy}=\int(x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}m$$

$$I_{x'x'}+I_{y'y'}=\int(x'^2+y'^2+2z'^2)\mathrm{d}m$$

对于刚体上的任一质元，其 z、z' 坐标或相等(z、z' 轴同向)或绝对值相同但正负号相反(z、z' 轴反向). 不管哪种情况，$z^2=z'^2$、x^2+y^2、$x'^2+y'^2$ 分别是该质元至 z 轴、z' 轴的距离的平方，z、z' 轴共线，故有

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2$$

对任一质元有

$$x^2+y^2+2z^2=x'^2+y'^2+2z'^2$$

对所有质元有

$$\int(x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}m=\int(x'^2+y'^2+2z'^2)\mathrm{d}m$$

即

$$I_{xx}+I_{yy}=I_{x'x'}+I_{y'y'}$$

这种证法在证明的过程中已包含了物理解释.

方法二：用惯量张量从一组坐标到另一组坐标的变换关系来证明：

$$I_{j'k'}=(e_{j'1}\quad e_{j'2}\quad e_{j'3})\begin{pmatrix}I_{11}&I_{12}&I_{13}\\I_{21}&I_{22}&I_{23}\\I_{31}&I_{32}&I_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{k'1}\\e_{k'2}\\e_{k'3}\end{pmatrix}$$

就这里 z、z' 轴反向(图 7.23)的情况证明如下：

$$\boldsymbol{i}'=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}'=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{i}+\cos(\pi-\varphi)\boldsymbol{j}=\sin\varphi\boldsymbol{i}-\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

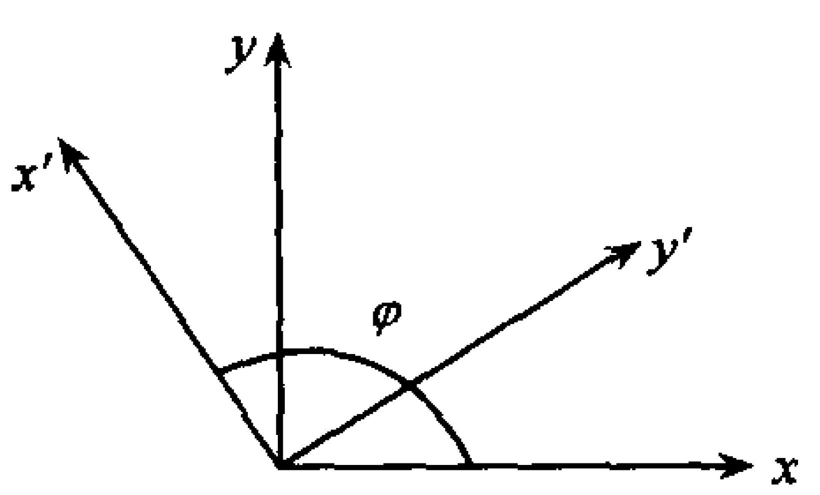


图 7.23

$$I_{x'x'}=(\cos\varphi\quad\sin\varphi\quad 0)\begin{pmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}$$

$$=(\cos\varphi\quad\sin\varphi\quad 0)\begin{pmatrix}I_{xx}\cos\varphi+I_{xy}\sin\varphi\\I_{xy}\cos\varphi+I_{yy}\sin\varphi\\I_{xz}\cos\varphi+I_{zy}\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$= I_{xx}\cos^2\varphi + 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + I_{yy}\sin^2\varphi$$

$$I_{y'y'} = (\sin\varphi \quad -\cos\varphi \quad 0)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= I_{xx}\sin^2\varphi - 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + I_{yy}\cos^2\varphi$$

所以

$$I_{x'x'} + I_{y'y'} = I_{xx} + I_{yy}$$

同样可对 z、z' 轴同向的情况证明上式成立. 这种证法没有包含物理解释.

7.2.17 如图 7.24 所示，质量为 m 的均质薄片，由 x 轴、y 轴及圆心在 (R,R)、半径为 R 的圆弧围成它的边界. 求绕过原点的、在 xy 平面上与 x 轴夹角为 30°的轴的转动惯量.

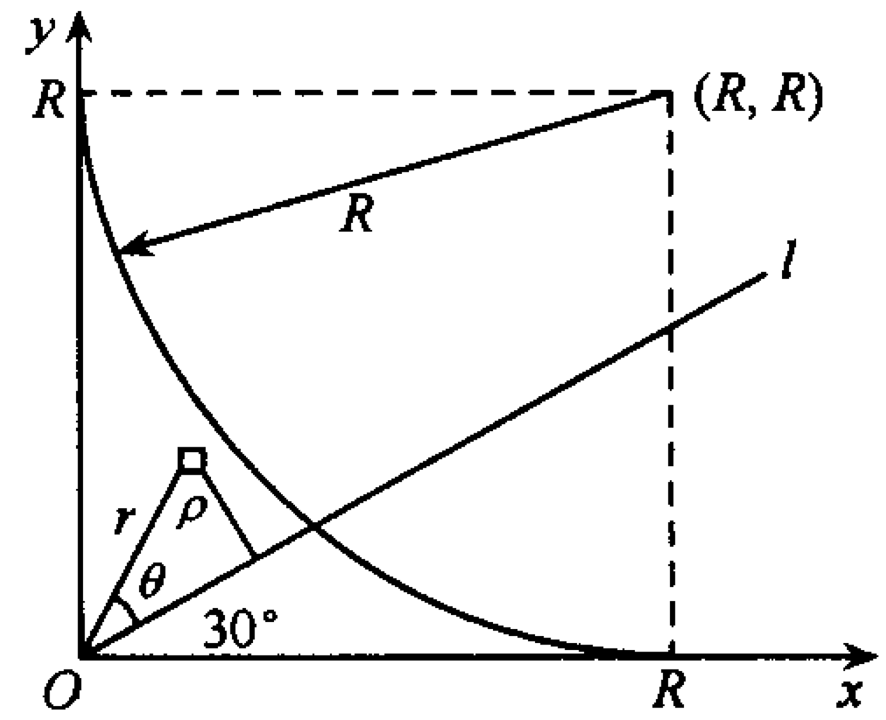


图 7.24

解　方法一：设面密度为 σ，考虑 (x,y) 处质元 $\sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，它到所要考虑的 l 轴的距离为 ρ，质元对 l 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I = \rho^2\mathrm{d}m = (r\sin\theta)^2\sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{l}^\circ|^2\sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\boldsymbol{l}^\circ$是 l 轴的单位矢量.

$$\boldsymbol{l}^\circ = \cos30°\boldsymbol{i} + \sin30°\boldsymbol{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}I = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I = \int_0^R\mathrm{d}y\int_0^{R-\sqrt{R^2-(y-R)^2}}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\sigma\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{48}\sigma R^4[48 - 19\sqrt{3} + \pi(6\sqrt{3} - 15)]$$

$$m = \sigma\left(R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2\right) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\sigma R^2$$

$$I = \frac{1}{12(4-\pi)}[48 - 19\sqrt{3} + \pi(6\sqrt{3} - 15)]mR^2$$

方法二：用公式 $I = \boldsymbol{l}^\circ\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{l}^\circ$计算.

$$I_{xx} = I_{yy} = \int_0^R(x^2 + z^2)\mathrm{d}x\int_0^{R-\sqrt{R^2-(x-R)^2}}\sigma\mathrm{d}y$$

$$= \sigma\int_0^R x^2[R - \sqrt{R^2 - (x-R)^2}]\mathrm{d}x$$

用积分公式

$$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

可得

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{16}(16 - 5\pi)\sigma R^4$$

$$I_{xy}=-\int_0^R x\mathrm{d}x\int_0^{R-\sqrt{R^2-(x-R)^2}} y\sigma\mathrm{d}y=-\frac{1}{24}(19-6\pi)\sigma R^4$$

$$I_{xz}=I_{yz}=0,\quad I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}$$

在这里可以不作 I_{xz}、I_{yz}、I_{zz}的计算.

$$I=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{16}(16-5\pi)\sigma R^4 & -\frac{1}{24}(19-6\pi)\sigma R^4 & 0\\ -\frac{1}{24}(19-6\pi)\sigma R^4 & \frac{1}{16}(16-5\pi)\sigma R^4 & 0\\ 0 & 0 & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{48}[48-19\sqrt{3}+\pi(6\sqrt{3}-15)]\sigma R^4$$

$$=\frac{1}{12(4-\pi)}[48-19\sqrt{3}+\pi(6\sqrt{3}-15)]mR^2$$

方法三:用叠加法计算 **I**.

用 I_1、I_2 分别表示图 7.25(a)、(b)中阴影部分对 l 轴的转动惯量,$\mathbf{I}_1$、$\mathbf{I}_2$ 分别表示相应部分对 O 点的惯量张量.

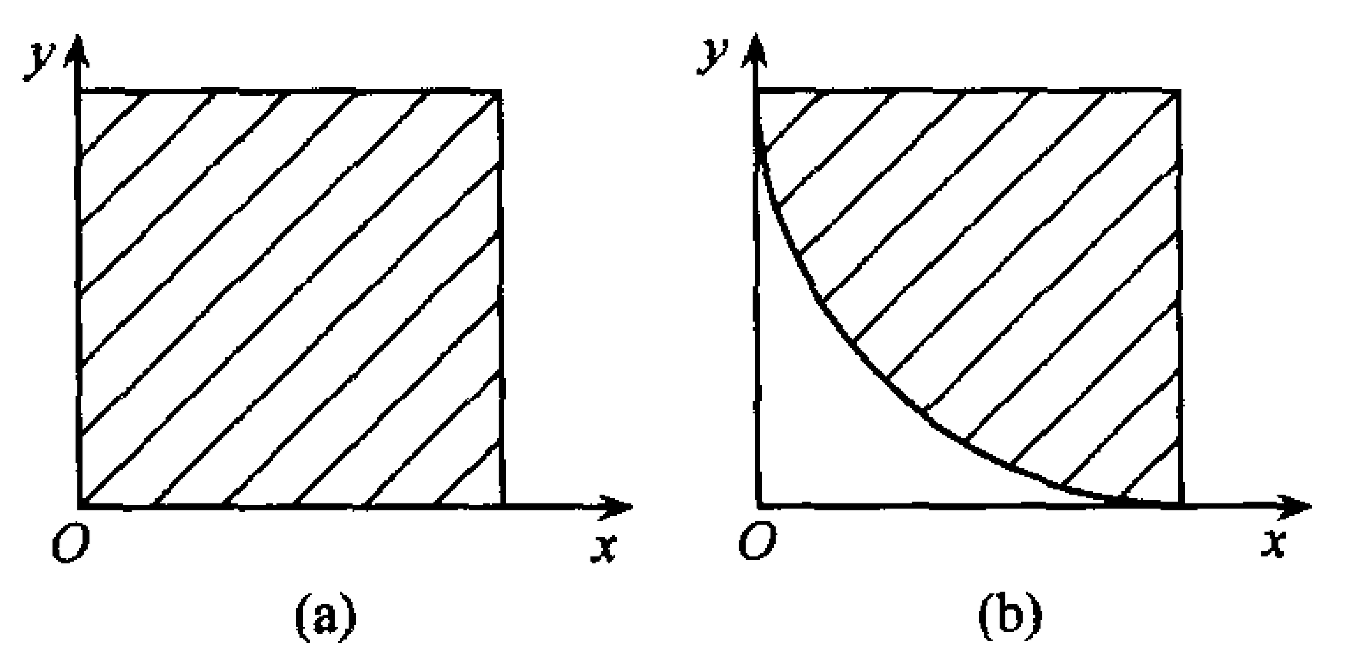


图 7.25

$$I_{1xx}=I_{1yy}=\frac{1}{3}(\sigma R^2)R^2=\frac{1}{3}\sigma R^4$$

$$I_{1xy}=-\int_0^R x\mathrm{d}x\int_0^R y\sigma\mathrm{d}y=-\frac{1}{4}\sigma R^4$$

$$I_1=\boldsymbol{l}^\circ\cdot\mathbf{I}_1\cdot\boldsymbol{l}^\circ=I_{1xx}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+I_{1yy}\left(\frac{1}{2}\right)^2+2I_{1xy}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\sigma R^4$$

$$I_{2xx}=I_{2yy}=\int_0^R\mathrm{d}y\int_{R-\sqrt{R^2-(y-R)^2}}^R(x^2+z^2)\sigma\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{16}\pi\right)\sigma R^4$$

$$I_{2xy}=-\int_0^R y\mathrm{d}y\int_{R-\sqrt{R^2-(y-R)^2}}^R x\sigma\mathrm{d}x=\left(\frac{13}{24}-\frac{\pi}{4}\right)\sigma R^4$$

$$I_2=\boldsymbol{l}^\circ\cdot\mathbf{I}_2\cdot\boldsymbol{l}^\circ=I_{2xx}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+I_{2yy}\left(\frac{1}{2}\right)^2+2I_{2xy}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}-\frac{13}{48}\sqrt{3}+\frac{5}{16}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\right)\sigma R^4$$

$$I=I_1-I_2=\frac{1}{48}(48-19\sqrt{3}-15\pi+6\sqrt{3}\pi)\sigma R^4$$

$$=\frac{1}{12(4-\pi)}[48-19\sqrt{3}+\pi(6\sqrt{3}-15)]mR^2$$

7.3 刚体的定轴转动

7.3.1 一质量为 300kg、直径为 1m 厚度均匀的均质圆盘状的飞轮以每分钟 1200 转的转速旋转,为了使它在 2 分钟内停下来,所需的不变的力矩多大?

解

$$I=\frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times 300\left(\frac{1}{2}\right)^2=37.5\mathrm{kgm}^2$$

$$\omega_0=\frac{1200\times 2\pi}{60}=40\pi\mathrm{rad/s}$$

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M,\qquad I\mathrm{d}\omega=M\mathrm{d}t$$

$$\int_{\omega_0}^{0}I\mathrm{d}\omega=\int_0^{2\times 60}M\mathrm{d}t$$

$$M=\frac{1}{120}I(0-\omega_0)=-\frac{37.5\cdot 40\pi}{120}=-39.3\ (\mathrm{Nm})$$

7.3.2　一个扭摆由一根竖直的金属丝下挂一个物体组成，物体可绕此竖直的金属丝在金属丝的扭转力矩作用下转动.现有三个扭摆，它们由相同的金属丝和相同的均质实心立方体组成，一个挂在立方体的角上，一个挂在一个面的中心，还有一个挂在一条棱边的中点，如图7.26所示.求三个扭摆转动时的周期之比.

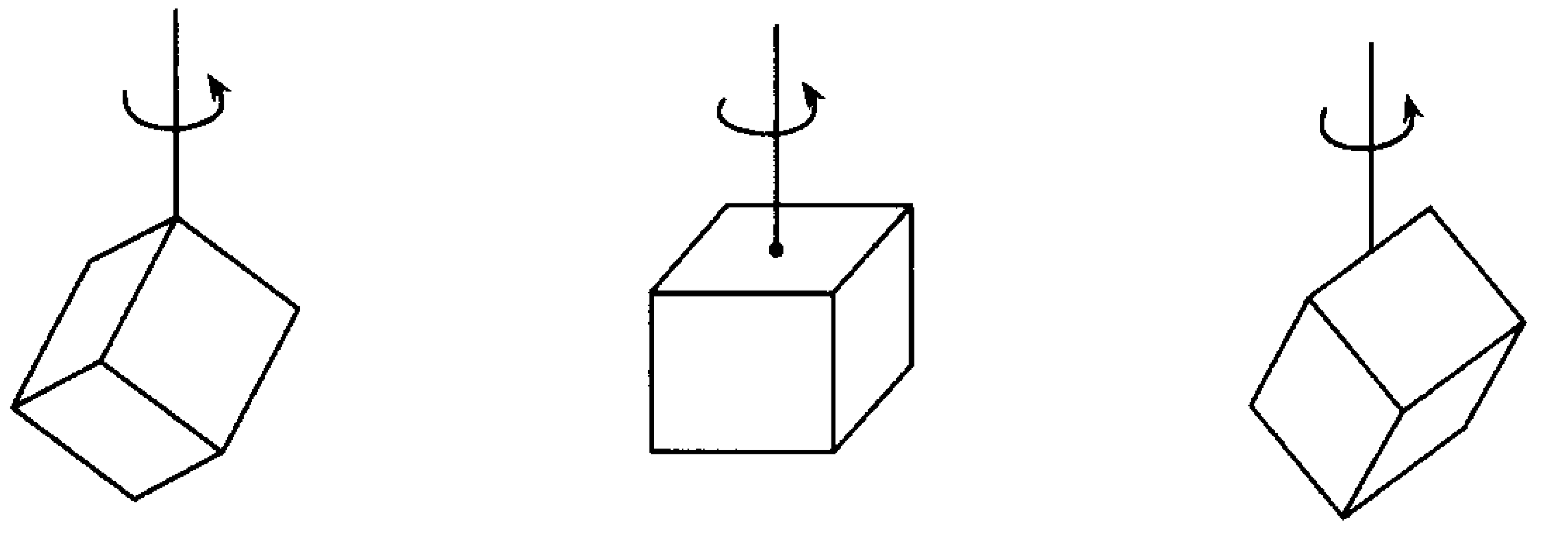


图7.26

解　三个扭摆的转轴均通过质心.均质立方体关于质心的惯量椭球是球型的，绕通过质心的任何轴的转动惯量都一样大.三个扭摆所用的金属丝相同，与扭转形变相应的弹性模量相同，影响运动周期的两个物理量——转动惯量和弹性模量均相同.三个扭摆有相同的周期，任何两个的周期之比均等于1.

7.3.3　求两扭摆的周期之比，它们之间的不同仅在于其中之一粘上两个圆柱，每个圆柱的半径和圆盘半径之比为$\frac{1}{4}$，每个圆柱和圆盘均是均质的，质量为M，如图7.27所示.

解　设I_1、I_2分别是左、右边扭摆的转动惯量，

$$I_1=\frac{1}{2}MR^2$$

$$I_2=\frac{1}{2}MR^2+2\left[\frac{1}{2}M\left(\frac{1}{4}R\right)^2+M\left(\frac{3}{4}R\right)^2\right]=\frac{27}{16}MR^2$$

设与扭转形变相应的弹性模量为k，

$$I_1\ddot{\theta}_1=-k\theta_1,\quad I_2\ddot{\theta}_2=-k\theta_2$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{I_1}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k}{I_2}}$$

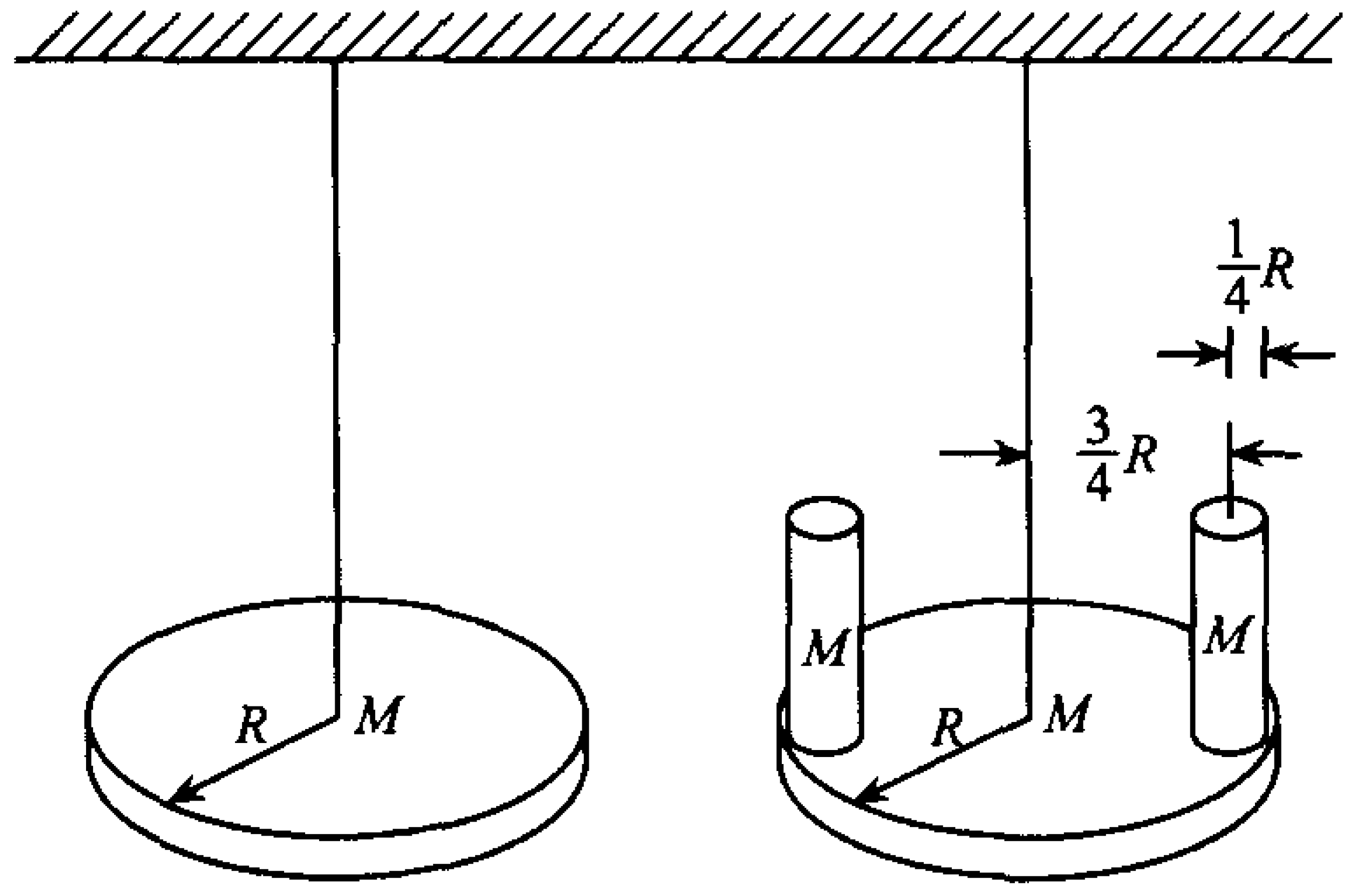


图 7.27

振动周期之比

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}=\frac{2}{9}\sqrt{6}$$

7.3.4　一个正常身材的人以每秒钟走一步的自然摆动的步频行走是很舒服的，试图以较快或较慢的步频行走都会感到不舒服，略去膝关节的效应，试利用一种最简单的模型来估算一下决定该步频频率的与人腿的那种特征有关.

解　人做匀速运动时，膝关节也做匀速运动，以膝关节为参考系，人腿做定轴转动. 用最简单的模型，视人腿为均质杆，设腿的质量为 m、长为 l，绕膝关节转动的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$. 定轴转动的运动微分方程为

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}=-mg\cdot\frac{l}{2}\sin\theta$$

粗略考虑，用近似 $\sin\theta\approx\theta$，

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\theta=0$$

振动角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

可见决定步频频率是腿的长度.

7.3.5　一质量为 M、半径为 R 的均质圆环悬挂在一铅垂面内，支撑物是安置在圆周内侧上一点的刀刃，求圆环做小振动的角频率.（图 7.28）

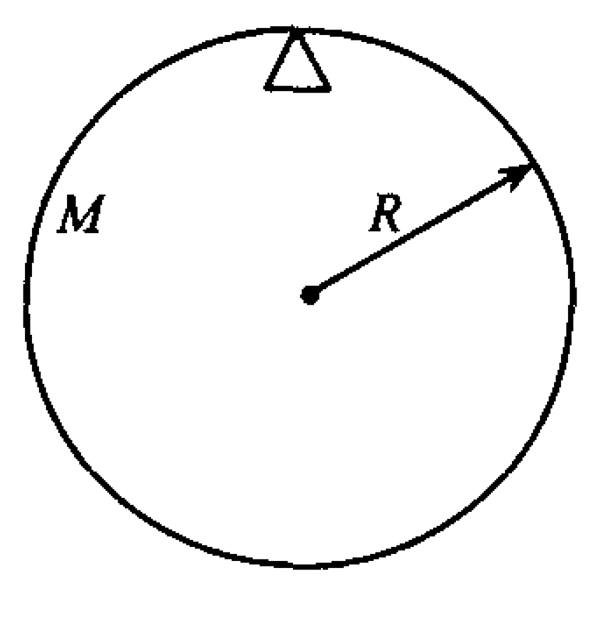


图 7.28

解　圆环绕圆周上一点的转动惯量为

$$I=MR^2+MR^2=2MR^2$$

圆环绕刀刃做小振动的运动微分方程为

$$I\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta \approx -MgR\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgR}{I}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

7.3.6　一个人想用杆子打在岩石上的办法把杆子折断.他用手拿住杆子一端,让杆子绕该端做无位移转动,如图 7.29 所示.这个人希望杆子打在岩石上的瞬时手不受到较大力的冲击,问杆子的哪一点打在岩石上为好?(不考虑重力).

解　杆子绕手握住的一端做无位移转动,换句话说,杆子绕该端做定轴转动.打在岩石上以前,转动角速度设为 ω,不考虑重力,做恒定角速度转动时,轴处不受力,打到岩石上后,角速度变为零.要在打击过程中手不受较大的力冲击,即手握的一端杆不受手的冲力.

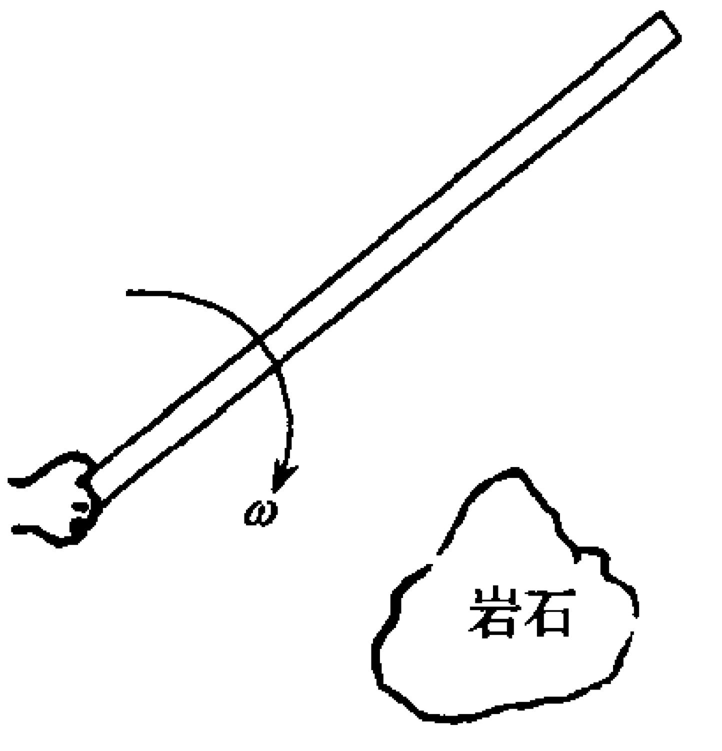


图 7.29

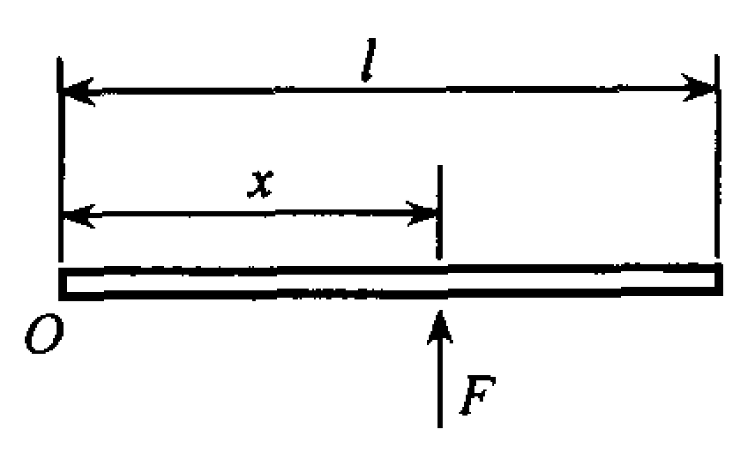


图 7.30

设杆长为 l,质量为 m,杆与岩石的接触点离手握的一端距离为 x(图 7.30).在打击岩石的极短时间内对杆用对固定轴的角动量定理和质心运动定理.

$$\int I\mathrm{d}\omega = -\int Fx\mathrm{d}t$$

$$\int m\mathrm{d}v_C = -\int F\mathrm{d}t$$

其中

$$I = \frac{1}{3}ml^2,\quad v_C = \frac{1}{2}l\omega$$

F 是打击岩石期间岩石作用于杆的冲力,

$$x = \frac{\int I\mathrm{d}\omega}{\int m\mathrm{d}v_C} = \frac{\frac{1}{3}ml^2(0-\omega)}{m\,\frac{1}{2}l(0-\omega)} = \frac{2}{3}l$$

为在打击岩石时手不受较大的冲力,需让杆离手握的一端三分之二杆长的那一点击中岩石.

7.3.7　一半径为 R、质量为 m 的均质轮子可绕通过其轮心的、垂直于轮子的水平轴自由转动,一根不可伸长的轻绳绕在轮边,一端固定在轮上,另一端挂着一质量为 M 的物体,如图 7.31 所示,问物体下落时绳中张力多大?

解　设绳中的张力为 T,取竖直向下的 x 轴,

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = TR \tag{1}$$

$$M\ddot{x} = Mg - T \tag{2}$$

$$\dot{x} = R\omega \tag{3}$$

将式(3)代入式(2),

$$MR\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = Mg - T \tag{4}$$

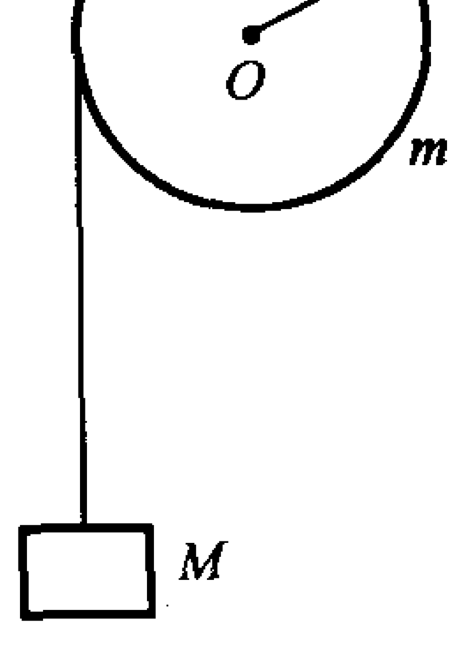


图 7.31

由式(1)、(4)消去$\frac{d\omega}{dt}$,可得

$$\frac{Mg-T}{T}=\frac{2M}{m}$$

$$T=\frac{mM}{2M+m}g$$

7.3.8　两飞轮半径 $R_1=2R_2$,可绕彼此平行的对称轴无摩擦转动,转动惯量 $I_1=16I_2$,开始时两轮无接触,大轮的转速为 $n_0=2000$ r/min. 小轮静止. 如果移动这两根平行轴使两飞轮接触,求达到稳定(即接触点无滑动,两飞轮转速不再变化)后小轮的角速度.

解　从开始接触到达到稳定为止分别对两飞轮用对固定轴的角动量定理. 两飞轮的

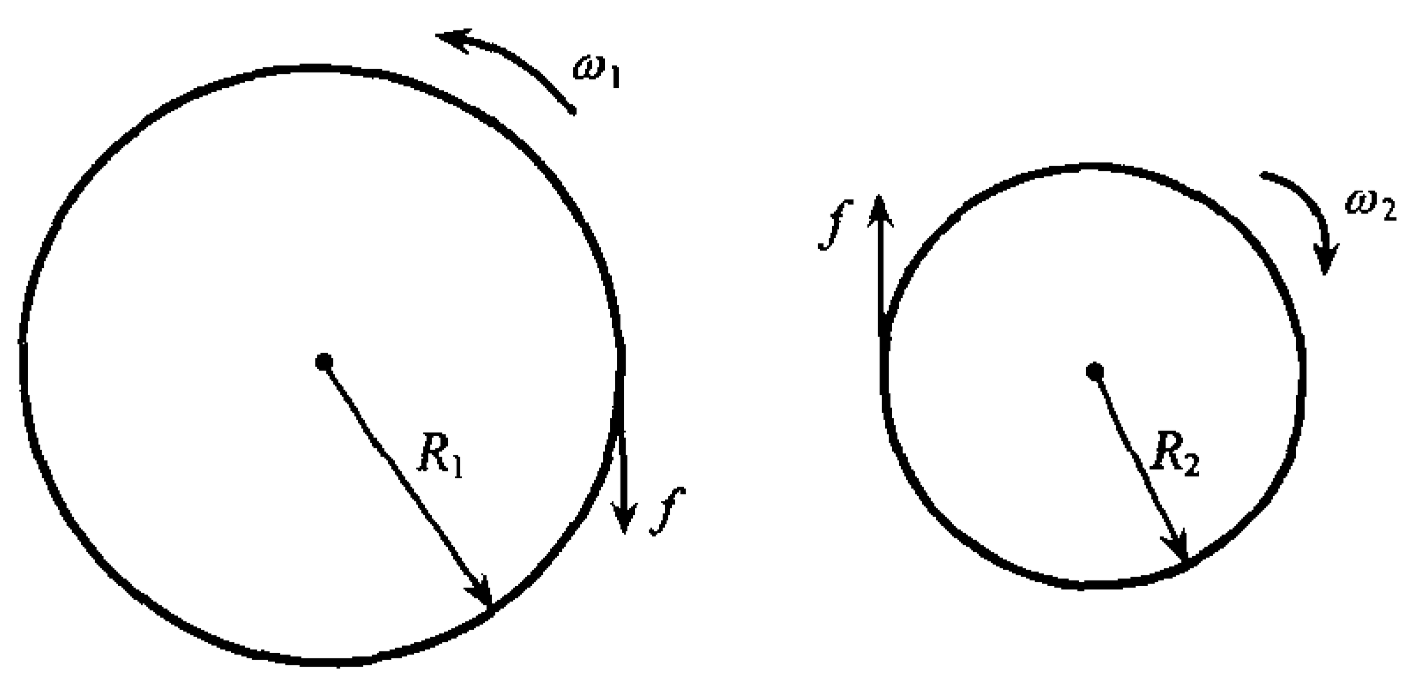


图 7.32

角速度的正方向及相互作用力 f 的正方向如图 7.32 所示.

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt}=-fR_1$$

$$I_2\frac{d\omega_2}{dt}=fR_2$$

$$\int I_1 d\omega_1=-\int fR_1 dt,\quad I_2\int d\omega_2=\int fR_2 dt$$

开始接触时,$\omega_1=2\pi n_0$,$\omega_2=0$,达到稳定时,设 $\omega_1=\Omega_1$,$\omega_2=\Omega_2$,则

$$I_1(\Omega_1-2\pi n_0)=-R_1\int f dt$$

$$I_2(\Omega_2-0)=R_2\int f dt$$

两式相除,并代入 $I_1=16I_2$,$R_1=2R_2$,得

$$8(\Omega_1-2\pi n_0)=-\Omega_2$$

再由接触点无滑动条件,

$$R_1\Omega_1=R_2\Omega_2,\quad 即\ 2\Omega_1=\Omega_2$$

从两式消去 Ω_1,可得

$$\Omega_2=\frac{16}{5}\pi n_0=\frac{16}{5}\pi\cdot\frac{2000}{60}=335.1(\text{rad/s})$$

7.3.9　两个均质的圆柱体环绕各自的对称轴自由转动,若两圆柱体的半径分别为 r_1 和 r_2,质量分别为 m_1 和 m_2,如图 7.33 所示. 让它们互相靠拢直到互切并达到不再随时间变化的稳定运动状态,求稳定运动后两圆柱体的角速度.

解　设两圆柱体从接触到达到稳定运动状态期间相互作用的冲量 I，如图 7.34 所示，它们一定大小相同，方向相反（根据牛顿运动第三定律得此结论）.

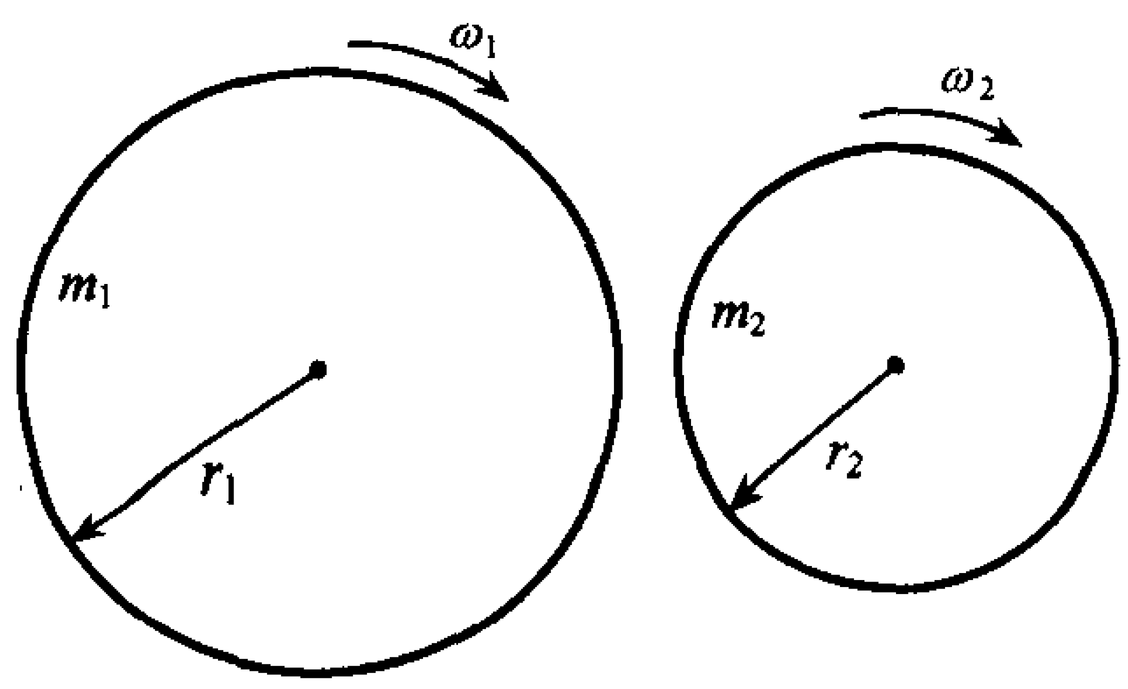


图 7.33

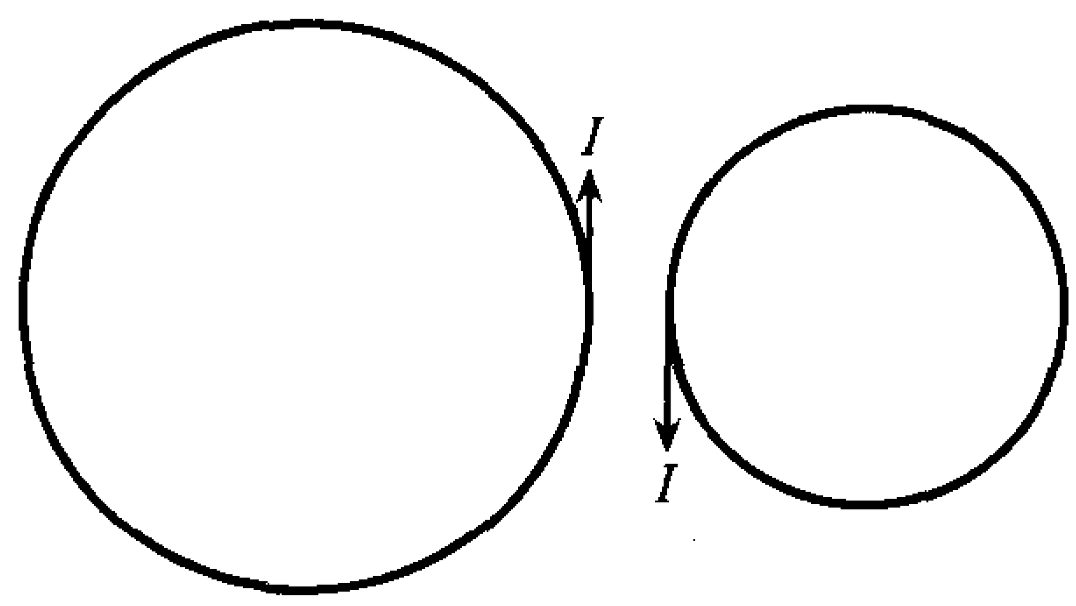


图 7.34

由对固定轴的角动量定理

$$\frac{1}{2}m_1r_1^2(\Omega_1-\omega_1)=-Ir_1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m_2r_2^2(\Omega_2-\omega_2)=-Ir_2 \tag{2}$$

达到稳定运动状态时，两圆柱体接触点的速度相同.

$$r_1\Omega_1=-r_2\Omega_2 \tag{3}$$

列上述各式时，ω_1、ω_2、Ω_1、Ω_2 的正负号规定均如图 7.33 所示.

由式(1)、(2)得

$$m_1r_1(\Omega_1-\omega_1)=m_2r_2(\Omega_2-\omega_2) \tag{4}$$

由式(3)、(4)两式解出

$$\Omega_1=\frac{m_1r_1\omega_1-m_2r_2\omega_2}{(m_1+m_2)r_1}$$

$$\Omega_2=-\frac{r_1\Omega_1}{r_2}=\frac{m_2r_2\omega_2-m_1r_1\omega_1}{(m_1+m_2)r_2}$$

7.3.10　三个全同的均质圆柱体以相同的角速度 Ω 围绕各自的对称轴（相互平行）转动，使圆柱体互相接触，保持轴平行，最后每个圆柱体和相邻的圆柱体间无滑动时达到稳定运动状态，问三个圆柱体的总动能最终还留下多少？

解　从三个圆柱开始接触到最终达到稳定状态经历的时间相同，由牛顿运动第三定律，相互作用力总是大小相等、方向相反，因而相互作用的冲量也是大小相等，方向相反的. 由于三个圆柱半径相同，相互作用的冲量矩是大小相等、方向相同的（三个圆柱的角动量的正负号规定是一致的），图 7.35 画出了在此期间三个圆柱受到的冲量矩，所用的符号⊗表示冲量矩的方向垂直纸面向下，其中 M_{12}是圆柱 2 作用于圆柱 1 的冲量矩，M_{21}是圆柱 1 作用于圆柱 2 的冲量矩，以此类推. 由上所述

$$M_{12}=M_{21},\quad M_{23}=M_{32}$$

达到稳定运动后，相接触的两圆柱体间无滑动，考虑到三个圆柱半径相同，1、2、3 三个圆柱体的最终的角速度必依次为 Ω'、$-\Omega'$、Ω'. 对三个圆柱体分别用对固定轴的角动量定理：

$$I(\Omega' - \Omega) = M_{12} \tag{1}$$

$$I(-\Omega' - \Omega) = M_{21} + M_{23} \tag{2}$$

$$I(\Omega' - \Omega) = M_{32} \tag{3}$$

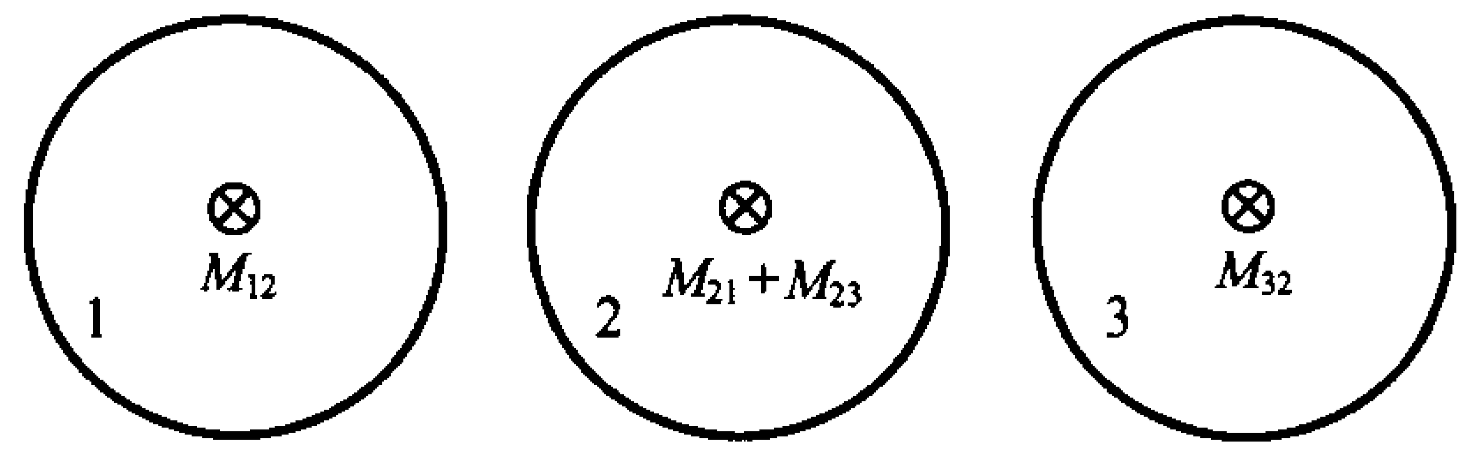


图 7.35

式(1)加式(3)减去式(2),用 $M_{12}=M_{21}$,$M_{23}=M_{32}$,

$$I(3\Omega' - \Omega) = 0$$

$$\Omega' = \frac{1}{3}\Omega$$

最终三个圆柱体的总动能 T' 与最初的总动能 T 之比为

$$\frac{T'}{T} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}I\Omega'^2 + \frac{1}{2}I(-\Omega')^2}{3 \cdot \frac{1}{2}I\Omega^2} = \frac{1}{9}$$

7.3.11　一段曲率半径为 R 的均质圆弧绕通过弧线中心并与纸面垂直的水平轴线无摩擦地摆动.证明微振动周期与圆弧的长度无关,并求作此微振动的圆弧的等值单摆长.

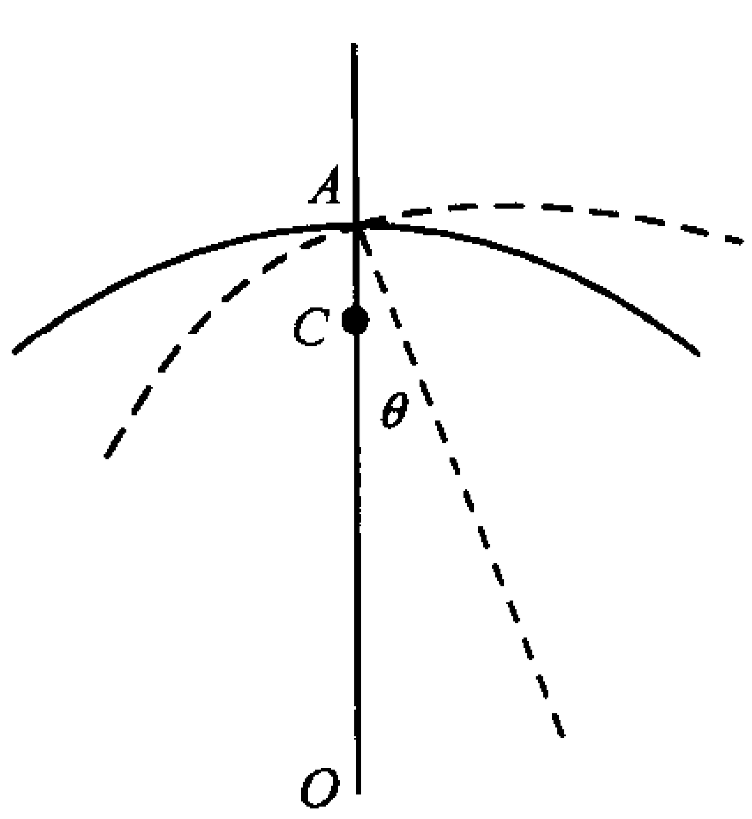


图 7.36

解　设圆弧质量为 m,图 7.36 中 A 点是圆弧的弧线中心,C、O 是处于平衡位置时,圆弧的质心和曲率中心的位置,用 θ 表示圆弧摆动时的角位移.

I_A、I_C、I_O 分别表示处于平衡位置的圆弧绕过此三点 A、C、O 的垂直于纸面的轴转动的转动惯量,

$$I_O = mR^2,$$

$$I_C = I_O - m(OC)^2 = mR^2 - m(OC)^2$$

$$I_A = I_C + m(AC)^2 = mR^2 - m(OC)^2 + m[R - (OC)]^2 = 2mR(R - OC)$$

对圆弧用对固定轴的角动量定理,

$$I_A\ddot{\theta} = - mg(R - OC)\sin\theta \approx - mg(R - OC)\theta$$

即

$$2mR(R - OC)\ddot{\theta} = - mg(R - OC)\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}},\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

与圆弧的质量 m 及圆弧的长度均无关.

与单摆的周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

比较,可得半径为 R 的均质圆弧做微振动时的等值单摆长为 $2R$.

7.3.12　半径为 R 的均质圆扇形面绕垂直于其平面,且通过其中心角顶点的光滑水平轴做微振动.扇形的角度多大时,此摆的等值单摆长等于扇形弧长的一半(图 7.37).

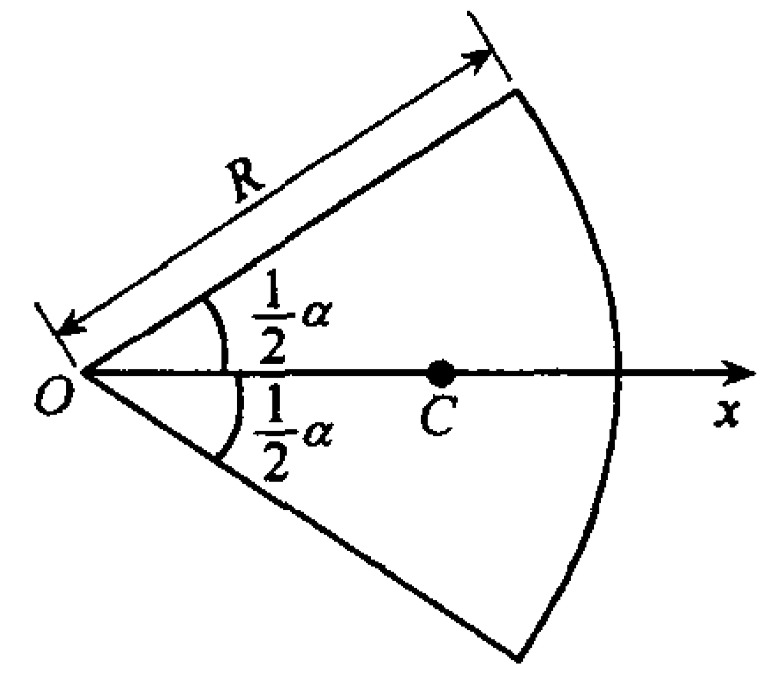


图 7.37

解　设扇形的中心角为 α,取扇形中心角的顶点为坐标系原点,用极坐标表示扇形质元的位置,取其中线为极轴,显然质心 C 位于极轴上,设扇形面密度为 σ,

$$x_C = OC = \frac{1}{\frac{1}{2}R^2\alpha\sigma}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \sigma r\cos\varphi \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{R^2\alpha}\cdot\frac{1}{3}R^3\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{4R}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$$

设扇形面的质量为 m,绕转轴的转动惯量为 $I=\frac{1}{2}mR^2$

用对固定轴的角动量定理,

$$I\ddot{\theta} = -mgOC\sin\theta \approx -mgOC\cdot\theta$$

代入 I 和 OC 得

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} + mg\left(\frac{4R}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{8g\sin\frac{\alpha}{2}}{3R\alpha}\right)\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{8g\sin\frac{\alpha}{2}}{3R\alpha}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R\alpha}{8g\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

等值单摆长为

$$l = \frac{3R\alpha}{8\sin\frac{\alpha}{2}}$$

等值单摆长要等于弧长的一半,

$$l = \frac{1}{2}R\alpha, \quad 即 \quad \frac{3R\alpha}{8\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}R\alpha$$

要求

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\alpha=2\arcsin\frac{3}{4}=97.18^\circ$$

7.3.13 一个人用棒打垒球,打在何处才能在打击的瞬间,握棒的手不受到冲击力.设棒绕手做定轴转动时的转动惯量为 I,棒的质量为 m,棒的质心离手握住的一端的距离为 d.

解 设击球点离手握的棒端的距离为 x,握棒的手不受到冲击力,击球点受到的冲力很大,在打击期间,所有的有限力与冲力相比均可忽略.设击球期间棒受到球的冲量为 $I_{冲}$,棒在击球前的角速度为 ω,击球后变为静止,击球前棒的质心速度为 $v_C=\omega d$.

在打击期间用对固定轴的角动量定理和质心运动定理,

$$I(0-\omega)=-I_{冲}x$$

$$m(0-\omega d)=-I_{冲}$$

消去 $I_{冲}$,得

$$I\omega=m\omega dx$$

$$x=\frac{I}{md}$$

7.3.14 有一半径为 r、质量为 M 的均质圆球,在球面处通过装在无摩擦的、质量可以不计的、大小相同的球壳内连接于长度为 l、质量为 m 的均质杆的一端,杆的另一端由无摩擦的铰链悬挂于一固定点,杆可在竖直平面内运动形成一个摆.试求此摆做微振动的周期.若圆球与杆固连,微振动的周期多大?

解

$$\left[\frac{1}{3}ml^2+M(l+r)^2\right]\ddot{\theta}=-mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta-Mg(l+r)\sin\theta$$

$$\approx-\left[\left(\frac{1}{2}m+M\right)l+Mr\right]g\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{3}{2}\left[\frac{(m+2M)l+2Mr}{ml^2+3M(l+r)^2}\right]g\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3}{2}\left[\frac{(m+2M)l+2Mr}{ml^2+3M(l+r)^2}\right]g}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2[ml^2+3M(l+r)^2}{3[(m+2M)l+2Mr]g}}$$

若圆球固连于杆,

$$\left[\frac{1}{3}ml^2+\frac{2}{5}Mr^2+M(l+r)^2\right]\ddot{\theta}=-mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta-Mg(l+r)\sin\theta$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{2}m+M\right)l+Mr\right]g\theta$$

$$\omega^2=\frac{\left[\left(\frac{1}{2}m+M\right)l+Mr\right]g}{\frac{1}{3}ml^2+\frac{2}{5}Mr^2+M(l+r)^2}=\frac{15}{2}\left[\frac{(m+2M)l+2Mr}{5ml^2+6Mr^2+15M(l+r)^2}\right]g$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2}{15g}\left[\frac{5ml^2+6Mr^2+15M(l+r)^2}{(m+2M)l+2Mr}\right]}$$

7.3.15　质量 m、长 b 的均质细棒用一根不可伸长的轻绳拴在劲度系数为 k 的弹簧上，弹簧的另一端固定，绳跨过一固定于 P 点的光滑小滑轮. 棒可无摩擦地绕 A 端在竖直平面内转动. 如图 7.38 所示，$-\pi<\theta<\pi$，当 $c=0$ 时，弹簧为自然长度，$b<a$，求：

(1) 系统处于平衡时的 θ 值，讨论平衡的稳定性；

(2) 稳定平衡位置附近的小振动的角频率(注意 PA 线是竖直的).

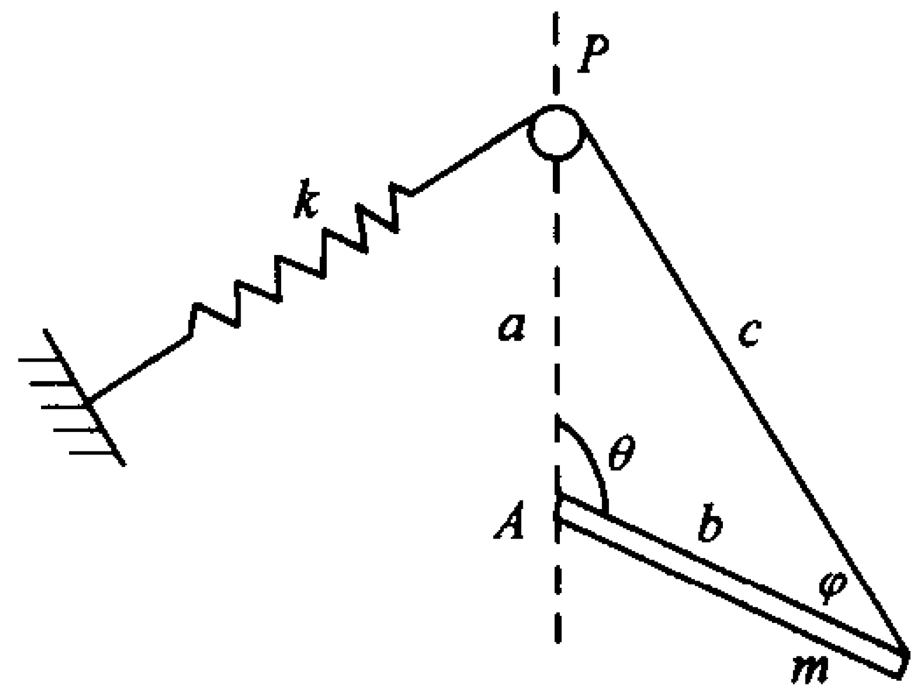


图 7.38

解　(1) 规定垂直纸面向外的方向为力矩的正向，取 A 点为矩心.

重力矩：
$$M_g=-mg\cdot\frac{b}{2}\sin\theta$$

弹簧力矩：
$$M_s=kcb\sin\varphi$$

其中 φ 为棒与绳子间的夹角.

由正弦定理，
$$\frac{a}{\sin\varphi}=\frac{c}{\sin\theta},\quad \sin\varphi=\frac{a}{c}\sin\theta$$
$$M_s=kab\sin\theta$$

平衡时

$$M_g+M_s=0$$

$$-\frac{1}{2}mgb\sin\theta+kab\sin\theta=0$$

有以下三种情况：

(i) 若 $ka=\frac{1}{2}mg$，对任何 θ，平衡条件均成立，是随遇平衡的情况.

(ii) 若 $ka<\frac{1}{2}mg$，平衡条件要成立，必须 $\sin\theta=0$，$\theta=0$ 或 $\theta=\pi$.

在 $\theta=0$ 附近，$\sin\theta\approx\theta$

$$M\approx-\frac{1}{2}mgb\theta+kab\theta$$

$\theta>0$ 时，$M<0$，$\theta<0$ 时，$M>0$. 受的力矩是恢复力矩. 故 $\theta=0$ 为稳定平衡位置；

在 $\theta=\pi$ 附近，$\theta<\pi$，$\sin\theta>0$，$M<0$；$\theta>\pi$，$\sin\theta<0$，$M>0$，所受力矩不是恢复力矩，故 $\theta=\pi$ 为不稳定平衡位置.

(iii) 若 $ka>\frac{1}{2}mg$，同样可以得到

$$\theta=0\quad 和\quad \theta=\pi$$

均为平衡位置，但它们的稳定性和(ii)的情况相反，$\theta=0$ 为不稳定平衡位置，$\theta=\pi$ 为稳定平衡位置.

(2) 对于 $ka<\frac{1}{2}mg$ 的情况，讨论在稳定平衡位置 $\theta=0$ 附近的小振动.

由对固定轴的角动量定理,

$$\frac{1}{3}mb^2\ddot{\theta} = \left(-\frac{1}{2}mgb + kab\right)\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3(mg - 2ka)}{2mb}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3(mg - 2ka)}{2mb}}$$

对于 $ka > \frac{1}{2}mg$ 的情况,可得在平衡位置 $\theta = \pi$ 附近小振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{3(2ka - mg)}{2mb}}$$

7.3.16 质量为 M、半径为 R 的均质细圆环在光滑的桌面上可绕枢轴无摩擦转动. 一只质量为 m 的甲虫相对于圆环以速率 u 沿着圆环爬行,如图 7.39 所示. 甲虫和圆环原来是静止的. 当甲虫爬到与枢轴同一直径的另一端 A 点时,甲虫相对于桌面的速率多大?

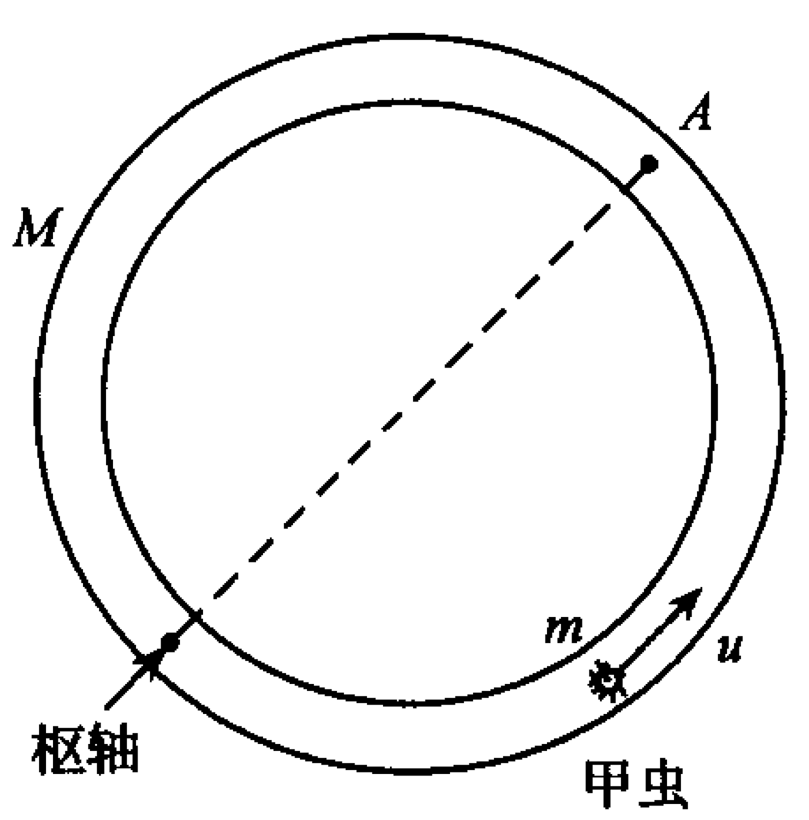


图 7.39

解 甲虫和圆环组成的系统对枢轴的角动量是守恒的,开始时系统静止,角动量等于零. 甲虫相对于圆环做逆时针转动,圆环相对于桌面有垂直纸面向下的角速度.

设甲虫爬到 A 点时圆环的角速度为 ω. 因圆环绕枢轴的转动惯量为

$$I = I_C + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

甲虫相对于桌面的速率为

$$v = u - 2R\omega$$

规定垂直纸面向上的角动量为正,

$$mv \cdot 2R - 2MR^2\omega = 0$$

$$m(u - 2R\omega) \cdot 2R - 2MR^2\omega = 0$$

$$\omega = \frac{mu}{(M + 2m)R}$$

所以　　$$v = u - 2R \cdot \frac{mu}{(M + 2m)R} = \frac{M}{M + 2m}u$$

7.3.17 如图 7.40,一个高度为 h、底面半径为 R 的正圆锥绕其竖直轴转动,圆锥表面有一条从锥顶到锥底的光滑细直槽,圆锥起初以角速度 ω_0 转动. 一个质量为 m 的小珠在槽的顶端被释放,在重力作用下滑下. 假设小珠只能在槽中运动,圆锥绕轴的转动惯量为 I,求:

(1) 小珠到达底部时圆锥的角速度;

(2) 小珠刚离开圆锥时相对于实验室的速率.

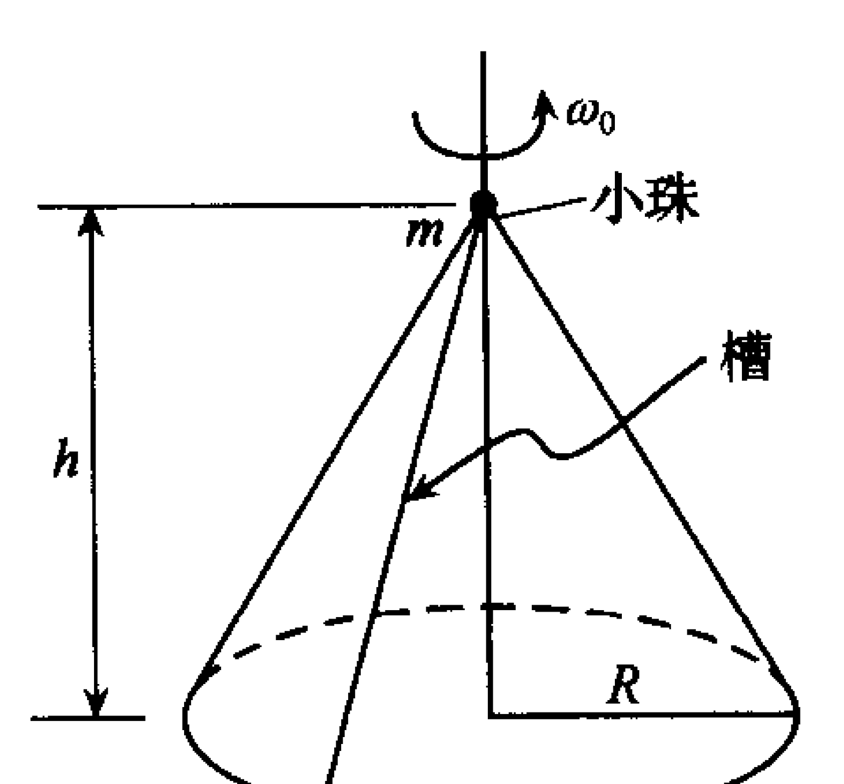


图 7.40

解 (1) 设小珠到达圆锥底部时圆锥的角速度为 ω,由系

统(包括圆锥和小珠)对固定轴的角动量守恒,

$$(I+mR^2)\omega = I\omega_0$$

$$\omega = \frac{I}{I+mR^2}\omega_0$$

(2) 设小珠到达圆锥底部,也就是小珠刚离开圆锥时在实验室参考系中的速率为 v. 由系统在此参考系中机械能守恒,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mgh$$

$$v^2 = \frac{1}{m}I(\omega_0^2 - \omega^2) + 2gh = \frac{2IR^2 + mR^4}{(I+mR^2)^2} + 2gh$$

$$v = \sqrt{\frac{2IR^2 + mR^4}{(I+mR^2)^2} + 2gh}$$

7.3.18 质量为 M、半径为 R 的均质实心球,绕一固定的竖直的直径以角速度 ω 在空间自由转动,另有一个质量为 m 的质点最初位于球的一极,以恒定速率 v 沿球的一个大圆运动. 证明:当质点到达另一极时球的转动被延迟的角度为

$$\alpha = \frac{\pi R\omega}{v}\left(1 - \sqrt{\frac{2M}{2M+5m}}\right)$$

证明 设当质点运动到图 7.41 的 θ 角位置时,球的角速度为 Ω,由系统对转轴的角动量守恒,

$$\left(\frac{2}{5}MR^2 + mR^2\sin^2\theta\right)\Omega = \frac{2}{5}MR^2\omega$$

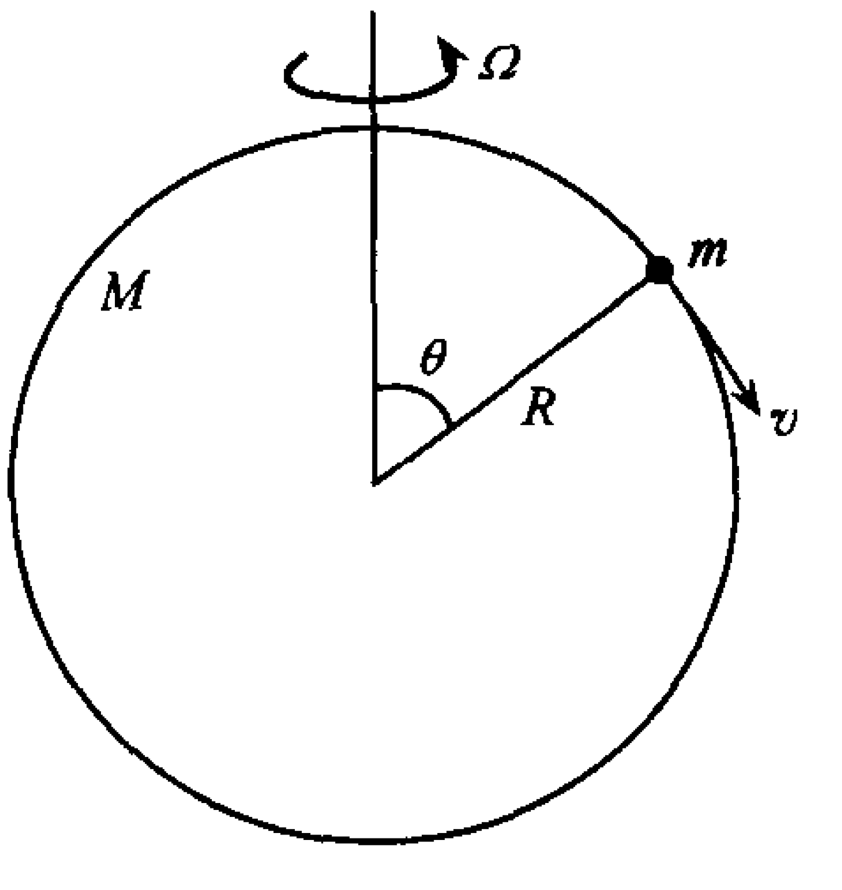


图 7.41

质点相对于球以恒定速率 v 沿大圆运动,

$$v = R\dot{\theta},\quad \theta = \frac{v}{R}t$$

$$\Omega = \frac{\frac{2}{5}MR^2\omega}{\frac{2}{5}MR^2 + mR^2\sin^2\left(\frac{v}{R}t\right)} = \frac{2M\omega}{2M + 5m\sin^2\left(\frac{v}{R}t\right)}$$

质点从 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$,经历的时间为

$$\tau = \frac{\pi R}{v}$$

在 $0\sim\tau$ 期间,因质点的运动,球的转动被延迟的角度为

$$\alpha = \omega\tau - \int_0^\tau \Omega \mathrm{d}t = \frac{\pi R}{v}\omega - \int_0^\pi \Omega(\theta)\,\frac{R}{v}\mathrm{d}\theta = \frac{R}{v}\left(\pi\omega - \int_0^\pi \frac{2M\omega}{2M+5m\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

因为 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2M\omega}{2M+5m\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$ 作变量代换,令 $\theta=\pi-\varphi$,$\mathrm{d}\theta=-\mathrm{d}\varphi$,$\varphi$ 的积分限为 $\frac{\pi}{2}$ 和 0,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2M\omega}{2M+5m\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2M\omega}{2M+5m\sin^2(\pi-\varphi)}(-\mathrm{d}\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2M\omega}{2M+5m\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

所以

$$\alpha = \frac{R}{v}\left(\pi\omega - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2M\omega}{2M+5m\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

用积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+ab}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2+ab}}{a}\tan x\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{2M+5m\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{4M^2+10Mm}}\arctan\left(\frac{\sqrt{4M^2+10Mm}}{2M}\tan\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4M^2+10Mm}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{R}{v}\left(\pi\omega - 4M\omega\cdot\frac{1}{\sqrt{4M^2+10Mm}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi R\omega}{v}\left(1-\sqrt{\frac{2M}{2M+5m}}\right)$$

7.3.19 一个均质的立方体绕其对角线自由转动.证明:若一条边突然地被固定,让其绕该边转动,其动能损失了$\frac{11}{12}$.

证明 设立方体边长为 a,质量为 m,绕对角线转动的角速度为 ω_0.

对角线通过质心,对质心而言惯量椭球是球型的,对通过质心的任何轴的转动惯量都一样.设此转动惯量为 I_C.

$$I_C = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \int_0^a \mathrm{d}z\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a (x^2+y^2)\rho\mathrm{d}y$$

$$= 8\rho\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{a}{2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\rho a^5 = \frac{1}{6}ma^2$$

设 I 是绕一条边转动的转动惯量.

$$I = I_C + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2$$

当一条边突然被固定时,冲量通过该条边上一点,对这条边的冲量矩为零.从原来绕对角线的转动突然变为绕这条边的转动,外力对这条边的冲量矩为零,前后两个转动中系统的角动量在这条边方向的分量应不变.

绕对角线转动时，　　$\boldsymbol{J}_0 = I_C\boldsymbol{\omega}_0$

在这条边上的角动量分量为$\frac{1}{\sqrt{3}}I_C\omega_0$.

绕一条边转动时,设角速度为 ω,绕该轴的角动量也就是对转轴上一点的角动量在这条边方向的分量为 $I\omega$,

所以　　$$I\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}I_C\omega_0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{I_C}{I}\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{6}ma^2}{\frac{2}{3}ma^2}\omega_0 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\omega_0$$

前后两个转动时系统的动能分别为

$$T_0 = \frac{1}{2}I_C\omega_0^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}ma^2\omega_0^2 = \frac{1}{12}ma^2\omega_0^2$$

$$T=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}ma^2\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\omega_0\right)^2=\frac{1}{144}ma^2\omega_0^2$$

动能损失与原动能之比为

$$\frac{T_0-T}{T_0}=\frac{11}{12}$$

7.3.20　一质量为 m 的松鼠在一个半径为 R、转动惯量为 I 的圆柱形活动鼠笼中以相对于鼠笼的匀速率 v_0 奔跑，如图 7.42 所示. 鼠笼受到的阻力矩和它的角速度成正比，与鼠笼的半径 R 相比，可以略去松鼠的大小. 若初始时刻鼠笼是静止的，松鼠从鼠笼的底部起跑. 用松鼠相对于竖直方向的角度表示角位移. 求在弱阻尼小振动情况下松鼠对静参考系的运动，无阻尼情况下松鼠的角速度，要有这种情况鼠笼应怎样设计？

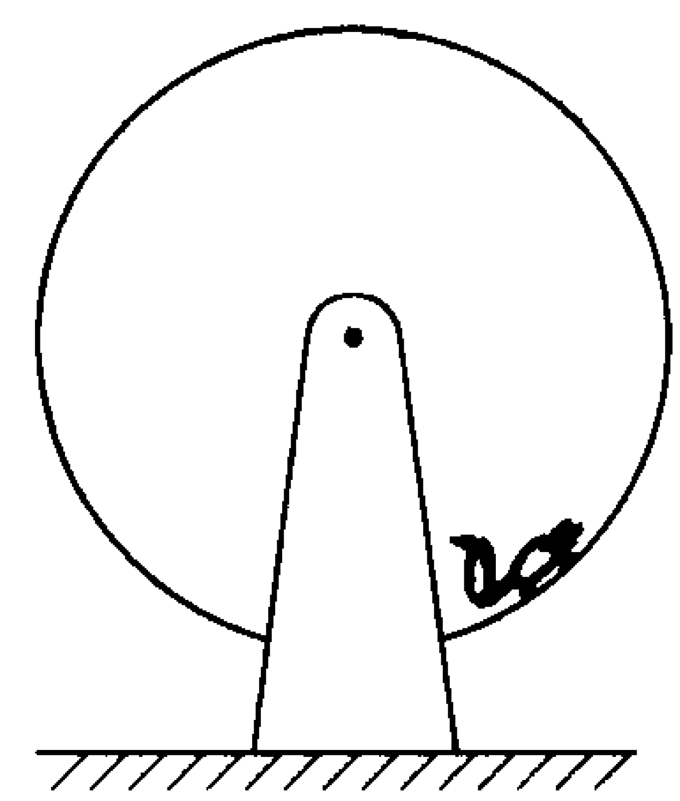


图 7.42

解　用 θ、φ 分别表示松鼠和鼠笼相对于竖直方向的角位移，逆时针转动方向为正.

松鼠和鼠笼间有相对运动，它们之间的摩擦力不是静摩擦力，其方向必须判明，松鼠受到鼠笼施以的摩擦力大小为 f，沿顺时针方向. 设鼠笼受到的阻力矩大小与其角速度成正比的比例系数为 k. 设鼠笼绕该轴的转动惯量为 I.

对松鼠和鼠笼分别用对固定轴的角动量定理.

$$mR^2\ddot{\theta}=-fR-mgR\sin\theta \tag{1}$$

$$I\ddot{\varphi}=fR-k\dot{\varphi} \tag{2}$$

松鼠相对于鼠笼的速率为 v_0，有

$$R(\dot{\theta}-\dot{\varphi})=v_0 \tag{3}$$

所以

$$\dot{\varphi}=\dot{\theta}-\frac{v_v}{R},\quad \ddot{\varphi}=\ddot{\theta} \tag{4}$$

式(1)加式(2)，并用式(4)的两个关系消去 $\dot{\varphi}$、$\ddot{\varphi}$，则

$$(I+mR^2)\ddot{\theta}+k\dot{\theta}=-mgR\sin\theta+\frac{kv_0}{R}$$

考虑小振动，$\sin\theta\approx\theta$

$$(I+mR^2)\ddot{\theta}+k\dot{\theta}+mgR\theta-\frac{kv_0}{R}=0$$

令 $\theta'=\theta-\frac{kv_0}{mgR^2}$，微分方程化为

$$(I+mR^2)\ddot{\theta}'+k\dot{\theta}'+mgR\theta'=0$$

$$\ddot{\theta}'+\frac{k}{I+mR^2}\dot{\theta}'+\frac{mgR}{I+mR^2}\theta'=0$$

令

$$\beta=\frac{k}{2(I+mR^2)},\quad \omega_0^2=\frac{mgR}{I+mR^2} \tag{5}$$

今为弱阻尼情况，$\beta<\omega_0$，通解为

$$\theta' = e^{-\beta t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \frac{\sqrt{4mgR(I + mR^2) - k^2}}{2(I + mR^2)} \tag{6}$$

$$\theta = \frac{kv_0}{mgR^2} + e^{-\beta t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

初始条件：$t=0$ 时，$\theta=0$，$\varphi=0$，$\dot{\varphi}=0$，故 $\dot{\theta}=\frac{v_0}{R}$，定出 A、B，得

$$\theta = \frac{kv_0}{mgR^2} - \frac{kv_0}{mgR^2}e^{-\beta t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{\beta}{\omega} - \frac{mgR}{k\omega}\right)\sin\omega t\right] \tag{7}$$

对于无阻尼情况，$k=0$，松鼠的运动微分方程为

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} + mgR\theta = 0$$

满足初条件的解为

$$\theta = \frac{v_0}{R\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{8}$$

所以

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}\cos\omega_0 t \tag{9}$$

式(8)也可从式(7)令 $k=0$ 或→0 获得. 式(7)、(9)中的 β、ω_0、ω 由式(5)、(6)给出.

要近似成为这种无阻尼情况，应使 β 尽量小，即 $I+mR^2\gg k$，鼠笼的半径 R 不能太大，可使其转动惯量 I 尽可能大些.

7.3.21　质量为 m 的卫星以角速度 ω 绕质量为 M 的行星沿轨道运行. 假定 $m\ll M$，卫星的自转可以忽略，行星以角速度 Ω 自转，自转轴垂直于卫星的轨道平面. I 为行星绕其轴的转动惯量，D 为卫星至行星中心的距离.

(1) 求行星卫星系统关于其质心的总角动量 J 和总能量 E 的表达式，从这两个表达式中消去 D；

(2) 通常两个角速度 ω 和 Ω 是不相等的. 假定有一种机制，例如潮汐摩擦在 $\omega\neq\Omega$ 时能使 E 减少但角动量守恒. 从 E 作为 ω 的函数考虑，证明存在一初始条件范围使最终 $\omega=\Omega$，且为最后的稳定的位形.

这一效应的著名例子出现在水星和它的卫星间还有金星和它的卫星间.(但是，在这些例子中是与较轻的物体的自转有关联的).

解　(1) 由于 $m\ll M$，系统的质心可认为位于行星的中心.

$$J = I\Omega + mD^2\omega \tag{1}$$

$$E = \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}mD^2\omega^2 - \frac{GMm}{D} \tag{2}$$

由前式解出 D，代入后式得

$$E = \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}(J - I\Omega)\omega - GMm\sqrt{\frac{m\omega}{J - I\Omega}}$$

(2) 考虑 E 作为 ω 的函数，潮汐摩擦使 E 减小，J 不变，m 仍近似围绕 M 做圆周运

动，D 与 ω 之间总有下列关系：

$$\frac{GMm}{D^2} = mD\omega^2 \tag{3}$$

用式(1)、式(3)，可将式(2)改写为

$$E = \frac{1}{2}I\Omega^2 - \frac{1}{2}mD^2\omega^2 \tag{2'}$$

由式(3)得

$$\frac{GM}{D^3} = \omega^2$$

$$-\frac{3GM}{D^4}\mathrm{d}D = 2\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{2\omega D^4}{3GM} = -\frac{2D}{3\omega} \tag{4}$$

由式(1)及 $\mathrm{d}J=0$，得

$$I\mathrm{d}\Omega + mD^2\mathrm{d}\omega + 2mD\omega\mathrm{d}D = 0$$

再用式(4)，上式可改写为

$$I\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{3}mD^2\mathrm{d}\omega = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{mD^2}{3I} \tag{5}$$

对式(2′)两边对 ω 求导，并用式(4)、(5)，得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega} = I\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\omega} - mD^2\omega - mD\omega^2\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{3}mD^2(\Omega - \omega) \tag{6}$$

潮汐摩擦是耗散力，E 必然减小，因此在达到稳定运动以前，必有 $\mathrm{d}E<0$，达到稳定运动时 $\mathrm{d}E=0$，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega}=0$，$\Omega=\omega$.

还要求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\Omega=\omega}>0$，即在 $\Omega=\omega$ 时 E 取极小值. 由式(6)及式(4)、(5)得

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\omega^2} = -\frac{4}{9}\frac{mD^2}{\omega}(\Omega - \omega) + \frac{1}{3}mD^2\left(\frac{mD^2}{3I} - 1\right)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\Omega=\omega} > 0$$

要求初始条件满足的范围为

$$\frac{mD^2}{3I} - 1 > 0 \text{ 或 } D^2 > \frac{3I}{m}$$

说明：从题目所述，$\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 是平行的，未说明同向还是反向. 以上的解是考虑它们是同向的. 如果是反向的. 则(1)式应改为

$$J = I\Omega - mD^2\omega$$

式(5)改为

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{mD^2}{3I}$$

式(6)改为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{1}{3}mD^2(\Omega+\omega)$$

可得在初始条件范围 $D^2>\frac{3I}{m}$ 情况下，当 $\Omega+\omega=0$ 时，达到最后的稳定运动. 最后的稳定运动和对初始条件范围的要求结果相同.

7.3.22 7.2.3 题所述的刚体被图 7.19 中 A 和 B 处的支点约束以角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{j}$ 绕 y 轴旋转，写出作为时间函数的对 A 点的角动量，并求出在 B 处所受的垂直于 y 轴的外力分量(不计重力).

解 方法一：图 7.19 所画的 $Axyz$ 坐标是固定坐标，设 $t=0$ 时，刚体在图示位置. 另取 $Ax'y'z'$ 坐标系固连于刚体，在 $t=0$ 时，x'、y'、z' 轴分别与 x、y、z 轴重合.

7.2.3 题解中得到的关于 A 点的惯量张量

$$\mathbf{I}(A)=\begin{pmatrix} \frac{5}{2}MR^2 & -\frac{5}{4}MR^2 & 0 \\ -\frac{5}{4}MR^2 & \frac{3}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4MR^2 \end{pmatrix}$$

是用 $Ax'y'z'$ 坐标系表达的. 由于 $Ax'y'z'$ 坐标系固连于刚体，它适用于任何时刻，

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{j}' \quad (\text{因为 } \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}')$$

$$\boldsymbol{J}(A)=\mathbf{I}(A)\cdot\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2}MR^2 & -\frac{5}{4}MR^2 & 0 \\ -\frac{5}{4}MR^2 & \frac{3}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4MR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{5}{4}MR^2\omega\boldsymbol{i}'+\frac{3}{2}MR^2\omega\boldsymbol{j}'$$

它也适用于任何时刻，其中 $\boldsymbol{i}'$ 是时间的函数.

$$\boldsymbol{i}'=\cos\omega t\boldsymbol{i}-\sin\omega t\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}$$

把 $\boldsymbol{J}(A)$ 写成时间 t 的显函数为

$$\boldsymbol{J}(A)=-\frac{5}{4}MR^2\omega\cos\omega t\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}MR^2\omega\boldsymbol{j}+\frac{5}{4}MR^2\omega\sin\omega t\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}(A)}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{4}MR^2\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{i}+\frac{5}{4}MR^2\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{k}$$

设 B 处支点给予刚体的约束力为

$$\boldsymbol{f}_B=f_{Bx}\boldsymbol{i}+f_{By}\boldsymbol{j}+f_{Bz}\boldsymbol{k}$$

刚体受到的 A 点的外力矩为

$$\boldsymbol{M}_A=\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{f}_B=2R\boldsymbol{j}\times(f_{Bx}\boldsymbol{i}+f_{By}\boldsymbol{j}+f_{Bz}\boldsymbol{k})=2Rf_{Bz}\boldsymbol{i}-2Rf_{Bx}\boldsymbol{k}$$

对固定点 A 的角动量定理，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}(A)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_A$$

$$\frac{5}{4}MR^2\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{i}+\frac{5}{4}MR^2\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{k}=2Rf_{Bz}\boldsymbol{i}-2Rf_{Bx}\boldsymbol{k}$$

所以

$$f_{Bx}=-\frac{5}{8}MR\omega^2\cos\omega t$$

$$f_{Bz}=\frac{5}{8}MR\omega^2\sin\omega t$$

方法二：用质点系的动量定理，设 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_m$ 分别为圆盘质心和质点的位矢，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M\dot{\boldsymbol{r}}_0+\frac{5}{4}M\dot{\boldsymbol{r}}_m\right)=\boldsymbol{f}_A+\boldsymbol{f}_B$$

由于 $\dot{\boldsymbol{r}}_0=0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{5}{4}M\dot{\boldsymbol{r}}_m\right)=\boldsymbol{f}_A+\boldsymbol{f}_B$$

$$\frac{5}{4}M\ddot{\boldsymbol{r}}_m=\boldsymbol{f}_A+\boldsymbol{f}_B$$

今

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_m=-R\omega^2\boldsymbol{i}'$$

所以

$$\boldsymbol{f}_A+\boldsymbol{f}_B=-\frac{5}{4}MR\omega^2\boldsymbol{i}'$$

代入

$$\boldsymbol{i}'=\cos\omega t\boldsymbol{i}-\sin\omega t\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{f}_A+\boldsymbol{f}_B=-\frac{5}{4}MR\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}+\frac{5}{4}MR\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{k}$$

$$f_{Ax}+f_{Bx}=-\frac{5}{4}MR\omega^2\cos\omega t$$

$$f_{Az}+f_{Bz}=\frac{5}{4}MR\omega^2\sin\omega t$$

考虑到对称性，$f_{Ax}=f_{Bx}$，$f_{Az}=f_{Bz}$，即得方法一所得的结果.

7.3.23　一个高速转子由质量为 M、半径为 R、宽度为 $2l$ 的均质圆盘组成，将它安装在一根轴上，轴的轴承相距 $2d$，两块质量均为 m 的附加质量块对称地安置在转子上，如图 7.43 所示. 若转子以角速度 ω 高速旋转，求作用在轴承上的随时间变化的力（重力可以不计）.

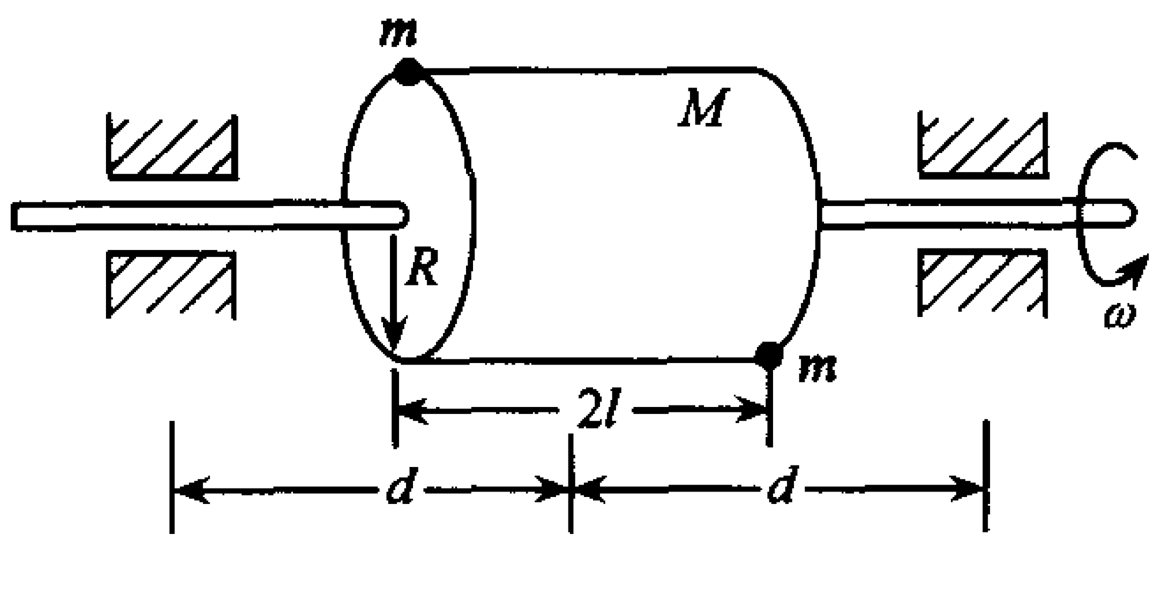


图 7.43

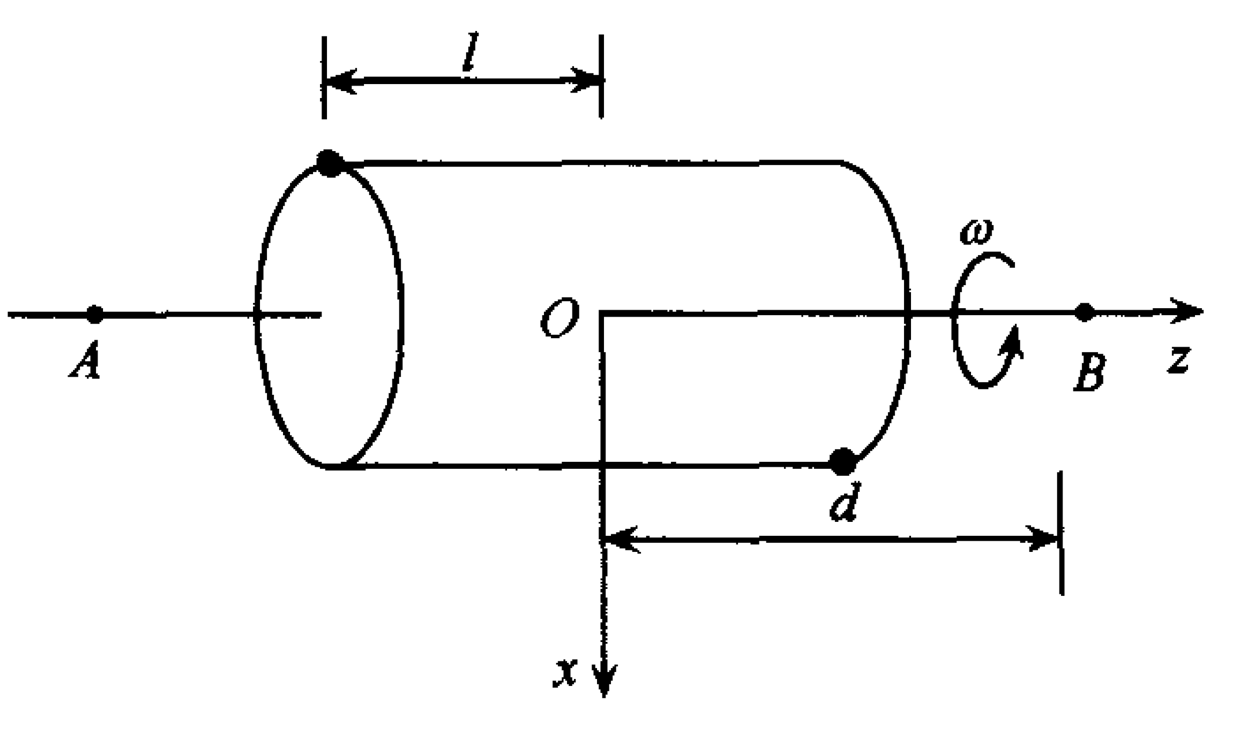


图 7.44

解 方法一：由于质心在固定转轴上，质心加速度为零，因此在转子旋转时轴承附加的合力等于零，但合力矩不为零.

取固连于刚体的 $Oxyz$ 坐标，原点位于质心，附加的两质量块在 xz 平面上，如图 7.44 所示.

由对 O 点用角动量定理，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\mathbf{I}(O)\cdot\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{M}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$$

$$I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2 = M_x \tag{1}$$

$$I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2 = M_y \tag{2}$$

$$I_{zz}\dot{\omega} = M_z$$

令

$$\dot{\omega} = 0,\quad I_{xz} = -2mRl,\quad I_{yz} = 0 \tag{3}$$

$\boldsymbol{f}_A$、$\boldsymbol{f}_B$ 是两轴承处轴承对轴的作用力，

$$\boldsymbol{f}_A = f_{Ax}\boldsymbol{i} + f_{Ay}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{f}_B = f_{Bx}\boldsymbol{i} + f_{By}\boldsymbol{j}$$

因为

$$\boldsymbol{f}_B + \boldsymbol{f}_B = 0$$

所以

$$f_{Ax} = -f_{Bx},\quad f_{Ay} = -f_{By}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= d\boldsymbol{k}\times(f_{Bx}\boldsymbol{i} + f_{By}\boldsymbol{j}) + (-d\boldsymbol{k})\times(f_{Ax}\boldsymbol{i} + f_{Ay}\boldsymbol{j})\\ &= -2f_{By}d\boldsymbol{i} + 2f_{Bx}d\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{4}$$

由式(1)、(3)、(4)得

$$f_{By} = 0$$

由式(2)、(3)、(4)得

$$f_{Bx} = -mRl\omega^2/d$$

$$\boldsymbol{f}_A = f_{Ax}\boldsymbol{i} = -f_{Bx}\boldsymbol{i} = (mRl\omega^2/d)\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{f}_B = -\boldsymbol{f}_A = -(mRl\omega^2/d)\boldsymbol{i}$$

如取图 7.44 的 x 坐标与固定的 ξ 坐标重合时为 $t=0$，则 $\boldsymbol{i}=\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0+\sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0$

$$\boldsymbol{f}_A = \frac{mRl\omega^2}{d}(\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0)$$

$$\boldsymbol{f}_B = -\frac{mRl\omega^2}{d}(\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0)$$

作用在轴承 A、B 上的力是它们的反作用力.

方法二：用转动参考系.

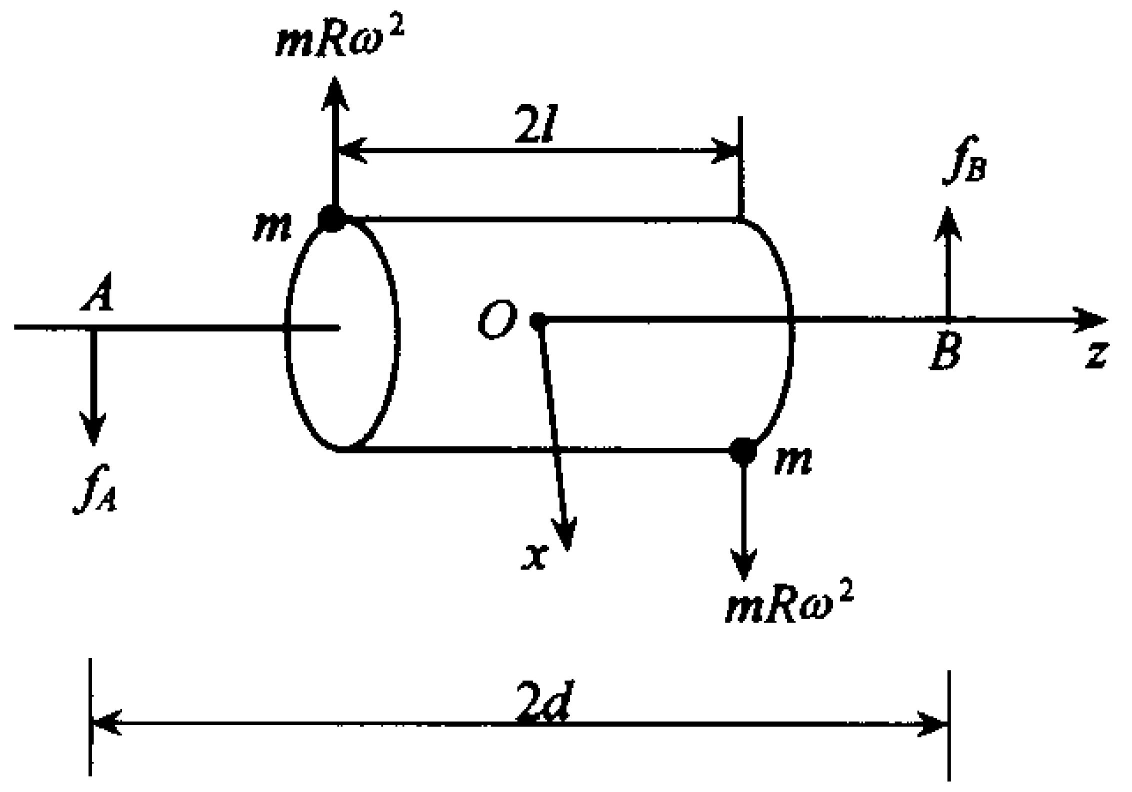


图 7.45

用固连于刚体的 $Oxyz$ 坐标系为参考系，受到的真实力和惯性力如图 7.45 所示. f_A、f_B 是轴承 A、B 作用于轴的真实力，两个 $mR\omega^2$ 是作用于附加质量块上的惯性力.

合力为零，$f_A=f_B$

合力矩为零. $mR\omega^2\cdot 2l=f_A\cdot 2d$

$$f_A = f_B = \frac{1}{d}mR\omega^2 l$$

以下略.

7.3.24　一个S形曲柄由两个半径为a、质量为$\frac{1}{2}m$的均质半圆圈连成一个平面，中心与两端在一条直线上. 让它围绕与此直线相重合的光滑杆转动，在时间τ内，转动由静止状态以恒定的角加速度加速至角速度Ω. 求为产生这种运动所必须给予的沿杆的方向的力矩以及杆给予曲轴的力矩.

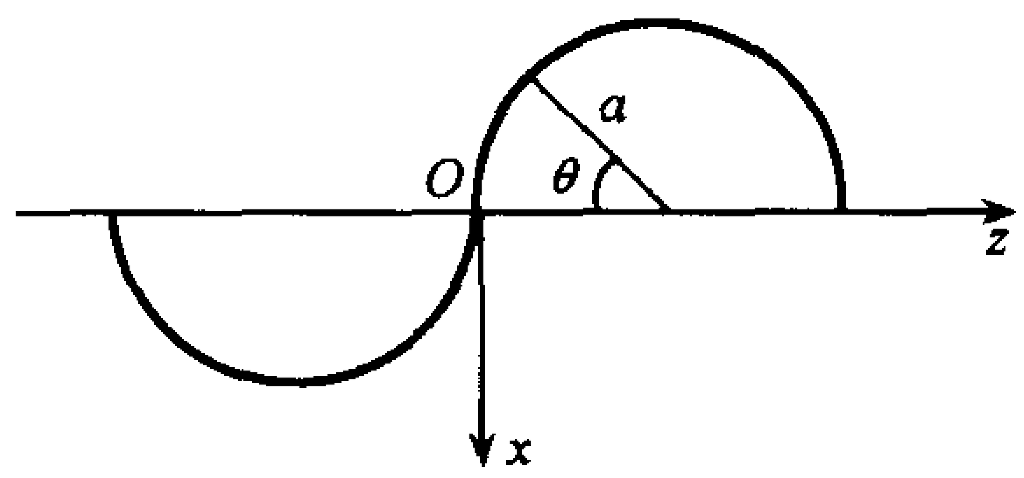


图 7.46

解　取固连于曲轴的$Oxyz$坐标如图7.46所示，y轴垂直纸面向下. 设曲轴的线密度为η，

$$m = 2\pi a\eta$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}ma^2$$

$z>0$处的质元，$x<0$；$z<0$处的质元，$x>0$. 故$z>0$部分的半圆圈对I_{xz}的贡献和$z<0$部分的半圆圈对I_{xz}的贡献是一样的. 计算$z>0$部分的贡献的两倍即可.

$$I_{xz} = -\int xz\mathrm{d}m = -\int xz\eta a\mathrm{d}\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi}(-a\sin\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\eta a\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\eta a^3 = \frac{4\eta a^3}{2\pi a\eta}m = \frac{2}{\pi}ma^2$$

$$I_{yz} = 0$$

由对O点的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{I}(O)\cdot\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$$

$$I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2 = M_x$$

$$I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2 = M_y$$

$$I_{zz}\dot{\omega} = M_z$$

令$\dot{\omega} = \frac{\Omega}{\tau}$，$\omega = \frac{\Omega}{\tau}t$，可得

$$M_z = \frac{1}{2\tau}ma^2\Omega$$

$$M_x = \frac{2}{\pi\tau}ma^2\Omega$$

$$M_y = \frac{2}{\pi\tau^2}ma^2\Omega^2t^2 \qquad 0\leqslant t\leqslant\tau$$

为产生这种运动必须给予沿杆方向的力矩为$M_z = \frac{ma^2\Omega}{2\tau}$，杆给予曲轴的力矩在曲轴平面内的分量为$M_x = \frac{2ma^2\Omega}{\pi\tau}$和$M_z = \frac{ma^2\Omega}{2\tau}$，垂直于曲轴平面的分量$M_y = \frac{2ma^2\Omega^2t^2}{\pi\tau^2}$.

7.3.25　求7.3.19题前后两个定轴转动的角动量大小之比，以及在固定过程中给予的外力矩之冲量的大小与原角动量大小之比.

解　取后一转动的轴(立方体被突然固定的边)为 z 轴,取其正向,使 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$,取此轴与原来的转轴的交点为坐标系原点,取过此点(立方体的一个角)另两条立方体的边为 x 和 y 轴. 7.3.19 题已求得关于此原点用这样的坐标系表达的惯量张量为

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2\\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}=\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}=ma^2\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$$

$$=ma^2\left(-\frac{1}{4}\omega\boldsymbol{i}-\frac{1}{4}\omega\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\omega\boldsymbol{k}\right)$$

$$J=ma^2\omega\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{41}{2}}ma^2\omega$$

$$J_0=I_C\omega_0=\frac{1}{6}ma^2\omega_0$$

用 7.3.19 题得到的结果:　　$\omega=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\omega_0$

$$\frac{J}{J_0}=\frac{\frac{1}{6}\sqrt{\frac{41}{2}}ma^2\omega}{\frac{1}{6}ma^2\omega_0}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{41}{6}}$$

在固定过程中,立方体受到的冲量矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}_0&=ma^2\omega\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{i}-\frac{1}{4}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right)\\&\quad-\frac{1}{6}ma^2\omega_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)\\&=-\frac{11}{48\sqrt{3}}ma^2\omega_0(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}_0|=\frac{11\sqrt{2}}{48\sqrt{3}}ma^2\omega_0$$

在固定过程中给予的冲量矩的大小与原角动量大小之比为

$$\frac{|\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}_0|}{J_0}=\frac{\frac{11\sqrt{2}}{48\sqrt{3}}ma^2\omega_0}{\frac{1}{6}ma^2\omega_0}=\frac{11}{24}\sqrt{6}$$

7.3.26　如图 7.47，一个均质的正圆锥底面半径为 r、高为 $\sqrt{\frac{3}{2}}r$，其质心的位置以及关于质心的惯量张量可利用 7.2.7 题的结果. 此圆锥绕一条母线转动，角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$，突然放开这条母线，固定与此母线相交的底面的直径. 求此刻绕底面直径转动的角速度以及前后动能之比.

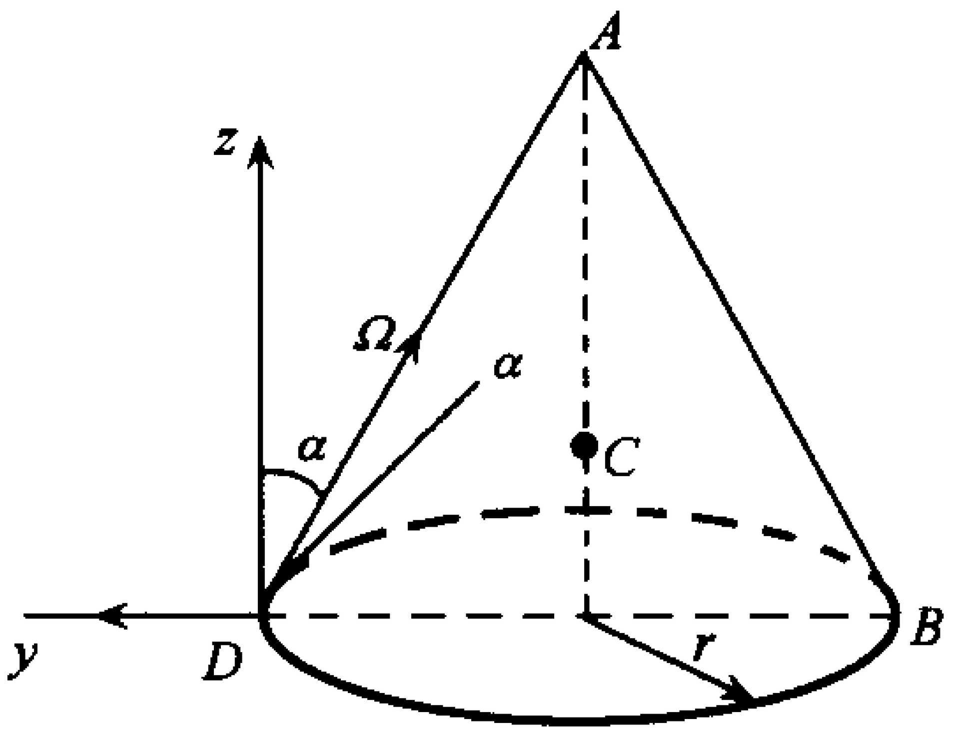


图 7.47

解　用 7.2.7 题的结果，可得，

绕底面一条直径的转动惯量为

$$I=\frac{1}{20}m\left(3r^2+2h^2\right)=\frac{1}{20}m\left(3r^2+2\times\frac{3}{2}r^2\right)=\frac{3}{10}mr^2$$

关于质心 C 的惯量张量为

$$\boldsymbol{I}(C)=\begin{pmatrix}\frac{33}{160}mr^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{33}{160}mr^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2\end{pmatrix}$$

质心 C 离顶点 A 的距离为

$$\frac{3}{4}h=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r$$

求关于 D 点(被放开的母线与底面直径的交点)的惯量张量，用

$$I_{jk}(D)=I_{jk}(C)+m\left[R_C^2(D)\delta_{jk}-x_{jC}(D)x_{kC}(D)\right]$$

这里

$$\boldsymbol{R}_C(D)=-r\boldsymbol{j}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\boldsymbol{k}$$

$$I_{xx}(D)=\frac{33}{160}mr^2+m\left[(-r)^2+\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\right)^2\right]=\frac{13}{10}mr^2$$

$$I_{yy}(D)=\frac{33}{160}mr^2+m\left[(-r)^2+\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\right)^2-(-r)^2\right]=\frac{3}{10}mr^2$$

$$I_{zz}(D)=\frac{3}{10}mr^2+m\left[(-r)^2+\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\right)^2-\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\right)^2\right]=\frac{13}{10}mr^2$$

$$I_{xy}(D)=0+m[-0(-r)]=0$$

$$I_{xz}(D)=0+m\left[-0\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\right)\right]=0$$

$$I_{yz}(D)=0+m\left[-(-r)\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\right)\right]=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}mr^2$$

$$\mathbf{I}(D) = mr^2 \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{13}{10} \end{pmatrix}$$

绕母线 DA 转动的角速度

$$\boldsymbol{\Omega} = -\Omega\sin\alpha\boldsymbol{j} + \Omega\cos\alpha\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{J}_0 = \boldsymbol{J}_{DA} = \mathbf{I}(D)\cdot\boldsymbol{\Omega} = mr^2 \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{10} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{13}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega\sin\alpha \\ \Omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{3}{10}\sin\alpha + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\alpha\right)mr^2\Omega\boldsymbol{j} + \left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\alpha + \frac{13}{10}\cos\alpha\right)mr^2\Omega\boldsymbol{k}$$

设绕底面直径 DB 转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega}$,如图 7.47 所示,$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{DB} = \mathbf{I}(D)\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{10}mr^2\omega\boldsymbol{j} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}mr^2\omega\boldsymbol{k}$$

固定过程中对 y 轴的冲量矩为零. 应有

$$J_{0y} = J_y$$

即

$$\left(-\frac{3}{10}\sin\alpha+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\alpha\right)mr^2\Omega=\frac{3}{10}mr^2\omega$$

$$\tan\alpha = \frac{r}{h} = \frac{r}{\sqrt{\frac{3}{2}}r} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

可得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan\alpha}}=\sqrt{\frac{3}{5}},\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\omega = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}\Omega$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{I}(D)\cdot\boldsymbol{\Omega}$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\Omega^2(0 \;\; -\sin\alpha \;\; \cos\alpha)\begin{pmatrix} \frac{13}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{13}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{10}mr^2\Omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}(D)\cdot\boldsymbol{\omega}\text{ 或 }\frac{1}{2}I_{DB}\omega^2$$

其中 $$I_{DB} = \frac{33}{160}mr^2 + m\left(\frac{1}{4}h\right)^2 = \frac{33}{160}mr^2 + m\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}r\right)^2 = \frac{3}{10}mr^2$$

可得 $$T = \frac{3}{800}mr^2\Omega^2$$

所以 $$\frac{T_0}{T} = 80$$

7.3.27 长为 l、重 P 的均匀直杆在铅垂平面内绕其上端 O 自由摆动.试求当杆子处在与铅垂线成 φ 角时,距 O 点为 x 处的杆子截面 A 的弯曲力矩的大小,并问此时弯曲力矩具有最大值的截面在何处?

提示:截面 A 处杆的两边除相互有作用力外,还有相互作用的力矩,现在要求的就是这相互作用的力矩.

解 对杆用对固定轴的角动量定理,

$$\frac{1}{3}ml^2\dot{\omega} = -mg\cdot\frac{1}{2}\sin\varphi \tag{1}$$

对图 7.48 中 BD 段杆用质心运动定理.C 是 BD 段杆的质心,C 离固定轴 O 点的距离为

$$x + \frac{1}{2}(l-x) = \frac{1}{2}(l+x).$$

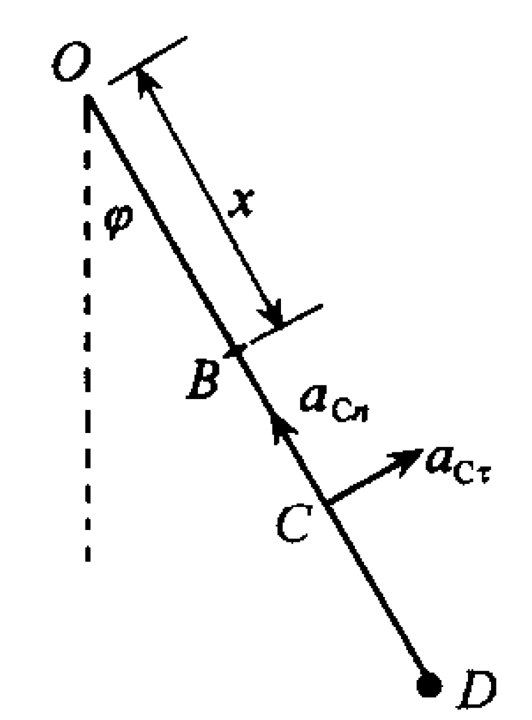


图 7.48

将质心加速度按切向、法向分解,分别为图中的 $a_{C\tau}$ 和 a_{Cn},

$$a_{C\tau} = \frac{1}{2}(l+x)\dot{\omega} \tag{2}$$

设 OB 段杆作用于 BD 段杆的力沿 $\boldsymbol{a}_{C\tau}$ 方向的力为 F.BD 段杆质心运动定理的切向方程为

$$\frac{m}{l}(l-x)a_{C\tau} = F - \frac{m}{l}(l-x)g\sin\varphi \tag{3}$$

从式(3)解出 F,并代入式(1)、(2),

$$F = \frac{m}{l}(l-x)\cdot\frac{1}{2}(l+x)\left(-\frac{3g}{2l}\sin\varphi\right) + \frac{m}{l}(l-x)g\sin\varphi$$

$$= \frac{P}{4l^2}(l^2 - 4lx + 3x^2)\sin\varphi$$

对 OB 段杆用对 O 点固定轴的角动量定理,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m}{l}x\right)x^2\dot{\omega} = -\left(\frac{m}{l}x\right)g\cdot\frac{x}{2}\sin\varphi - Fx + M$$

其中 M 是 BD 段杆作用于 OB 段杆的弯曲力矩,其绝对值就是所要求的距 O 点为 x 处的杆子截面在杆子处于与铅垂线成 φ 角时的弯曲力矩的大小,

$$M = \frac{m}{3l}x^3\left(-\frac{3g}{2l}\sin\varphi\right) + \frac{mg}{2l}x^2\sin\varphi + \frac{P}{4l}(l^2 - 4lx + 3x^2)x\sin\varphi$$

$$= \frac{P}{4l^2}(l-x)^2 x\sin\varphi$$

所求力矩的大小为 $|M| = \frac{P}{4l^2}(l-x)^2 x|\sin\varphi|$

弯曲力矩具有最大值的位置处，

$$\frac{\mathrm{d}|M|}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(l-x)^2 x] = (l-x)^2 - 2(l-x)x = (l-x)(l-3x) = 0$$

所以
$$x = l,\quad x = \frac{1}{3}l$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[(l-x)^2 x] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(l-x)(l-3x)] = -4l + 4x$$

在 $x=l$ 处，$\frac{\mathrm{d}^2|M|}{\mathrm{d}x^2}=0$，$\frac{\mathrm{d}^3|M|}{\mathrm{d}x^3}=4>0$，$|M|$ 为极小值. 在 $x=\frac{1}{3}l$ 处，$\frac{\mathrm{d}^2|M|}{\mathrm{d}x^2}<0$，$|M|$ 为极大值.

结论是不论 φ 取何值，均在离 O 点距离 $\frac{1}{3}l$ 处截面上两边相互作用的弯曲力矩值最大.

7.3.28　图 7.49 中画的是一个凸轮轴的简化抽象图，质量为 m 和 $2m$ 的四个质点固定在无质量的杆上，并都处在一个平面内. 它以恒定的角速度 ω 绕 OO' 轴转动，轴承处无摩擦，问：

(1) 轴承施加的力对质心的力矩多大？

(2) 绕质点所在平面中哪一个轴做定轴转动时不论 ω 多大轴承处没有附加压力？

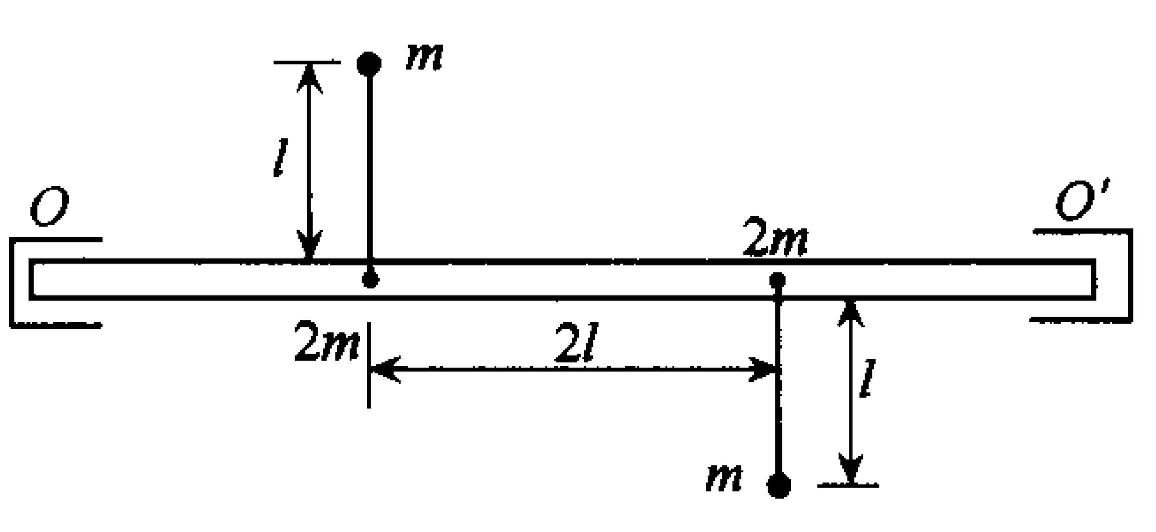


图 7.49

解　取转轴为 z 轴，坐标原点 O 取在质心，x 轴取在四个质点所在的平面内.

(1) 取图 7.50 所示的坐标，由对 O 点的角动量定理，

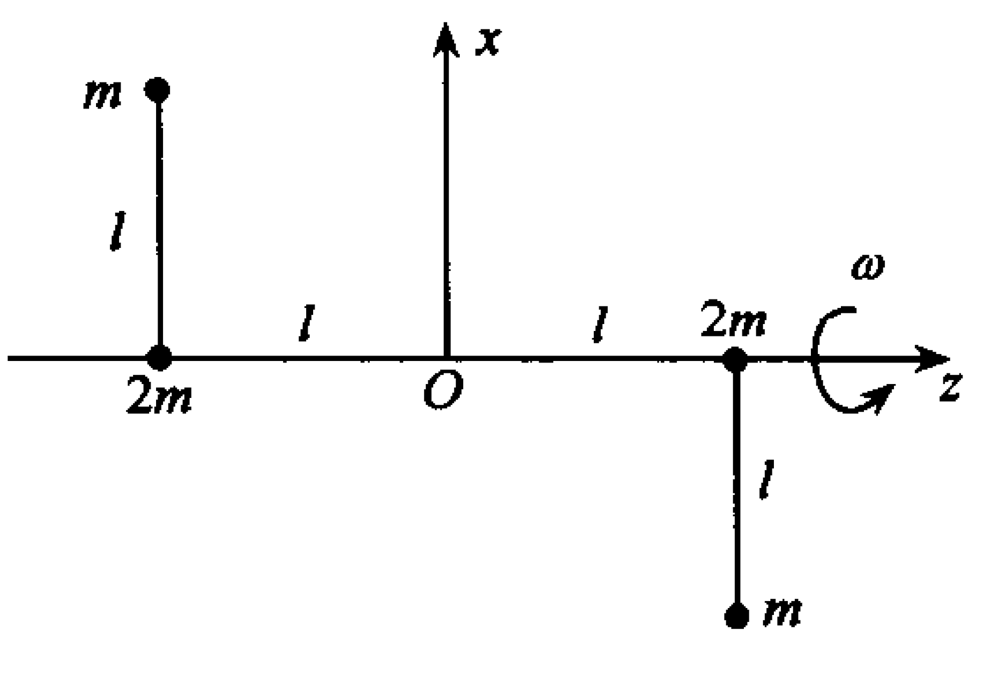


图 7.50

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M}$$

$$I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2 = M_x$$

$$I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2 = M_y$$

$$I_{zz}\dot{\omega} = M_z$$

今 $\dot{\omega}=0$，$I_{yz}=0$，可得

$$M_x = 0,\qquad M_z = 0$$

$$M_y = I_{xz}\omega^2$$

因为
$$I_{xz} = -[ml(-l) + m(-l)l] = 2ml^2$$

所以
$$M_y = 2ml^2\omega^2$$

(2) 要 ω 不论多大轴承处没有附加压力，必须 $F_x=0, F_y=0, M_x=0, M_y=0$.

由质心运动定理，

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_c}{\mathrm{d}t}=m\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}_c}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_c\right)=\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c$$

对于 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ 可得

$$-my_c\dot{\omega}-mx_c\omega^2=F_x$$

$$mx_c\dot{\omega}-my_c\omega^2=F_y$$

$$0=F_z$$

要使 F_x、F_y 均为零始终成立，必须取转轴为 z 轴，而且 z 轴通过质心，这样 $x_c=y_c=0$. 从(1)问中写出的关于 O 点的角动量定理的分量方程看，要 M_x、M_y 均为零，必须 $I_{xz}=0, I_{yz}=0$，即转轴必须是惯量主轴.

今要在质点所在平面内找惯量主轴，即在图 7.51 的 xz 平面内找惯量主轴，设在此平面内与 z 轴夹角为 θ 的轴是惯量主轴，(注意. 因为 $I_{xy}=0, I_{yz}=0$, y 轴是惯量主轴)，该轴的单位矢量为

$$\boldsymbol{n}=\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{k}$$

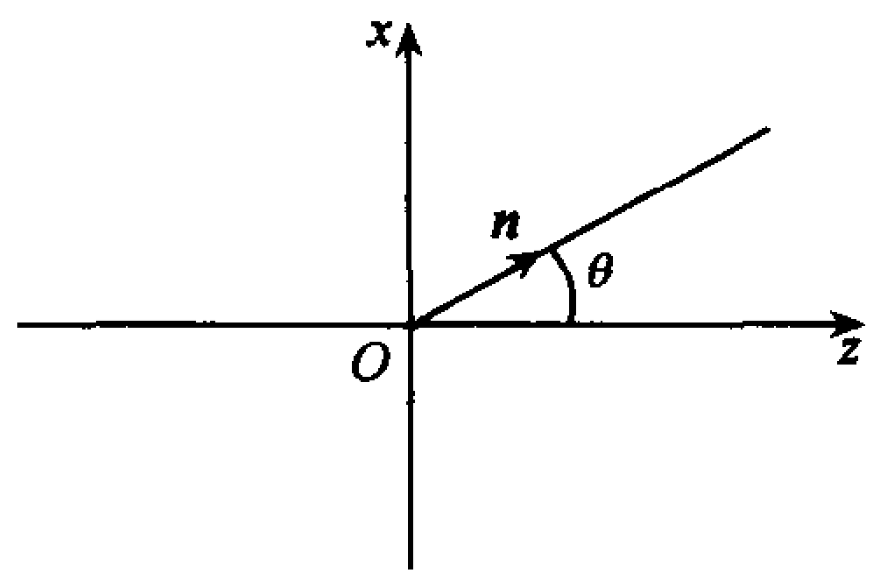


图 7.51

由 $I=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{n}$ 可得绕该轴的转动惯量为

$$I=I_{xx}\sin^2\theta+2I_{xz}\sin\theta\cos\theta+I_{zz}\cos^2\theta$$

绕惯量主轴的转动惯量必须是极大值或极小值，故有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\theta}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\theta}=2I_{xx}\sin\theta\cos\theta+2I_{xz}(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2I_{zz}\sin\theta\cos\theta$$

$$=(I_{xx}-I_{zz})\sin2\theta+2I_{xz}\cos2\theta=0$$

$$\tan2\theta=\frac{2I_{xz}}{I_{zz}-I_{xx}}$$

今

$$I_{xx}=2(m+2m)l^2=6ml^2$$

$$I_{zz}=2ml^2$$

$$I_{xz}=2ml^2$$

$$\tan2\theta=\frac{2\times2ml^2}{2ml^2-6ml^2}=-1$$

$$2\theta=-45^\circ \quad 或 \quad 135^\circ$$

$$\theta=-22.5^\circ \quad 或 \quad 67.5^\circ$$

7.3.29 图 7.52 所示的曲轴由均质细杆组成，曲轴以恒定的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕固定轴无摩擦转动，不计重力，求作用在轴承上的合力，在图中画出这些力和角动量的方向.

解 方法一：取固连于刚体的 $Oxyz$ 坐标如图 7.53 所示. 用对 O 点的角动量定理.

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{J} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = I_{xx}\omega \boldsymbol{i} + I_{xy}\omega \boldsymbol{j} + I_{xz}\omega \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J} = - I_{xz}\omega^2 \boldsymbol{j} + I_{xy}\omega^2 \boldsymbol{k}$$

所以 $$I_{xx}\dot{\omega} = M_x$$

$$I_{xy}\dot{\omega} - I_{xz}\omega^2 = M_y$$

$$I_{xz}\dot{\omega} + I_{xy}\omega^2 = M_z$$

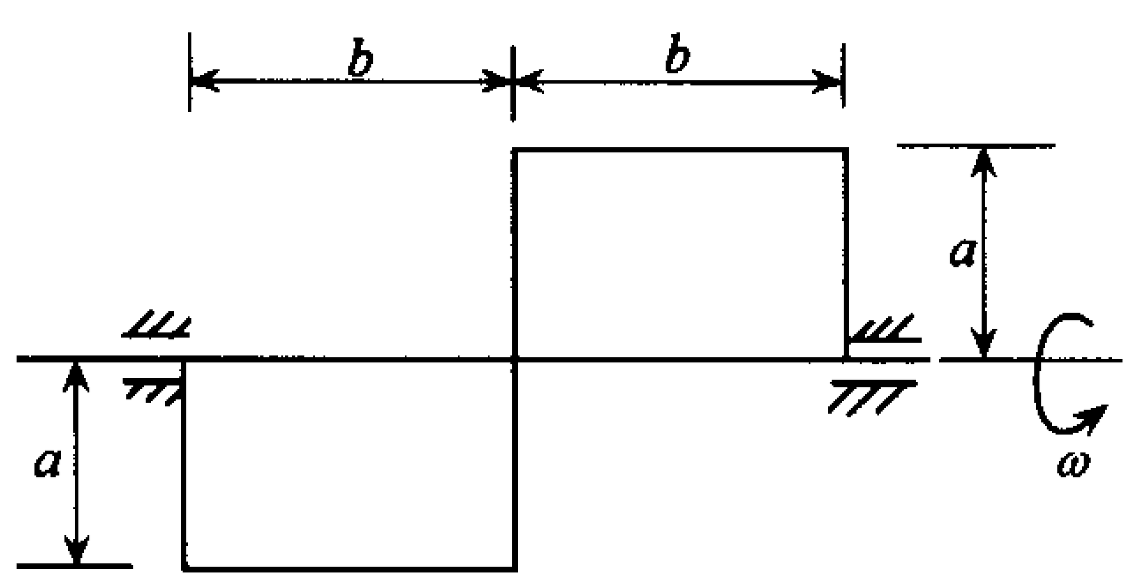


图 7.52

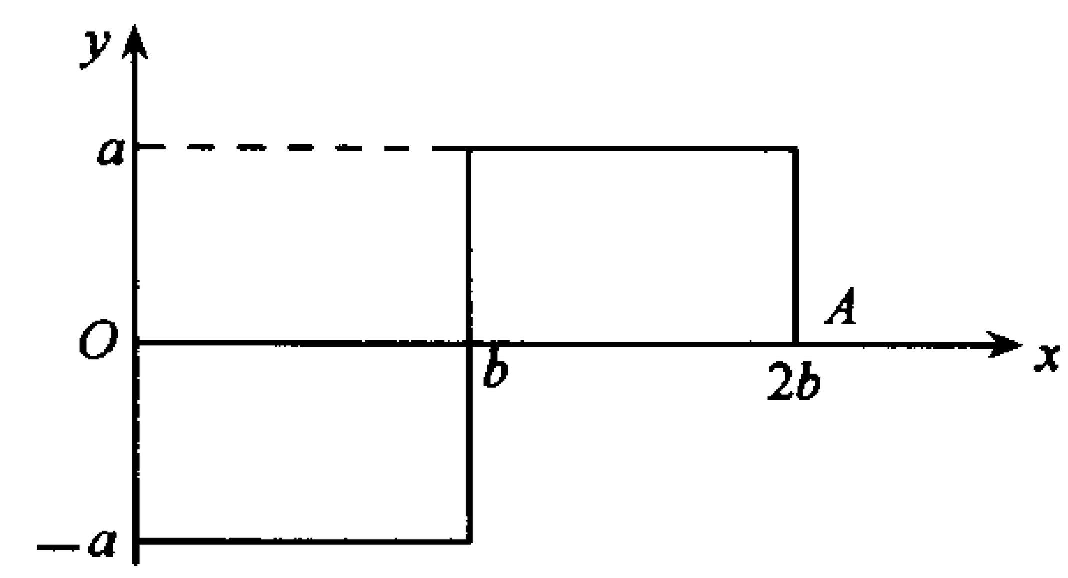


图 7.53

今 $\dot{\omega}=0, I_{xz}=0, I_{xx}=2\eta ba^2$，其中 η 是杆的线密度.

$$\begin{aligned} I_{xy} &= -\int xy\mathrm{d}m \\ &= -\int_0^b x(-a)\eta\mathrm{d}x - \int_{-a}^a by\eta\mathrm{d}y - \int_b^{2b} ax\eta\mathrm{d}x - \int_0^a 2by\eta\mathrm{d}y \\ &= -\eta ab(a+b) \end{aligned}$$

轴承作用于曲轴的对 O 点的力矩为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= 2b\boldsymbol{i} \times (N_{Ax}\boldsymbol{i} + N_{Ay}\boldsymbol{j} + N_{Az}\boldsymbol{k}) \\ &= -2bN_{Az}\boldsymbol{j} + 2bN_{Ay}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

可得 $$M_y = 0, \quad 所以 \quad N_{Az} = 0$$

$$-\eta ab(a+b)\omega^2 = 2bN_{Ay}$$

$$N_{Ay} = -\frac{1}{2}\eta a(a+b)\omega^2$$

根据质心运动定理，因为 $\boldsymbol{a}_c=0$，

$$\boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_O = 0$$

O 处轴承作用在轴上的力

$$\boldsymbol{N}_O = -\boldsymbol{N}_A = \frac{1}{2}\eta a(a+b)\omega^2 \boldsymbol{j}$$

作用在 A 处、O 处轴承上的合力是 $\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_O$ 的反作用力 $\boldsymbol{N}'_A$、$\boldsymbol{N}'_O$，其方向如图 7.54 所示. 曲轴对 O 点的角动量

$$\boldsymbol{J} = 2\eta ba^2\omega \boldsymbol{i} - \eta ab(a+b)\omega \boldsymbol{j}$$

角动量的方向也在图 7.54 中画出.

方法二：取固连于刚体的 $Oxyz$ 转动参考系，引入惯性力，用平衡条件求解.

图 7.54 中杆 1 和杆 5 受到的惯性力分别沿 y 轴的负向和正向，大小相等.

$$f_1 = f_5 = \int_0^a y\omega^2 \cdot \eta \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\eta a^2\omega^2$$

杆 2 和杆 4 受到的惯性力分别沿 y 轴的负向和正向，大小相等，

$$f_2 = f_4 = \eta ba\omega^2$$

作用点在两杆的中点.

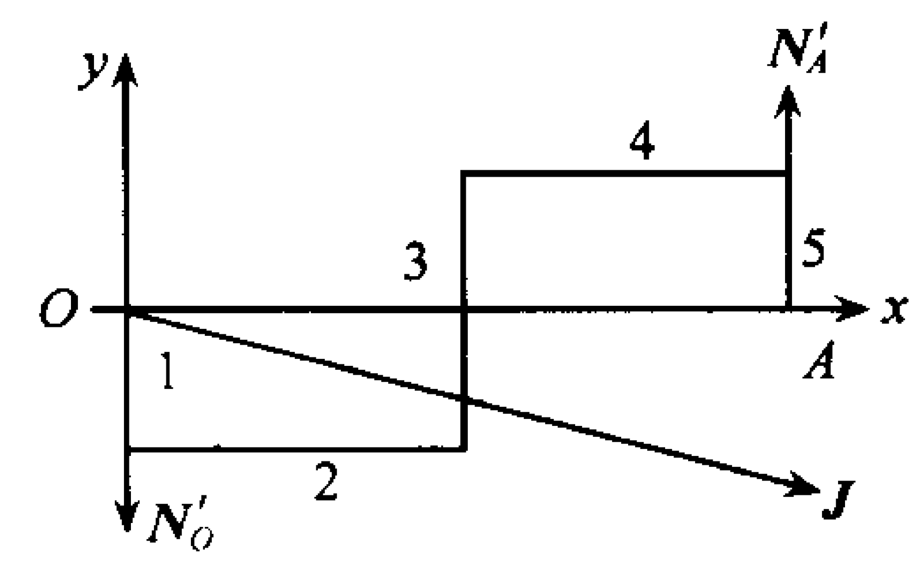


图 7.54

杆 3 受到的惯性力为零.

惯性力和真实力的合力为零,惯性力的合力为零,故真实力的合力为零.

惯性力的力矩之和为

$$(f_1 \cdot 2b + f_2 \cdot b)\boldsymbol{k} = \eta ab(a+b)\omega^2\boldsymbol{k}$$

真实力的力矩与惯性力的力矩之和等于零,故真实力的力矩为

$$-\eta ab(a+b)\omega^2\boldsymbol{k}.$$

两轴承施加的作用力为 $\boldsymbol{N}_O$、$\boldsymbol{N}_A$,均沿 y 轴. 设 $\boldsymbol{N}_O = N_O\boldsymbol{j}$,则以 A 为矩心,有

$$-2b\boldsymbol{i} \times N_O\boldsymbol{j} = -\eta ab(a+b)\omega^2\boldsymbol{k}$$

得
$$N_O = \frac{1}{2}\eta a(a+b)\omega^2$$

即
$$\boldsymbol{N}_O = \frac{1}{2}\eta a(a+b)\omega^2\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N}_A = -\boldsymbol{N}_O = -\frac{1}{2}\eta a(a+b)\omega^2\boldsymbol{j}$$

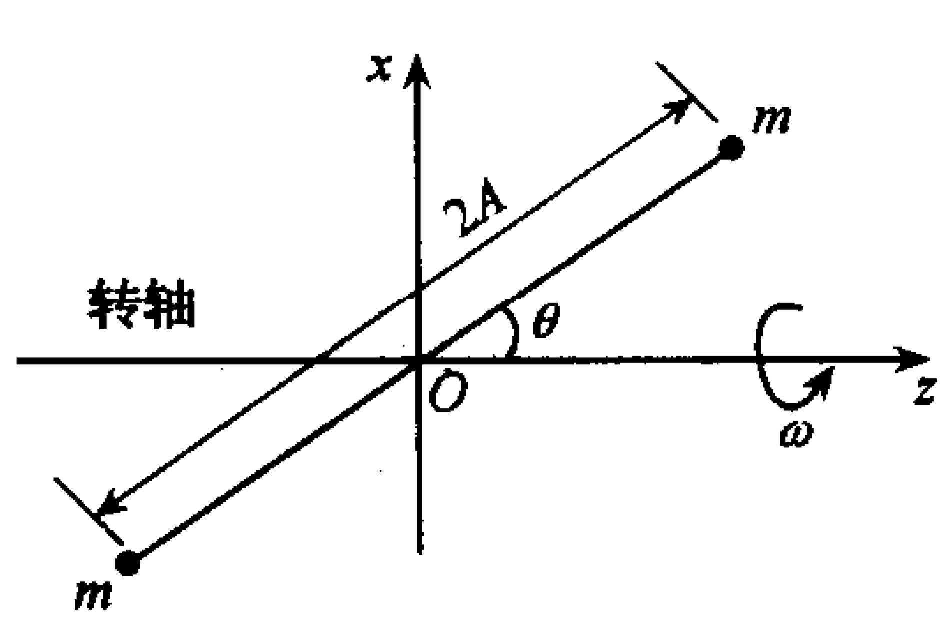


图 7.55

7.3.30　哑铃由质量为 m 的两个相同的质点固连在一根长度为 $2A$ 的无质量的刚杆两端组成,刚杆绕一通过杆的中心并与杆成 θ 角的轴旋转,取杆的中心为坐标原点,z 轴沿转轴,角速度 ω 不随时间而变,$t=0$ 时哑铃处于 xz 平面内,如图 7.55 所示.

(1) 计算关于 O 点的惯量张量;

(2) 用算得的惯量张量,求在实验室参考系中哑铃关于 O 点的角动量随时间变化的规律;

(3) 用 $\boldsymbol{J} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ 计算哑铃的角动量,并证明它与(2)问的答案一致;

(4) 计算作用在轴上的力矩随时间变化的规律;

(5) 计算哑铃的动能.

解　(1) $I_{xx} = 2mA^2\cos^2\theta$

$$I_{yy} = 2mA^2, \qquad I_{zz} = 2mA^2\sin^2\theta$$

$$I_{xy} = I_{yz} = 0$$

$$I_{xz} = -2mA^2\sin\theta\cos\theta = -mA^2\sin 2\theta$$

$$\mathbf{I}(0) = \begin{pmatrix} 2mA^2\cos^2\theta & 0 & -mA^2\sin^2\alpha\theta \\ 0 & 2mA^2 & 0 \\ -mA^2\sin^2\theta & 0 & 2mA^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(2) 取实验室坐标系 $O\xi\eta\zeta$,$t=0$ 时 x、y、z 轴分别与 ξ、η、ζ 轴重合,则

$$i = \cos\omega t \boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t \boldsymbol{\eta}^0,$$

$$k = \boldsymbol{\zeta}^0.$$

$$\boldsymbol{J}(0) = \mathbf{I}(0) \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2mA^2\cos\theta & 0 & -mA^2\sin2\theta \\ 0 & 2mA^2 & 0 \\ -mA^2\sin2\theta & 0 & 2mA^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= -mA^2\omega\sin2\theta \boldsymbol{i} + 2mA^2\omega\sin^2\theta \boldsymbol{k}$$

$$= mA^2\omega[-\sin2\theta(\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0) + 2\sin^2\theta\boldsymbol{\zeta}^0]$$

(3)

$$\boldsymbol{J} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

$$= A(\cos\theta\boldsymbol{k} + \sin\theta\boldsymbol{i}) \times m[\omega\boldsymbol{k} \times A(\cos\theta\boldsymbol{k} + \sin\theta\boldsymbol{i})]$$

$$+ [-A(\cos\theta\boldsymbol{k} + \sin\theta\boldsymbol{i}] \times m\{\omega\boldsymbol{k} \times [-A(\cos\theta\boldsymbol{k} + \sin\theta\boldsymbol{i})]\}$$

$$= A(\cos\theta\boldsymbol{k} + \sin\theta\boldsymbol{i}) \times m\omega A\sin\theta\boldsymbol{j} - A(\cos\theta\boldsymbol{k} + \sin\theta\boldsymbol{i}) \times m\omega A\sin\theta(-\boldsymbol{j})$$

$$= 2mA^2\omega(-\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin^2\theta\boldsymbol{k})$$

$$= mA^2\omega(-\sin2\theta\boldsymbol{i} + 2\sin^2\theta\boldsymbol{k})$$

$$= mA^2\omega[-\sin2\theta(\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0) + 2\sin^2\theta\boldsymbol{\zeta}^0]$$

(4)

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = mA^2\omega^2\sin2\theta(\sin\omega t\boldsymbol{\xi}^0 - \cos\omega t\boldsymbol{\eta}^0)$$

(5)

$$T = \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2 = mA^2\omega^2\sin^2\theta$$

7.3.31 一个均匀薄圆盘,半径为 a、质量为 m,以匀角速度 ω 通过其中心的固定竖直轴无摩擦地自由转动,转轴与圆盘对称轴的夹角为 α,求圆盘和轴之间作用的力矩和净力的大小和方向.

解 取固连于圆盘的坐标系.原点位于质心,z 轴取圆盘的对称轴,取 x 轴和 z 轴的正向使 $\boldsymbol{\omega}$ 的 x、z 轴分量均为正值.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\sin\alpha\boldsymbol{i} + \omega\cos\alpha\boldsymbol{k}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2, \quad I_{yy} = \frac{1}{4}ma^2, \quad I_{zz} = \frac{1}{2}ma^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$\boldsymbol{J} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{4}ma^2\omega(\sin\alpha\boldsymbol{i} + 2\cos\alpha\boldsymbol{k})$$

故轴作用于圆盘的力矩为

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}$$

$$= \omega(\sin\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) \times \frac{1}{4}ma^2\omega(\sin\alpha\boldsymbol{i} + 2\cos\alpha\boldsymbol{k})$$

$$= -\frac{1}{4}ma^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\boldsymbol{j} = -\frac{1}{8}ma^2\omega^2\sin2\alpha\boldsymbol{j}$$

由于质心固定，圆盘所受合力为零，轴作用于圆盘的净力 $\boldsymbol{F}$ 等于重力 $m\boldsymbol{g}$ 的负值.

$$\boldsymbol{F}=-m\boldsymbol{g}=mg(\sin\alpha\boldsymbol{i}+\cos\alpha\boldsymbol{k})$$

（这里考虑 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是竖直向上的.）

7.3.32　一块边长为 a 与 $2a$ 质量为 M 的均质薄矩形片以恒定的角速度 ω 绕其对角线定轴转动，转轴由对角上的轴承支撑，如图 7.56 所示，忽略重力与摩擦力. 求出每个轴承施加在轴上的力与时间的关系.

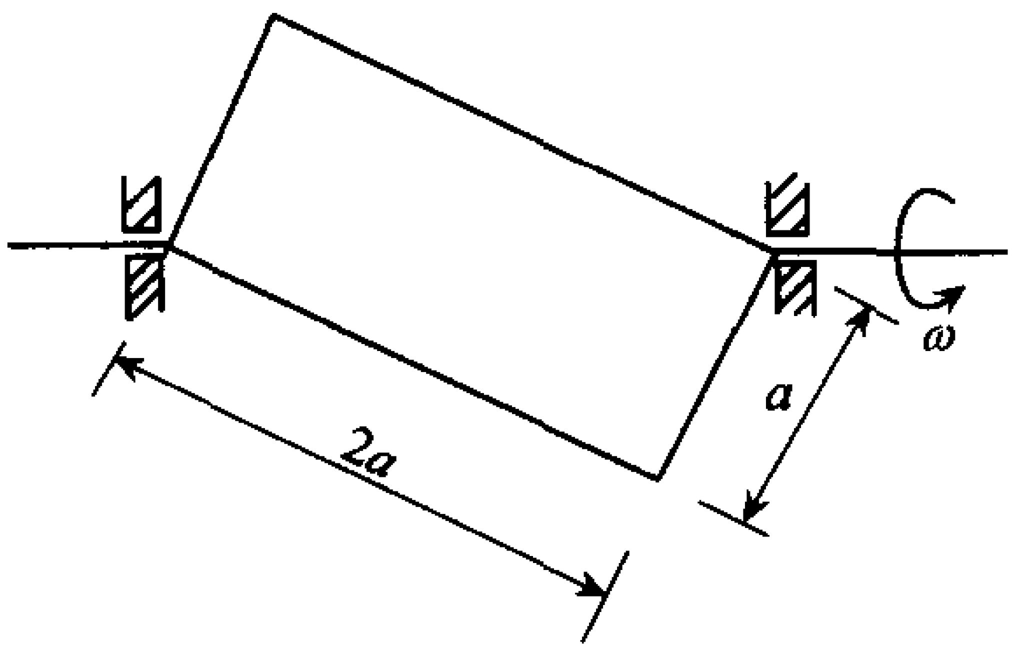


图 7.56

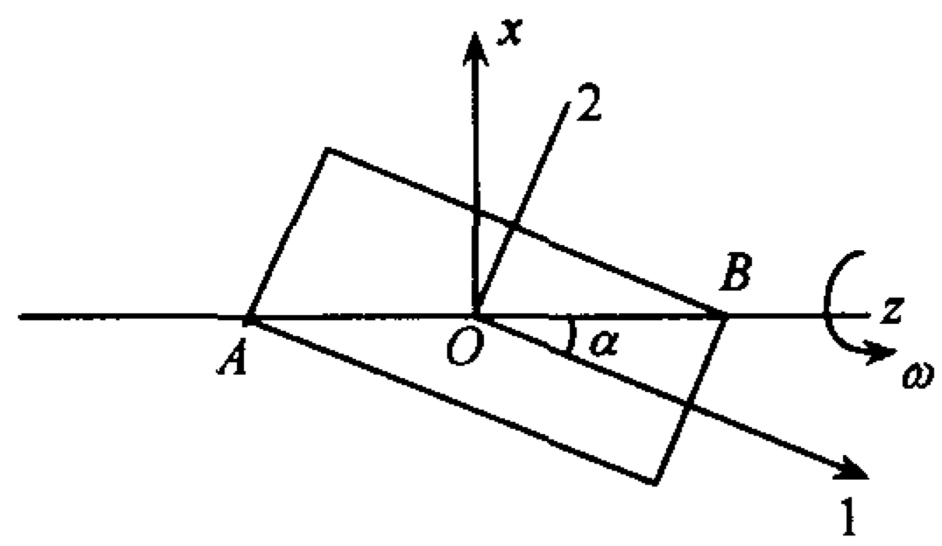


图 7.57

解　取固连于薄板的 $Oxyz$ 坐标系，O 为质心，z 轴沿对角线，$\boldsymbol{\omega}$ 的方向为其正向，x 轴在薄板上，如图 7.57 所示.

设轴承 A、B 施加在轴上的作用力分别为

$$\boldsymbol{N}_A=N_{Ax}\boldsymbol{i}+N_{Ay}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{N}_B=N_{Bx}\boldsymbol{i}+N_{By}\boldsymbol{j}.$$

由质心运动定理，又 $\boldsymbol{a}_C=0$，

$$\boldsymbol{N}_A+\boldsymbol{N}_B=0$$

即

$$N_{Ax}+N_{Bx}=0 \tag{1}$$

$$N_{Ay}+N_{By}=0 \tag{2}$$

由对固定点 O 的角动量定理，

$$I_{xz}\dot{\omega}-I_{yz}\omega^2=M_x \tag{3}$$

$$I_{yz}\dot{\omega}+I_{xz}\omega^2=M_y \tag{4}$$

$$I_{zz}\dot{\omega}=M_z$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\frac{\sqrt{5}}{2}a\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{N}_B-\frac{\sqrt{5}}{2}a\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{N}_A\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}a(N_{Ay}-N_{By})\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{5}}{2}a(N_{Bx}-N_{Ax})\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{5}$$

因为所有质元的 y 坐标均为零，由惯量积的定义，

$$I_{xy}=-\sum_i m_ix_iy_i=0,\qquad I_{yz}=-\sum_i m_iy_iz_i=0$$

为了计算 I_{xz}，取图中 1、2、3 三个惯量主轴，3 轴即 y 轴，

$$I_1=\frac{1}{12}ma^2,\qquad I_2=\frac{1}{12}m(2a)^2=\frac{1}{3}ma^2$$

$$I_{zz}=I_1\cos^2\alpha+I_2\sin^2\alpha$$

$$= \frac{1}{12}ma^2\left[\frac{a}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}}\right]^2 + \frac{1}{3}ma^2\left[\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}}\right]^2 = \frac{2}{15}ma^2$$

用 7.2.16 题所证明的结论：

$$I_1 + I_2 = I_{xx} + I_{zz}$$

所以

$$I_{xx} = I_1 + I_2 - I_{zz} = \frac{17}{60}ma^2$$

由 $I=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{n}$ 计算 I_2，其中 $\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{k}$，可得

$$I_2 = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{zz}\sin^2\alpha + 2I_{xz}\sin\alpha\cos\alpha$$

可得

$$I_{xz} = \frac{1}{10}ma^2$$

由 $\dot{\omega}=0, I_{xy}=I_{yz}=0, I_{xz}=\frac{1}{10}ma^2$，及由式(5)给出的 M_x、M_y 及式(3)、(4)，得到

$$N_{Ay} - N_{By} = 0 \tag{6}$$

$$N_{Bx} - N_{Ax} = \frac{1}{5\sqrt{5}}ma\omega^2 \tag{7}$$

由式(1)、(2)、(6)、(7)解得

$$N_{Ax} = -\frac{1}{10\sqrt{5}}ma\omega^2$$

$$N_{Bx} = \frac{1}{10\sqrt{5}}ma\omega^2$$

$$N_{Ay} = N_{By} = 0$$

即

$$\boldsymbol{N}_A = -\frac{1}{10\sqrt{5}}ma\omega^2\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{N}_B = \frac{1}{10\sqrt{5}}ma\omega^2\boldsymbol{i}$$

取固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$，$t=0$ 时，$Oxyz$ 与 $O\xi\eta\zeta$ 重合，则 $\boldsymbol{i}=\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0+\sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0$.

$$\boldsymbol{N}_A = -\frac{1}{10\sqrt{5}}ma\omega^2(\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0)$$

$$\boldsymbol{N}_B = \frac{1}{10\sqrt{5}}ma\omega^2(\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0)$$

7.3.33 一个边长为 a、质量为 m 的均质薄正方形板绕一个与它的法线成 θ 角、通过中心的轴以恒定角速度 ω 转动. 选取下列两组坐标：两个坐标系的原点均取在板的中心，$O\xi\eta\zeta$ 是实验室坐标系，取转轴为 ζ 轴；$Oxyz$ 固连于薄板，z 轴沿板的法线方向，x、y 轴在薄板平面上，取与 ζ 轴垂直的一个方向为 y 轴，x、y 轴不必一定与正方形的边平行或垂直. $t=0$ 时，y 轴和 η 轴重合，如图 7.58 所示. 求：

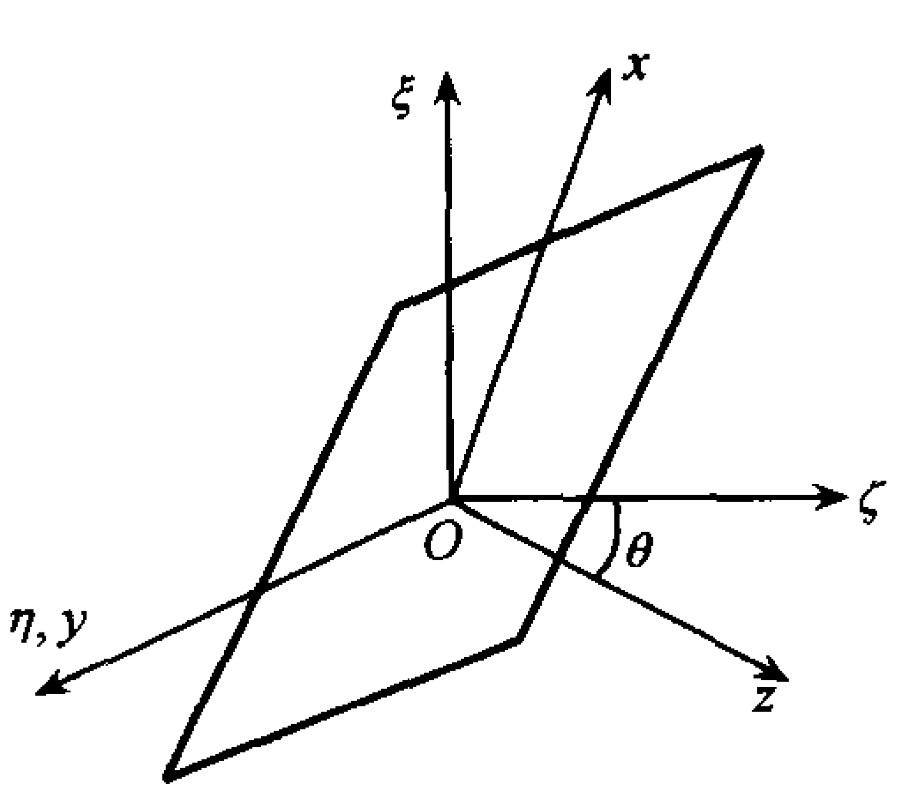


图 7.58

(1) 用两组坐标系表达的角动量；

(2) 用两组坐标系表达的作用在轴上的力对 O 点的力矩.

解　(1) $Oxyz$ 坐标系固连于正方形板上，z 轴沿法线，是惯量主轴，对板的中心而言，在板上任何轴都是惯量主轴，而且主转动惯量相等，

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}ma^2$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2$$

关于 O 点的惯量张量为

$$\mathbf{I}(O) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{pmatrix}$$

用 $Oxyz$ 坐标系表达的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{k})$$

用 $Oxyz$ 坐标系表达的角动量为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}ma^2\omega\sin\theta\boldsymbol{i} + \frac{1}{6}ma^2\omega\cos\theta\boldsymbol{k}$$

只要把 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{k}$ 表示成与 $\boldsymbol{\xi}^0$、$\boldsymbol{\eta}^0$、$\boldsymbol{\zeta}^0$ 随时间变化的关系，就能得到用 $O\xi\eta\zeta$ 坐标系表达的角动量.

$$\boldsymbol{i} = \cos\theta\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \cos\theta\sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0 + \sin\theta\boldsymbol{\zeta}^0$$

$$\boldsymbol{k} = -\sin\theta\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 - \sin\theta\sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0 + \cos\theta\boldsymbol{\zeta}^0$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \frac{1}{12}ma^2\omega\sin\theta(\cos\theta\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \cos\theta\sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0 + \sin\theta\boldsymbol{\zeta}^0) \\ &\quad + \frac{1}{6}ma^2\omega\cos\theta(-\sin\theta\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 - \sin\theta\sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0 + \cos\theta\boldsymbol{\zeta}^0) \\ &= -\frac{1}{24}ma^2\omega[\sin 2\theta(\cos\omega t\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\omega t\boldsymbol{\eta}^0 - (3 + \cos 2\theta)\boldsymbol{\zeta}^0].\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J} \\ &= \omega(\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{k}) \times \left(\frac{1}{12}ma^2\omega\sin\theta\boldsymbol{i} + \frac{1}{6}ma^2\omega\cos\theta\boldsymbol{k}\right) \\ &= -\frac{1}{24}ma^2\omega^2\sin 2\theta\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$j = -\sin\omega t\xi^0 + \cos\omega t\eta^0$$

也可由 $j = k \times i$ 得到上式.

用 $O\xi\eta\zeta$ 坐标系表达的力矩为

$$M = -\frac{1}{24}ma^2\omega^2\sin2\theta(-\sin\omega t\xi^0 + \cos\omega t\eta^0)$$

也可直接由用 $O\xi\eta\zeta$ 坐标系表达的 J 对 t 求导而得,

$$M = \frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{24}ma^2\omega[\sin2\theta(\cos\omega t\xi^0 + \sin\omega t\eta^0) - (3 + \cos2\theta)\zeta^0]\right\}$$

$$= -\frac{1}{24}ma^2\omega^2\sin2\theta(-\sin\omega t\xi^0 + \cos\omega t\eta^0)$$

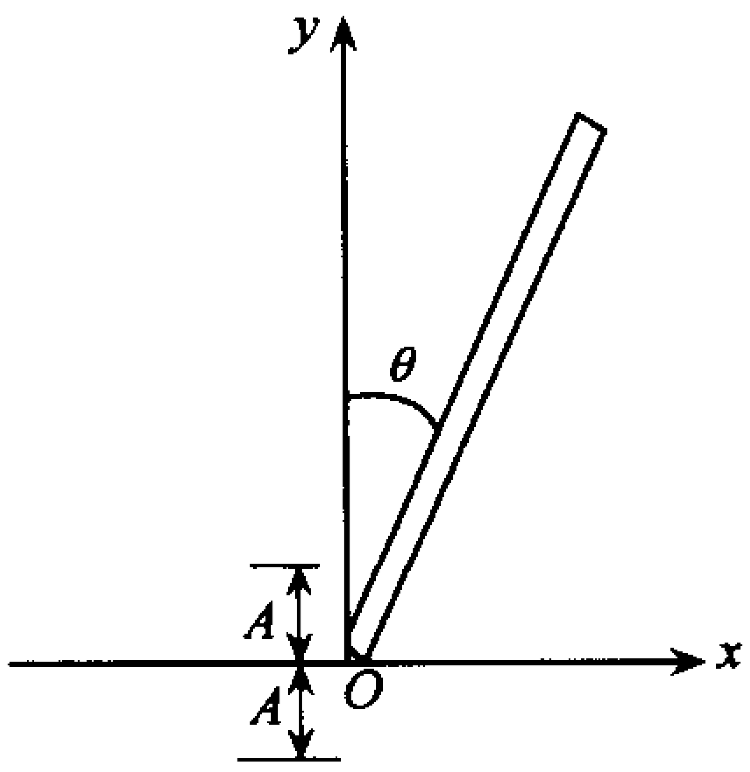


图 7.59

7.3.34 一根长 l、质量为 m 的均质杆,其下端以与时间有正弦函数关系作振幅 A 角频率 ω 的上下振动,如图 7.59 所示. 适当选择参数 m、l、A 和 ω,此摆将围绕 $\theta=0$ 这个在下端不动时的不稳定平衡位置作振动.

(1) 列出作用于杆上的力的分量;

(2) 杆的角动量守恒吗?

(3) 杆的动量守恒吗?

(4) 杆的能量守恒吗?

(5) 求质心的加速度分量,用 $\theta(t)$ 写成时间的函数;

(6) 用作用于杆的力写出杆的角运动的微分方程;

(7) 在实验室参考系中得到关于 $\theta(t)$ 的运动微分方程;

(8) 在支端平动参考系中得到关于 $\theta(t)$ 的运动微分方程;

(9) 定性说明当 $A=0$ 时发生什么样的运动;

(10) 从物理上解释为什么能发生竖直向上的摆动.

(杆限于在图示的 xy 平面内运动).

解 (1) 作用于杆上的力有重力 $-mgj$,作用于杆的质心,还有作用于活动支端上的力 $f_xi + f_yj$.

(2) 用实验室参考系,对任何固定点,都没有(1)问中所述的两个力的力矩之和恒为零,故对任何固定点,角动量均不守恒.

(3) 因杆所受合外力不为零,在实验室参考系中动量不守恒.

(4) 因作用于活动支端的力不是保守力,在实验室参考系中机械能不守恒.

(5) 选取活动支端为原点的平动坐标系 $O'x'y'z'$,如图 7.60 所示.

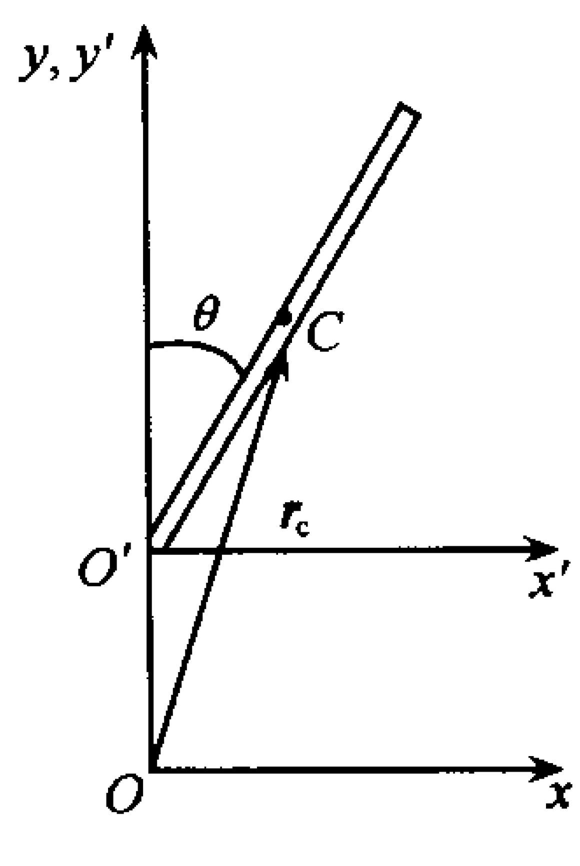


图 7.60

质心的位矢为

$$r_C = y_{O'}j + \frac{l}{2}\sin\theta i + \frac{l}{2}\cos\theta j$$

$$= \frac{l}{2}\sin\theta \boldsymbol{i} + \left(A\sin\omega t + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{j}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_C = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{i} + \left(A\omega\cos\omega t - \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{j}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \left(\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\boldsymbol{i} - \left(A\omega^2\sin\omega t + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\boldsymbol{j}$$

质心加速度的分量为

$$\ddot{x}_c = \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\ddot{y}_c = -\left(A\omega^2\sin\omega t + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

（6）用质心运动定理，

$$\frac{1}{2}ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = f_x$$

$$-m\left(A\omega^2\sin\omega t + \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\cos\theta\right) = f_y - mg$$

（7）为了用对 z 轴的角动量定理. 先求杆对 z 轴的角动量，

$$J_z = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{J}_O$$

其中 $\boldsymbol{J}_O$ 是杆对 O 点的角动量，它等于杆在质心平动参考系中对质心的角动量，与位于质心的质量为杆的质量以质心速度运动的质点对 O 点的角动量之矢量和.

$$\boldsymbol{J}_O = -\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{r}_C$$

$$= -\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} + \left[\frac{l}{2}\sin\theta\boldsymbol{i} + \left(A\sin\omega t + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{j}\right]$$

$$\times m\left[\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{i} + \left(A\omega\cos\omega t - \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{j}\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}mAl\omega\sin\theta\cos\omega t - \frac{1}{2}mAl\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t\right)\boldsymbol{k}$$

$$J_z = -\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}mAl\omega\sin\theta\cos\omega t - \frac{1}{2}mAl\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mAl\omega^2\sin\theta\sin\omega t - \frac{1}{2}mAl(\ddot{\theta}\cos\theta\sin\omega t - \dot{\theta}^2\sin\theta\sin\omega t)$$

$$M_z = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{M}_O$$

$$= \boldsymbol{k}\cdot[y_O\boldsymbol{j}\times(f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{r}_C\times(-mg)\boldsymbol{j}]$$

$$= -f_xA\sin\omega t - \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

由

$$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} = M_z$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mAl\omega^2\sin\theta\sin\omega t + \frac{1}{2}mAl(\ddot{\theta}\cos\theta\sin\omega t$$

$$-\dot{\theta}^2\sin\theta\sin\omega t) = f_xA\sin\omega t + \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

代入 $f_x=\frac{1}{2}ml(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)$，可得

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}=-\frac{1}{2}mAl\omega^2\sin\theta\sin\omega t+\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

$$l\ddot{\theta}=-\frac{3}{2}A\omega^2\sin\theta\sin\omega t+\frac{3}{2}g\sin\theta$$

(8) 用支端平动参考系，它是非惯性系，需考虑惯性力. 它等于 $-m\ddot{y}_O\boldsymbol{j}=mA\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}$，作用于质心.

在支端平动参考系中用对 z' 轴的角动量定理，立即可得

$$-\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}=\frac{l}{2}mA\omega^2\sin\theta\sin\omega t-\frac{l}{2}mg\sin\theta$$

与(7)问所得结果一致.

(9) 当 $A=0$ 时，

$$l\ddot{\theta}=\frac{3}{2}g\sin\theta$$

在 $\theta=0$ 是平衡位置，但是一个不稳定的平衡位置，无论向 $\theta>0$ 方向偏离还是 $\theta<0$ 方向偏离 $\theta=0$，都不可能回到 $\theta=0$，而是更加远离它，杆将绕固定轴做顺时针(如开始向 $\theta>0$ 方向偏离)转动或做逆时针(如开始向 $\theta<0$ 方向偏离)转动. 角速度的大小都是由小到大而后又由大到小变化的.

(10) 在(8)问中我们写出了作用于质心的惯性力为 $mA\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}$，与重力 $-mg\boldsymbol{j}$ 的方向有时相同有时相反，因为 $\sin\omega t$ 有时正有时负，当惯性力方向与重力方向相反时，选择 A、ω 越大、l 越大，就可以在较长时间内有

$$A\omega^2\sin\omega t>g$$

惯性力和重力的合力矩将是恢复力矩，在位于 $\theta=0$ 的时刻 $t=t_0(\neq 0)$，有 $A\omega^2\sin\omega t_0>g$，且 $|\dot{\theta}|$ 不太大时，有可能在一段时间内出现围绕 $\theta=0$ 作摆动，当然不可能长期保持.

如在一段时间内有

$$\omega\gg\sqrt{\frac{3A\omega^2-g}{2l}}$$

就可能围绕 $\theta=0$ 来回的摆动次数较多.

7.4　刚体的平面平行运动

7.4.1　质量为 10.0kg、半径为 0.070m 的均质圆柱体在一倾角为 30°的斜坡上做纯滚动，一条不可伸长的轻绳缠绕在圆柱上，绳子跨过无摩擦的滑轮并在另一端连着一个 2.0kg 的重物，如图 7.61 所示. 求：

(1) 当重物下降 1.0m 时圆柱竖直向上运动的距离；

(2) 圆柱中心的加速度；

(3) 作用在接触点 P 上的静摩擦力.

解　(1) 取 x 轴沿斜坡的方向，向上为正；y 轴沿垂直于斜坡的方向，向上为正. 用 x、

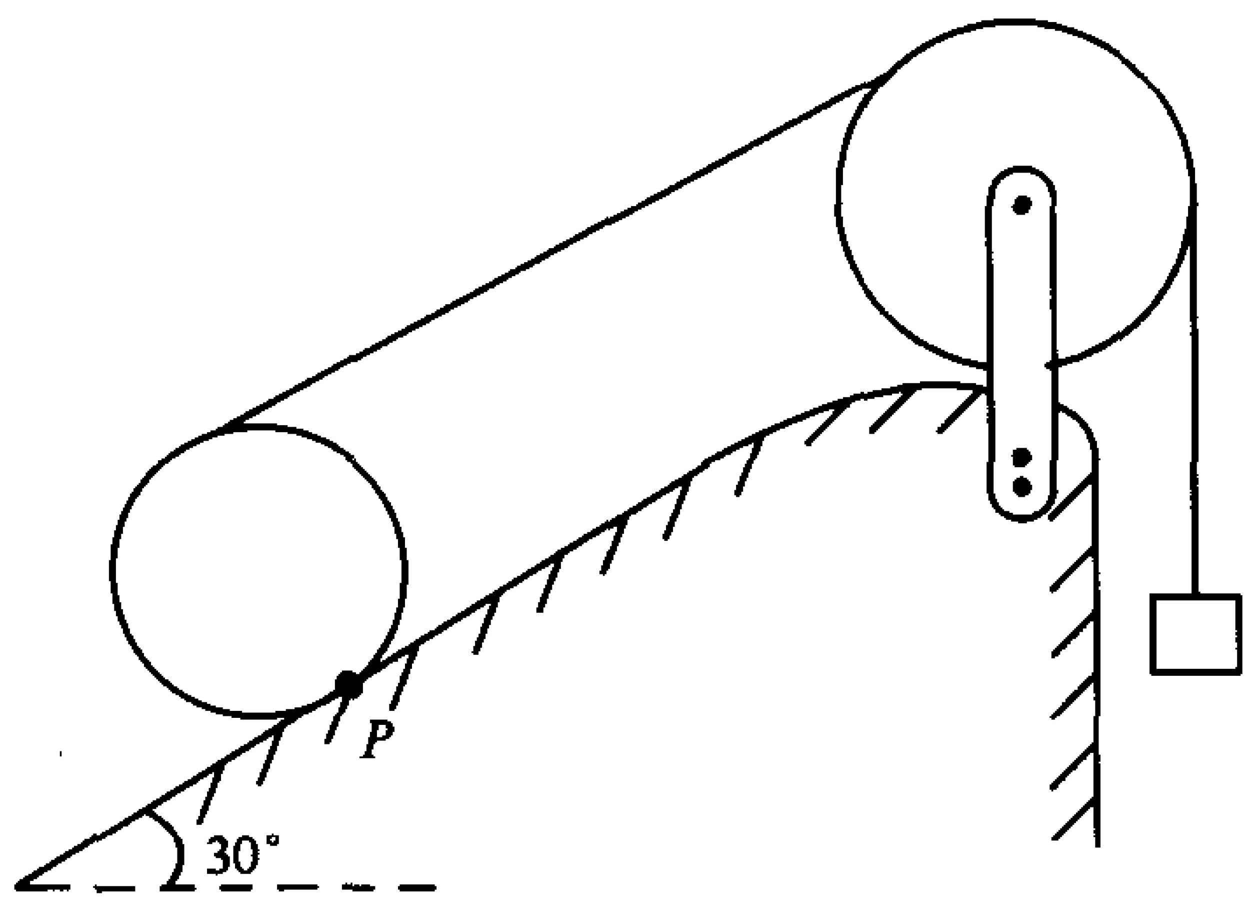


图 7.61

y 坐标表示圆柱中心的位置. 取 z 轴竖直向下, z 坐标表示重物的位置.

设圆柱半径为 R, θ 表示圆柱的角位移, 沿斜坡向上运动, $\theta>0$.

由圆柱做纯滚动和绳子不可伸长的条件,

$$\dot{x}_p = \dot{x} - R\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{z} = \dot{x} + R\dot{\theta}$$

所以

$$\dot{z} = 2\dot{x}$$

$$\Delta z = \int \dot{z}\,\mathrm{d}t = \int 2\dot{x}\,\mathrm{d}t = 2\Delta x$$

当 $\Delta z = 1.0\mathrm{m}$ 时,
$$\Delta x = \frac{1}{2}\Delta z = 0.50\mathrm{m}$$

圆柱竖直向上运动的距离为

$$\Delta h = \Delta x \sin 30° = 0.25\mathrm{m}$$

(2) 设 M、m 分别为圆柱和重物的质量, 绳子张力为 T, 斜坡作用于圆柱体上 P 点的静摩擦力为 f, 方向沿斜坡向上.

$$M\ddot{x} = T + f - Mg\sin 30°$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = TR - fR$$

$$2m\ddot{x} = mg - T$$

第三个式子用了(1)问中得到的 $\dot{z}=2\dot{x}$, 再用(1)问中得到的 $\dot{x}-R\dot{\theta}=0$, 第二式可改写为

$$\frac{1}{2}M\ddot{x} = T - f$$

可解得

$$\ddot{x} = \frac{2m - M\sin 30°}{4m + \frac{3}{2}M}g = -0.43\mathrm{m/s^2}$$

圆柱中心的加速度大小为 $0.43\mathrm{m/s^2}$, 方向沿斜坡向下.

(3) 由(2)问中给出的方程可解出

$$f = (M + 2m)\ddot{x} - mg + Mg\sin 30° = 23\mathrm{N}$$

静摩擦力大小为 23N,方向沿斜坡向上.

7.4.2　一均质圆柱质量为 M、半径为 r,放在完全光滑的斜面上,斜面的倾角为 α. 圆柱外卷有可以弯曲、无重量、不可伸长的绳子,此绳子沿着斜面经过一个质量可以忽略不计的滑轮后在下端悬一质量为 m 的重物. 试求圆柱质心的加速度 a、重物的加速度 a',圆柱的角加速度 β 及绳子张力 T.

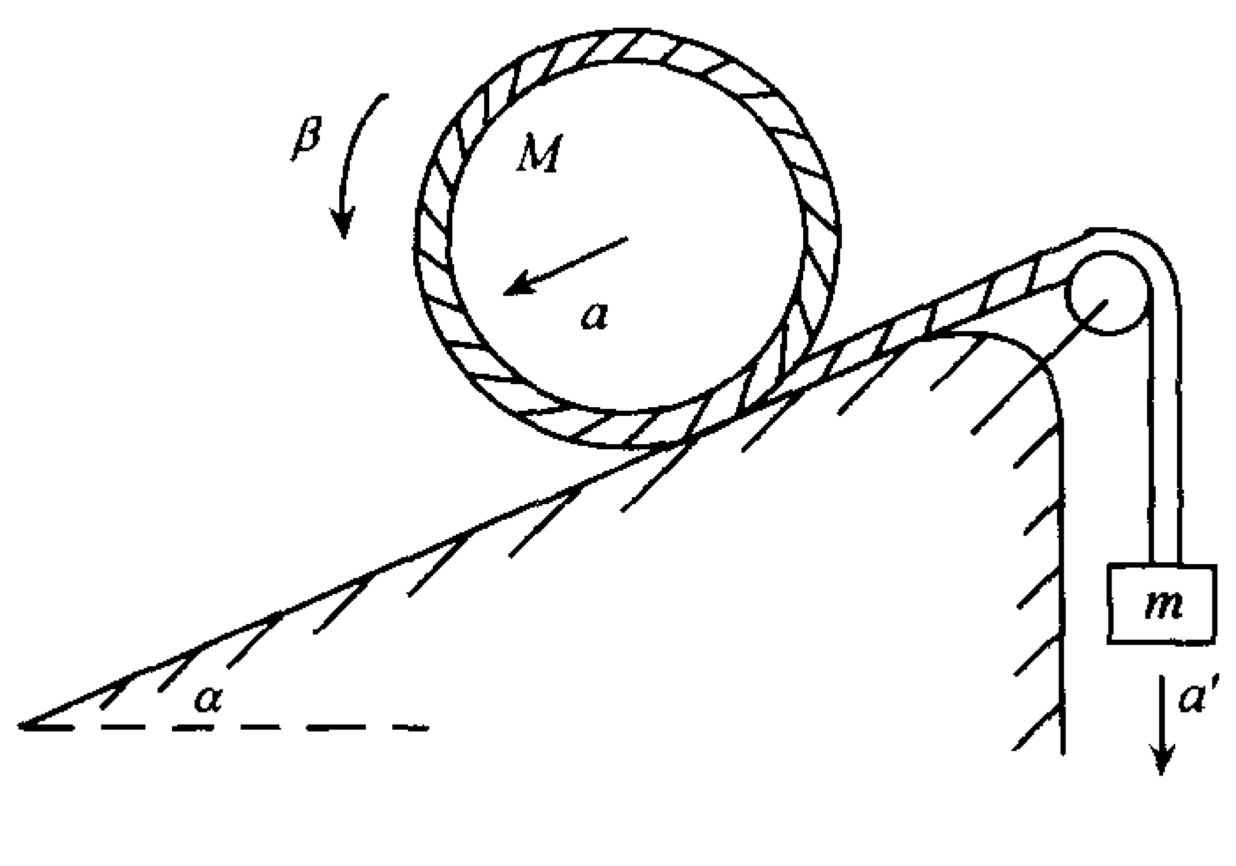


图 7.62

解　设圆柱质心加速度 a、角加速度 β 及重物加速度 a'的正方向如图 7.62 所示,

$$ma' = mg - T \tag{1}$$

$$Ma = Mg\sin\alpha - T \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}Mr^2\beta = Tr \tag{3}$$

设圆柱质心速度为 v,沿斜面向下方向为正,角速度为 ω. 逆时针转动方向为正,重物速度为 v',铅直向下为正,

$$v - \omega r = - v'$$

两边对 t 求导,

$$a - \beta r = - a' \tag{4}$$

由式(1)、(4)消去 a'得

$$m(a - \beta r) = T - mg \tag{5}$$

由式(3)、(5)消去 T 得

$$ma - \left(m + \frac{1}{2}M\right)r\beta = - mg \tag{6}$$

由式(2)、(5)消去 T 得

$$(m + M)a - mr\beta = Mg\sin\alpha - mg \tag{7}$$

由式(6)、(7)解出 β 和 a

$$\beta = \frac{2mg(1 + \sin\alpha)}{(M + 3m)r}$$

$$a = \frac{(M + 2m)\sin\alpha - m}{M + 3m}g$$

由式(4),$a' = \beta r - a = \dfrac{3m - M\sin\alpha}{M + 3m}g$

说明:滑轮轴承处一般均不受到摩擦力矩,除非特别说明它的存在. 因此,滑轮质量可以不计时,绳子与滑轮间不论有无相对滑动均不能有摩擦力(如摩擦因数不为零,一定无相对滑动),因而滑轮两边以及与滑轮接触处绳子张力都相等.

7.4.3　一均质球以初速 v_0 沿水平窄道抛出,开始做纯滑动,球的质量为 m,与地板间的静摩擦因数为 μ_s、滑动摩擦因数为 μ_d,忽略空气阻力的影响,求球开始做无滑滚动时的速度.

解　方法一:直到开始做无滑滚动前,球受到的摩擦力为

$$f = - \mu_d mg$$

$$ma = f = -\mu_d mg$$

$$\frac{2}{5}mR^2\beta = -fR = \mu_d mgR$$

其中 f、a、β 的正方向规定如图 7.63 所示，

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = -\int_0^t \mu_d g\mathrm{d}t$$

$$v = v_0 - \mu_d gt$$

$$\int_0^{\omega}\mathrm{d}\omega = \int_0^t \frac{5\mu_d g}{2R}\mathrm{d}t$$

$$\omega = \frac{5\mu_d g}{2R}t$$

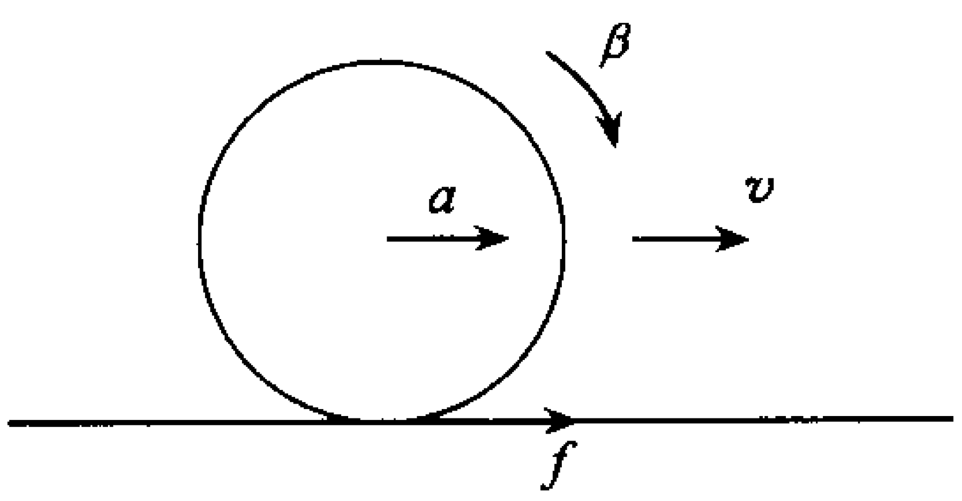


图 7.63

设 $t=t_1$ 时开始做无滑滚动，

$$v(t_1) = R\omega(t_1)$$

$$v_0 - \mu_d gt_1 = \frac{5\mu_d g}{2}t_1$$

$$t_1 = \frac{2v_0}{T\mu_d g}$$

所以
$$v(t_1) = v_0 - \mu_d gt_1 = \frac{5}{7}v_0$$

方法二：球在窄道上运动时受到的重力与窄道的支持力的合力为零，受到窄道的摩擦力沿窄道方向，对窄道上的固定点（球与窄道开始接触的点）的力矩为零，故球在窄道上运动时始终有对这个固定点的角动量保持不变，

$$\frac{2}{5}mR^2\omega(t_1) + mRv(t_1) = mRv_0$$

再用纯滚动条件
$$R\omega(t_1)=v(t_1)$$

可解出
$$v(t_1)=\frac{5}{7}v_0$$

7.4.4 一绕其对称轴以角速度 ω 旋转的半径为 R 的硬币，让转轴处于水平地放置在水平面上. 当它停止滑动以后，质心速度多大？

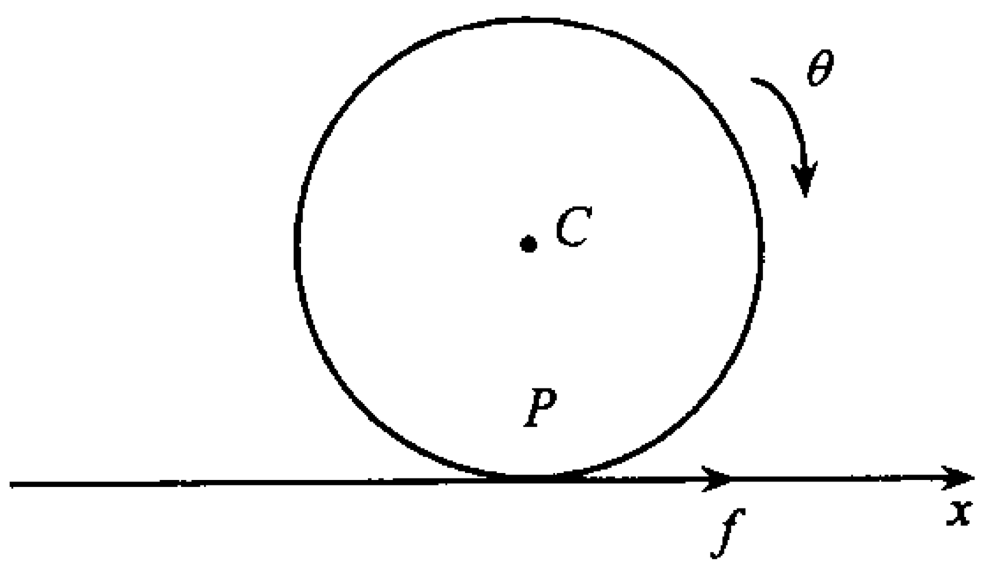


图 7.64

解　方法一：设硬币开始做顺时针转动，$t=0$ 时放置在水平面上时，角速度为 ω，质心速度为零，取图 7.64 所示的坐标，x 轴向右为正方向，顺时针转动的角位移为正值. 在硬币做纯滚动以前，硬币上与水平面接触的 P 点的速度 $\dot{x}_P<0$，故摩擦力 $f>0$，

$$m\ddot{x}_C = f = \mu mg$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = -\mu mgR$$

其中 μ 是硬币与水平面间的摩擦因数.

$$\dot{x}_C = \mu gt$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\mu g}{R}t + \omega$$

当 $t=t_1$ 时,接触点的速度 $\dot{x}_P=0$,

$$\dot{x}_C(t_1) - R\dot{\theta}(t_1) = 0$$

即

$$\mu g t_1 - R\left(\omega - \frac{2\mu g}{R}t_1\right) = 0$$

$$t_1 = \frac{R\omega}{3\mu g}$$

所以

$$\dot{x}_C(t_1) = \frac{1}{3}R\omega$$

方法二:考虑对硬币与水平面开始相接触的点的角动量守恒,

$$\frac{1}{2}mR^2\omega(t_1) + m\dot{x}_C(t_1)R = \frac{1}{2}mR^2\omega$$

纯滚动条件

$$R\omega(t_1) = \dot{x}_C(t_1)$$

可得

$$\dot{x}_C(t_1) = \frac{1}{3}R\omega$$

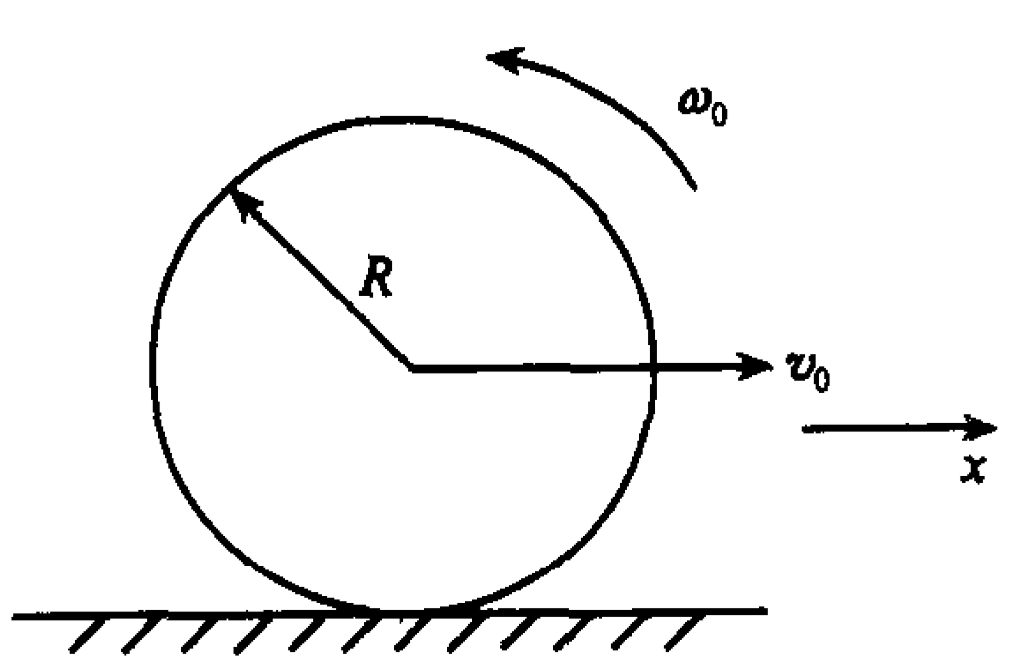


图 7.65

7.4.5 一个质量为 M、半径为 R 的轮子以质心速度 v_0、角速度 ω_0 沿水平表面投射,如图 7.65 所示,ω_0 倾向于产生与 v_0 相反方向的质心速度.轮子与表面间的摩擦因数为 μ.

(1) 经多长时间停止滑动;

(2) 滑动停止时轮子的质心速度多大?

解 (1) 取向右为 x 的正向,顺时针转动为 θ 的正向,

$$M\ddot{x} = -\mu M g,$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = \mu M g R$$

$t=0$ 时,$\dot{x}=v_0$,$\dot{\theta}=-\omega_0$.积分两式可得

$$\dot{x} = v_0 - \mu g t$$

$$\dot{\theta} = -\omega_0 + \frac{2\mu g}{R}t$$

设 $t=t_1$ 时轮子停止滑动,

$$\dot{x}(t_1) = R\dot{\theta}(t_1)$$

即

$$v_0 - \mu g t_1 = -R\omega_0 + 2\mu g t_1$$

$$t_1 = \frac{1}{3\mu g}(v_0 + R\omega_0)$$

(2)

$$\dot{x}(t_1) = v_0 - \mu g t_1 = \frac{1}{3}(2v_0 - R\omega_0)$$

说明:此题也可用前两题的方法二,先用对 $t=0$ 时的接触点的角动量守恒求出 $\dot{x}(t_1)$,

再用质心运动定理求 t_1.

7.4.6　一个半径为 R、质量为 M 的薄圆筒以质心速度 v_0、角速度 $\omega_0=\frac{2v_0}{R}$往回自转(如图 7.66 所示)在光滑的地板上运动,进入粗糙区域后继续沿直线运动,由于摩擦,它最终做纯滚动.求质心的末速度 v_f.

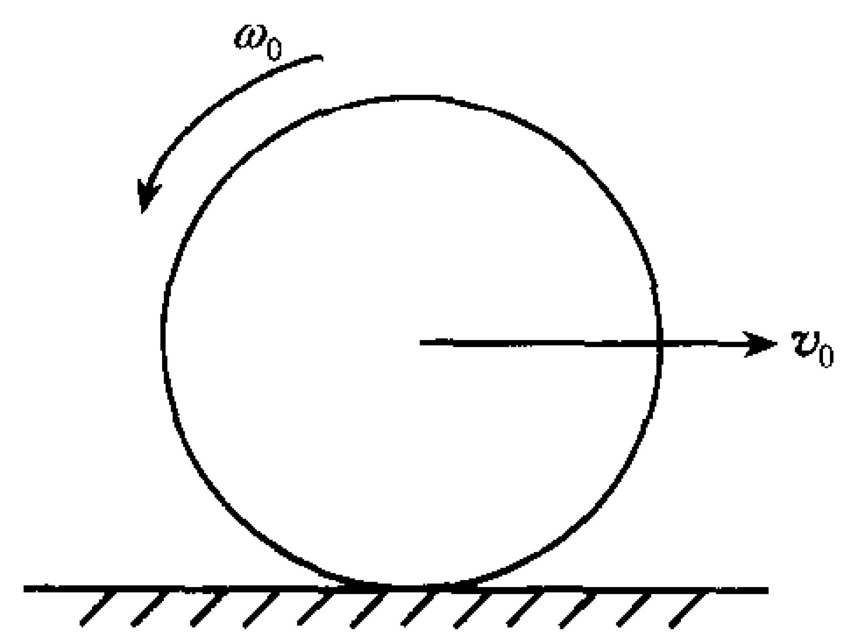


图 7.66

解　设最终末速度 v_f 仍与 v_0 方向相同.用对圆筒与刚进入粗糙区域的接触点的角动量守恒,

$$Mv_0R-MR^2\cdot\frac{2v_0}{R}=MR^2\omega_f+Mv_fR$$

其中 ω_f 是圆筒的末角速度,方向与 ω_0 相反.

纯滚动条件: $$R\omega_f=v_f$$

可得 $$v_f=-\frac{1}{2}v_0$$

负号说明圆筒最终以$\frac{1}{2}v_0$ 的速率往回运动.

7.4.7　一个 100m^2 的太阳能配电板连接到一个飞轮上,它把入射的太阳光能转换为机械的转动能,效率 1%.

(1) 在这个太阳能配电板曝光 8h 后.这个质量为 500kg、半径为 50cm 的实圆柱形飞轮将有多大的角速度(假定它开始是静止的)?

在整个时间间隔中太阳常数为 $2\text{cal/cm}^2\cdot\text{min}(1\ \text{cal}=4.2\text{J})$.

(2) 假如飞轮(它的轴是水平的)突然从它的固定轴承上被释放,让它在一个滑动摩擦因数 $\mu=0.1$ 的水平面上开始运动,在它停止滑动前走过多远?

(3) 这时质心速度多大?

(4) 以热的形式耗散了多少能量?

解　(1) 设 E 为由太阳光能转换获得的机械的转动能,

$$E=2\times4.2\times100\times10^4\times8\times60\times1\%=4.0\times10^7(\text{J})$$

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{4}mR^2\omega^2$$

其中 $m=500\text{kg}, R=0.50\text{m}$,

$$\omega=\sqrt{\frac{4E}{mR^2}}=\sqrt{\frac{4\times4.0\times10^7}{500\times(0.50)^2}}=1.1\times10^3\text{rad/s}$$

(2) 由于飞轮在变为纯滚动以前受到的摩擦力是恒量,质心加速度和飞轮的角加速度均为恒量.设变为纯滚动后的角速度为 Ω,由质心运动定理和质心平动参考系中对质心的角动量定理.

$$m\frac{\Omega R-0}{\tau}=\mu mg$$

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{\Omega-\omega}{\tau}=-\mu mgR$$

其中 τ 是从开始在有摩擦的水平面上运动到停止滑动所经历的时间,解得

$$\Omega = \frac{1}{3}\omega, \qquad \tau = \frac{\omega R}{3\mu g}.$$

停止滑动前走过的距离为

$$s = \frac{1}{2}\frac{\Omega R}{\tau}\tau^2 = \frac{R^2\omega^2}{18\mu g} = 1.7 \times 10^4 \text{m}$$

(3) 质心速度为

$$R\Omega = \frac{1}{3}R\omega = 1.8 \times 10^2 \text{m/s}$$

(4) 以热的形式耗散的能量等于飞轮在此期间机械能的减量

$$Q = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - \left[\frac{1}{2}m(R\Omega)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\Omega^2\right]$$

$$= \frac{1}{6}mR^2\omega^2 = 2.5 \times 10^7 \text{J}$$

说明:因为用了 1 cal=4.2J,E 的计算中只保留了两位有效数字,以后各量 ω、S 和 Q 也都相应的只保留两位有效数字.

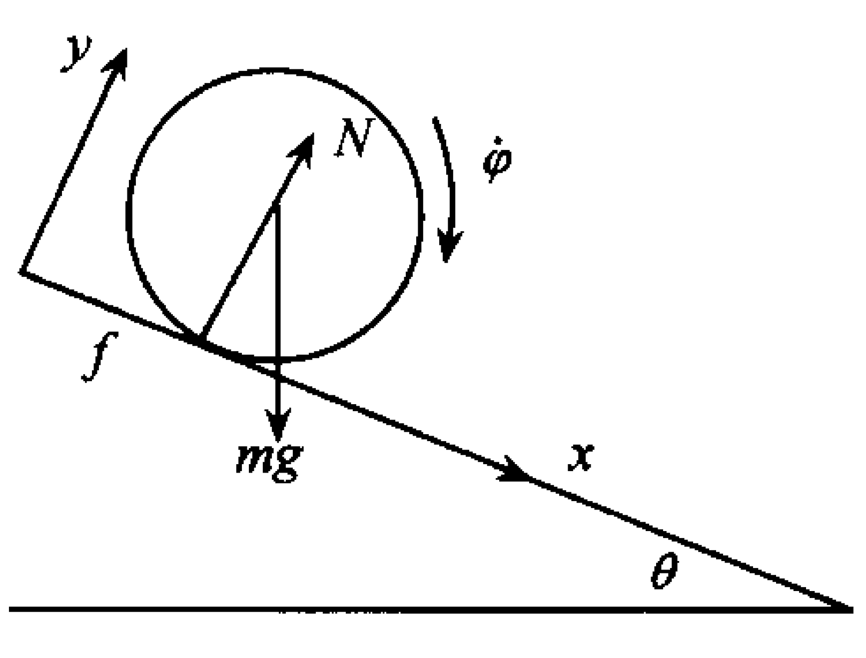


图 7.67

7.4.8 一均质细圆环从倾角为 θ 的斜面上滚下,求使它不发生滑动的最小摩擦因数.

解 采用图 7.67 所示的坐标系,并设 m 为圆环质量,R 为圆环半径,用 x、y 表示质心坐标,

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - f$$

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\theta = 0$$

$$mR^2\ddot{\varphi} = fR$$

$$\dot{x} - R\dot{\varphi} = 0$$

可解得

$$N = mg\cos\theta$$

$$f = \frac{1}{2}mg\sin\theta$$

不发生滑动要求所需的静摩擦力 f 小于等于所能提供的最大静摩擦力 μN,即

$$f \leqslant \mu N$$

$$\frac{1}{2}mg\sin\theta \leqslant \mu mg\cos\theta$$

$$\mu_{\min} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

7.4.9 一质量为 m、半径为 R 的均质圆柱体放置在与水平面成 θ 角的斜面上,如图 7.68 所示.图中 a 表示圆柱体的轴沿斜面运动的加速度,圆柱体和斜面之间的摩擦因数为 μ,当 θ 小于某个临界角 θ_C 时,圆柱体将无滑动地沿斜面滚下.

(1) θ_C 等于多少?

(2) 当 $\theta < \theta_C$ 时,a 等于多少?

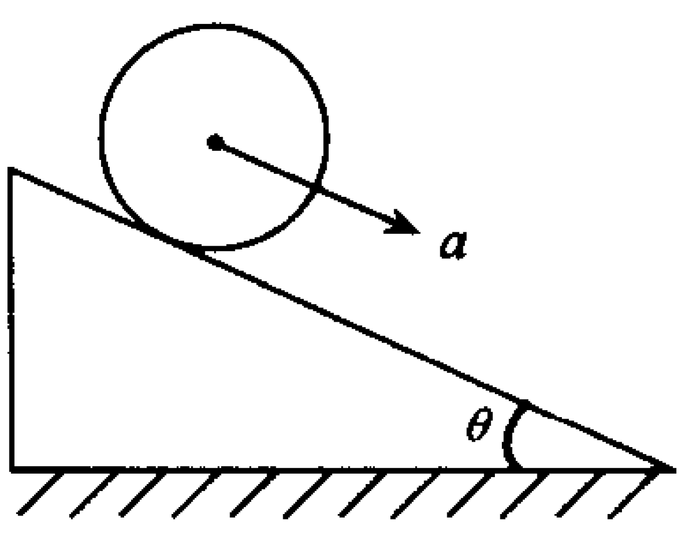


图 7.68

解　摩擦力 f，支持力 N、重力 mg，见上题的图，

$$ma = mg\sin\theta - f$$

$$N - mg\cos\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = fR$$

$$a = R\ddot{\varphi}$$

$$f \leqslant \mu N$$

可解得

$$a = \frac{2}{3}g\sin\theta, \qquad N = mg\cos\theta$$

$$f = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

$$\frac{1}{3}mg\sin\theta \leqslant \mu mg\cos\theta$$

$$\tan\theta \leqslant 3\mu$$

所以

$$\theta_C = \arctan 3\mu$$

在 $\theta<\theta_C$ 时，$a=\dfrac{2}{3}g\sin\theta$

7.4.10　一半径为 r、质量为 m、转动惯量 $I=mk^2$（关于对称轴的）的轮子沿着水平面被拉着运动，水平拉力 $\boldsymbol{F}$ 作用在一根从半径为 b 的轴上展开的绳子上，如图 7.69 所示. 假定轮和水平面间的摩擦力足以使轮作无滑动滚动，$I=mk^2$ 中 k 为常量，具有长度的量纲. 求：

(1) 轮轴的加速度；

(2) 作用在轮上的摩擦力.

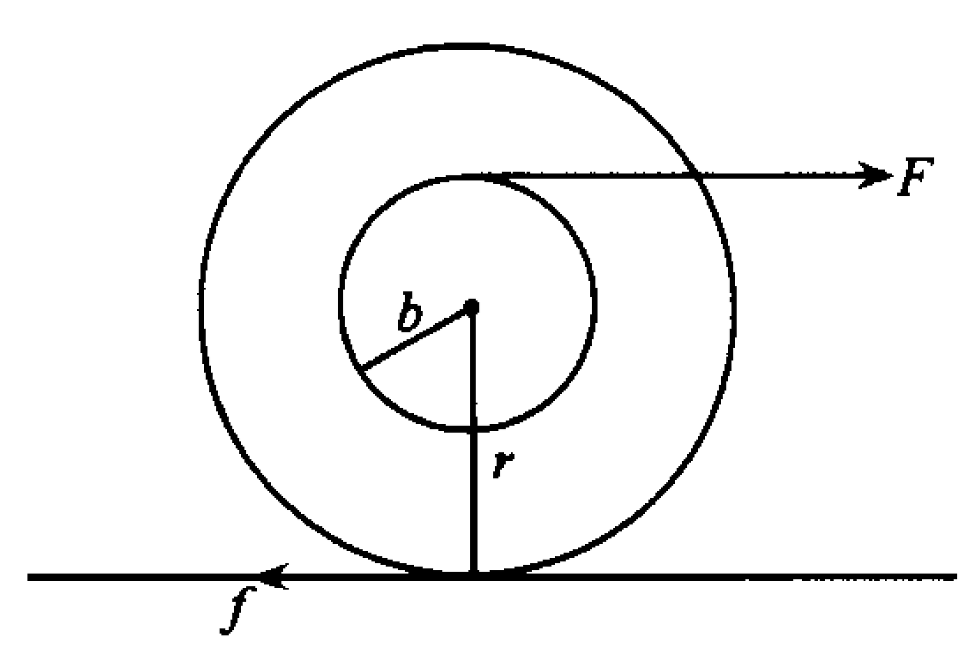


图 7.69

解　用 x 表示质心沿水平方向的位移，向右为正，用 φ 表示轮子的角位移，顺时针方向为正. $\ddot{x}$ 为轮轴的加速度，f 为所求的摩擦力，

(1)
$$m\ddot{x} = F - f \tag{1}$$

$$mk^2\ddot{\varphi} = Fb + fr \tag{2}$$

$$\dot{x} - r\dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \tag{3}$$

用式(3)消去式(2)中的 $\ddot{\varphi}$，

$$mk^2\ddot{x} = Fbr + fr^2 \tag{4}$$

式(1)×r^2+式(4)，可消去 f，解出 $\ddot{x}$ 得

$$\ddot{x} = \frac{Fr(b+r)}{m(k^2+r^2)}$$

(2)
$$f = F - m\ddot{x} = \frac{k^2 - br}{k^2 + r^2}F$$

7.4.11　一质量 $m=1.8\text{kg}$、半径 $r=0.2\text{m}$ 的扁平均质圆盘平放在无摩擦的水平桌面上，一根缠绕在此盘的圆柱面上的绳子受到沿正北方向的 3N 的作用力，如图 7.70 所

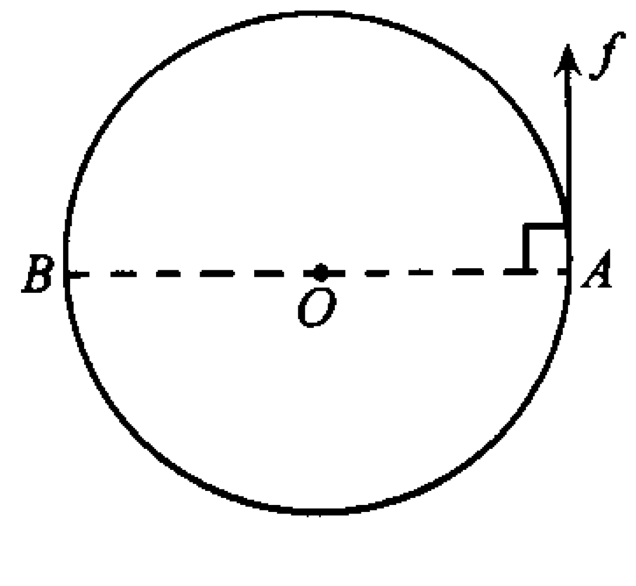


图 7.70

示. 求质心的加速度 a(大小和方向)和圆盘绕其质心的角加速度 β. $a=r\beta$ 吗？为什么？

解

$$ma=f$$

$$\frac{1}{2}mr^2\beta = fr$$

$$a=\frac{f}{m}=\frac{3}{1.8}=1.6\text{m}\cdot\text{s}^{-2}.\ \text{沿正北方向.}$$

$$\beta = \frac{2f}{mr} = \frac{2\cdot 3}{1.8\cdot 0.2} = 16.6\text{rad/s}^2$$

$$a \neq r\beta$$

要所问的关系成立，必须有 $v=r\omega$. 要图中的 B 点为瞬时转动中心，题目所给的条件没有给出这种约束. 自然不能要求有此关系.

7.4.12 两个均质圆盘质量分别为 M_1 和 M_2，半径分别为 R_1 和 R_2，由一根环绕它们各自圆周的、不可伸长的轻绳连结，如图 7.71 所示. 圆盘 1 绕其水平的对称轴做无摩擦定轴转动，两圆盘在同一竖直平面内，让圆盘 2 自由下落. 列出可求其质心加速度的方程.

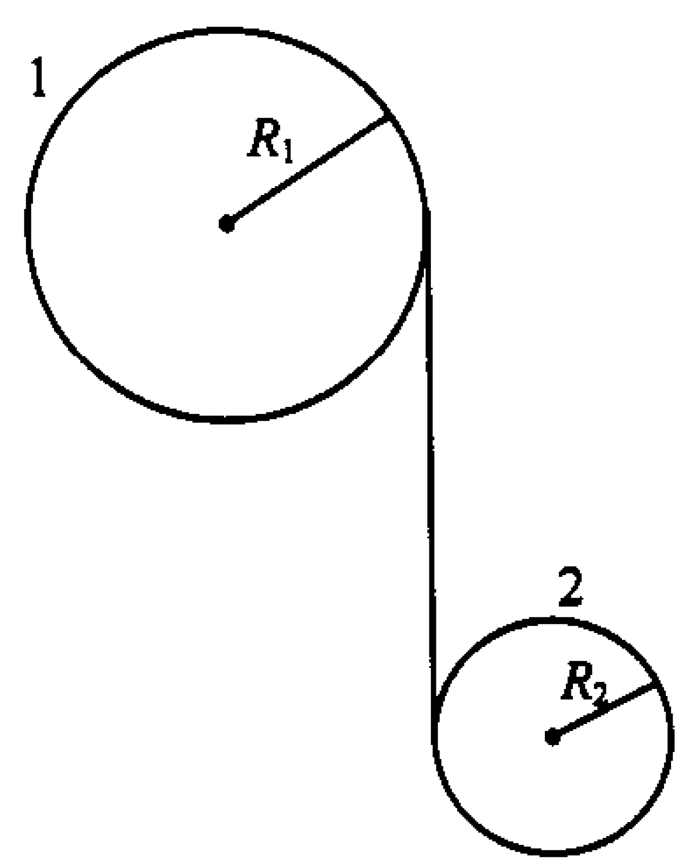


图 7.71

解 用 θ_1、θ_2 分别表示圆盘 1、圆盘 2 的转角，顺时针方向为正，x_2 表示圆盘 2 质心的位移，向下为正. T 表示绳子张力.

$$\frac{1}{2}M_1R_1^2\ddot{\theta}_1 = TR_1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}M_2R_2^2\ddot{\theta}_2 = TR_2 \tag{2}$$

$$M_2\ddot{x}_2 = M_2g - T \tag{3}$$

连结两圆盘的绳子在两切点间各点(包括切点)有相同的速度，

$$R_1\dot{\theta}_1 = \dot{x}_2 - R_2\dot{\theta}_2$$

由此两边求导，

$$R_1\ddot{\theta}_1 = \ddot{x}_2 - R_2\ddot{\theta}_2 \tag{4}$$

式(1)、(2)、(3)、(4)中共有四个未知量：$\ddot{\theta}_1$、$\ddot{\theta}_2$、$\ddot{x}_2$ 和 T，由此可解出 $\ddot{x}_2$.

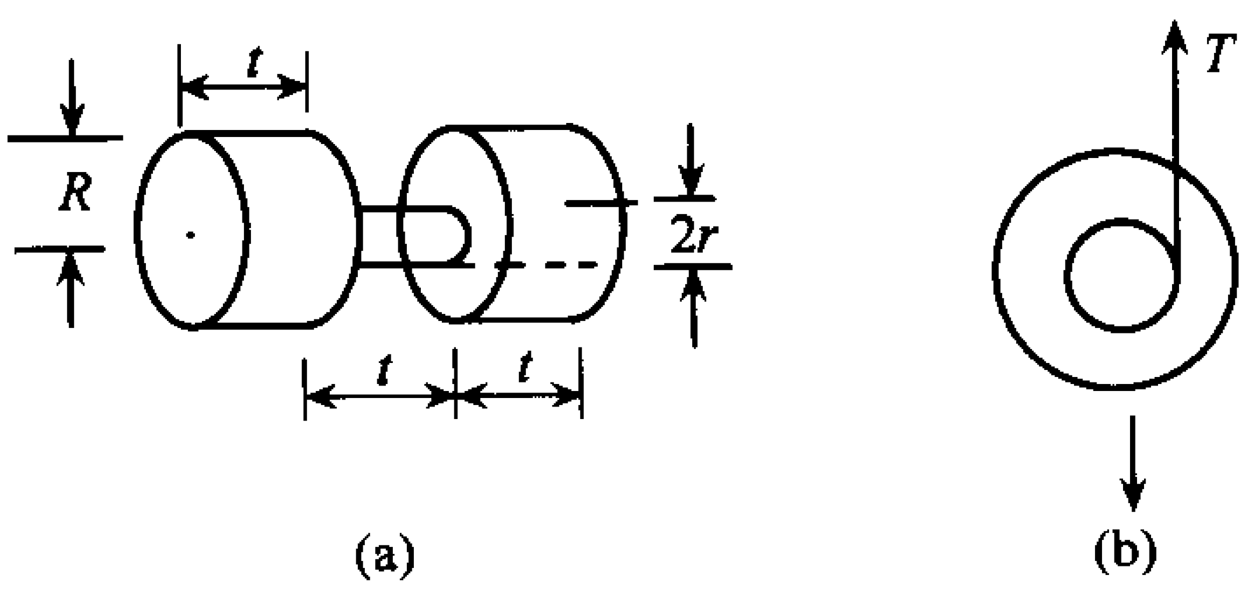


图 7.72

7.4.13 质量为 M 的一种玩具由两个半径为 R、厚度为 t 的大圆盘和一根半径为 r、长度为 t 的圆棒固连而成，如图 7.72(a)所示，假定各处密度均匀，求此玩具在重力作用下下落时(见图(b))无质量不可伸长的绳中的张力 T.

解 先求此玩具绕其对称轴的转动惯量. 设密度为 ρ，

$$I = 2 \times \frac{1}{2}(\rho\pi R^2 t)R^2 + \frac{1}{2}(\rho\pi r^2 t)r^2$$

$$= \rho \cdot \frac{1}{2}\pi t(2R^4 + r^4)$$

$$= \frac{M}{2\pi R^2 t + \pi r^2 t} \cdot \frac{1}{2}\pi t(2R^4 + r^4) = \frac{1}{2}M\frac{2R^4 + r^4}{2R^2 + r^2}$$

$$M\ddot{x} = Mg - T$$

$$I\ddot{\varphi} = Tr$$

有约束方程，
$$\dot{x} - r\dot{\varphi} = 0$$

可得
$$T = \frac{IMg}{I + Mr^2} = \frac{2R^4 + r^4}{2R^4 + 4R^2r^2 + 3r^4}Mg$$

7.4.14　一质量为 M、半径为 R 的均质球置于某一卡车的平板上，此卡车自静止开始以恒定加速度 A 运动. 假定球无滑动滚动，求球的质心相对于卡车的加速度.

解　取卡车为参考系，需考虑惯性力，若卡车对静参考系(惯性系)的加速度向左，则球受到的惯性力为 MA，作用于球心，方向向右. 取固连于卡车的 x 轴沿球运动的方向，惯性力的方向为正. 取 φ 表示球绕球心的角位移，顺时针方向为正，如图 7.73 所示，设卡车作用于球的静摩擦力 f 向左，

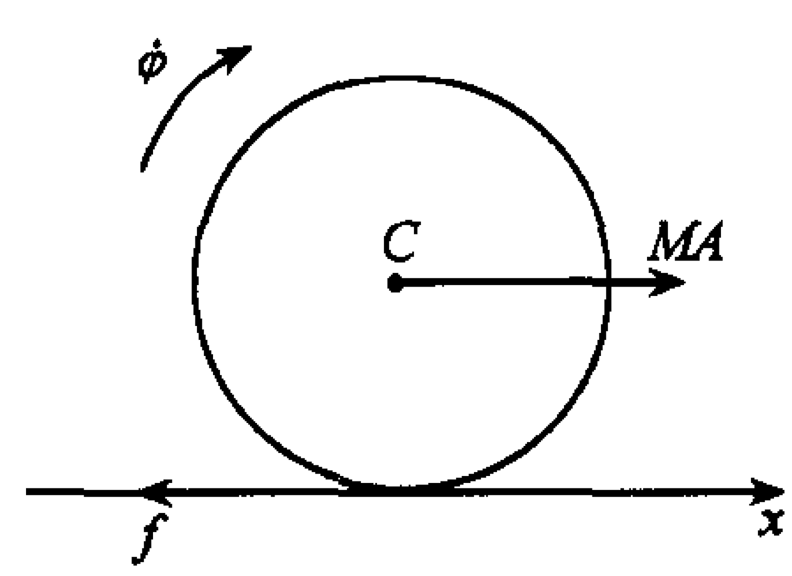


图 7.73

$$M\ddot{x}_C = MA - f$$

$$\frac{2}{5}MR^2\ddot{\varphi} = fR$$

$$\dot{x}_C - R\dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{x}_C - R\ddot{\varphi} = 0$$

可解出

$$\ddot{x}_C = \frac{5}{7}A$$

球的质心相对于卡车的加速度为 $\frac{5}{7}A$，方向与卡车的加速度方向相反.

7.4.15　半径为 r 的均质球做无滑滚动，要始终保持与环的轨道接触，最小的高于圆环顶端的高度 h 多大？(参看图 7.74)

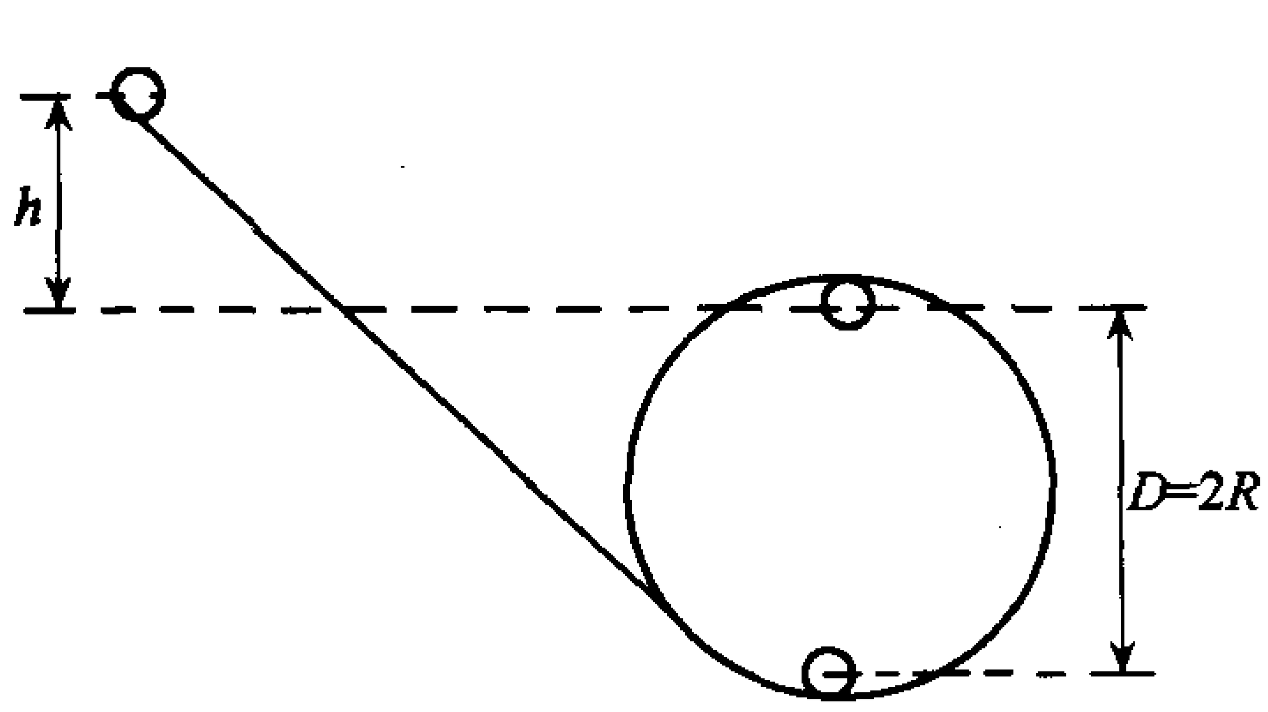


图 7.74

解　球做纯滚动，要刚能始终保持与环的轨道接触，必须当球运动到环的顶端时球对圆环的压力等于零. 也就是说在这个位置，球不受圆环的作用力. 在此处对球用质心运动定理，设球的质量为 m，

$$m\frac{v^2}{R} = mg$$

其中 v 为球的质心的速率,质心的加速度为$\frac{v^2}{R}$,

$$v^2 = Rg$$

在此处,球的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}mr^2\omega^2$$

其中 ω 是球在其质心平动参考系中围绕质心的转动角速度,由于球做纯滚动,与轨道的接触点速度为零.

$$v - r\omega = 0.$$

所以
$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2 = \frac{7}{10}mgR$$

该动能是由比它的位置高 h 处的球的势能(在那里球自静止开始运动,动能为零)转化而得的,由机械能守恒,

$$mgh = T = \frac{7}{10}mgR$$

所以
$$h = \frac{7}{10}R$$

7.4.16　一个半径为 b 的球,在 $\theta=0$ 处静止在另一个半径为 $a(>b)$的固定不动的球上.在重力作用下上面的球因微扰而滚动(参看图 7.75),静摩擦因数 $\mu_s>0$,滑动摩擦因数 $\mu_d=0$.

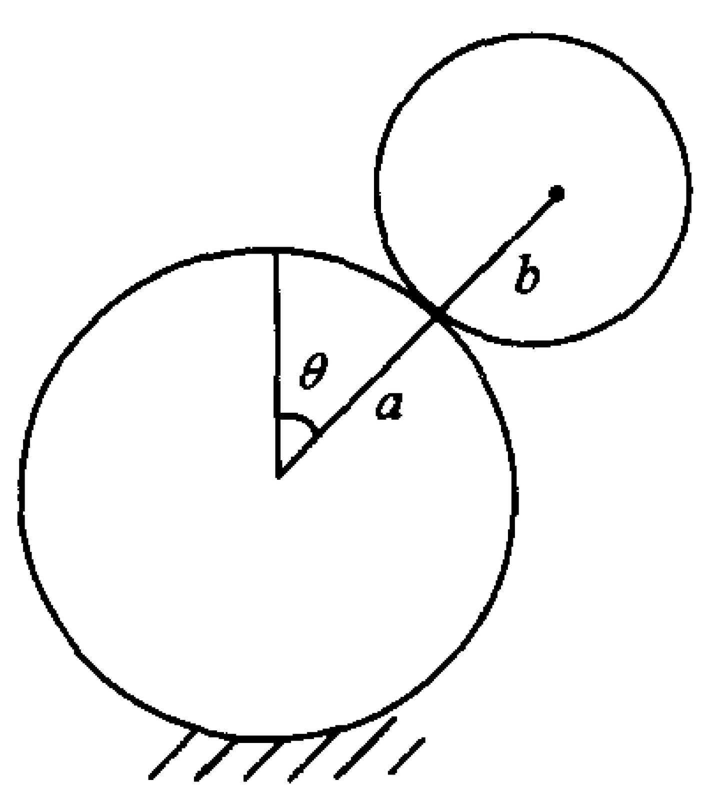


图 7.75

(1) 简单地描述球做滚动、滑动和分离的先后次序,并作解释;

(2) 写出上面的球在下面的球上做纯滚动的约束方程;

(3) 用$\ddot{\theta}$ 和 θ 写出球做纯滚动时的运动微分方程;

(4) 求有关$\ddot{\theta}$ 和 θ 满足的方程;

(5) 假定 $0<\theta(0)\ll\theta(t)$,解出 $\theta(t)$.

提示:可能用到如下的积分:$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}} = 2\ln\tan\frac{x}{4}$.

解　(1) 开始先做纯滚动,以后做有滑动的滚动,最后与下面的球脱离接触.解释如下:

由于静摩擦力不做功,因滑动摩擦因数 $\mu_d=0$,滑动摩擦力不存在,在整个运动过程中机械能守恒,小球的动能由于势能的减小而增大,质心速度也是随 θ 的增大而增大的.

开始 θ 较小时,质心速率 v 较小.质心运动定理的法向方程,因法向加速度较小,重力的法向分量较大,故支持力 N 较大.由对瞬轴的角动量定理,随着 θ 的增大,重力对瞬轴的力矩由小变大,故 $\ddot{\varphi}$ 由小变大,$\dot{\varphi}$也由小变大.再用质心平动参考系对质心的角动量定理,重力和支持力均通过质心,对质心的力矩为零,要有同样的 $\ddot{\varphi}$、$\dot{\varphi}$,静摩擦力 f 必须有图

示的方向，且随着 θ 的增大，也要求 f 随之增大. 另一方面，N 随 θ 的增大而减小. 因此能提供的最大静摩擦力 $\mu_s N$ 随 θ 增大而减小，开始 θ 较小时，纯滚动要求的静摩擦力 f 较小，而能提供的最大静摩擦力 $\mu_s N$ 较大，$f<\mu_s N$ 能满足. 故为纯滚动；到 θ 达到一定值时，纯滚动需要的 f 和能提供的 $\mu_s N$ 有 $f=\mu_s N$ 时达到临界状态，θ 再大时，就要出现滑动，摩擦力变为零，因为小球已有 $\dot{\varphi}(>0)$，不可能是纯滑动，而是保持临界状态时的 $\dot{\varphi}$ 值做有滑动的滚动. θ 继续增大，v 也继续增大，所需的法向力继续增大，而重力的法向分量是减小的，支持力必定是继续减小，当减小到 $N=0$，不能再变成 $N<0$，小球就开始脱离大球. 因为 $f=\mu_s N$ 的临界状态时，$N\neq 0$ 因此必将经历一个有滑动的滚动的阶段.

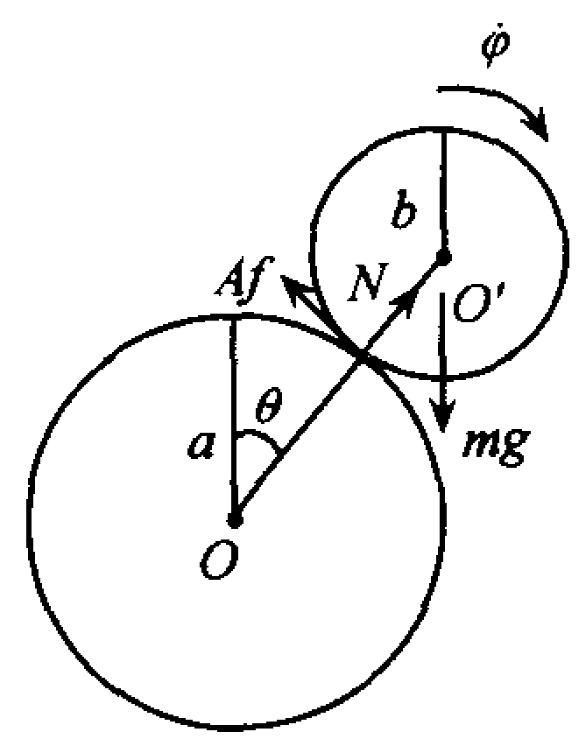


图 7.76

再补充说明两点：i) 刚体的角速度与基点的选择无关，因而其角加速度也和基点的选择无关，质心和瞬心都是刚体上的点，都可选作基点；ii) 对于本题所给的刚体，对瞬轴的角动量定理和质心平动参考系中对通过质心的轴的角动量定理有同样的形式. 虽然涉及的转动惯量不同，同一时刻两个力矩也不同，但随 θ 的增大，变化的趋势是一致的，都随 θ 增大而增大.

(2) 纯滚动条件为

$$(a+b)\dot{\theta}-b\dot{\varphi}=0$$

$t=0$ 时，$\theta=0$，选 φ 的零点，也有 $t=0$ 时，$\varphi=0$，则上式也可写成

$$(a+b)\theta-b\varphi=0$$

(3)

$$m(a+b)\ddot{\theta}=mg\sin\theta-f$$

$$\frac{2}{5}mb^2\ddot{\varphi}=fb$$

其中 m 为小球的质量. 加上纯滚动条件得

$$(a+b)\ddot{\theta}-b\ddot{\varphi}=0$$

可得

$$\ddot{\theta}=\frac{5}{7}\frac{g}{a+b}\sin\theta$$

(4)

$$\ddot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}$$

代入(3)问得到的式子，可得

$$\mathrm{d}\dot{\theta}^2=\frac{10}{7}\frac{g}{a+b}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

两边积分，用初始条件：$t=0$ 时，$\theta=0$，$\dot{\theta}=0$，得

$$\dot{\theta}^2=\frac{10}{7}\frac{g}{a+b}(1-\cos\theta)$$

这是在做纯滚动期间 $\dot{\theta}$ 和 θ 的关系、由于未给 μ_s 值，不能算出结束纯滚动的 θ 值，也就不讨论在做有滑滚动期间 $\dot{\theta}$ 和 θ 的关系了.

(5)
$$\dot{\theta}=\left[\frac{10}{7}\frac{g}{a+b}(1-\cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{20}{7}\frac{g}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\int_{\theta(0)}^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\int_{0}^{t}\left[\frac{20}{7}\frac{g}{a+b}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$2\ln\frac{\tan\frac{\theta}{4}}{\tan\frac{\theta(0)}{4}}=\left[\frac{20}{7}\frac{g}{a+b}\right]^{\frac{1}{2}}t$$

$$\theta(t)=4\arctan\left[\tan\frac{\theta(0)}{4}\mathrm{e}^{\alpha t}\right]$$

其中 $\alpha=\left(\frac{5}{7}\frac{g}{a+b}\right)^{1/2}$.

这个 $\theta(t)$ 也只适用于做纯滚动期间.

7.4.17 一质量为 m、半径为 a 的均质球在一半径为 $b(>a)$ 的固定圆柱体的顶端从静止状态开始无滑动地滚下.求:

(1) 此球脱离圆柱体的角度 $\theta_{\max}$;

(2) 当球脱离圆柱体的瞬间,球心的速度.

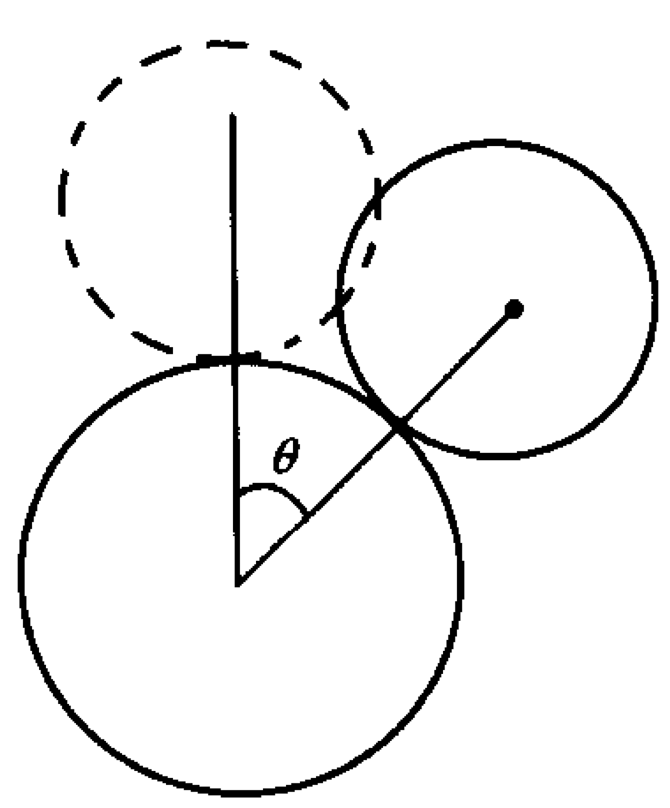


图 7.77

解 根据题意,球在脱离圆柱体前没有经过上题所述的有滑动地滚动阶段,说明静摩擦因数 μ_s 足够大,在支持力 N 不等于零时,最大静摩擦力 $\mu_s N$ 总大于维持纯滚动所需的静摩擦力.

(1) 可用上题得到的结果,在做纯滚动期间,

$$\dot{\theta}^2=\frac{10}{7}\frac{g}{a+b}(1-\cos\theta) \tag{1}$$

再列出质心运动定理的法向分量方程

$$m(a+b)\dot{\theta}^2=mg\cos\theta-N$$

脱离圆柱体时,$N=0$.代入上式,可得脱离时的 $\dot{\theta}^2$ 为

$$\dot{\theta}^2=\frac{g}{a+b}\cos\theta_{\max} \tag{2}$$

在 $\theta=\theta_{\max}$ 时用式(1),得到的 $\dot{\theta}^2$ 应与式(2)相等,

$$\frac{10}{7}(1-\cos\theta_{\max})=\cos\theta_{\max}$$

$$\cos\theta_{\max}=\frac{10}{17},\quad \theta_{\max}=\arccos\frac{10}{17}$$

(2) 在分离瞬间,球心的速度其大小为

$$(a+b)\dot{\theta}\big|_{\theta=\theta_{\max}}=\sqrt{\frac{10}{17}(a+b)g}$$

其方向与水平线的夹角为 $\theta_{\max}$ 即 $\arccos\frac{10}{17}$.

7.4.18　一个质量为 m、半径为 r 的均质小球在一个半径为 R 不动的大球的项部从静止开始运动，假定摩擦因数为 μ，在何处小球开始出现滑动？

解　用 7.4.16 题的 θ、φ 分别表示小球质心的位置和在其质心平动参考系中小球绕质心的转角. 在小球做纯滚动期间

$$m(R+r)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - f \tag{1}$$

$$m(R+r)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N \tag{2}$$

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} = fr \tag{3}$$

$$(R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0 \tag{4}$$

用式(4)、式(3)可改写为

$$\frac{2}{5}m(R+r)\ddot{\theta} = f \tag{5}$$

由式(1)、(5)解出

$$\ddot{\theta} = \frac{5}{7}\frac{g}{R+r}\sin\theta \tag{6}$$

$$f = \frac{2}{7}mg\sin\theta \tag{7}$$

用　$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}$. 式(6)可改写为

$$\mathrm{d}\dot{\theta}^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{R+r}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

两边积分，用 $\theta=0$ 时 $\dot{\theta}=0$，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{R+r}(1-\cos\theta) \tag{8}$$

由式(2)、(8)得

$$N = mg\cos\theta - m(R+r)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{7}mg(17\cos\theta - 10)$$

在 $\theta=\theta_C$ 时，小球开始做有滑动地滚动，此时

$$f = \mu N$$

即

$$\frac{2}{7}mg\sin\theta_C = \frac{1}{7}\mu mg(17\cos\theta_C - 10)$$

$$2\sin\theta_C = 17\mu\cos\theta_C - 10\mu$$

$$4\sin^2\theta_C = 289\mu^2\cos^2\theta_C + 100\mu^2 - 340\mu\cos\theta_C$$

$$(289\mu^2+4)\cos^2\theta_C - 340\mu\cos\theta_C + (100\mu^2 - 4) = 0$$

$$\cos\theta_C = \frac{340\mu + \sqrt{(-340\mu\cos\theta_C)^2 - 4(289\mu^2+4)(100\mu^2-4)}}{2(289\mu^2+4)}$$

$$= \frac{170\mu + \sqrt{756\mu^2+16}}{289\mu^2+4}$$

$$\theta_C = \arccos\left(\frac{170\mu + \sqrt{756\mu^2 + 16}}{289\mu^2 + 4}\right)$$

舍去了另一较大的根,因为取 θ_C的较小的解时已达到纯滚动和有滑动地滚动的临界状态,θ_C的较大的解不可能又成为临界状态.

7.4.19 一半径为 r 的均质小球,沿一半径为 $R+r$ 的竖直的固定的圆环内侧运动.考虑两种情况:i) 纯滚动;ii) 无摩擦的纯滑动.求:

(1) 在每一种情况下,为使小球达环顶部而不致落下,在环底部时须具有的最小质心速度 v_1.

(2) 在纯滑动情况下,若在环底部时质心速度比 v_1 小 10%,小球在何处开始落下?

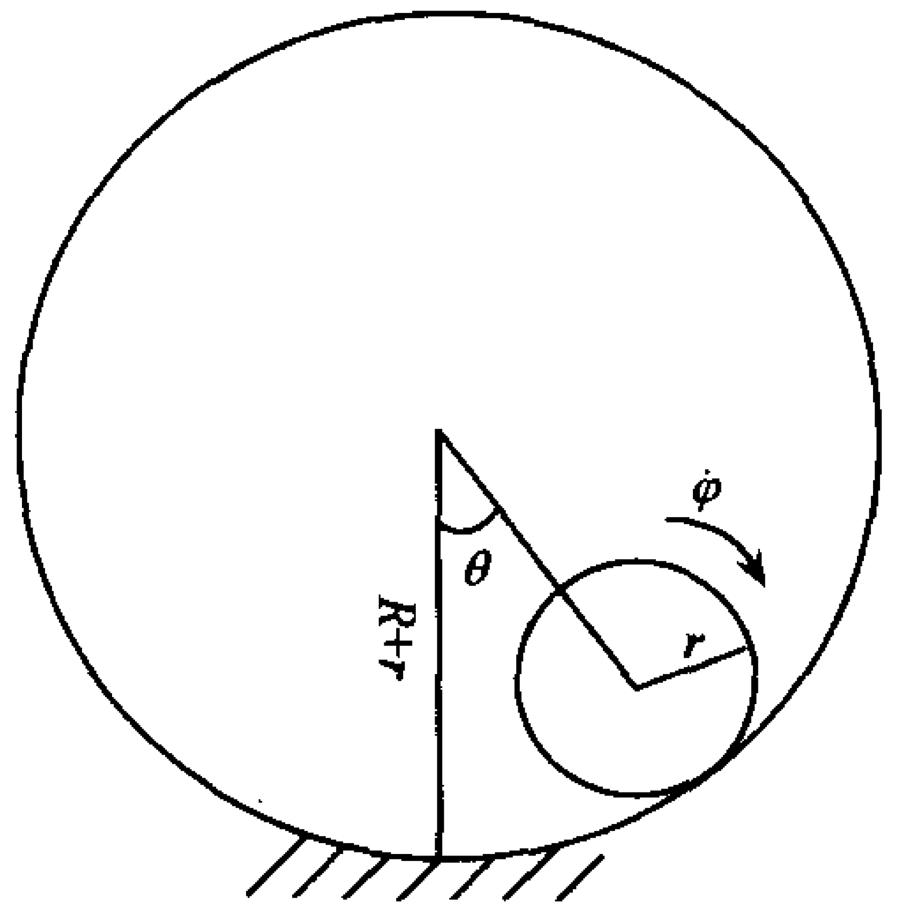


图 7.78

解 (1) 取 θ 表示小球质心的位置,φ 表示在其质心平动参考系中小球围绕质心的转角,它们的正方向如图 7.78 所示.

i) 纯滚动情况.

因静摩擦力不做功,小球运动时机械能守恒.

设小球质量为 m,小球的动能.

$$T = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\dot{\varphi}^2$$

纯滚动的约束条件为 $\qquad R\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0$

$$T = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{5}m(R\dot{\theta})^2 = \frac{7}{10}m(R\dot{\theta})^2$$

机械能守恒,写出在底部和顶端机械能相等,

$$\frac{7}{10}m(R\dot{\theta})^2|_{\theta=0} = \frac{7}{10}m(R\dot{\theta})^2|_{\theta=\pi} + mg\cdot 2R$$

由质心运动定理,在 $\theta=\pi$ 处,

$$mR\dot{\theta}^2|_{\theta=\pi} = mg + N$$

其中 N 是圆环对小球的作用力,要能通过顶端不落下必须 $N\geqslant 0$,刚能不落下要求 $N=0$.

此时 $\qquad (R\dot{\theta})^2|_{\theta=\pi} = gR. \qquad (R\dot{\theta})|_{\theta=0} = v_1$

$$\frac{7}{10}mv_1^2 = \frac{7}{10}mgR + 2mgR$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{27}{7}gR}$$

ii) 纯滑动的情况.

小球的动能 $\qquad T = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$

小球在底部和顶端机械能相等,

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2|_{\theta=0} = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2|_{\theta=\pi} + mg\cdot 2R$$

用质心运动定理和纯滚动情况没有差别,刚能通过顶端不落下要求

$$(R\dot{\theta})^2|_{\theta=\pi}=gR$$

所以
$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mgR+2mgR$$

$$v_1=\sqrt{5gR}.$$

(2) 设 $\theta=\theta_{max}$ 为做纯滑动的小球沿圆环运动所能达到的位置，

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2|_{\theta=0}=\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2|_{\theta=\theta_{max}}+mgR(1-\cos\theta_{max})$$

在 $\theta=\theta_{max}$ 处，$N=0$，由质心运动定理

$$mR\dot{\theta}^2|_{\theta=\theta_{max}}=mg\cos(\pi-\theta_{max})=-mg\cos\theta_{max}$$

$$(R\dot{\theta})^2|_{\theta=0}=(0.9v_1)^2=0.81\times 5gR$$

所以
$$\frac{1}{2}m\times 0.81\times 5gR=\frac{1}{2}m(-gR\cos\theta_{max})+mgR(1-\cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max}=\frac{1}{3}\times(2-4.05)=-0.6833$$

$$\theta_{max}=\text{arc}\cos(-0.6833)=133°$$

7.4.20　一块长 $2a$ 的均质薄平板一端靠在光滑的竖直墙壁上，另一端放在光滑的地板上，与地板的夹角为 θ_0，如图 7.79 所示. 当松开平板后，平板在重力作用下下滑. 求：

(1) 平板脱离墙壁前到达 θ 时的时间 $t(\theta)$（可表为积分形式）；

(2) 平板脱离墙壁的 θ 值.

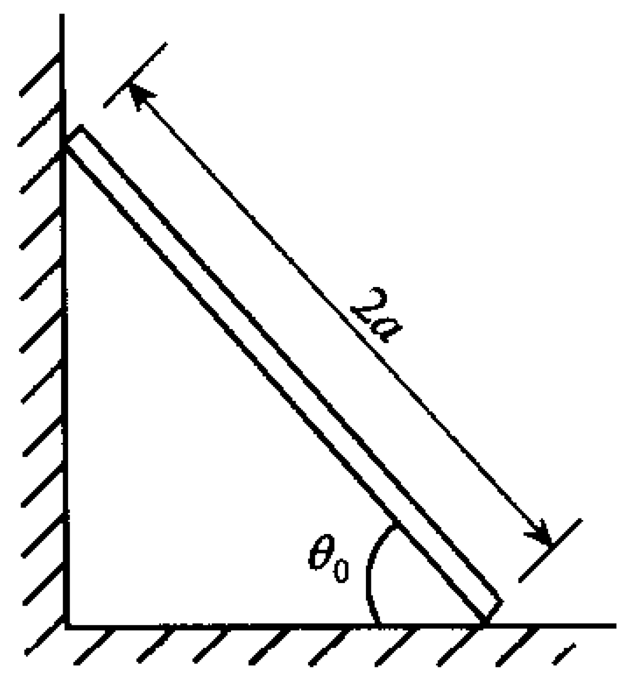


图 7.79

解　(1) 由机械能守恒，设平板质量为 m，

$$\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2a)^2\dot{\theta}^2+mga\sin\theta=mga\sin\theta_0$$

$$\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2=mga(\sin\theta_0-\sin\theta)$$

$$\dot{\theta}=-\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\theta_0-\sin\theta)}$$

$$t=-\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\theta_0-\sin\theta)}}$$

(2) 取 x 坐标沿水平方向，墙位于 $x=0$ 处，

$$m\ddot{x}_C=N$$

其中 N 为墙对平板的作用力. 平板脱离墙壁时 $N=0$，故

$$\ddot{x}_C=0$$

$$x_C=a\cos\theta,$$

$$\ddot{x}_C=-a\sin\theta\,\ddot{\theta}-a\dot{\theta}^2\cos\theta=0. \tag{1}$$

前面已求得
$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2a}(\sin\theta_0-\sin\theta), \tag{2}$$

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=-\frac{3g}{2a}\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{4a}\cos\theta \tag{3}$$

将式(2)、(3)代入式(1),得平板脱离墙壁时 θ 满足的关系

$$3\sin\theta=2\sin\theta_0$$

所以

$$\theta=\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right).$$

7.4.21 一质量为 m 的均质细杆下端置于光滑的桌面上,从与铅垂线成 θ_0 角静止释放,求释放后的瞬间桌子对杆的作用力.

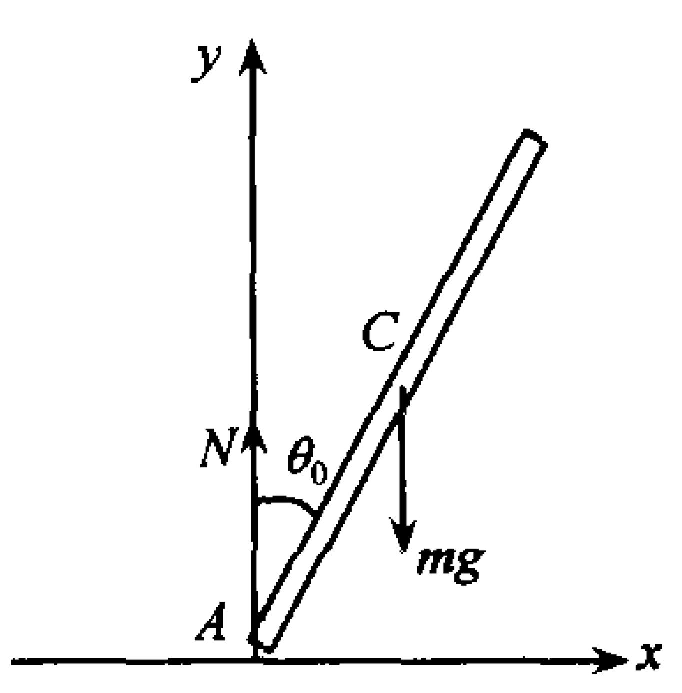


图 7.80

解 取图 7.80 所示的 x、y 坐标,原点与杆释放时的下端 A 点重合.设杆长为 l.

在释放杆的瞬间列质心运动定理和在质心平动参考系中对质心的角动量定理的方程.

$$m\ddot{y}_C|_{\theta=\theta_0}=N-mg \tag{1}$$

$$\frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}|_{\theta=\theta_0}=N\cdot\frac{l}{2}\sin\theta_0 \tag{2}$$

杆的下端 A 在一段时间内不能脱离地面,在一段时间内有 $\dot{y}_A=0$,故在释放的瞬时有

$$\ddot{y}_A=0$$

在一段时间内

$$\dot{y}_A=\dot{y}_C+\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\ddot{y}_A=\ddot{y}_C+\frac{1}{2}l\ddot{\theta}\sin\theta+\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\cos\theta$$

在 $\theta=\theta_0$ 时,$\dot{\theta}=0$,故

$$\ddot{y}_A|_{\theta=\theta_0}=\ddot{y}_C|_{\theta=\theta_0}+\frac{1}{2}l\ddot{\theta}|_{\theta=\theta_0}\sin\theta_0=0 \tag{3}$$

用式(1)、(2)消去式(3)中的 $\ddot{y}_C|_{\theta=\theta_0}$ 和 $\ddot{\theta}|_{\theta=\theta_0}$,

$$\frac{N}{m}-g+\frac{1}{2}l\left(\frac{6N}{ml}\sin\theta_0\right)\sin\theta_0=0$$

$$N=\frac{mg}{1+3\sin^2\theta_0}$$

7.4.22 质量为 m、半径为 r 的均质圆柱置于粗糙的斜面上,斜面倾角 $\alpha=30°$、质量为 m,置于粗糙的水平面上.圆柱与斜面间、斜面与水平面间的摩擦因数均为 $\mu=0.1$.开始圆柱与斜面均从静止状态开始运动.求圆

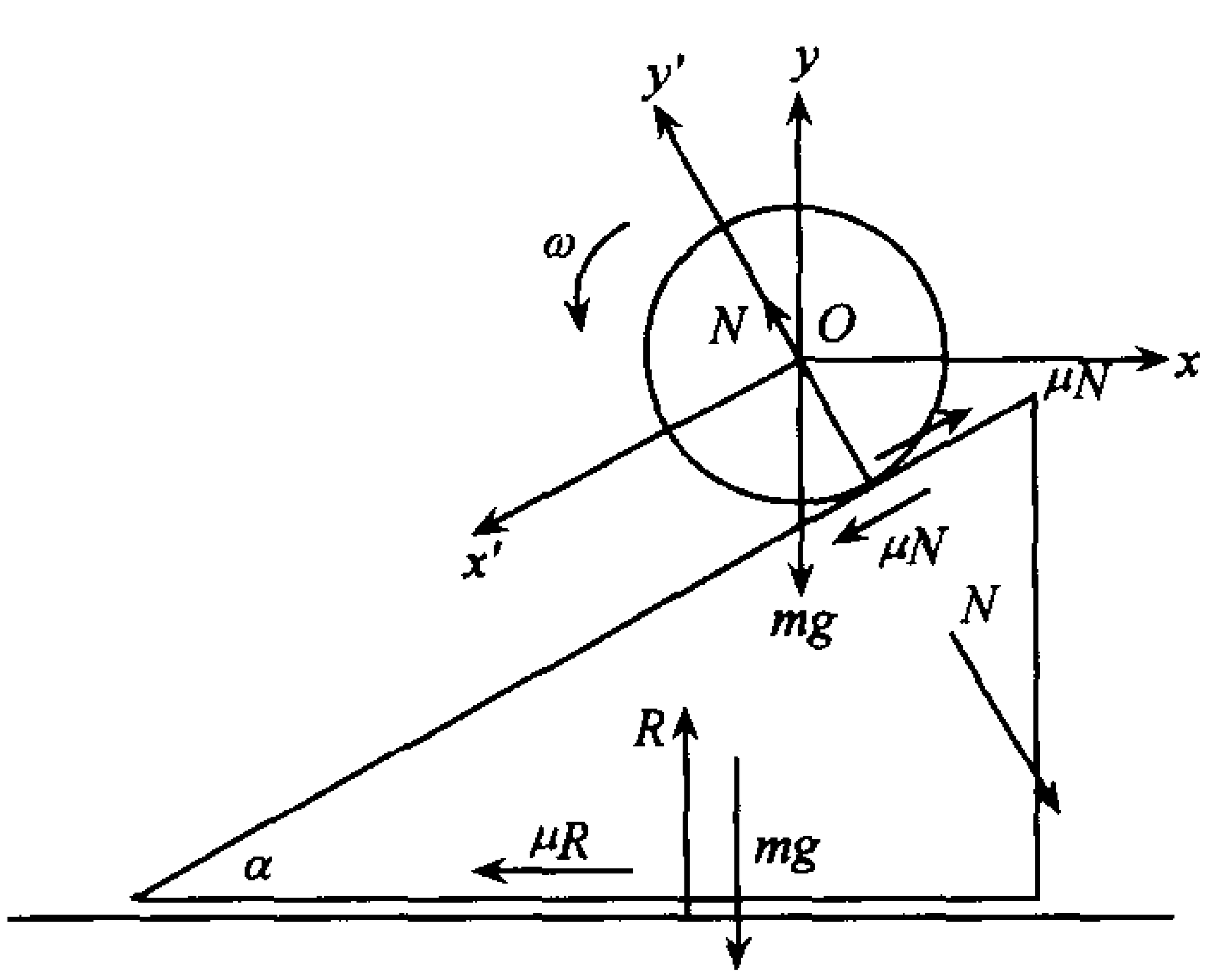


图 7.81

柱质心的运动学方程以及圆柱的角速度.

解　取图 7.81 所示的两组坐标系：$Oxyz$ 为静系，$O'x'y'z'$ 为固连于斜面的动系，图中画出了 $t=0$ 两坐标系的原点重合于圆柱的对称轴上的情况，图中还画出了圆柱和斜面所受的力. μN 是圆柱与斜面间的滑动摩擦力(暂设接触点处有相对运动，是否如此，得出结果后再作判断).

对斜面用静参考系，

$$m\ddot{x} = N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha - \mu R \tag{1}$$

$$0 = m\ddot{y} = R - mg - N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha \tag{2}$$

对圆柱在斜面参考系中用质心运动定理和在其质心平动参考系中用对质心的角动量定理，

$$m\ddot{x}'_C = mg\sin\alpha - \mu N + m\ddot{x}\cos\alpha \tag{3}$$

$$o = m\ddot{y}'_C = N - mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\omega} = \mu Nr. \tag{5}$$

其中 $m\ddot{x}\cos\alpha$、$m\ddot{x}\sin\alpha$ 是由于采用斜面参考系这个非惯性系引入的惯性力.

由式(1)、(2)消去 R 得

$$m\ddot{x} = -\mu mg + N(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu N\cos\alpha \tag{6}$$

从式(4)、(6)中消去 N，解出

$$\ddot{x} = \frac{[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]g\cos\alpha - \mu g}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha} \tag{7}$$

将式(7)代入式(4)得

$$N = \frac{mg(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha} \tag{8}$$

将式(8)代入式(5)，用初始条件 $t=0,\omega=0$，积分得圆柱的角速度

$$\omega = \frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}\cdot\frac{2\mu g}{r}t$$

将式(7)、(8)代入式(3)，得

$$\ddot{x}'_C = \frac{2[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}g$$

用初始条件 $t=0,\dot{x}'_C=0,x'_C=0$，对上式作两次积分，得

$$\dot{x}'_C = \frac{2[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}gt$$

$$x'_C = \frac{(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}gt^2$$

对式(7)积分，用初始条件 $t=0$ 时 $\dot{x}'_O=0,x'_O=0$，

$$\dot{x}_{O'} = \frac{[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\cos\alpha - \mu}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}gt$$

$$x_{O'} = \frac{[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\cos\alpha - \mu}{1+[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}gt^2$$

圆柱质心的运动学方程为

$$x_C = x'_O - x'_C\cos\alpha$$
$$= -\frac{[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\cos\alpha + \mu}{1 + [(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}gt^2$$
$$y_C = -x'_C\sin\alpha$$
$$= -\frac{[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}{1 + [(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}gt^2$$

必须对前面所作的假设(圆柱与斜面的两接触点间有相对运动)进行检验.为此,计算一下圆柱上与斜面接触的点 A 相对于斜面的速度$\dot{x}'_A$.

$$\dot{x}'_A = \dot{x}'_C - \omega r = \frac{2[(1-2\mu^2)\sin\alpha - 3\mu\cos\alpha]gt}{1 + [(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha]\sin\alpha}$$

将 $\mu=0.1, \alpha=30°$代入,在 $t>0$ 时,$\dot{x}'_A>0$.说明以上得到的结果是有效的.

7.4.23　一个质量为 m、半径为 r 的均质实心圆柱体沿着一个楔的倾斜表面向下运动,楔的质量为 M,它可以沿一个光滑的水平面自由运动.

(1) 如圆柱体与楔之间无摩擦,圆柱体自静止开始下滑,下降高度 h 时,楔运动了多大距离?

(2) 如圆柱体与楔之间有摩擦力,圆柱体自静止开始纯滚动,下降高度 h 时,楔运动了多大距离?

(3) 比较两种情况,圆柱体到达楔底时哪种情况更快些?与圆柱的半径有无关系?

解　(1) 对于圆柱和楔这个系统,在水平方向未受任何外力,动量的水平分量守恒.

设圆柱体质心相对于楔的下滑速度为 v,楔对静参考系的向右速度为 V,则

$$m(V - v\cos\theta) + MV = 0$$

其中 θ 是楔的倾角,

$$V = \frac{m}{m+M}v\cos\theta$$

圆柱体沿楔下滑距离为 l 时,圆柱体下降的高度为

$$h = l\sin\theta, \qquad l = h\csc\theta$$

设圆柱体下降高度 h 经历的时间为 t_1,则

$$\int_0^{t_1} v\mathrm{d}t = l = h\csc\theta$$

在 $t=0\sim t_1$ 期间,楔向右运动的距离为 s,

$$s = \int_0^{t_1} V\mathrm{d}t = \int_0^{t_1}\frac{m}{m+M}v\cos\theta\mathrm{d}t$$
$$= \frac{m}{m+M}\cos\theta\cdot h\csc\theta = \frac{mh}{m+M}\cot\theta$$

(2) 上面在导出 s 的式子时所用的质点系,在水平方向动量守恒得到的 V 与 v 的关系,及以后的关于 l 和 s 的计算对于圆柱体做纯滑动还是做纯滚动或做有滑动的滚动都毫无关系,差别仅在于圆柱体下降高度 h 所用的时间 t_1 不同.但经过不同的 t_1 后结果是一样的.故仍有

$$s = \frac{mh}{m+M}\cot\theta$$

(3) 先讨论纯滑动情况. 用(1)问中采用过的符号. 以楔为参考系,圆柱体的运动微分方程为

$$m\ddot{l} = mg\sin\theta + m\ddot{s}\cos\theta$$

$$0 = N - mg\cos\theta + m\ddot{s}\sin\theta$$

楔取静参考系,运动微分方程为

$$M\ddot{s} = N\sin\theta$$

由后两式消去 N,可解出

$$\ddot{s} = \frac{1}{M + m\sin^2\theta}mg\sin\theta\cos\theta$$

积分上式,用初始条件 $t=0$ 时,$s=0$,$\dot{s}=0$,

$$s = \frac{m}{2(M + m\sin^2\theta)}\sin\theta\cos\theta \cdot gt^2$$

将 $t=t_1^{(1)}$ 时 $s=\frac{mh}{m+M}\cot\theta$ 代入上式,得

$$t_1^{(1)} = \sqrt{\frac{2(M + m\sin^2\theta)h}{(m + M)g\sin^2\theta}}$$

再讨论纯滚动情况. 运动微分方程为

$$m\ddot{l} = mg\sin\theta + m\ddot{s}\cos\theta - f$$

$$0 = N - mg\cos\theta + m\ddot{s}\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{\ddot{l}}{r} = fr \qquad \text{(考虑了纯滚动约束)}$$

$$M\ddot{s} = N\sin\theta - f\cos\theta$$

其中 f 是静摩擦力,这里设对圆柱体的摩擦力是沿斜面向上的,可得

$$\ddot{s} = \frac{2m\sin\theta\cos\theta}{3M + m(1 + 2\sin^2\theta)}g$$

用初始条件 $t=0$,$s=0$,$\dot{s}=0$,积分上式得

$$s = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{3M + m(1 + 2\sin^2\theta)}gt^2$$

将 $t=t_1^{(2)}$ 时 $s=\frac{mh}{m+M}\cot\theta$ 代入上式,得

$$t_1^{(2)} = \sqrt{\frac{[3M + m(1 + 2\sin^2\theta)]h}{(m + M)g\sin^2\theta}}$$

$$3M + m(1 + 2\sin^2\theta) - 2(M + m\sin^2\theta) = M + m > 0$$

可见 $t_1^{(1)} < t_1^{(2)}$.

圆柱体从同一高度静止开始运动,第一种情况即纯滑动的情况比第二种纯滚动情况更快些. 这结论与圆柱半径无关.

这一结论也可以不作(3)问的定量计算而得到. 从(1)、(2)问的结果知,到达楔底时,圆柱的质心相对于楔的速度值,与楔对静系的速度值有一定的比例关系,两种情况圆柱下降同样高度时,系统获得的总动能是相同的,而圆柱体的动能除了平动动能以外还有转动动能. 因此纯滚动时,圆柱的质心相对于楔的速率和楔对静系的速率都比纯滑动时的小

(圆柱体下降同样高度时相比)这就说明了 $t_1^{(1)}<t_1^{(2)}$. 从这里也可以看出,只要 m、M、θ、h 相同,结论都一样,与 r 无关.

7.4.24 长为 $2a$ 的均质棒 AB,A 端连于固定的光滑铰链,棒自水平位置无初速地开始运动,当棒通过铅直位置时,铰链脱开.证明此后运动中棒的质心沿抛物线轨道运动,并求从脱开到质心再下降 h 高度时棒转过的圈数.

解 设棒的质量为 m,绕端点转动的转动惯量为

$$I=\frac{1}{3}m(2a)^2=\frac{4}{3}ma^2$$

从水平位置转到铅直位置时,由机械能守恒,可求出铰链刚脱落时的角速度和质心速度:

$$\frac{1}{2}I\omega^2=mga$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2mga}{I}}=\sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

$$v_C=a\omega=\sqrt{\frac{3}{2}ga}.\qquad \text{沿水平方向}$$

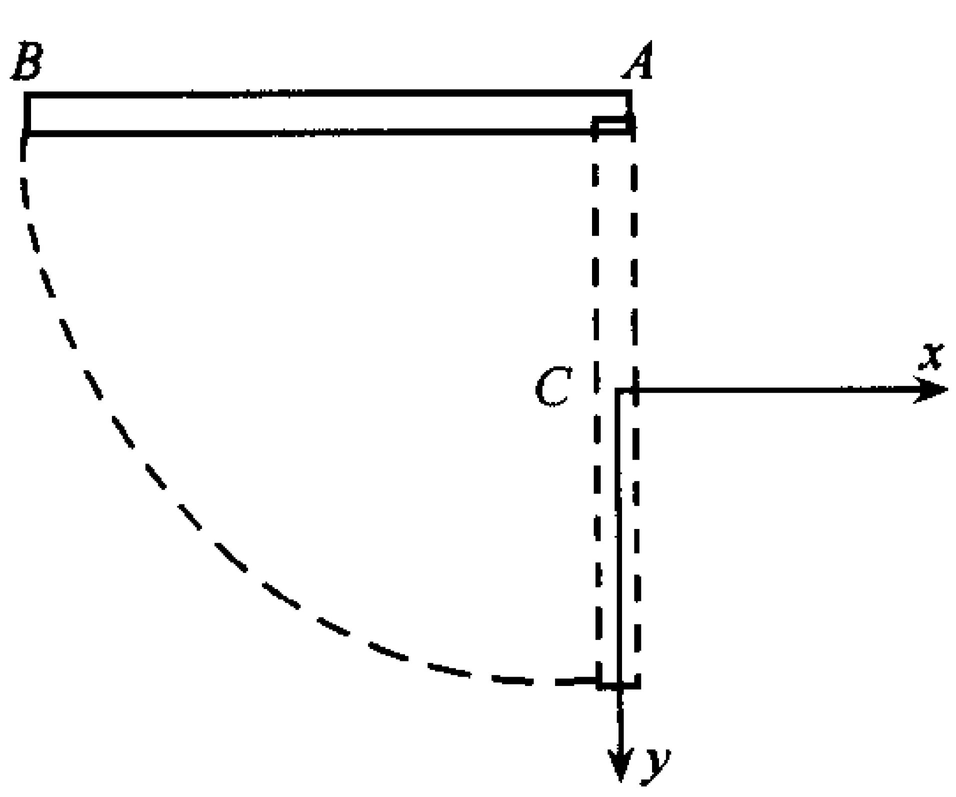


图 7.82

在铰链脱落后,棒只受到作用于质心的重力,由质心运动定理,质心将做抛物运动.证明如下:

取铰链脱落时质心 C 的位置为坐标系原点,x 轴沿质心速度方向,是水平的,y 轴竖直向下,如图 7.82 所示.脱落时取为 $t=0$,

$$m\ddot{x}_C=0,\qquad m\ddot{y}_C=mg$$

$t=0$ 时,　$x_C=0$,　$y_C=0$,　$\dot{x}_C=\sqrt{\frac{3}{2}ga}$,　$\dot{y}_C=0$

$$x_C=\sqrt{\frac{3}{2}ga}\,t,\quad y_C=\frac{1}{2}gt^2$$

消去 t,　$y_C=\frac{1}{2}g\dfrac{x_C^2}{\frac{3}{2}ga}=\frac{1}{3a}x_C^2$

因此铰链脱落,质心就开始做抛物线轨道运动.

在质心平动参考系中用对质心的角动量定理,因对质心的力矩为零.保持角速度 ω 不变,即脱落后棒的角速度保持脱落时的角速度.

质心从铰链脱落时的位置($y=0$)再下降 h 高度($y=h$),经历的时间为 $\Delta t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$.在此期间,棒转过的圈数 n 为

$$n=\frac{1}{2\pi}\omega\Delta t=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2a}}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3h}{a}}$$

7.4.25 重 W 的均质棒两端用两条平行的绳悬挂,棒在水平位置处于平衡(图

7.83). 如其中一条绳断了,求此瞬时另一绳子中的张力.

解　设棒长为 l,由质心运动定理,

$$\frac{W}{g}a_C = W - T$$

由质心平动参考系中对质心的角动量定理,

$$\frac{1}{12}\frac{W}{g}l^2\dot{\omega} = T\cdot\frac{l}{2}$$

两式均只适用于绳断的瞬时,此时 A 点(见图 7.83)的加速度为零,

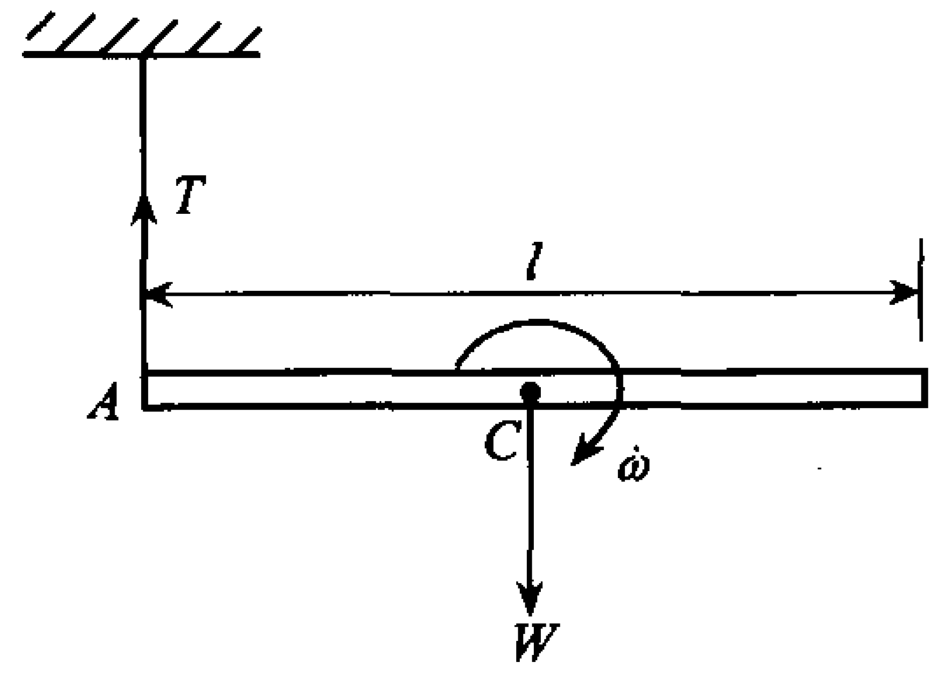


图 7.83

$$a_C = \frac{l}{2}\dot{\omega}$$

从三式中消去 a_C和$\dot{\omega}$,可解出 $T=\frac{1}{4}W$.

7.4.26　两根相同的均质棒 AB 和 BC,质量均为 m,B 点用光滑铰链连接,A 端被光滑铰链到一个固定点,棒限于在竖直平面内,A、C 原在同一水平线上,$\angle ABC=90°$. 求刚释放时两棒的初角加速之比.

解　设棒长为 l,取 x 轴与刚释放时的 BC 棒平行,y 轴与刚释放时的 AB 棒平行,如图 7.84 所示.

设 B 端铰链对 AB 棒的作用力 N_x、N_y 分别沿 x 轴、y 轴的正向,则 B 端铰链对 BC 棒的作用力 N_x、N_y 分别沿 x 轴、y 轴的负向,如图 7.85 所示.

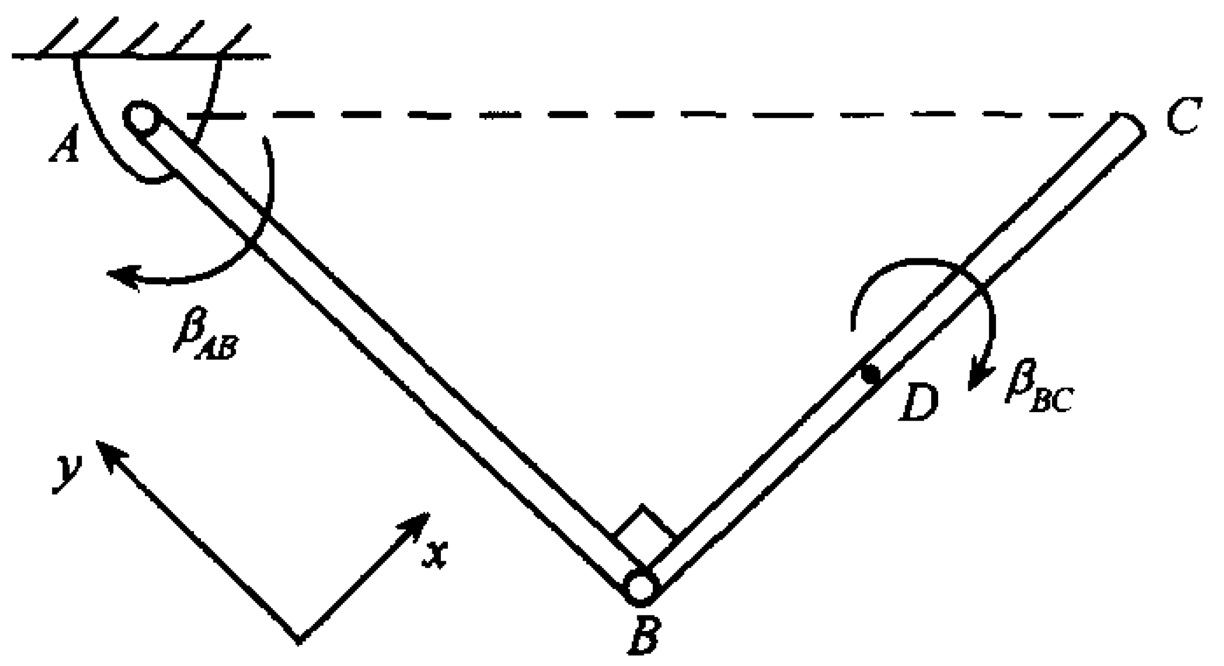


图 7.84

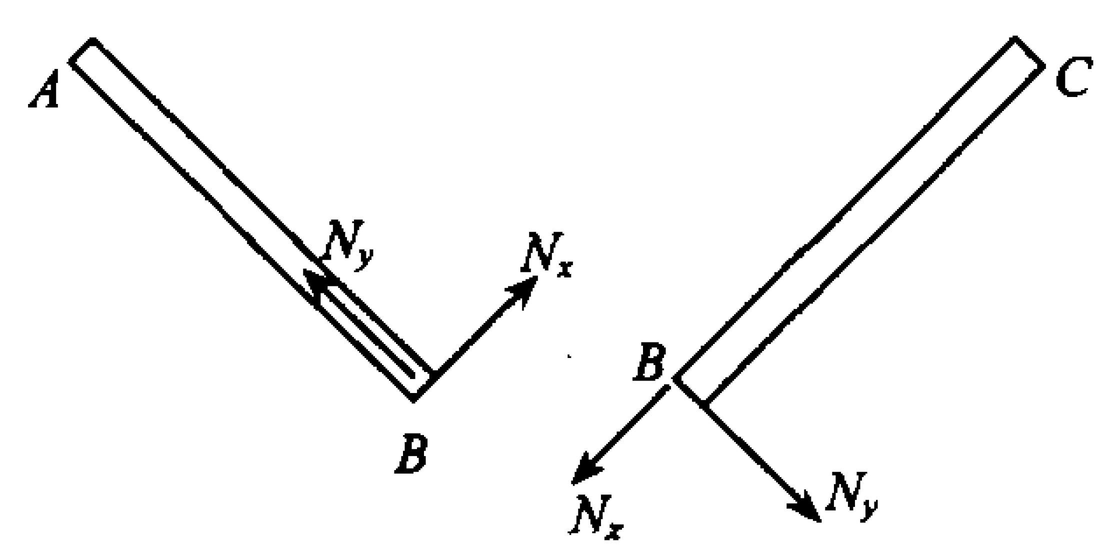


图 7.85

AB 棒做定轴转动,

$$\frac{1}{3}ml^2\beta_{AB} = mg\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - N_x l \tag{1}$$

BC 棒做平面平行运动. 设 D 为其质心.

$$m\ddot{x}_D = -N_x - mg\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

$$m\ddot{y}_D = -N_y - mg\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3}$$

$$\frac{1}{12}ml^2\beta_{BC} = -N_y\cdot\frac{l}{2} \tag{4}$$

以上方程均只适用于刚释放的瞬间，β_{AB}、β_{BC}的正向规定如图 7.84 所示.

考虑 B 点的加速度，可得到两个约束关系：

从 AB 棒考虑：　$\ddot{x}_B=-l\beta_{AB}$

$\ddot{y}_B=0$

从 BC 棒考虑：　$\ddot{x}_B=\ddot{x}_D$

$$\ddot{y}_B=\ddot{y}_D+\frac{l}{2}\beta_{BC}$$

得到的两个约束关系为

$$\ddot{x}_D=-l\beta_{AB} \tag{5}$$

$$\ddot{y}_D=-\frac{l}{2}\beta_{BC} \tag{6}$$

用式(5)、(6)，式(2)、(3)可改写为

$$-ml\beta_{AB}=-N_x-\frac{\sqrt{2}}{2}mg \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}ml\beta_{BC}=-N_y-\frac{\sqrt{2}}{2}mg \tag{8}$$

式(1)、(7)消去 N_x，可解出 β_{AB}，

$$\beta_{AB}=\frac{9\sqrt{2}}{16}\frac{g}{l}$$

式(4)、(8)消去 N_y，可解出 β_{BC}，

$$\beta_{BC}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{g}{l}$$

所以

$$\frac{\beta_{AB}}{\beta_{BC}}=\frac{3}{4}$$

7.4.27　一个质量为 m、半径为 a 的均质实圆柱体在一个固定的、粗糙的、内半径为 b、轴线水平的空圆柱体内部做无滑滚动. 若运动的圆柱体在最低位置的角速度为 Ω，证明：如 $\Omega\geqslant\left[\frac{11}{3}(b-a)g\right]^{1/2}\Big/a$，实圆柱体可通过最高位置绕空圆柱体做完全的转动，并求两圆柱体间的摩擦力.

解　圆柱体要能通过最高点做完全的转动，必须在最高位置时固定圆柱给予的力 $N\geqslant0$.

由质心运动定理，

$$\frac{mv_{c\min}^2}{b-a}=mg+N\geqslant mg \tag{1}$$

由机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv_{c\min}^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ma^2\omega_{\min}^2+mg\cdot2(b-a)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ma^2\Omega^2+\frac{1}{2}mv_{c\max}^2 \tag{2}$$

纯滚动条件，

$$v_{c\,\min} = a\omega_{\min}, \qquad v_{c\,\max} = a\Omega$$

式(2)可改写为

$$\frac{3}{4}mv_{c\,\min}^2 + 2m(b-a)g = \frac{3}{4}ma^2\Omega^2 \tag{3}$$

用式(1)消去式(3)中的 $v_{c\,\min}$，得

$$\frac{3}{4}a^2\Omega^2 \geqslant \frac{3}{4}(b-a)g + 2(b-a)g$$

$$\Omega \geqslant \left[\frac{11}{3}(b-a)g\right]^{1/2}\Big/ a$$

用 θ 表示两圆柱体的轴线构成的平面与铅垂线的夹角，圆柱体在最低位置时 $\theta=0$.

再列在任意 θ 均适用的机械能守恒关系，

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ma^2\omega^2 + mg(b-a)(1-\cos\theta) = \text{常量}$$

再用纯滚动条件 $v_c=a\omega$，

$$\frac{3}{4}mv_c^2 + mg(b-a)(1-\cos\theta) = \text{常量}$$

$$v_c = (b-a)\dot{\theta}$$

$$\frac{3}{4}(b-a)^2\dot{\theta}^2 + g(b-a)(1-\cos\theta) = \text{常量}$$

两边对 t 求导，约去不为零的相同因子 $\dot{\theta}$，得

$$\frac{3}{2}(b-a)^2\ddot{\theta} + (b-a)g\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(b-a)}\sin\theta$$

再用质心运动定理，

$$m\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta - f$$

其中 f 为固定圆柱对运动圆柱的摩擦力，规定沿 θ 减小的方向为正，

$$f = -m\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} - mg\sin\theta$$

$$= -m(b-a)\ddot{\theta} - mg\sin\theta = -\frac{1}{3}mg\sin\theta$$

可见，运动圆柱体受到的摩擦力其大小为 $\frac{1}{3}mg\sin\theta$，沿 θ 增大的方向.

也可用在质心平动参考系中对质心的角动量定理求摩擦力.

7.4.28　要使一个半径为 a 的乒乓球在获得一个向前的质心初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和一个初角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 后，由于水平桌面的摩擦力作用，最终乒乓球有与初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 方向相反的质心速度. 问 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}_0$ 应有什么样的关系.

解　由于摩擦力对乒乓球在桌面上的初接触点的力矩为零，因此在乒乓球在桌面的摩擦力作用下，从最初的向前做有滑动的滚动变为最终的向后纯滚动过程中对桌面上的这个固定点的角动量守恒.

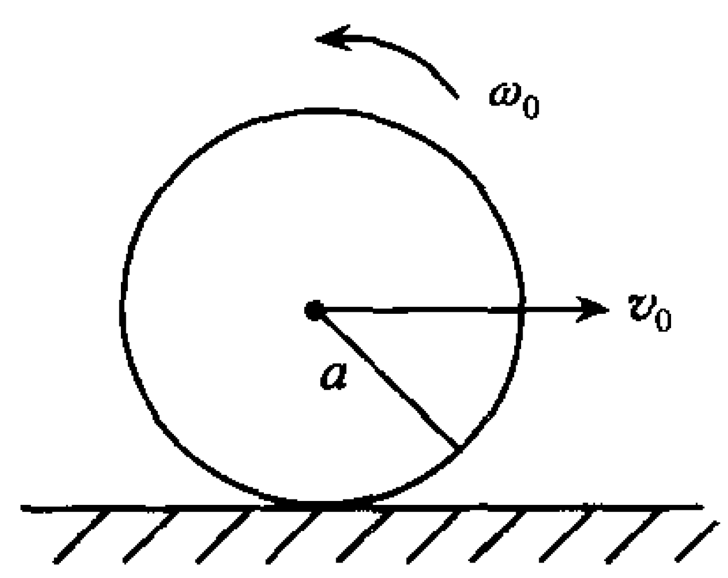


图 7.86

球的质心初速度 v_0 和初角速度如图 7.86 所示. 规定垂直纸面向上的角动量为正,要最终乒乓球做向左的纯滚动,须

$$-mv_0a+\frac{2}{5}ma^2\omega_0>0$$

$$a\omega_0>\frac{5}{2}v_0$$

$\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{\omega}_0$ 必须有图示的方向及上述的大小关系.

7.4.29　一个半径为 a、质量为 m 的均质圆环被投射到一个倾角为 α 的粗糙斜面上,开始有向下的质心速度 v 和一个使环沿斜面向上运动倾向的角速度,开始环的位置距斜面底部的高度 h 处,圆环保持在一个竖直平面内运动,如到达斜面底部时刚好处于静止,求:

(1) 圆环与斜面间的摩擦因数;

(2) 圆环的初始角速度.

解　(1) 图 7.87 画了 $t=0$ 时圆环在斜面上的位置,取图示的 x 坐标,沿斜面向下,原点位于 $t=0$ 时圆环与斜面的接触点,因此圆环到达斜面底部时,圆环质心的坐标也是圆环与斜面接触点的坐标,为 $x=h\csc\alpha$,图中 f 为滑动摩擦力,$f=\mu mg\cos\alpha$. 根据题意,圆环向下运动,设初角速度为 Ω,$v-a\Omega>0$,故摩擦力 f 有图示的向上方向. 环到达底部刚好静止,说明到底部时质心速度和角速度均为零. 在此之前圆环的运动都是有滑动的滚动,摩擦力始终有图示的方向,且 $f=\mu mg\cos\alpha$,$f>mg\sin\alpha$.

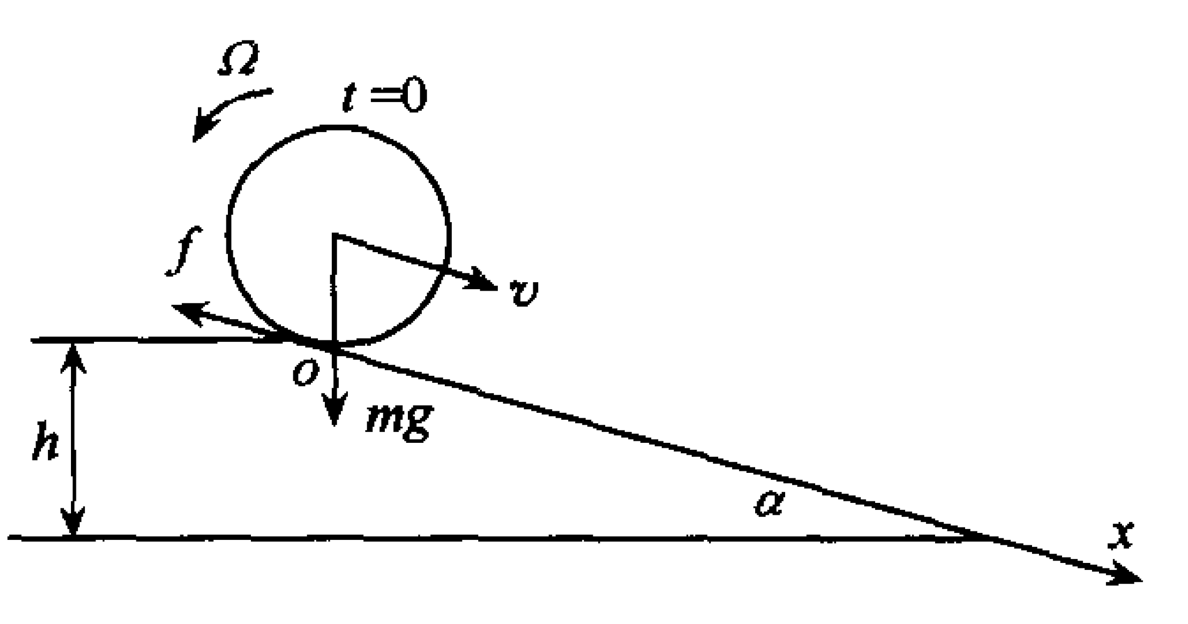


图 7.87

由质心运动定理

$$m\ddot{x}=mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha \tag{1}$$

用　$\ddot{x}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}$,上式可改写为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{x}^2=(g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha)\mathrm{d}x$$

两边积分,用初始条件 $t=0$ 时　$x=0$、$\dot{x}=v$,和到达底部时　$x=h\csc\alpha$、$\dot{x}=0$,

$$-\frac{1}{2}v^2=(g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha)h\csc\alpha$$

$$=gh-\mu gh\cot\alpha$$

所以

$$\mu=\frac{gh+\frac{1}{2}v^2}{gh\cot\alpha}=\left(1+\frac{v^2}{2gh}\right)\tan\alpha$$

(2) 设初角速度为 Ω,对圆环从开始运动到最后静止用动能定理,

$$0-\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}ma^2\Omega^2=mgh-\mu mg\cos\alpha\cdot h\csc\alpha$$

注意:上面写的式子是错误的,错在最后一项摩擦力做的功的计算:摩擦力作用的距离不

是 $h\csc\alpha$，那是质心运动的距离，不是摩擦力作用点移动的距离，$h\csc\alpha$ 应改为 $\int_0^{t_1}(\dot{x}+a\,\dot{\theta})\mathrm{d}t$，其中$\dot{\theta}$规定沿斜面向上转动的角速度为正，$\dot{x}+a\,\dot{\theta}$是圆环与斜面接触点的速度，$t_1$ 是到达斜面底部的时刻．用动能定理的式子应为

$$0-\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}ma^2\Omega^2=mgh-\mu mg\cos\alpha\int_0^{t_1}(\dot{x}+a\,\dot{\theta})\mathrm{d}t \tag{2}$$

式(2)中含有积分 $\int_0^{t_1}(\dot{x}+a\,\dot{\theta})\mathrm{d}t$，计算它需求出被积函数在 $0\sim t_1$ 期间与 t 的关系，并求出 t_1 值．为此作以下计算：

对式(1)积分，用初始条件 $t=0$ 时$\dot{x}=v$ 可得$\dot{x}(t)$，

$$\dot{x}=v+(g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha)t \tag{3}$$

$\because t=t_1$ 时$\dot{x}=0$，由式(3)可求出 t_1，

$$0=v+(g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha)t_1$$

$$t_1=\frac{v}{g(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{2h}{v\sin\alpha} \tag{4}$$

这里用了 $\mu=\left(1+\frac{v^2}{2gh}\right)\tan\alpha$.

在质心平动参考系中用对质心的角动量定理，

$$ma^2\,\ddot{\theta}=-(\mu mg\cos\alpha)a$$

积分上式，用初始条件：$t=0$ 时$\dot{\theta}=\Omega$，

$$\dot{\theta}=\Omega-\left(\frac{1}{a}\mu g\cos\alpha\right)t \tag{5}$$

将式(3)、(4)、(5)代入式(2)，可求出 Ω.

这里介绍一个更简便的方法.

由式(5)，令$\dot{\theta}=0$，也可得 t_1，

$$t_1=\frac{\Omega a}{\mu g\cos\alpha}=\frac{\Omega a}{\left(1+\frac{v^2}{2gh}\right)g\sin\alpha} \tag{6}$$

由式(4)、(6)可得

$$\frac{\Omega a}{\left(1+\frac{v^2}{2gh}\right)g\sin\alpha}=\frac{2h}{v\sin\alpha}$$

$$\Omega=\frac{2b}{va}\left(1+\frac{v^2}{2gh}\right)g=\frac{v^2+2gh}{av}$$

7.4.30　两个质量均为 M、半径均为 a 的均质轮子，其质量均集中于轮子边缘，两根不计质量的杆 O_1A、O_2B 分别固连于两个轮子，质量为 m 的均质杆通过 A、B 两个光滑轴承将两个轮子连接起来．$O_1A=O_2B=b$．运动中，$O_1A\,/\!/\,O_2B$，O_2 处通过一个劲度系数为 k 的水平弹簧连在一固定点，如图 7.88 所示，AB 处于最低位置时，弹簧无形变．若轮子在水平面上的平衡位置附近做小振动(纯滚动)，求振动周期.

解　取 x 轴水平向左，取 O_1A、O_2B 逆时针转动的角度为正，平衡位置处，$x=0$，$\varphi=0$.

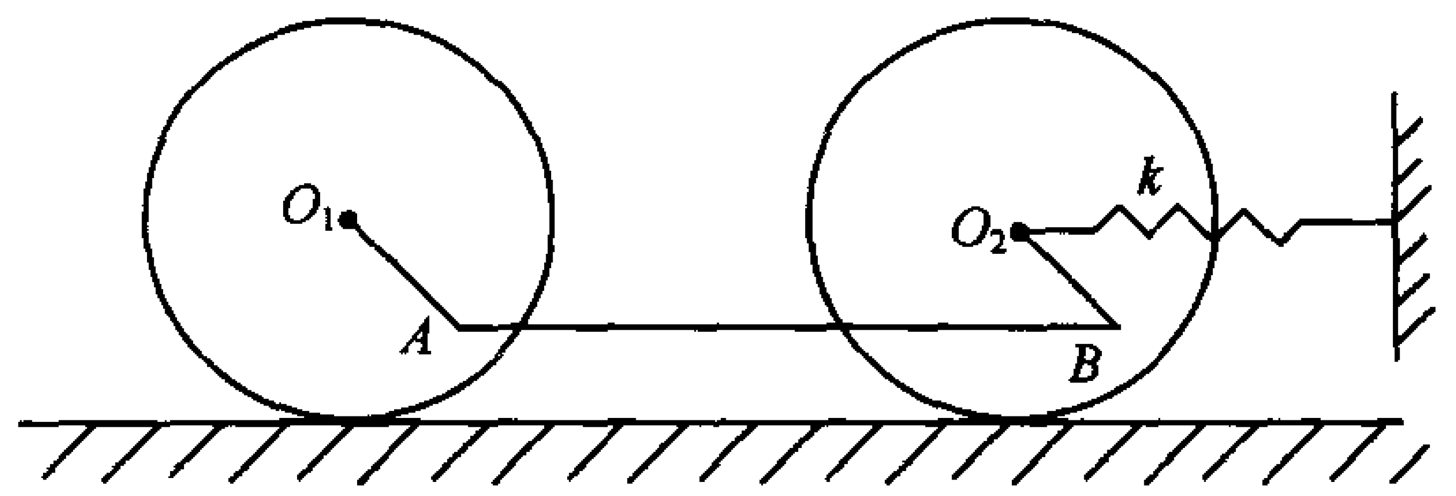


图 7.88

由纯滚动，$\dot{x}-a\dot{\varphi}=0$

一个轮子的动能为

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}Ma^2\dot{\varphi}^2=Ma^2\dot{\varphi}^2$$

杆 AB 的动能为

$$\frac{1}{2}m[(\dot{x}-b\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+(b\dot{\varphi}\sin\varphi)^2]$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2-2b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+b^2\dot{\varphi}^2)$$

$$=\frac{1}{2}m(a^2-2ab\cos\varphi+b^2)\dot{\varphi}^2\approx\frac{1}{2}m(a-b)^2\dot{\varphi}^2$$

这里考虑到小振动，$\cos\varphi\approx1$，杆 AB 做平动.

轮子、弹簧系统的势能为

$$mgb(1-\cos\varphi)+\frac{1}{2}kx^2\approx\frac{1}{2}(mgb+ka^2)\varphi^2$$

由机械能守恒，

$$2Ma^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m(a-b)^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}(mgb+ka^2)\varphi^2=\text{常量}$$

将上式对 t 求导，

$$[4Ma^2+m(a-b)^2]\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+(mgb+ka^2)\varphi\dot{\varphi}=0$$

$$[4Ma^2+m(a-b)^2]\ddot{\varphi}+(mgb+ka^2)\varphi=0$$

振动角频率为
$$\omega=\sqrt{\frac{mgb+ka^2}{4Ma^2+m(a-b)^2}}$$

振动周期为
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{4Ma^2+m(a-b)^2}{mgb+ka^2}}$$

7.4.31 两个全同的均质球，一个以质心速度 v 无滑动地滚向处于静止状态的另一个球，发生正碰. 假定碰撞时可忽略所有摩擦力，且可认为碰撞是完全弹性的.

(1) 计算碰撞后两球最后变为纯滚动时的质心速度；

(2) 计算后来由于摩擦力作用损失的机械能与初始能量之比.

解 设两球的质量均为 m，半径均为 r.

(1) 碰前，质心速度　　$v_{10}=v$，　　$v_{20}=0$

角速度：　$\omega_{10}=\frac{v}{r}$，　$\omega_{20}=0$

由于碰撞时不计摩擦力，且为完全弹性碰撞，可知，

碰后，质心速度，　$v_1=0$，　$v_2=v$

角速度，　$\omega_1=\omega_{10}=\frac{v}{r}$，　$\omega_2=\omega_{20}=0$

以后，由于摩擦力的作用，两球最终都将变为纯滚动.

两球碰后都在一条直线上运动，对于与平面的任一固定接触点，摩擦力的力矩为零，两球分别对此固定点的角动量守恒.

设 v'_1、v'_2 分别为最终做纯滚动时两球的质心速度，ω'_1、ω'_2 分别是它们的角速度，则 ω'_1 与 v'_1、ω'_2 与 v'_2 间有关系

$$\omega'_1=\frac{v'_1}{r},\qquad \omega'_2=\frac{v'_2}{r}$$

两球的角动量守恒关系为

$$mv'_1r+\frac{2}{5}mr^2\frac{v'_1}{r}=\frac{2}{5}mr^2\frac{v}{r}$$

$$mv'_2r+\frac{2}{5}mr^2\frac{v'_2}{r}=mvr$$

可得　$v'_1=\frac{2}{7}v$，　$v'_2=\frac{5}{7}v$

(2) 对瞬轴的转动惯量为

$$\frac{2}{5}mr^2+mr^2=\frac{7}{5}mr^2$$

碰前两球具有的机械能为

$$\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{7}{10}mv^2$$

最终两球均为纯滚动后具有的机械能为

$$\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}mr^2\left(\frac{2}{7}\frac{v}{r}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}mr^2\left(\frac{5}{7}\frac{v}{r}\right)^2=\frac{29}{70}mv^2$$

损失的机械能为　$\frac{7}{10}mv^2-\frac{29}{70}mv^2=\frac{2}{7}mv^2$

损失的机械能与初始机械能之比为 $\frac{20}{49}$.

7.4.32　用一水平台球棒打击一半径为 R、质量为 M 的台球，击球点在台球桌面上方高 h 处，如图 7.89 所示，已知球绕对称轴的转动惯量为 $\frac{2}{5}MR^2$，求使台球做无滑动滚动的 h 值.

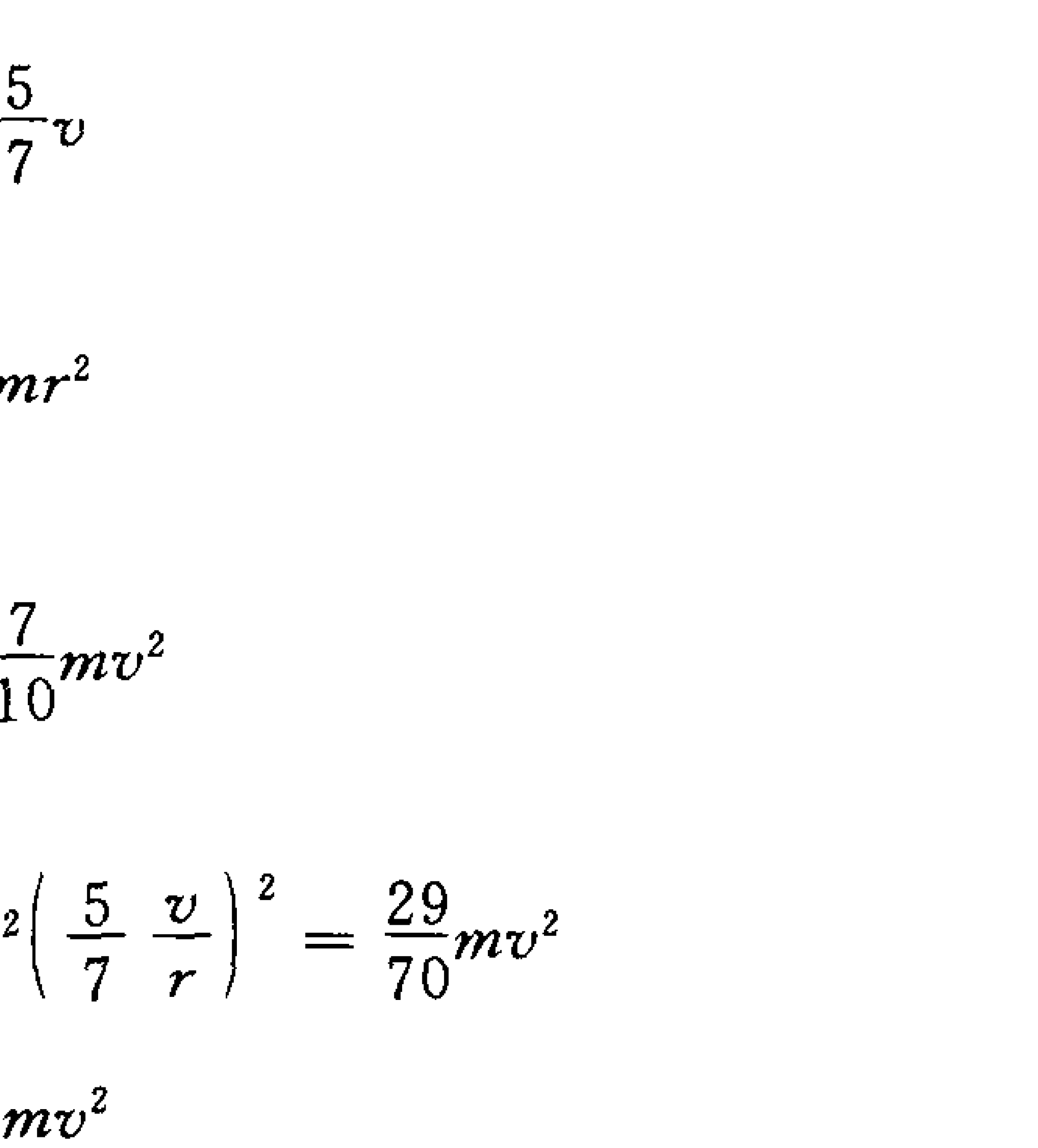


图 7.89

解　设台球棒击球时给予台球的冲量为 I_f，由于冲力很大，作用时间极短，冲力又是水平方向的，冲击期间台球对桌面的正压力不受影响，仍是有限的，因而摩擦力也是有限的，在冲击期间，一切有限的力的冲量都是可以忽略的.

用质心运动定理

$$M(v-0)=I_f$$

用质心平动参考系中对质心的角动量定理,

$$\frac{2}{5}MR^2(\omega-0)=I_f(h-R)$$

打击后要做纯滚动,

$$v-R\omega=0$$

从上述三式可解出　　　　$h=\frac{7}{5}R$

7.4.33　光滑的水平面上有两根均质细杆 A 和 B,长度均为 1m,质量分别为 1kg 和 2kg,两杆彼此平行,杆 B 静止地放置在 $y=0$、$x=0$ 到 $x=1$m 处,A 以 10m/s 的速度沿 y 方向运动,在与 B 碰撞前,一端保持在 $x=(-1+\varepsilon)$(m)处,另一端保持在 $x=\varepsilon$(m)处($0<\varepsilon\ll1$). 在 $t=0$ 时,A 到达 $y=0$ 处同 B 发生完全弹性碰撞. 不计两杆再次碰撞的可能性,求碰后两杆的运动.

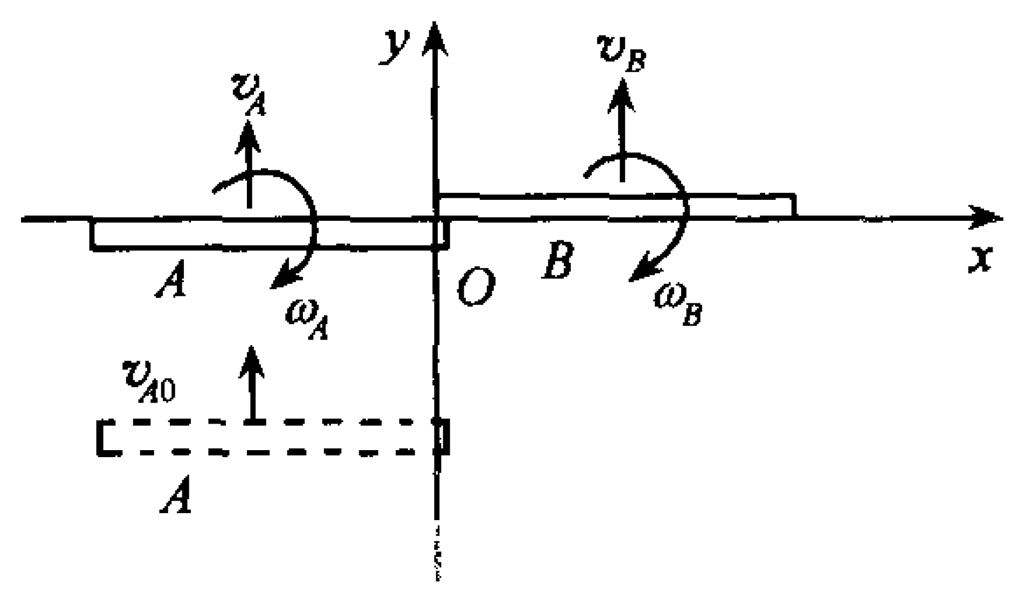


图 7.90

解　图 7.90 中 v_{A0}是杆 A 碰前的速度,v_A、v_B 是碰后杆 A 和杆 B 的质心速度,ω_A、ω_B 是碰后杆 A 和杆 B 的角速度.

对两杆构成的系统,用质心运动定理,碰撞前后动量守恒,

$$m_Av_A+m_Bv_B=m_Av_{A0}\tag{1}$$

设碰撞期间两杆相互作用的冲量大小为 I_f,B 受到的冲量沿 y 正向,A 受到的冲量沿 y 负向.

两杆分别为系统,对各自的质心平动参考系用对质心的角动量定理,

$$\frac{1}{12}m_Al^2\omega_A=I_f\cdot\frac{l}{2}$$

$$\frac{1}{12}m_Bl^2\omega_B=I_f\cdot\frac{l}{2}$$

两式消去 I_f 可得

$$m_A\omega_A=m_B\omega_B\tag{2}$$

对两杆系统,碰撞是内力的相互作用,整个系统对任何固定点的角动量都是守恒的. 今考虑对坐标系原点的角动量守恒,规定沿 z 轴负向的角动量为正.

$$m_Av_A\cdot\frac{l}{2}+\frac{1}{12}m_Al^2\omega_A-m_Bv_B\cdot\frac{l}{2}+\frac{1}{12}m_Bl^2\omega_B=m_Av_{A0}\cdot\frac{l}{2}$$

上式可化简为[化简中用了式(1)]

$$\frac{1}{12}m_Al\omega_A+\frac{1}{12}m_Bl\omega_B=m_Bv_B\tag{3}$$

用式(2)消去式(3)中 $m_A\omega_A$,可得

$$v_B=\frac{1}{6}l\omega_B\tag{4}$$

由于做完全弹性碰撞,机械能守恒,

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12}m_A l^2 \omega_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12}m_B l^2 \omega_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A0}^2 \tag{5}$$

代入数据　$m_A=1\text{kg}, m_B=2\text{kg}, l=1\text{m}, v_{A0}=10\text{m/s}$，式(1)、(2)、(4)、(5)分别为

$$v_A + 2v_B = 10 \tag{6}$$

$$\omega_A = 2\omega_B \tag{7}$$

$$v_B = \frac{1}{6}\omega_B \tag{8}$$

$$v_A^2 + \frac{1}{12}\omega_A^2 + 2v_B^2 + \frac{1}{6}\omega_B^2 = 100 \tag{9}$$

用式(7)、(8)将式(9)中的 ω_B、ω_A 均化成 v_A 的函数，式(9)变为

$$v_A^2 + \frac{1}{12}(2\times 6)^2 v_B^2 + 2v_B^2 + \frac{1}{6}(6v_B)^2 = 100$$

即

$$v_A^2+20v_B^2=100 \tag{10}$$

式(10)－式(6)的平方，

$$16v_B^2 - 4v_A v_B = 0$$

$$4v_B = v_A \tag{11}$$

由式(6)、(11)得

$$v_A = \frac{20}{3}\text{m/s}, \qquad v_B = \frac{5}{3}\text{m/s}$$

由式(8)，　$\omega_B=6v_B=10\text{rad/s}$

由式(7)，　$\omega_A=2\omega_B=20\text{rad/s}$

把各量写成矢量，则有

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{20}{3}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{v}_B = \frac{5}{3}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{\omega}_A = -20\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\omega}_B = -10\boldsymbol{k}$$

各量单位均采用 SI 制.

7.4.34　一半径为 a 的均质实心球以速度 v 在水平面上滚动时遇到一个高度为 $h(<a)$ 的台阶，若碰撞是完全非弹性的，在碰撞点无滑动，问球若要跃上台阶其速度 v 需多大？

解　球与台阶碰撞期间受到台阶给予的冲量可按水平和竖直两方向分解，从球的质心速度在碰撞前后看，碰前沿水平方向，碰后方向垂直于球心与碰撞点的连线，如图 7.91 所示. 台阶给予球竖直方向的冲量是使球获得竖直向上的动量的结果，水平面的支持力仍是有限的，因而在碰撞期间摩擦力也只能是有限的. 在碰撞期间一切有限大小的力的冲量都是可以忽略的，因此碰撞期间对接触点的角动量是守恒的. 设球的质量为 m.

取垂直纸面向里的角动量为正.

碰前做纯滚动，质心速度为 v，角速度为 $\frac{v}{a}$，对接触点的角动量为

$$mv(a-h) + \frac{2}{5}ma^2\left(\frac{v}{a}\right)$$

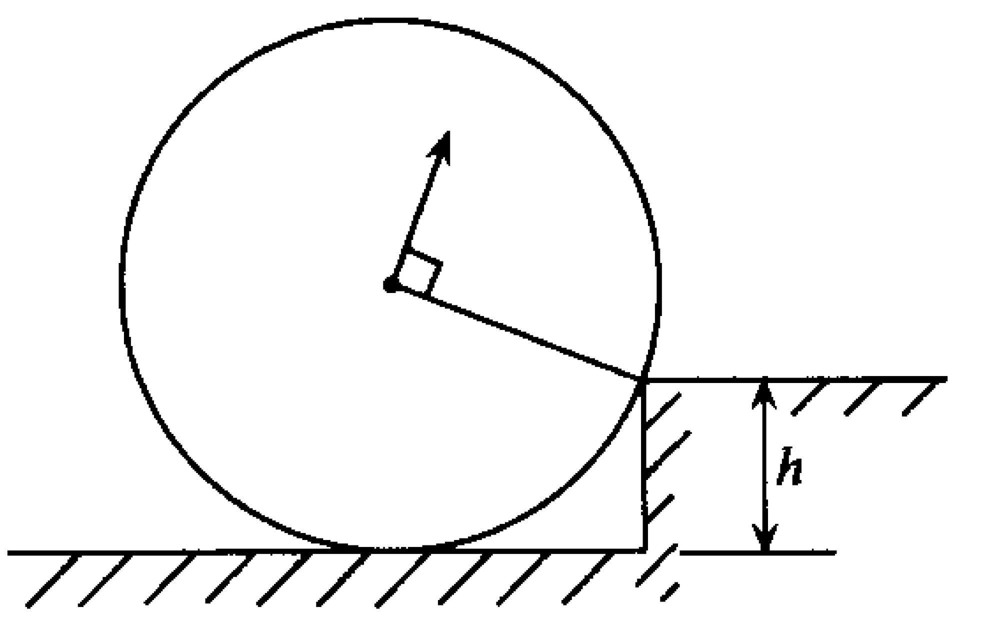


图 7.91

碰后做围绕接触点的定轴转动.设转动角速度为 ω',则对接触点的角动量为

$$\left(\frac{2}{5}ma^2 + ma^2\right)\omega'$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{2}{5}ma^2 + ma^2\right)\omega' = mv(a-h) + \frac{2}{5}ma^2\left(\frac{v}{a}\right)$$

$$\omega' = \frac{7a-5h}{7a^2}v$$

要能跃上台阶,碰后球的动能必须略大于跃上台阶需增加的势能,因为定轴转动上台阶的过程机械能守恒,要保证爬上台阶后仍有略大于零的动能.

$$\frac{1}{2} \times \frac{7}{5}ma^2\omega'^2 > mgh$$

$$\frac{7}{10}ma^2\left(\frac{7a-5h}{7a^2}v\right)^2 > mgh$$

$$v > \frac{a}{7a-5h}\sqrt{70gh}$$

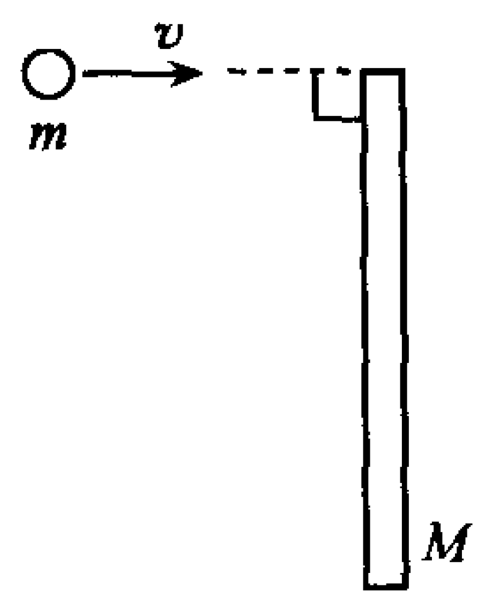


图 7.92

7.4.35 一质量为 m 的质点以垂直于原静止的均质细杆的速度 v 在杆端与杆做弹性碰撞,如图 7.92 所示.碰撞后质点静止,求细杆的质量 M.

解 设细杆长度为 l,碰后杆的质心速度为 v_c,角速度为 ω.

对静参考系,质点细杆系统动量、机械能和对任何固定点(今取杆的质心在碰撞期间所在的点)的角动量都是守恒量,有以下三个方程:

$$mv = Mv_c$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}Ml^2\right)\omega^2$$

$$mv \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{12}Ml^2\omega$$

三个方程中共有三个未知量:v_c、$l\omega$ 和 M,可解出 $M=4m$.

7.4.36 两个相同的梯子,一端用铰链连接起来,下部再用绳子连接,以 60°角置于光滑的水平面上.如果绳子突然切断,求此瞬时铰链的加速度.通常把梯子抽象为均质薄板或细杆.

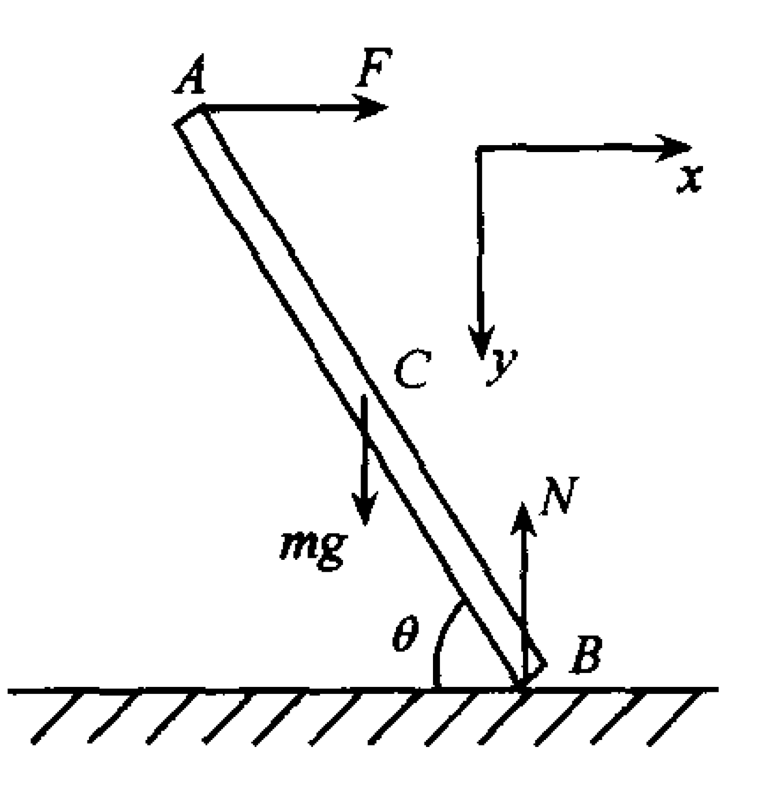


图 7.93

解 设梯子质量为 m、长度为 l.考虑对称性,两个梯子在铰链处受到的作用力是水平的.

考虑右边的梯子,取 x 轴水平向右,y 轴竖直向下.图 7.93 画出了绳子刚被切断时的受力情况,$\theta=60°$.在此时有下列方程:

$$m\ddot{x}_C = F \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_C = mg - N \tag{2}$$

$$\frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}=F\cdot\frac{l}{2}\sin60^\circ-N\cdot\frac{l}{2}\cos60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}Fl-\frac{1}{4}Nl \tag{3}$$

在此时，B 点的速度为零，在此后一段时间内，将具有 x 方向的速度，故在此时有 $\ddot{y}_B=0$. 在此时，A 点速度为零，此后将有竖直向下的速度，故在此时有 $\ddot{x}_A=0$.

用关于相对运动的加速度合成公式，A 点（B 点）的加速度等于 C 点的加速度与 A 点（B 点）在质心平动参考系中的加速度的矢量和. 在质心平动参考系中，A 点、B 点均做圆周运动，因此时$\dot{\theta}=0$，都没有法向加速度.

$$\ddot{y}_B=\ddot{y}_C+\frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos60^\circ=\ddot{y}_C+\frac{1}{4}l\ddot{\theta}=0 \tag{4}$$

$$\ddot{x}_A=\ddot{x}_C+\frac{1}{2}l\ddot{\theta}\sin60^\circ=\ddot{x}_C+\frac{\sqrt{3}}{4}l\ddot{\theta}=0 \tag{5}$$

所要求的铰链的加速度为

$$\ddot{y}_A=\ddot{y}_C-\frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos60^\circ=\ddot{y}_C-\frac{1}{4}l\ddot{\theta} \tag{6}$$

由式(1)、(3)消去 F，得

$$\frac{1}{3}ml\ddot{\theta}=\sqrt{3}m\ddot{x}_C-N \tag{7}$$

由式(2)、(7)消去 N，得

$$\frac{1}{3}l\ddot{\theta}=\sqrt{3}\ddot{x}_C+\ddot{y}_C-g \tag{8}$$

用式(5)消去式(8)中的 $\ddot{x}_C$，得

$$\frac{13}{12}l\ddot{\theta}-\ddot{y}_C=-g \tag{9}$$

联立式(4)、(9)，解出

$$l\ddot{\theta}=-\frac{3}{4}g,\qquad \ddot{y}_C=\frac{9}{48}g$$

代入式(6)，即得

$$\ddot{y}_A=\frac{9}{48}g-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}g\right)=\frac{3}{8}g$$

7.4.37 一辆停放着的卡车的后门敞开着，如图 7.94(a)所示. 从时刻 $t=0$ 开始，卡车以恒定加速度 a 加速运动. 在 t 时刻，后门在与原位置成 θ 角的位置，如图 7.94(b)所示. 假定后门是均质分布的，质量为 m、宽度为 L.

(1) 写出 θ 及其对时间的导数与门轴上受力的两个分量 $F_{/\!/}$、$F_\perp$（见图(b)）相联系的动力学方程；

(2) 用 θ、m、L 和 a 表示$\ddot{\theta}$、$F_{/\!/}$和 $F_\perp$；

(3) 求从开始加速到后门关闭所需的时间的一个表达式（不必积分）.

解 方法一：(1) 在静参考系中，卡车后门做平面平行运动，在卡车参考系中，卡车后门做定轴转动. 用卡车参考系，需引入惯性力.

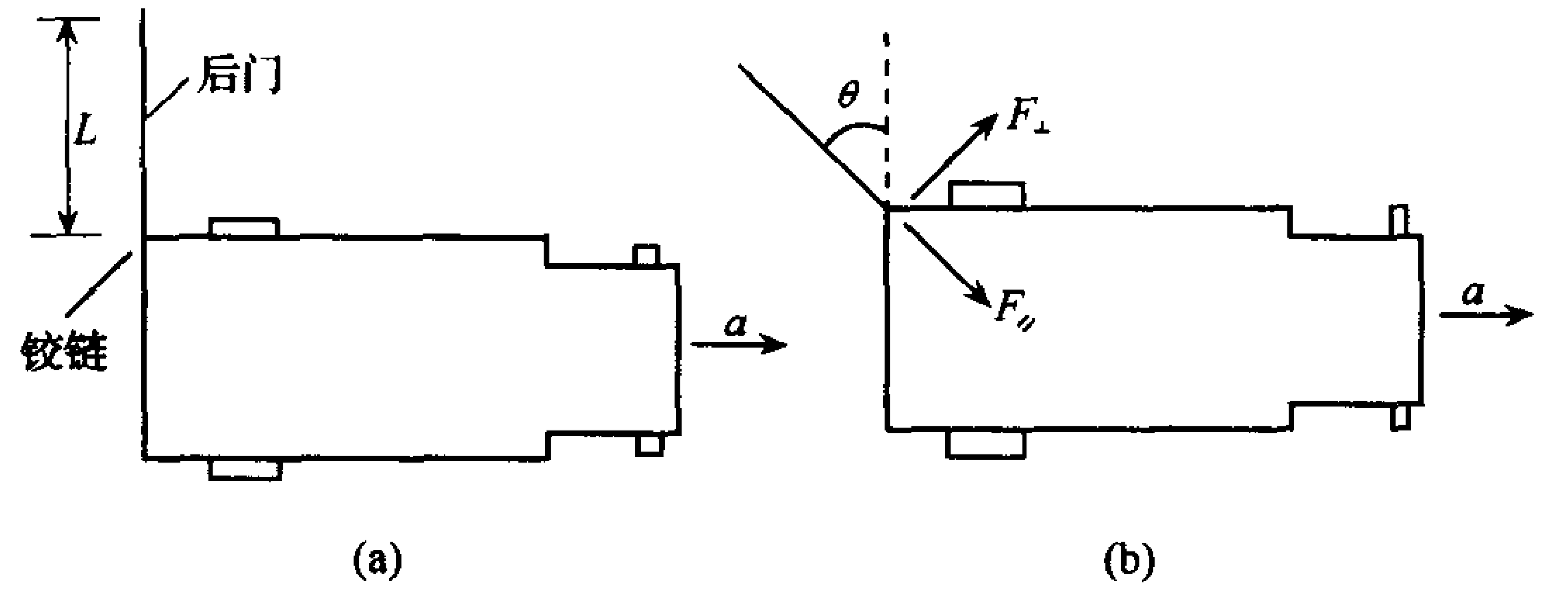


图 7.94

在卡车参考系中用质心运动定理,按切向法向写分量方程,

$$m \cdot \frac{L}{2}\ddot{\theta} = -F_{\perp} + ma\cos\theta \tag{1}$$

$$m \cdot \frac{L}{2}\dot{\theta}^2 = F_{/\!/} - ma\sin\theta \tag{2}$$

在卡车后门的质心平动参考系中用对质心的角动量定理

$$\frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} = F_{\perp} \cdot \frac{L}{2} \tag{3}$$

(2) 由式(1)、(3)消去 $F_{\perp}$,得

$$\ddot{\theta} = \frac{3a}{2L}\cos\theta \tag{4}$$

由式(3)、(4)得

$$F_{\perp} = \frac{1}{4}ma\cos\theta$$

用$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\theta = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}$,式(4)可改写为

$$\mathrm{d}\dot{\theta}^2 = \frac{3a}{L}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

积分上式,用初始条件 $t=0$ 时,$\theta=0$,$\dot{\theta}=0$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3a}{L}\sin\theta \tag{5}$$

由式(2)、(5)得

$$F_{/\!/} = \frac{1}{2}mL\dot{\theta}^2 + ma\sin\theta = \frac{5}{2}ma\sin\theta$$

(3) 由式(5)得

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3a}{L}\sin\theta}$$

从开始加速到后门关闭所需时间为

$$t = \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{3a}{L}\sin\theta}} = \sqrt{\frac{L}{3a}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

方法二：作为平面平行运动问题求解.

(1) 用静参考系. 列质心运动定理按图 7.94(b)中 $F_{\perp}$、$F_{/\!/}$的两个方向写分量方程，写质心的加速度时又用相对运动理论中加速度合成公式. 考虑卡车为动参考系，

$$a_{C\perp} = \frac{L}{2}\ddot{\theta} - a\cos\theta$$

$$a_{C/\!/} = \frac{L}{2}\dot{\theta}^2 + a\sin\theta$$

$$ma_{C\perp} = -F_{\perp}, \qquad ma_{C/\!/} = F_{/\!/}$$

写出的也就是方法一中的式(1)、(2)两式.

以下同方法一.

7.4.38　一根质量为 m、长 L 的均质细棒两端用两根无质量的、劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的弹簧悬挂在两个固定点，平衡时棒是水平的，如图 7.95 所示，弹簧只做竖直方向的运动，分别两种情况：$k_1=k_2$ 和 $k_1 \neq k_2$，求棒在平衡位置附近做小振动的振动角频率.

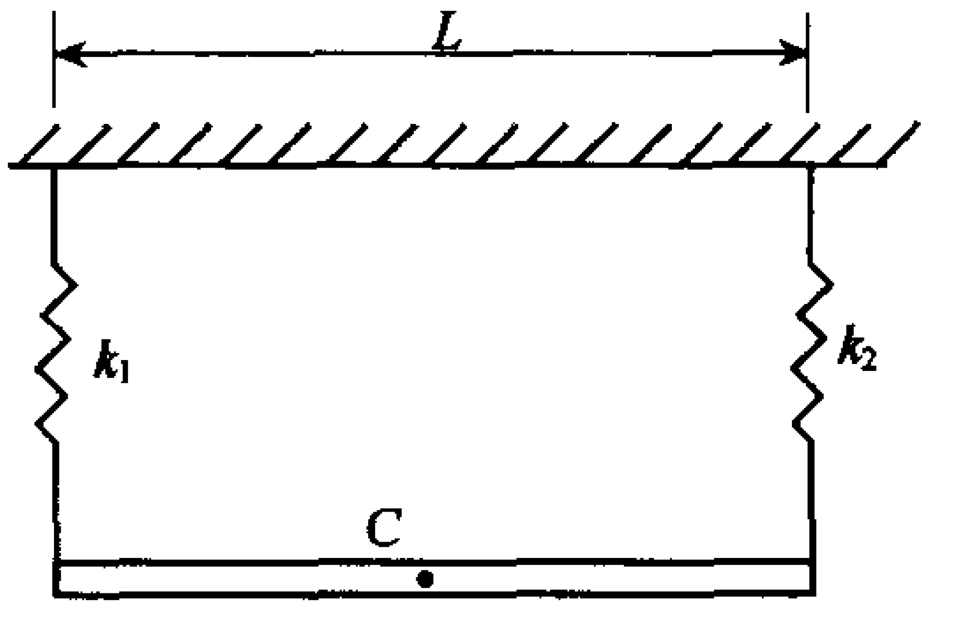


图 7.95

解　设棒的左、右端偏离平衡位置竖直向上的位移分别为 y_1 和 y_2，则质心 C 竖直向上的位移为$\frac{1}{2}(y_1+y_2)$.

用质心运动定理，

$$m\cdot\frac{1}{2}(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2) = -k_1y_1 - k_2y_2 \tag{1}$$

由于 $y_1=0$ 和 $y_2=0$ 为平衡位置，重力已包含在$-k_1y_1$ 和$-k_2y_2$ 中.

用质心平动参考系中对质心的角动量定理，

$$\frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} = k_2y_2\cdot\frac{L}{2} - k_1y_1\cdot\frac{L}{2}$$

这里取顺时针方向的角位移为正，力矩的写法已考虑到 y_1、y_2 是小量，因而 θ 也是小量，$\cos\theta\approx 1, \theta\approx\frac{y_1-y_2}{L}$.

角动量定理的式子改写为

$$m(\ddot{y}_1-\ddot{y}_2) = 6(k_2y_2 - k_1y_1) \tag{2}$$

(1) $k_1=k_2$ 的情况.

式(1)、(2)可简化为

$$\ddot{y}_1+\ddot{y}_2 = -\frac{2k}{m}(y_1+y_2)$$

$$\ddot{y}_1-\ddot{y}_2 = -\frac{6k}{m}(y_1-y_2)$$

前一方程可解得

$$y_1+y_2 = A\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t$$

考虑到棒的两端情况具有对称性,故有

$$y_1 = y_2 = \frac{A}{2}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t$$

就是说,这种振动方式,两端做偏离平衡位置时小振动,而且不仅角频率相同,振幅和相位都相同.

后一方程的解为

$$y_1 - y_2 = B\cos\sqrt{\frac{6k}{m}}t$$

考虑到棒的两端情况具有对称性,

$$y_1 = \frac{B}{2}\cos\sqrt{\frac{6k}{m}}t$$

$$y_2 = -\frac{B}{2}\cos\sqrt{\frac{6k}{m}}t = \frac{B}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{6k}{m}}t + \pi\right)$$

这种振动方式,两端偏离平衡位置的小振动的角频率均为$\sqrt{\frac{6k}{m}}$,振幅相同,但相位相反.

(2) 对于 $k_1 \neq k_2$ 的一般情况.

令 $y_1=A_1e^{i\omega t}$,$y_2=A_2e^{i\omega t}$,其中 ω 是振动的角频率,代入式(1)、(2),得

$$\left(\frac{2k_1}{m} - \omega^2\right)A_1 + \left(\frac{2k_2}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0$$

$$\left(\frac{6k_1}{m} - \omega^2\right)A_1 - \left(\frac{6k_2}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0$$

这是关于 A_1、A_2 的齐次线性代数方程,要有非零解,其系数行列式必须等于零,即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2k_1}{m} - \omega^2 & \dfrac{2k_2}{m} - \omega^2 \\ \dfrac{6k_1}{m} - \omega^2 & -\left(\dfrac{6k_2}{m} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4 - \frac{4}{m}(k_1 + k_2)\omega^2 + \frac{12k_1k_2}{m^2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2}{m}\left[(k_1 + k_2) \pm \sqrt{k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2}\right]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{m}\left[(k_1 + k_2) \pm \sqrt{k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2}\right]}$$

当 $k_1=k_2$ 时,可得 $\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}},\sqrt{\frac{6k}{m}}$,与前面得到的结果相同.

7.4.39 一个质量为 M、边长为 a 的均质立方体静置在一个光滑的水平桌面上,在通过它的质心且平行于两个竖直面的平面上有一根质量为$\frac{1}{3}M$、长度为 $4a$ 的光滑均质杆,其一端放在光滑桌面上,另一端靠在立方体竖直面的最高点,在此位置释放这个系统.证明:

(1) 当杆与立方体仍保持接触期间

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g(1 - 4\sin\theta)}{a(16 - 3\sin^2\theta)}$$

其中 θ 是杆与水平面间的夹角；

(2) 在 $\sin\theta$ 满足

$$3\sin^3\theta - 48\sin\theta + 8 = 0$$

时，杆与立方体开始分离.

证明　(1) 取图 7.96 的坐标系，用 A 点的坐标 x 表示立方体的位置，x_C、y_C表示杆的质心 C 的位置.

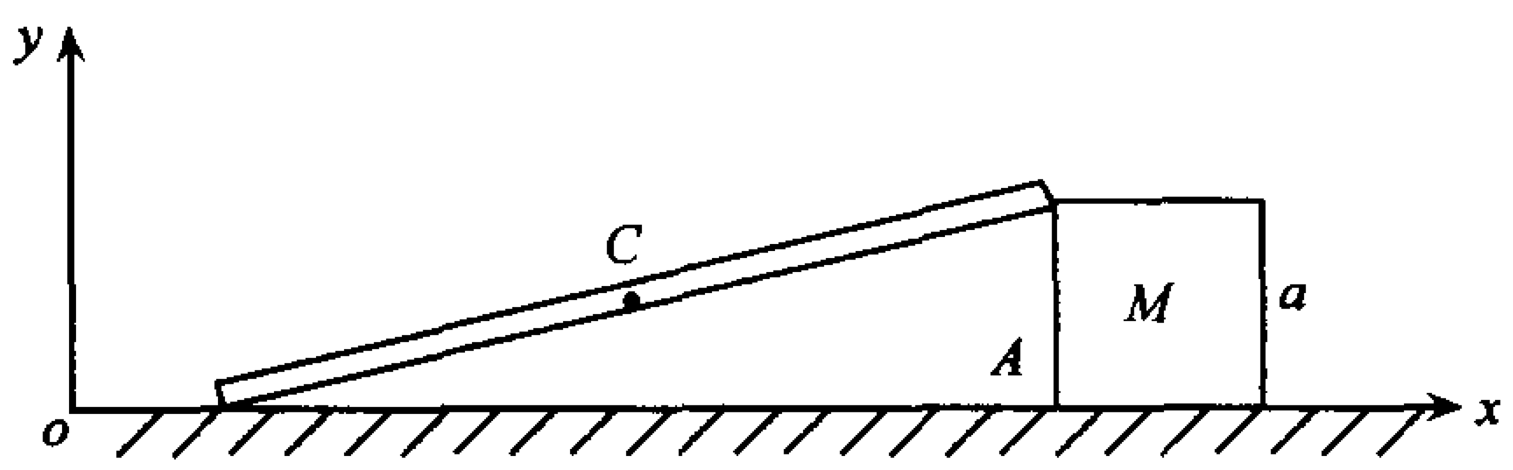


图 7.96

由机械能守恒，

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\right)(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{M}{3}\right)(4a)^2\dot{\theta}^2$$

$$+ \left(\frac{1}{3}M\right)g\cdot 2a\sin\theta = \left(\frac{1}{3}M\right)g\cdot\frac{a}{2} \tag{1}$$

由水平方向动量守恒，

$$M\dot{x} + \left(\frac{1}{3}M\right)\dot{x}_C = 0 \tag{2}$$

x、x_C、y_C与 θ 间存在下列约束关系：

$$y_C = 2a\sin\theta$$

$$x_C = x - 2a\cos\theta$$

上两式对 t 求导，

$$\dot{y}_C = 2a\dot{\theta}\cos\theta \tag{3}$$

$$\dot{x}_C = \dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta \tag{4}$$

由式(2)、(4)可得

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}a\dot{\theta}\sin\theta \tag{5}$$

$$\dot{x}_C = \frac{3}{2}a\dot{\theta}\sin\theta \tag{6}$$

将式(3)、(5)、(6)代入式(1)，得

$$\left(\frac{8}{9} - \frac{1}{6}\sin^2\theta\right)a^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}ga(1 - 4\sin\theta)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g(1 - 4\sin\theta)}{a(16 - 3\sin^2\theta)}$$

(2) 把$\dot{\theta}^2$的表达式代入式(5),

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{4}a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \frac{3ga(1-4\sin\theta)}{4(16-3\sin^2\theta)}\sin^2\theta$$

对 t 求导,

$$2\dot{x}\ddot{x} = \frac{3}{4}ga\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta - 4\sin^3\theta}{16-3\sin^2\theta}\right)\right]\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = \frac{3}{4}ga\frac{\dot{\theta}}{2\dot{x}}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta - 4\sin^3\theta}{16-3\sin^2\theta}\right)\right] \tag{7}$$

对立方体用牛顿运动第二定律,

$$M\ddot{x} = N$$

其中 N 为杆对立方体的作用力. 在杆与立方体开始分离时,$N=0$,$\ddot{x}=0$,此时$\dot{\theta}$、$\dot{x}$均不为零.

由式(7)和$\ddot{x}=0$、$\dot{\theta}\neq 0$,$\dot{x}\neq 0$可得

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta - 4\sin^3\theta}{16-3\sin^2\theta}\right) = 0$$

因为在分离时 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$,故 $\cos\theta\neq 0$,可把各项中具有的共同因子 $\cos\theta$ 约去,可得

$$(3\sin^3\theta - 48\sin\theta + 8)\sin\theta = 0$$

$\sin\theta=0$,即 $\theta=0$,可以是杆与立方体分离的情况,可在 θ 未降为零以前,θ 满足

$$3\sin^3\theta - 48\sin\theta + 8 = 0$$

时杆与立方体就已分离了. 因此,开始分离出现在满足上述关系的 θ 值或 $\sin\theta$ 值.

7.4.40 匀质杆 AB、BD 和 DE 用光滑铰链 B、D 连接,如图 7.97 所示. 三杆长度分别为 a、b、d,质量均为 m. 杆 AB 和 DE 分别可绕铅直的固定轴 A 和 E 在水平面上的某一范围内无摩擦摆动. 设在图示时刻,AB 与 BD 成一直线,$BD\perp DE$,此时杆 AB 的角速度为 ω,角加速度为零,求此时 BD 杆在 B、D 端受到的外力.

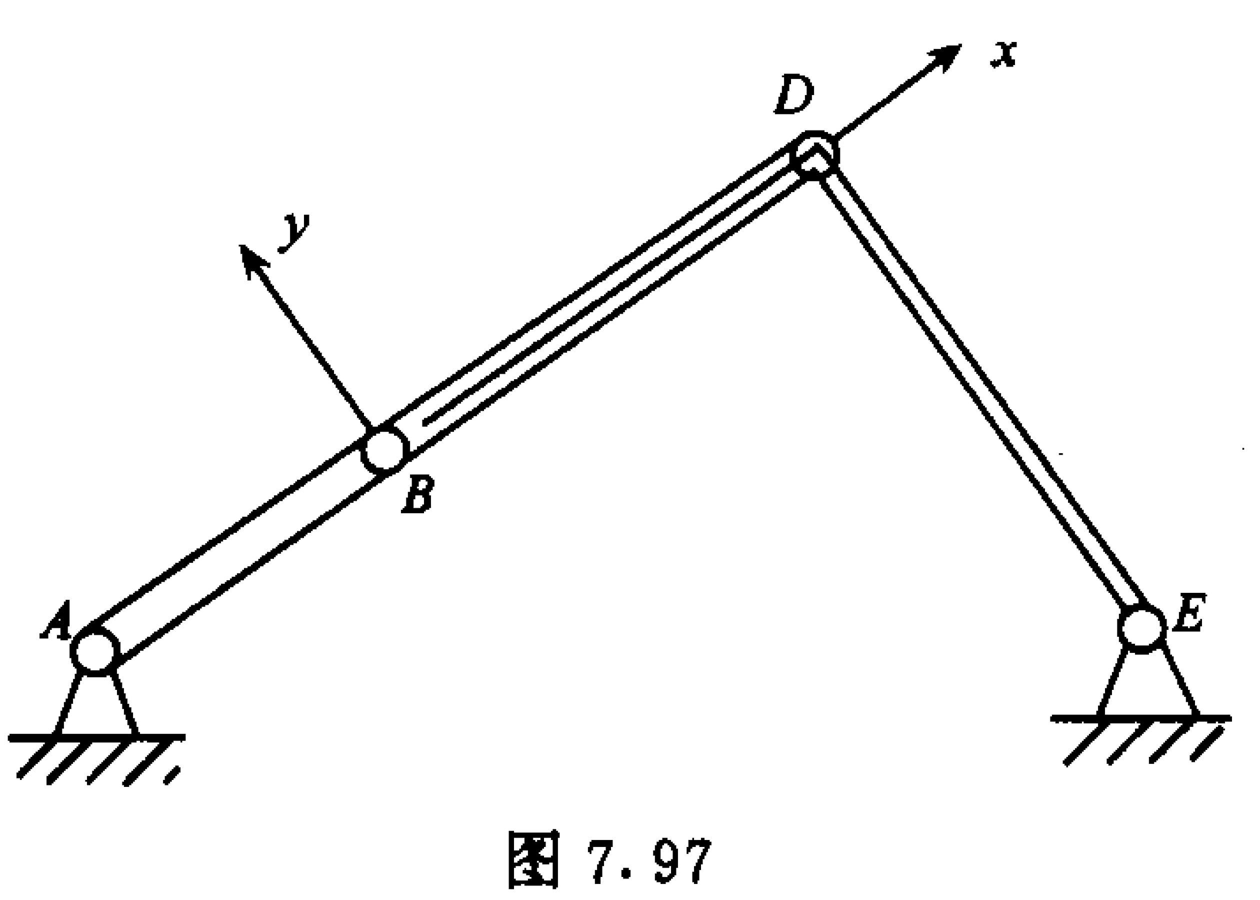


图 7.97

解 各杆的角速度的正向规定如图 7.98 所示. 此时

$$\boldsymbol{v}_B = \omega a\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{v}_D = -\omega_{DE}d\boldsymbol{i}$$

刚体上任何两点的速度在其连线方向的分量应相等,所以$\boldsymbol{v}_B$、$\boldsymbol{v}_D$ 在 BD 方向的分量应相等,

$$v_{Dx} = v_{Bx} = 0, \qquad 所以\boldsymbol{v}_D = 0, \qquad \omega_{DE} = 0$$

可见,此刻 BD 杆做平面平行运动的瞬心位于 D 点.

以 D 为基点,B 点的速度又可表为

$$\boldsymbol{v}_B = \omega_{BD}\cdot b\boldsymbol{j}$$

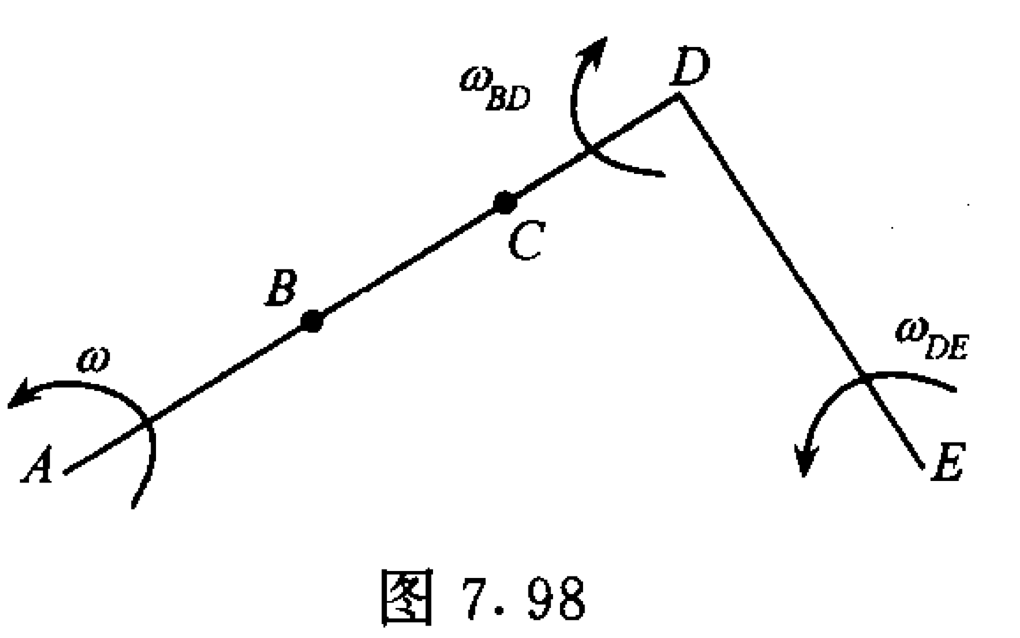


图 7.98

比较$\boldsymbol{v}_B$的两个表达式，得

$$\omega_{BD}b=\omega a,\qquad \therefore \omega_{BD}=\frac{a}{b}\omega$$

考虑到此刻 AB 杆无角加速度和 DE 杆无角速度，分别以 B、E 为基点，写此刻 D 点的加速度，

$$\boldsymbol{a}_D=-a\omega^2\boldsymbol{i}-b\omega_{BD}^2\boldsymbol{i}-b\beta_{BD}\boldsymbol{j}$$

$$=-a\left(1+\frac{a}{b}\right)\omega^2\boldsymbol{i}-b\beta_{BD}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_D=-\beta_{DE}d\boldsymbol{i}$$

比较上述两式，得

$$\beta_{DE}=\frac{a}{d}\left(1+\frac{a}{b}\right)\omega^2$$

$$\beta_{BD}=0$$

以 B 为基点，写 BD 杆的质心 C 的加速度，

$$\boldsymbol{a}_C=-a\omega^2\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}b\omega_{BD}^2\boldsymbol{i}$$

$$=-a\omega^2\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}b\left(\frac{a}{b}\omega\right)^2\boldsymbol{i}=-a\left(1+\frac{a}{2b}\right)\omega^2\boldsymbol{i}$$

对 BD 杆用质心运动定理，

$$-ma\left(1+\frac{a}{2b}\right)\omega^2=X_B+X_D \tag{1}$$

$$O=Y_B+Y_D \tag{2}$$

其中 X_B、Y_B 是 B 端受力沿 x、y 轴的分量，X_D、Y_D 是 D 端受力沿 x、y 轴的分量.

AB 杆的运动是已知的，对 AB 杆用对 A 点的角动量定理，可知

$$Y_B=0 \tag{3}$$

DE 杆的运动也已求得，对 DE 杆用对 E 点的角动量定理，可得

$$\frac{1}{3}md^2\beta_{DE}=X_Dd$$

$$X_D=\frac{1}{3}md\beta_{DE}=\frac{1}{3}ma\left(1+\frac{a}{b}\right)\omega^2 \tag{4}$$

将式(3)、(4)分别代入式(2)和式(1)，即得

$$Y_D=0$$

$$X_B=-ma\left(1+\frac{a}{2b}\right)\omega^2-\frac{1}{3}ma\left(1+\frac{a}{b}\right)\omega^2=-\frac{1}{3}ma\left(4+\frac{5a}{2b}\right)\omega^2$$

7.4.41 证明刚体做平面平行运动时关于瞬心的角动量定理还可以有下列形式：

$$I_{O'}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_{O'}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(m\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$$

其中 O' 是刚体上为瞬心的那一点，$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$是瞬心平动参考系原点 O' 的加速度，即瞬心的加速度，

$$\frac{\mathrm{d}(I_{O'}\omega)}{\mathrm{d}t} = M_{O'} - m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'} \cdot \boldsymbol{r}'_C)$$

其中 O' 是与瞬心重合的空间点，$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$ 是随瞬心沿空间极迹平动的坐标系的速度.

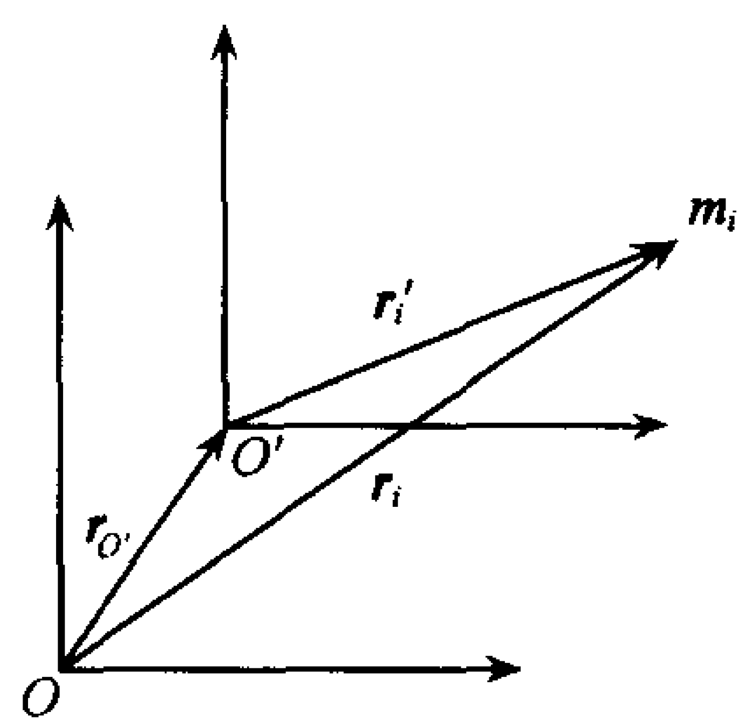


图 7.99

证明　图 7.99 画出了两个坐标系，原点为 O 的固连于静参考系，原点为 O' 的固连于 O' 平动参考系. $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 是第 i 个质点对静参考系的速度(绝对速度)，$\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)$ 为系统对 O' 点的绝对角动量，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{O'})\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}_{O'}\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i) \\ &= \sum_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i) + \sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \\ &\quad - \dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{r}_{O'}\times\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i \\ &= \sum_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i) - \dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{r}_{O'}\times\sum_i\boldsymbol{F}_i \\ &= \sum_i[(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{O'})\times\boldsymbol{F}_i] - \dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C \\ &= \sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i) - \dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{M}_{O'} - \dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C \end{aligned} \tag{1}$$

在推导上式的过程中，$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i$，$\boldsymbol{F}_i$ 不仅包括外力，还包括内力，而在 $\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)$ 等式子中内力的求和为零，即 $\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(i)})=0$，因此对所有质点求和的式子中的 $\boldsymbol{F}_i$ 都可只考虑外力，$\boldsymbol{M}_{O'}$ 是作用于系统的外力对 O' 点的力矩之矢量和.

下面再考虑对平动参考系中的 O' 点的角动量(称为相对角动量).

对平动参考系，只要引入惯性力，可以直接写出对它的固定点 O' 的角动量定理，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}'_i) &= \boldsymbol{M}_{O'} + \sum_i[\boldsymbol{r}'_i\times(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})] \\ &= \boldsymbol{M}_{O'} - \Big(\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\Big)\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'} = \boldsymbol{M}_{O'} - m\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{M}_{O'}$ 是真实外力对 O' 点的力矩，与式(1)中的 $\boldsymbol{M}_{O'}$ 是相同的，式(1)中的 $\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_C$ 分别是 O' 点和质心 C 的绝对速度，式(2)中的 $\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$ 是 O' 点的绝对加速度，$\boldsymbol{r}'_C$ 是质心 C 对动系原点 O' 的位矢.

式(1)、(2)适用于一般的质点系，静参考系是惯性系，平动参考系可以是任意的平动参考系.

现考虑的系统是做平面平行运动的刚体，O' 点是与瞬心重合的空间的点，考虑对通过 O' 点的轴的角动量的时间变化率遵从的规律，简称为对瞬轴的角动量定理.

O' 点是与瞬心重合的空间点，平动参考系以瞬心沿空间极迹运动的速度做平动.

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i \qquad (\text{瞬心的定义得出})$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i[\boldsymbol{r}'_i\times m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)]$$

$$=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i[m_i\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}'_i)-m_i\boldsymbol{r}'_i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}'_i)]$$

$$=\sum_i[\omega m_i r'^2_i-m_i\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}'_i)^2]$$

$$=\sum_i[\omega m_i r'^2_i-m_i\omega r'^2_i\cos^2\alpha_i]$$

$$=\sum_i\omega m_i(r_i\sin\alpha_i)^2=\omega\sum_i m_i d_i^2=I_{O'}\omega \tag{3}$$

其中 α_i,d_i 参看图 7.100,$I_{O'}$是刚体绕瞬轴的转动惯量.

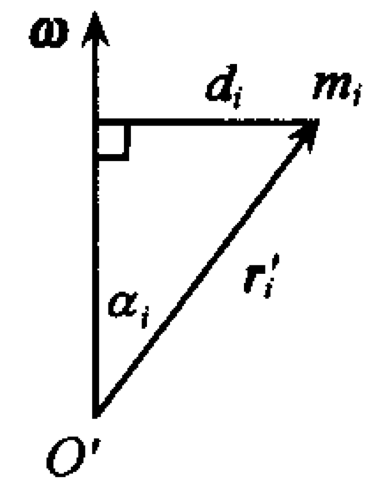


图 7.100

对刚体做平面平行运动用式(1),用在$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$不变的时间段内(刚体做平面平行运动,在基点平动参考系中转轴是不变的,但$\boldsymbol{\omega}$可以反向,$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$可能改变为相反方向).

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\right]$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{M}_{O'}-\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C)$$

$$=M_{O'}-m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot[\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_C)]$$

$$=M_{O'}-m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot[\boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C)-\boldsymbol{r}'_C(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}'_{O'})]$$

$$=M_{O'}-m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C) \tag{4}$$

这里用了$\boldsymbol{\omega}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}=0$.

所以
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\right]=M_{O'}-m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C)$$

用式(3),上式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{O'}\omega)=M_{O'}-m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C)$$

这就是要证明的第二个式子.

考虑另一种平动参考系,它部分固连于刚体,在某时刻,固连于它的坐标系原点 O' 是瞬心,别的时刻它仍是刚体上的点,但不是瞬心.要导出 O' 为瞬心那个时刻的对瞬轴的角动量定理.

在 O' 为瞬心的那时刻,$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i$,但要求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)$,其中的$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 必须适用于那时刻前后均能适用的式子,即需用

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i$$

在为瞬心的那时刻,$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}=0$,但$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}\neq 0$,

$$\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\sum_i[\boldsymbol{r}'_i\times m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)]$$

$$=\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_{O'})+\sum_i m_i[\boldsymbol{r}'_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)]$$

$$=m\boldsymbol{r}'_C\times\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\sum_i m_i[\boldsymbol{r}'_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)]$$

注意:在 O' 为瞬心的那时刻,因 $\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}=0$,第一项等于零,但在求该时刻的$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)$时,第一项是有贡献的.

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\dot{\boldsymbol{r}}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot m\boldsymbol{r}'_C\times\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i m_i[\boldsymbol{r}'_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)]$$

$$=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot m\boldsymbol{r}'_C\times\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+I_{O'}\omega$$

最后一项的计算是重复式(3)的运算得到的.

在$\boldsymbol{\omega}$不改变方向的时间段内,$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$为常量,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{O'}\omega)+m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}'_C\times\dot{\boldsymbol{r}}_{O'})+m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$$

$$=I_{O'}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}'_C\times\dot{\boldsymbol{r}}_{O'})+m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$$

上式对任何时刻均适用,故保留了含$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$的项,因为 O' 是刚体上的点,平面平行运动时转轴不变,故用此部分固连的参考系,$I_{O'}$是常量.

只考虑 O' 为瞬心的时刻用上式,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\right]=I_{O'}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$$

式(1)右边的项点乘$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$后为

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{M}_{O'}-\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C)=M_{O'}-m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C)$$

其推导过程可参看式(4)的推导,因为$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times\dot{\boldsymbol{r}}_C=\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_C)=\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_C)$,因此结果与式(4)结果相同,此结果不限于 O' 为瞬心的时刻,适用于任何时刻.在 O' 为瞬心的时刻,因为$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}=0$,$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{M}_{O'}-\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C)=M_{O'}$.

对于这个部分固连平动系,在 O' 为瞬心的那时刻用式(1).对瞬轴的角动量定理可写成

$$I_{O'}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+m\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})=M_{O'}$$

或

$$I_{O'}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_{O'}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(m\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$$

这就证明了第一个式子.

证明这两个式子都用了$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$为常量,前已指出,平面平行运动可能出现$\boldsymbol{\omega}$反向的情况.两个式子还能不能用?回答是可以分段使用,出现反向是在$\boldsymbol{\omega}=0$的时刻.前一阶段得到$\boldsymbol{\omega}=0$的运动状态作为后一阶段的初始状态,这样前后两个阶段都可以用两个式子.

7.4.42　证明刚体做平面平行运动时关于瞬心的角动量定理还可以有如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}(I_{O'}\omega)}{\mathrm{d}t}=M_{O'}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C)$$

其中O'是与瞬心重合的空间点，$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$是随瞬心沿空间极迹平动的坐标系的速度；

$$I_{O'}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_{O'}+m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_{\mathrm{C}})$$

其中O'与$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$的物理意义与上式相同.

证明　上题证明第二个式子时已证明了这里要证明的第一个式子，简要重复一下.

上题导出的式(3)为

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=I_{O'}\omega$$

上题式(1)两边点乘以$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$,

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\boldsymbol{M}_{O'}-\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{C}})$$

在$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$不变的时间段内,

$$\text{左边}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\right]=\frac{\mathrm{d}(I_{O'}\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{右边}=M_{O'}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{C}})$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}(I_{O'}\omega)}{\mathrm{d}t}=M_{O'}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{C}})$$

这就是本题要证明的第一个式子.

现在用上题已证明的第一个式子来证明第二个式子.

$$I_{O'}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_{O'}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(m\boldsymbol{r}'_{\mathrm{C}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$$

现在要改写$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$，$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$是刚体上此刻为瞬心的那一点的绝对加速度.

做平面平行运动的刚体的运动可以看作本体极迹曲线在空间极迹曲线上的纯滚动. 设t时刻瞬心位于图7.101的O'点，在$t+\Delta t$时刻瞬心位于O''点；在t时刻，刚体上为瞬心的那点的速度为零，故t时刻，$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$(刚体上瞬心那点的加速度)没有法向加速度，只有切向加速度，其方向是沿两极迹曲线的公共法线方向，也就是本题O'点轨道的法线方向.

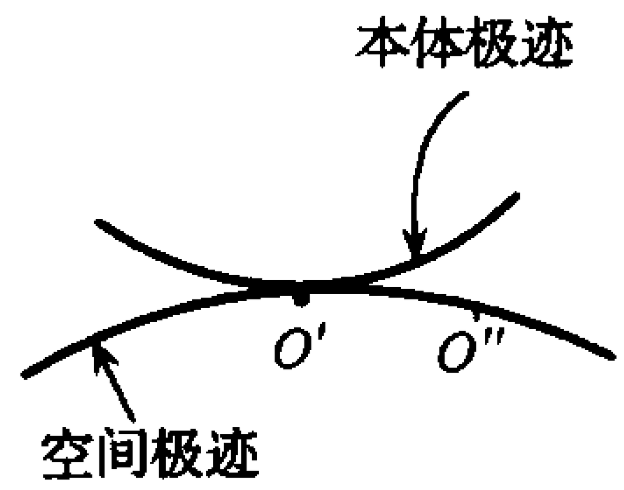


图 7.101

下面用加速度的定义来计算$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$. 下面写的$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$，$O'$是刚体上的点，不是本题要证明的式子中的$O'$，切勿混淆.

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}(t)=0\qquad(t\text{ 时刻 }O'\text{ 为瞬心})$$

$t+\Delta t$时刻，瞬心位于O''点，由$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}(t+\Delta t)&=\boldsymbol{\omega}(t+\Delta t)\times\overrightarrow{O''O'}\\&=\boldsymbol{\omega}(t+\Delta t)\times(-\dot{\boldsymbol{r}}_{O's}(t)\Delta t)\end{aligned}$$

其中$\dot{\boldsymbol{r}}_{O's}(t)$是$t$时刻瞬心沿空间极迹移动的速度，即要证明的式子中的$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$,

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}(t+\Delta t)-\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{\omega}(t)\times(-\dot{\boldsymbol{r}}_{O's}(t))$$

$$= \dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \cdot (m\boldsymbol{r}'_C \times \ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \cdot [m\boldsymbol{r}'_C \times (\dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s} \times \boldsymbol{\omega})]$$

$$= \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \cdot [\dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s}(m\boldsymbol{r}'_C \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(m\boldsymbol{r}'_C \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s})] = -m\omega(\boldsymbol{r}'_C \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s})$$

这里用了$\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s} = 0$,

$$I_{O'} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_{O'} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \cdot (m\dot{\boldsymbol{r}}'_C \times \ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$$

$$= M_{O'} + m\omega(\boldsymbol{r}'_C \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s})$$

将$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'_s}$换回本题所用的$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}$,就证明了第二式.

7.4.43 长为 $2a$、质量为 m 的均质杆在光滑的水平桌面上,由静止的竖直位置在重力的作用下倒下,试用几种方法列出关于 θ 满足的运动微分方程,θ 为杆与铅垂线的夹角.

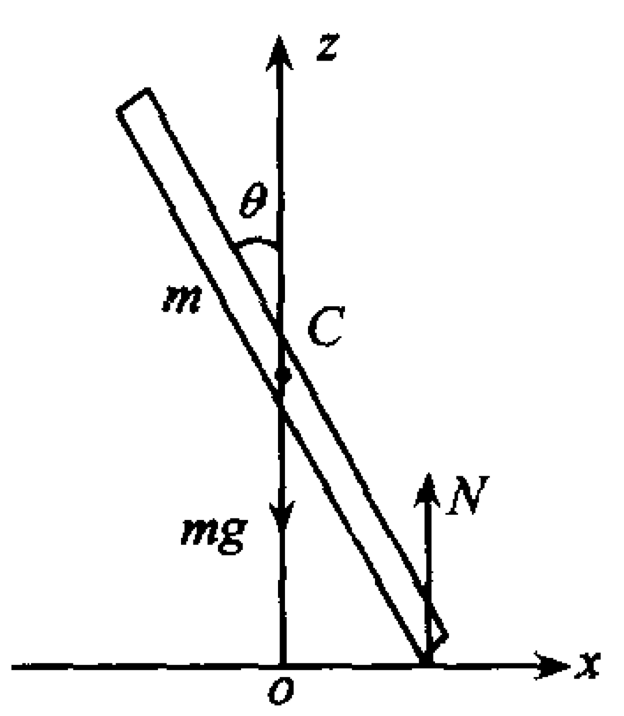


图 7.102

解　方法一:取图 7.102 的坐标,

$$m\ddot{z}_C = -mg + N \qquad (1)$$

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} = Na\sin\theta \qquad (2)$$

$$z_C = a\cos\theta$$

$$\dot{z}_C = -a\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\ddot{z}_C = -a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta$$

用上式,式(1)改写为

$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -mg + N \qquad (3)$$

式(2)、(3)消去 N,得

$$a(1 + 3\sin^2\theta)\ddot{\theta} + 3a\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 = 3g\sin\theta$$

方法二:用机械能守恒,

$$\frac{1}{2}m\dot{z}_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + mgz_C = mga$$

$$z_C = a\cos\theta, \qquad \dot{z}_C = -a\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{6}a\dot{\theta}^2 + g\cos\theta = g$$

两边对 t 求导,

$$a\dot{\theta}\ddot{\theta}\sin^2\theta + a\dot{\theta}^3\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{3}a\dot{\theta}\ddot{\theta} - g\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

约去$\dot{\theta}$,可得

$$a(1 + 3\sin^2\theta)\ddot{\theta} + 3a\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - 3g\sin\theta = 0$$

方法三:用 $I_{O'}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_{O'} - \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \cdot (m\boldsymbol{r}'_C \times \ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = -\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}'_C = -a\sin\theta\boldsymbol{i}, \qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \ddot{\theta}$$

（参看图 7.103，$\boldsymbol{r}'_C=\overrightarrow{O'C}$，$O'$是杆在图示位置时的瞬心，是由 C 点速度向下，A 点速度向右确定瞬心位置的.）

$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}=\dot{\boldsymbol{r}}_{O's}\times\boldsymbol{\omega}$，$\dot{\boldsymbol{r}}_{O's}$是瞬心在空间沿空间极迹移动的速度.

从几何上可知

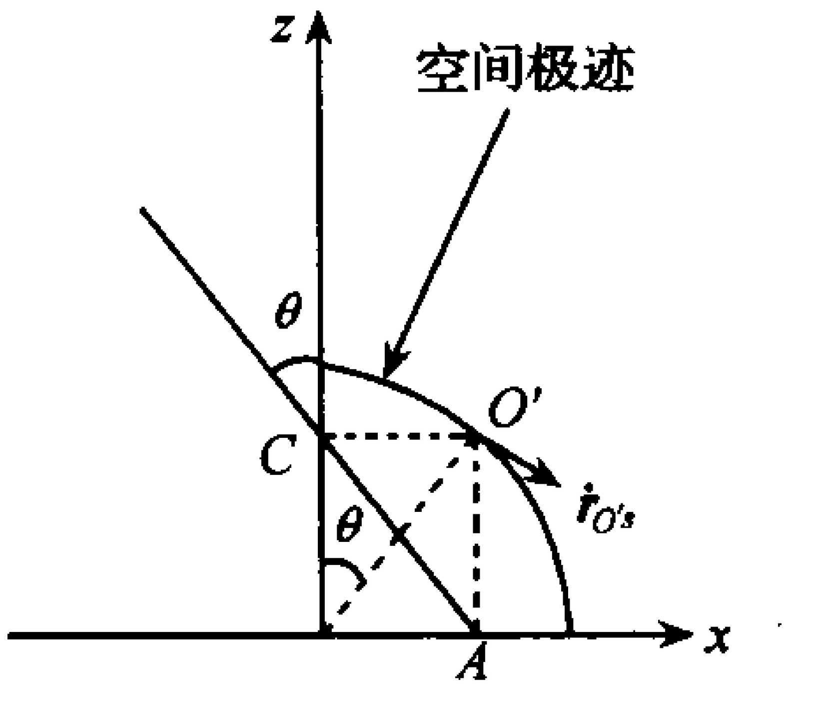


图 7.103

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{O's}|=a\dot{\theta}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{O's}=a\dot{\theta}(\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{k})$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}=a\dot{\theta}(\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{k})\times(-\dot{\theta}\boldsymbol{j})$$

$$=a\dot{\theta}^2(-\cos\theta\boldsymbol{k}-\sin\theta\boldsymbol{i})$$

$$\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}=-a^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(m\boldsymbol{r}'_C\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'})=ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$I_{O'}=\frac{1}{3}ma^2+m(a\sin\theta)^2=ma^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\right)$$

$$M_{O'}=mga\sin\theta$$

所以
$$ma^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\right)\ddot{\theta}=mga\sin\theta-ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

化简后得到与其他方法相同的结果.

方法四：用
$$\frac{\mathrm{d}(I_{O'}\omega)}{\mathrm{d}t}=M_{O'}-m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C)$$

$$I_{O'}\omega=\frac{1}{3}ma^2(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{O'}\omega)=\frac{1}{3}ma^2(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+2ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}=a\dot{\theta}(\cos\theta\,\boldsymbol{i}-\sin\theta\,\boldsymbol{k}),\boldsymbol{r}'_C=-a\sin\theta\boldsymbol{i}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C=-a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta,$$

$M_{O'}$同方法三.

代入上式，可得预期的结果.

方法五：用$-\dfrac{\mathrm{d}(I_{O'}\omega)}{\mathrm{d}t}=M_{O'}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C)$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}=a\dot{\theta}(\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{r}_C=a\cos\theta\boldsymbol{k},\qquad\dot{\boldsymbol{r}}_C=-a\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{k}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C=ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C)=-ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{O'}\omega)$、$M_{O'}$均与上法给出的相同.

代入上式，可得预期的结果.

方法六：用 $I_{O'}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_{O'}+m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}\cdot\boldsymbol{r}'_C)$

式中所有的各量前面都已给出,代入上式可得预期结果.

7.4.44 半径为 r 的均质轮子沿着与水平面成 α 角的斜面无滑动地滚下.问当滚动摩阻因数 δ 为何值时,轮子质心做等速运动.

解

$$ma_C=mg\sin\alpha-f=0$$

$$mr^2\frac{d\omega}{dt}=fr-\delta N=0$$

$$N-mg\cos\alpha=0$$

其中 f 为静摩擦力,设沿斜面向上,N 为支持力.这里考虑轮子的质量是都集中于边缘的.

$$mg\sin\alpha\cdot r=fr=\delta\cdot N=\delta\cdot mg\cos\alpha$$

$$\delta=r\tan\alpha$$

7.4.45 一个半径为 R 的均质轮子(质量均分布在边缘)在铅直直径的上端施以水平力 $\boldsymbol{F}$,轮子与水平面间的滚动摩阻因数为 δ,要在此力作用下轮子做纯滚动,滑动摩擦因数应满足什么条件?

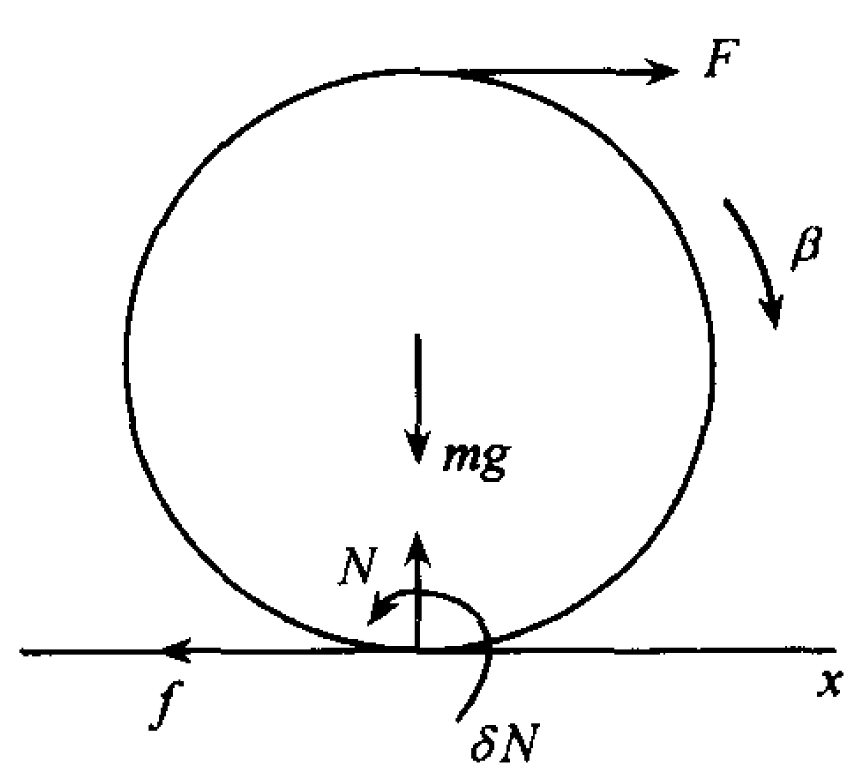


图 7.104

解 取图 7.104 所示的坐标,设轮子质量为 m,

$$m\ddot{x}=F-f \tag{1}$$

$$mR^2\beta=FR+fR-\delta N \tag{2}$$

$$N=mg \tag{3}$$

$$|f|\leqslant\mu N \tag{4}$$

$$\ddot{x}=R\beta \tag{5}$$

由式(1)、(5),

$$mR^2\beta=FR-fR \tag{6}$$

式(2)+式(6),

$$2mR^2\beta=2FR-\delta N \tag{7}$$

由式(3)、(7)得

$$\beta=\frac{2FR-\delta mg}{2mR^2} \tag{8}$$

由式(1)、(5)、(8),

$$m\ddot{x}=mR\beta=\frac{2FR-\delta mg}{2R}=F-f$$

解出

$$f=\frac{\delta mg}{2R} \tag{9}$$

由式(4)、(5)、(9)得

$$\mu\geqslant\frac{\delta}{2R}$$

7.4.46 质量为 M、半径为 R 的均质圆柱放在倾角为 α 的斜面上,吊有质量为 m 的重物经不可伸长的轻绳跨过定滑轮系于圆柱的轴心上.圆柱、滑轮间的绳子与斜面平行,圆柱与斜面间的滚动摩阻因数为 δ,问:

(1) 要能维持圆柱体在斜面上处于平衡,重物的质量 m 应满足什么条件?

(2) 圆柱与斜面间的摩擦因数 μ 满足什么条件才能保持圆柱体平衡?

解 设静摩擦力为 f,平衡时对圆柱体质心的力矩必须为零,静摩擦力又不能大于最

大静摩擦，即

$$fR-\delta N=0$$

$$f\leqslant\mu N$$

$$f=\frac{\delta N}{R}\leqslant\mu N$$

所以

$$\mu\geqslant\frac{\delta}{R}$$

这就是要保持圆柱体平衡，圆柱体与斜面间的摩擦因数应满足的条件.

下面讨论 m 应满足什么条件. 需分别两种保持平衡的情况：

有向上滑动趋势的平衡情况：

$$mg-Mg\sin\alpha-f=0$$

$$N-Mg\cos\alpha=0$$

$$f\leqslant\mu N$$

可得

$$mg-Mg\sin\alpha=f\leqslant\mu Mg\cos\alpha$$

所以

$$m\leqslant M(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

因为

$$\mu\geqslant\frac{\delta}{R}$$

$$m\leqslant M\left(\sin\alpha+\frac{\delta}{R}\cos\alpha\right)$$

有向下滑动趋势的平衡情况：

$$Mg\sin\alpha-f-mg=0$$

$$N-Mg\cos\alpha=0$$

$$f\leqslant\mu N$$

可得

$$Mg\sin\alpha-mg=f\leqslant\mu Mg\cos\alpha$$

$$m\geqslant M(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

因为

$$\mu\geqslant\frac{\delta}{R}$$

$$m\geqslant M\left(\sin\alpha-\frac{\delta}{R}\cos\alpha\right)$$

所以圆柱体在斜面上处于平衡，要求重物的质量 m 处在以下范围内：

$$M\left(\sin\alpha-\frac{\delta}{R}\cos\alpha\right)\leqslant m\leqslant M\left(\sin\alpha+\frac{\delta}{R}\cos\alpha\right)$$

7.5　刚体的定点转动、一般运动及其他

7.5.1　一回转仪的中心惯量椭球有旋转对称轴，且有 $I_1=I_2=2I_3$，今绕质心做定点自由转动，其自转角速度为 ω_1，自转轴与进动轴间的夹角 $\theta=60°$，求进动角速度 ω_2.

解　考虑到 $I_1=I_2=2I_3$ 及自由转动：$M_x=M_y=M_z=0$（x、y、z 轴固连于刚体，原点在质心，且为惯量主轴），由欧拉动力学方程，

$$2I_3\dot{\omega}_x-(2I_3-I_3)\omega_y\omega_z=0$$

$$2I_3\dot{\omega}_y-(I_3-2I_3)\omega_z\omega_x=0$$
$$I_3\dot{\omega}_z-(2I_3-2I_3)\omega_x\omega_z=0$$

化简为

$$2\dot{\omega}_x-\omega_y\omega_z=0 \tag{1}$$
$$2\dot{\omega}_y+\omega_z\omega_x=0 \tag{2}$$
$$\dot{\omega}_z=0 \tag{3}$$

由欧拉运动学方程，并代入规则进动，$\dot{\theta}=0$，$\theta=60°$，$\dot{\psi}=\omega_1$ 和待求的 $\dot{\varphi}=\omega_2$，

$$\omega_x=\omega_2\sin60°\sin\psi \tag{4}$$
$$\omega_y=\omega_2\sin60°\cos\psi \tag{5}$$
$$\omega_z=\omega_2\cos60°+\omega_1 \tag{6}$$

由式(3)得

$$\omega_z=常量$$

再由式(6)可知　　$\omega_2=$常量

由式(4)对 t 求导，

$$\dot{\omega}_x=\omega_2\sin60°\cos\psi\,\dot{\psi}=\omega_1\omega_2\sin60°\cos\psi \tag{7}$$

将式(5)、(6)、(7)代入式(1)，

$$2\omega_1\omega_2\sin60°\cos\psi-\omega_2\sin60°\cos\psi(\omega_2\cos60°+\omega_1)=0$$

可得　　$\omega_2(\omega_1-\omega_2\cos60°)\cos\psi=0$

因为　　$\omega_2\neq0$，$\cos\psi$ 不恒为零

所以　　$\omega_1-\omega_2\cos60°=0$

$$\omega_2=2\omega_1$$

7.5.2　一个刚性轮子关于其质心的固连于它的三个主轴 x_1、x_2、x_3 的转动惯量为 $I_1=I_2\neq I_3$，如图 7.105 所示. 轮子质心处装一轴承，轴承可绕空间任何轴做无摩擦转动. 轮子处于"动平衡"，即它以 $\omega\neq0$ 的恒定角速度转动，且它的轴承不受到力矩作用，$\boldsymbol{\omega}$的分量必须满足什么条件？概略说明允许的运动.

解　由欧拉动力学方程，

$$I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=0 \tag{1}$$
$$I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=0 \tag{2}$$
$$I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=0 \tag{3}$$

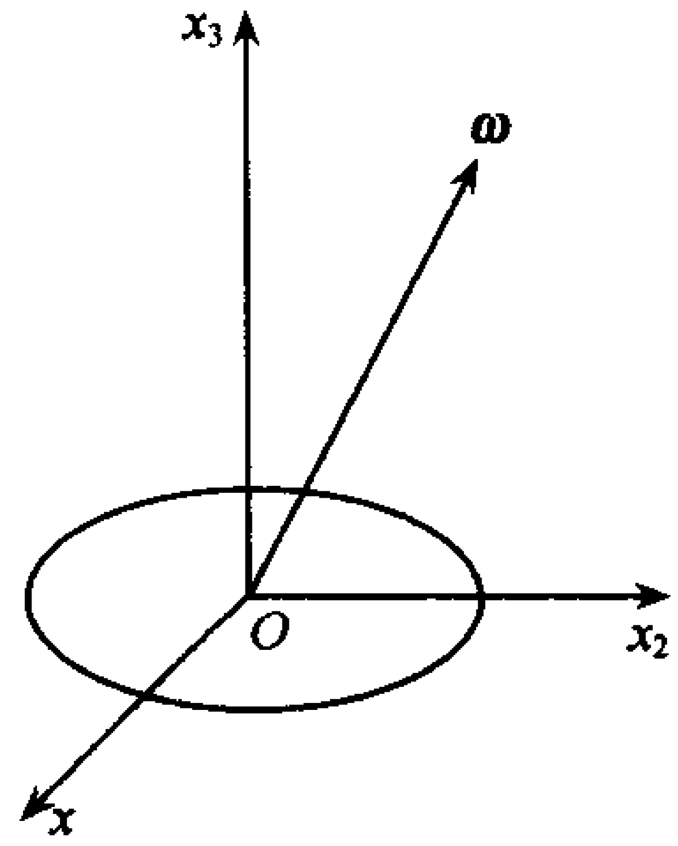


图 7.105

设 $I_1=I_2=I$，由式(3)得

$$\omega_3=\Omega\qquad(常量)$$

式(1)、(2)改写为

$$\dot{\omega}_1=\frac{I-I_3}{I}\Omega\omega_2$$
$$\dot{\omega}_2=-\frac{I-I_3}{I}\Omega\omega_1$$

前式对 t 求导，再将后式代入得

$$\ddot{\omega}_1 = \frac{I - I_3}{I}\Omega\,\dot{\omega}_2 = -\left(\frac{I - I_3}{I}\Omega\right)^2\omega_1 = -\alpha^2\omega_1$$

其中
$$\alpha = \frac{|I - I_3|}{I}\Omega = \frac{I_3 - I}{I}\Omega$$

通解为

$$\omega_1 = \omega_0\cos(\alpha t + \varepsilon)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{\alpha}\dot{\omega}_1 = \omega_0\sin(\alpha t + \varepsilon)$$

总角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\cos(\alpha t + \varepsilon)\boldsymbol{i} + \omega_0\sin(\alpha t + \varepsilon)\boldsymbol{j} + \Omega\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是 x_1、x_2、x_3 轴的单位矢量，

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$$

ω 和 Ω 均为常量，$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{\Omega}$的夹角 $\theta = \arccos\dfrac{\Omega}{\omega}$保持不变，$\boldsymbol{\omega}$围绕 x_3 轴以角速度 α 转动，转动周期为

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi I}{(I_3 - I)\Omega}$$

这是轮子运动的大致图像，如图 7.106 所示。但要注意 x_3 轴是固连于轮子的，不是空间的固定轴. 因此$\boldsymbol{\omega}$虽然大小不变，方向也是随时间变化的. 因为 $\boldsymbol{M}=0$，故对 O 点的角动量 $\boldsymbol{J}$ 是恒矢量.

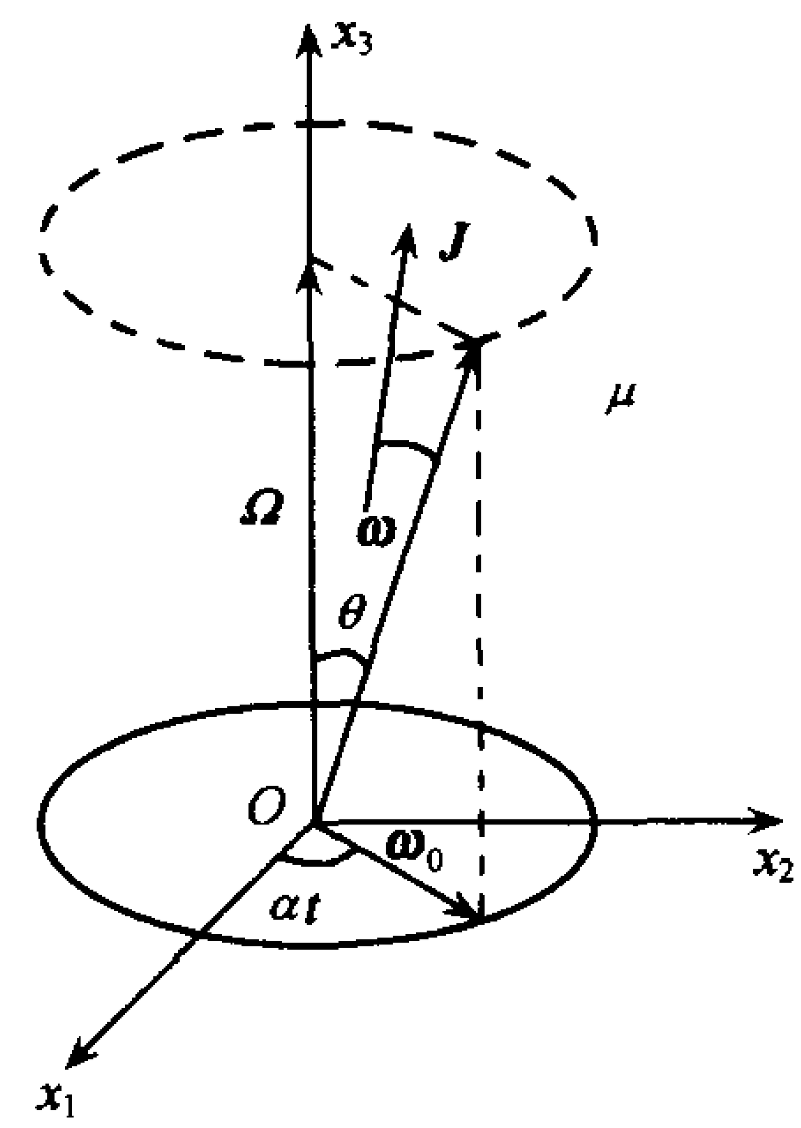


图 7.106

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= I_1\omega_1\boldsymbol{i} + I_2\omega_2\boldsymbol{j} + I_3\omega_3\boldsymbol{k} \\ &= I\omega_0\cos(\alpha t + \varepsilon)\boldsymbol{i} + I\omega_0\sin(\alpha t + \varepsilon)\boldsymbol{j} + I_3\Omega\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\omega}$与 $\boldsymbol{J}$ 的夹角

$$\mu = \arccos\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}}{J\cdot\omega} = \arccos\left[\frac{I\omega_0^2 + I_3\Omega^2}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}\cdot\sqrt{(I\omega_0)^2 + (I_3\Omega)^2}}\right]$$

与 $\theta = \arccos\dfrac{\Omega}{\omega} = \arccos\dfrac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}$比较

因为
$$(I\omega_0^2 + I_3\Omega^2)^2 > \Omega^2(I^2\omega_0^2 + I_3^2\Omega^2)$$

所以
$$\frac{I\omega_0^2 + I_3\Omega^2}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}\cdot\sqrt{(I\omega_0)^2 + (I_3\Omega)^2}} > \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} \qquad \mu < \theta$$

J 始终在$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\Omega}$所张的平面内，且在$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\Omega}$之间，如图 7.106 所示.

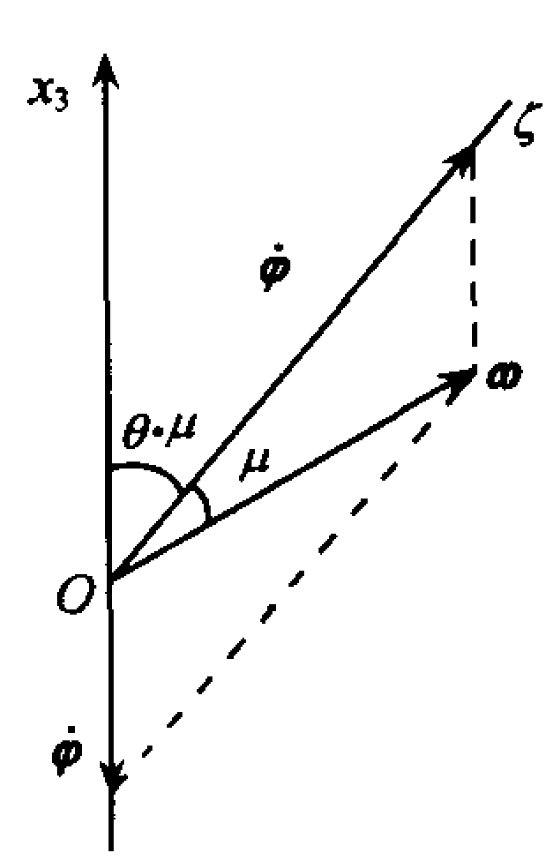


图 7.107

在空间，$\boldsymbol{J}$ 的大小和方向都是不变的，$\boldsymbol{\omega}$以与它的夹角 μ，以角速度 α 绕 $\boldsymbol{J}$ 转动. 通常取固定坐标 ζ 轴沿 $\boldsymbol{J}$ 的方向，则轮子的定点转动是规则进动：一方面绕 x_3 轴自转，但自转角速度不是 Ω；一方面自转轴 x_3 又绕 ζ 轴做进动，自转角速度$\dot{\boldsymbol{\psi}}$和进动角速度$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$之矢量和为总角速度$\boldsymbol{\omega}$，如图 7.107 所示. 由图可以看出$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$与$\boldsymbol{\Omega}$方向相反，$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$与 ω、θ、I、I_3 的关系可以由图 7.106 的矢量关系求出. 这里就不作

计算了.

7.5.3　在空间有一刚体,所有外界影响(包括重力)全可忽略.

(1) 用牛顿定律证明角动量守恒;

(2) 假设刚体的质心在一个惯性系中静止,它的旋转轴一定要有一个固定方向吗?

解　(1) 刚体不受外力,只有内力作用.设刚体内第 i 个质元的质量为 m_i,受到第 j 个质元的作用力为 $\boldsymbol{F}_{ij}$,则由牛顿运动第二定律.

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{r}_i\times\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\sum_i\left(\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}\right)=\sum_i\left(\boldsymbol{r}_i\times\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}\right)=\sum_i\sum_{j\neq i}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})\tag{1}$$

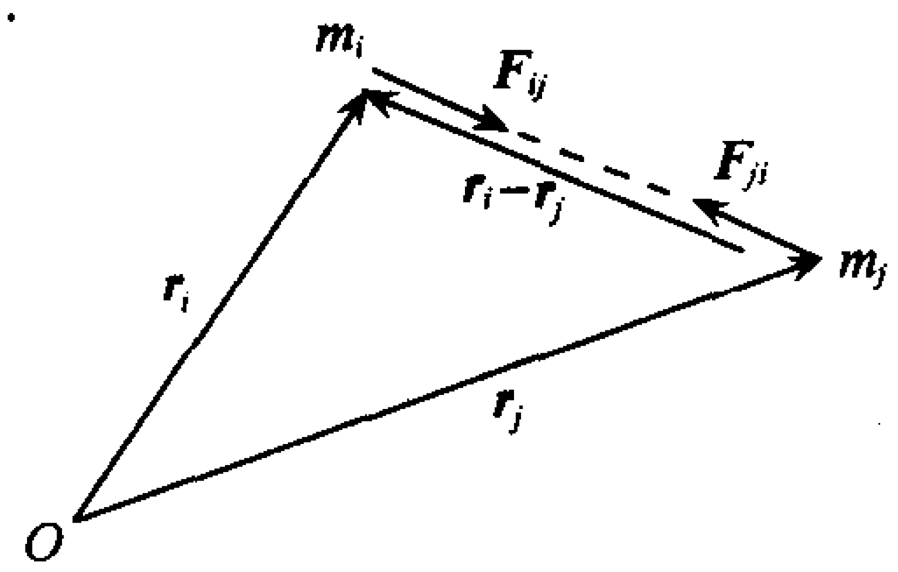


图 7.108

由牛顿运动第三定律,

$$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}$$

且在 i、j 两质点的连线上,由图 7.108 可见,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}\\&=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{r}_j\times(-\boldsymbol{F}_{ij})=(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}=0\end{aligned}$$

$\sum\limits_i\sum\limits_{j\neq i}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}$中各项都像上述那样成对出现的,故有

$$\sum_i\sum_{j\neq i}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})=0$$

代入式(1)得

$$\sum_i\left(\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}\right)=0\tag{2}$$

刚体关于固定点 O 的角动量定义为

$$\boldsymbol{J}=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\\&=\sum_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)+\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\\&=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)=0\end{aligned}$$

所以　$\boldsymbol{J}=$ 常量

因为固定点 O 可以任取,因此刚体对任何固定点的角动量都是守恒的.

(2) 在质心为静止的惯性系中,刚体做围绕质心的定点转动,根据上述论证,由于不受任何外力,刚体对质心的角动量是恒矢量,而刚体的角速度$\boldsymbol{\omega}$一般不与 $\boldsymbol{J}$ 同向,而只有当刚体绕一个惯量主轴转动时,才有 $\boldsymbol{J}/\!/\boldsymbol{\omega}$,例如 z 轴(固连于刚体)是惯量主轴,又绕 z 轴转动,则

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}I_{xx} & I_{xy} & 0\\ I_{yx} & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}=I_{zz}\omega\boldsymbol{k}=I_{zz}\boldsymbol{\omega}$$

在这种情况下，因为 $\boldsymbol{J}$ 的方向不变，转轴有固定的方向.

说明：由于不受包括重力的所有外力，只要在一个惯性系中刚体有一点保持不动，上述的结论都是有效的. 如果在某个对惯性系做平动的非惯性系中刚体的质心是静止的，由于惯性力对质心这个固定点的力矩为零，上述的结论也是有效的.

7.5.4　一个理想的自由回转仪，即一个有旋转对称性的刚体（主转动惯量为 $I_1=I_2<I_3$），能围绕它的质心自由地转动，运动时不受到力矩作用. 设 $\boldsymbol{u}(t)$ 是 t 时刻沿刚体的对称轴（与转动惯量 I_3 相联系的轴）的单位矢量. 导出用 $t=0$ 时的 $\boldsymbol{u}(0)$ 和初角速度 $\boldsymbol{\omega}(0)$ 表达的 $\boldsymbol{J}(t)$（关于质心的角动量）、$\boldsymbol{\omega}(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 的表达式.

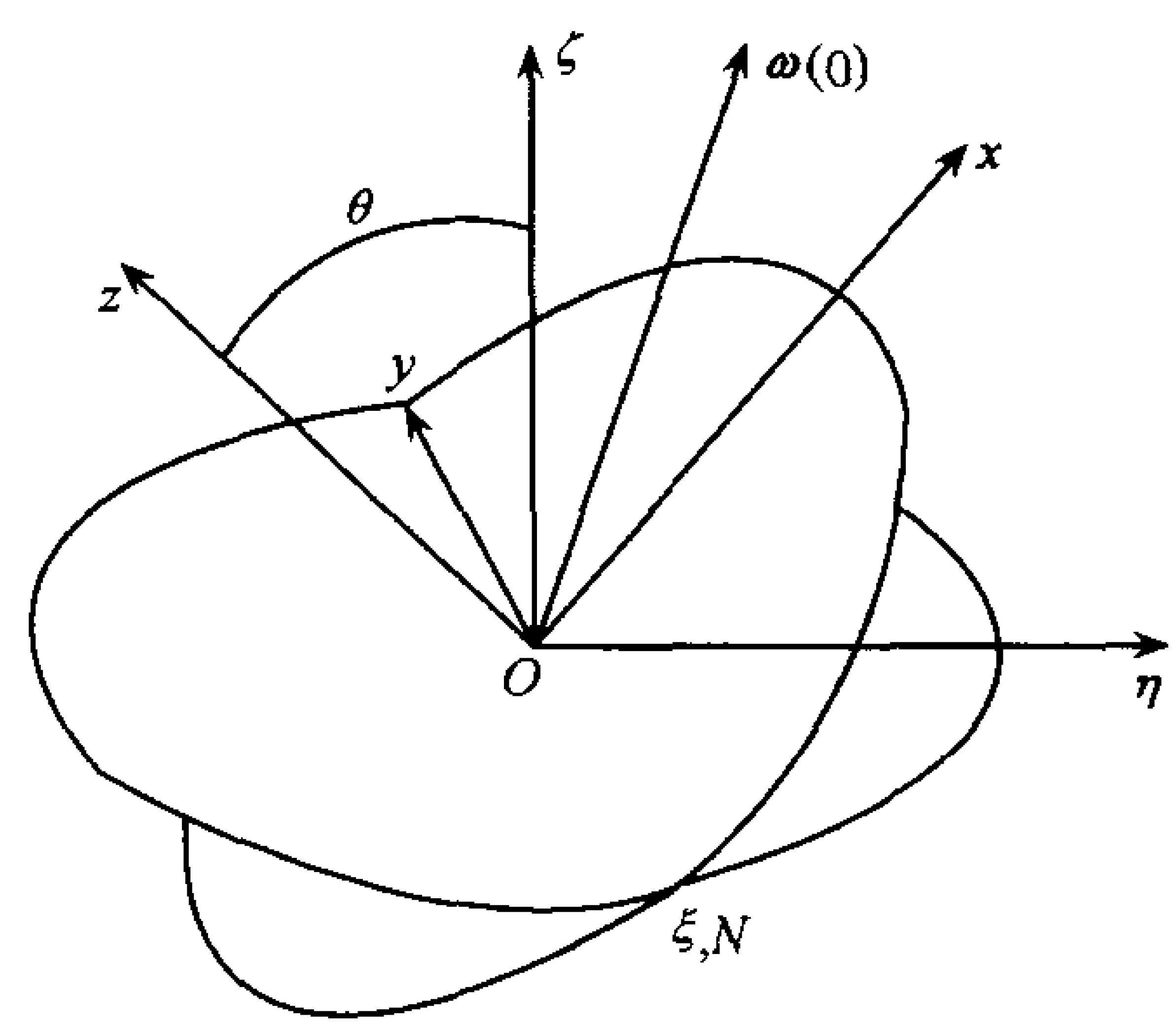


图 7.109

解　方法一：通过刚体质心，取两组坐标系：一个固定的坐标系 $O\xi\eta\zeta$，ζ 轴与初始角动量方向一致；一个固连于刚体的坐标系 $Oxyz$，z 轴沿刚体的对称轴，选取 x、y 轴时，使初角速度矢量在 y 轴方向的分量为零，即 $\omega_y(0)=0$，并使 $\omega_x(0)>0$，选取 ξ、η 轴时，使 $\omega_\xi(0)=0$、$\omega_\eta(0)>0$. 这样选取两坐标系后，$t=0$ 时，z、ζ、x、η 四个轴和 $\boldsymbol{\omega}(0)$ 共面，两组坐标系在 $t=0$ 时的位置如图 7.109 所示.

列出部分欧拉动力学方程和欧拉运动学方程，

$$I_3\dot{\omega}_z=0 \tag{1}$$

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi \tag{2}$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi} \tag{3}$$

其中 θ、φ、ψ 是三个欧拉角，分别为章动角、进动角和自转角，

$t=0$ 时，$\varphi=0$，$\psi=\dfrac{\pi}{2}$

$$\boldsymbol{\omega}(0)=\omega_{x0}\boldsymbol{i}+\omega_{z0}\boldsymbol{k}$$

因 $\boldsymbol{\omega}(0)$ 相对于旋转对称轴的位置是已知的. ω_{x0} 和 ω_{z0} 是已知的. 由式(1)可得

$$\omega_z=\omega_{z0}$$

$$\boldsymbol{J}=I_1\omega_x\boldsymbol{i}+I_1\omega_y\boldsymbol{j}+I_3\omega_z\boldsymbol{k}=I_1\omega_x\boldsymbol{i}+I_1\omega_y\boldsymbol{j}+I_3\omega_{z0}\boldsymbol{k} \tag{4}$$

因为 $\boldsymbol{J}=$ 常量，所以 $J=$ 常量.

$$J=J(0)=\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2+I_1^2\omega_{y0}^2+I_3^2\omega_{z0}^2}=\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2+I_3^2\omega_{z0}^2} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{J}=J\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i}+J\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j}+J\cos\theta\boldsymbol{k} \tag{6}$$

由式(4)、(6)，得

$$\omega_x = \frac{J}{I_1}\sin\theta\sin\psi = \frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}\sin\theta\sin\psi \tag{7}$$

$$\omega_y = \frac{J}{I_1}\sin\theta\cos\psi = \frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}\sin\theta\cos\psi \tag{8}$$

$$I_3\omega_{z0} = J\cos\theta$$

所以

$$\cos\theta = \frac{I_3\omega_{z0}}{J} = \frac{I_3\omega_{z0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}} \tag{9}$$

$$\dot{\theta} = 0 \tag{10}$$

由式(2)、(7)、(8)、(9)、(10)可得

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1} \tag{11}$$

$$\omega_x = \omega_{x0}\sin\psi, \qquad \omega_y = \omega_{x0}\cos\psi \tag{12}$$

由式(3)、(9)、(11)及 $\omega_z=\omega_{z0}$得

$$\dot{\psi} = \omega_z - \dot{\varphi}\cos\theta = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0} \tag{13}$$

积分式(11)、(13),注意初条件:$t=0$ 时,$\varphi=0$,$\psi=\frac{\pi}{2}$,得

$$\varphi = \frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}t \tag{14}$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}t \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{x0}\sin\psi\,\boldsymbol{i} + \omega_{x0}\cos\psi\,\boldsymbol{j} + \omega_{z0}\,\boldsymbol{k} \tag{16}$$

虽然 ψ 已由式(15)给出,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 还是 t 的函数,不能说$\boldsymbol{\omega}(t)$作为 t 的函数关系已经获得. 我们已经证明了$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$均为常量,$\dot{\theta}=0$,证明了回转仪的运动是规则进动,根据定点转动可形象地表示为本体极面在空间极面上纯滚动,已能写出 $\boldsymbol{i}(t)$、$\boldsymbol{j}(t)$和 $\boldsymbol{k}(t)$,我们用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{\xi}^0$、$\boldsymbol{\eta}^0$、$\boldsymbol{\zeta}^0$ 的关系得 $\boldsymbol{i}(t)$等,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i} &= \cos\psi\cos\varphi\,\boldsymbol{\xi}^0 + \cos\psi\sin\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0 + \sin\psi\sin\theta\,\boldsymbol{\zeta}^0 + \sin\psi\cos\theta\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{\xi}^0 + \cos\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0\right] \\ &= (\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\,\boldsymbol{\xi}^0 + (\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\,\boldsymbol{\eta}^0 + \sin\psi\sin\theta\,\boldsymbol{\zeta}^0\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j} &= \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi\,\boldsymbol{\xi}^0 + \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0 \\ &\quad + \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\,\boldsymbol{\zeta}^0 + \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\left[\cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{\xi}^0 + \cos\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0\right] \\ &= (-\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\theta\sin\psi)\,\boldsymbol{\xi}^0 + (-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\,\boldsymbol{\eta}^0 + \cos\psi\sin\theta\boldsymbol{\zeta}^0\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k} &= \sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\boldsymbol{\xi}^0 + \sin\theta\cos(\pi - \varphi)\,\boldsymbol{\eta}^0 + \cos\theta\,\boldsymbol{\zeta}^0 \\ &= \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{\xi}^0 - \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0 + \cos\theta\,\boldsymbol{\zeta}^0\end{aligned} \tag{19}$$

将式(17)、(18)、(19)代入式(16)得

$$
\begin{aligned}
\omega_\xi(t) &= \omega_{x0}\sin\psi(\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi) \\
&\quad + \omega_{x0}\cos\psi(-\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\theta\sin\varphi) + \omega_{z0}(\sin\theta\sin\varphi) \\
&= -\omega_{x0}\cos\theta\sin\varphi + \omega_{z0}\sin\theta\sin\varphi \\
&= \frac{I_1 - I_3}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}\omega_{x0}\omega_{z0}\sin\left(\frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}t\right) \\
\omega_\eta(t) &= \omega_{x0}\sin\psi(\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi) \\
&\quad + \omega_{x0}\cos\psi(-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi) + \omega_{z0}(-\sin\theta\cos\varphi) \\
&= \omega_{x0}\cos\theta\cos\varphi - \omega_{z0}\sin\theta\cos\varphi \\
&= \frac{I_3 - I_1}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}\omega_{x0}\omega_{z0}\cos\left(\frac{\sqrt{I_1\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}t\right) \\
\omega_\zeta(t) &= \omega_{x0}\sin\psi(\sin\psi\sin\theta) + \omega_{x0}\cos\psi(\cos\psi\sin\theta) + \omega_{z0}(\cos\theta) \\
&= \omega_{x0}\sin\theta + \omega_{z0}\cos\theta = \frac{I_1\omega_{x0}^2 + I_3\omega_{z0}^2}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}
\end{aligned}
$$

在得到上述结果时用了式(9)和式(14).

方法二:直接用关于 ω_ξ、ω_η、ω_ζ 的欧拉运动学方程,

$$
\omega_\xi = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi
$$

$$
\omega_\eta = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi
$$

$$
\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\varphi}\cos\theta
$$

用已求得的 $\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$、$\cos\theta$,立即可得

$$
\omega_\xi(t) = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}\frac{I_1\omega_{x0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}\sin\varphi
$$

$$
\omega_\eta(t) = -\left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}\frac{I_1\omega_{x0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}\cos\varphi
$$

$$
\omega_\zeta(t) = \frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1} + \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}\frac{I_3\omega_{z0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}
$$

不难看出,两种方法的结果完全一致.

因为　　$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(0)$

所以　　$\boldsymbol{J} = J\boldsymbol{\zeta}^0 = \sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}\,\boldsymbol{\zeta}^0$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{k}(t) &= \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{\xi}^0 - \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0 + \cos\theta\,\boldsymbol{\zeta}^0 \\
&= \frac{I_1\omega_{x0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}(\sin\varphi\,\boldsymbol{\xi}^0 - \cos\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0) + \frac{I_3\omega_{z0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}\boldsymbol{\zeta}^0
\end{aligned}
$$

如要用 $\boldsymbol{u}(0)$ 来表示 $\boldsymbol{u}(t)$,

因为
$$u(0) = k(0) = -\sin\theta\,\boldsymbol{\eta}^0 + \cos\theta\,\boldsymbol{\zeta}^0$$
$$u_{\eta0} = -\sin\theta, \qquad u_{\zeta0} = \cos\theta$$
$$u(t) = -u_{\eta0}\sin\varphi\,\boldsymbol{\xi}^0 + u_{\eta0}\cos\varphi\,\boldsymbol{\eta}^0 + u_{\zeta0}\,\boldsymbol{\zeta}^0$$
由于 $\cos\theta$ 已知，$\boldsymbol{\xi}^0$、$\boldsymbol{\eta}^0$、$\boldsymbol{\zeta}^0$ 均为已知的量.

7.5.5 均匀圆盘绕其质心做定点自由转动，开始时，圆盘绕与圆盘的对称轴成 45° 的轴线转动，角速度为 ω_0. 证明在以后的运动中，圆盘的轴线绘出一个正圆锥面，此圆锥面的轴线与初始转动轴的夹角为 $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$，并证明圆盘轴线以等角速 $\frac{1}{2}\sqrt{10}\omega_0$ 转动.

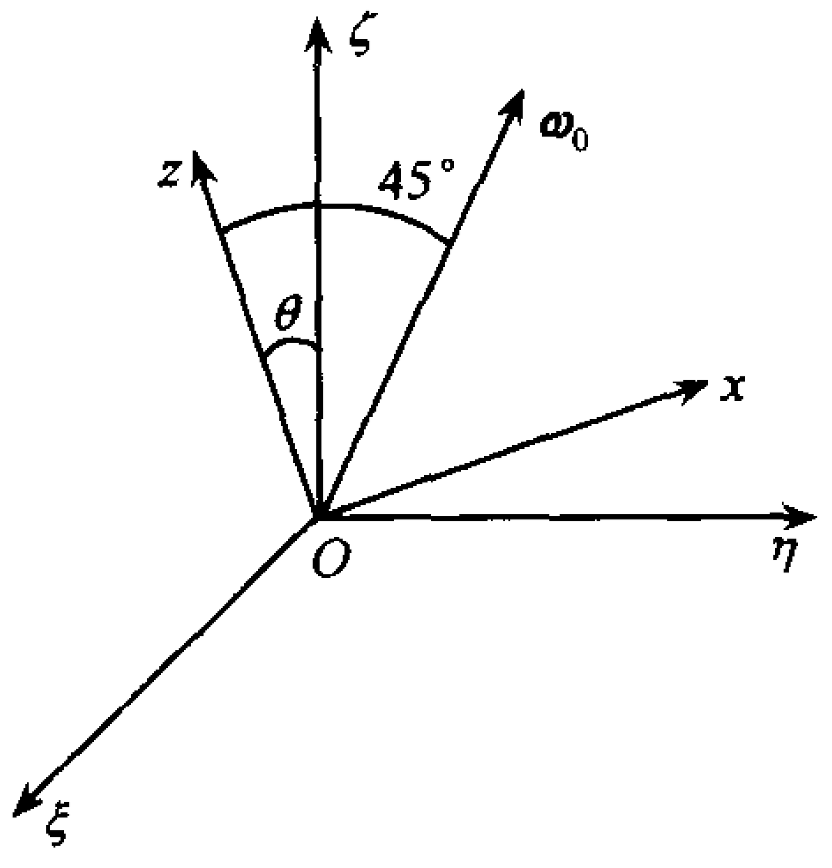


图 7.110

证明 可利用上题结果，取与上题相同的坐标，O 为质心，z 轴取圆盘的对称轴，沿对 O 点的角动量 $\boldsymbol{J}$ 的方向取 ζ 轴，$t=0$ 时，z、ζ、x 轴与 $\boldsymbol{\omega}_0$ 共面，如图 7.110 所示，设圆盘质量为 m、半径为 R.
$$\omega_{x0} = \omega_{z0} = \omega_0\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$$
$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mR^2, I_3 = I_1 + I_2 = mR^2$$
上题已证明 $\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$ 均为常量，刚体的定点转动是规则进动，z 轴和 $\boldsymbol{\omega}$ 均围绕 ζ 轴做等角速转动，z 轴即圆盘的轴线绘出一正圆锥，此圆锥面的轴线即 ζ 轴，它与初始转轴的夹角为 $45°-\theta$.

上题已求出
$$\cos\theta = \frac{I_3\omega_{z0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}$$
代入本题的 I_1、I_3、ω_{x0} 和 ω_{z0}，可得
$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{2}$$
$$\tan(45° - 0) = \frac{\tan45° - \tan\theta}{1 + \tan45 \cdot \tan\theta} = \frac{1}{3}$$
所以圆锥面的轴线（即 ζ 轴）与初始转动轴（沿图中 $\boldsymbol{\omega}_0$ 方向）的夹角为 $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

圆盘轴线（即 z 轴）的转动角速度为定点转动中的进动角速度 $\dot{\varphi}$，上题已求出，
$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}$$
代入本题的 I_1、I_3、ω_{x0}、ω_{z0}，可得
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{10}\omega_0$$

7.5.6 一个质量为 m、半径为 a 的均质圆盘绕通过质心与其垂线成 α 角的轴以角速度 Ω 转动，圆盘突然被释放，让其绕质心自由转动.

(1) 证明转轴在空间描绘出一个圆锥，相对于圆盘也描绘出一个圆锥；

解　此题也可利用 7.5.4 题解得的结果.

证明　(1) 7.5.4 题已证明具有旋转对称轴围绕其质心的自由转动是规则进动，这就证明了本体极面和空间极面都是正圆锥面. 转轴在空间描绘出的是空间极面，转轴相对于圆盘描绘出的是本体极面，这就证明了所要的结论：转轴在空间描绘出正圆锥，相对于圆盘也描绘出正圆锥.

(2) 转轴在空间描绘圆锥的角速度为圆盘的进动角速度$\dot{\varphi}$.

今取 7.5.4 题解的两组坐标，已得

$$\dot{\varphi}=\frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2+I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}$$

这里，

$$I_1=\frac{1}{2}ma^2,I_3=ma^2$$

$$\omega_{x0}=\Omega\sin\alpha,\qquad \omega_{z0}=\Omega\cos\alpha$$

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{\frac{1}{2}ma^2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}ma^2\Omega\sin\alpha\right)^2+(ma^2\Omega\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$$

转轴在空间描绘圆锥一周所需的时间为

$$T_1=\frac{2\pi}{|\dot{\varphi}|}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$$

(3) 转轴相对于圆盘描绘圆锥的角速度为圆盘的自转角速度$\dot{\psi}$，用 7.5.4 题得到的结果：

$$\dot{\psi}=\left(1-\frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}=\left(1-\frac{ma^2}{\frac{1}{2}ma^2}\right)\Omega\cos\alpha=-\Omega\cos\alpha$$

转轴相对于圆盘描绘圆锥一周所需时间为

$$T_2=\frac{2\pi}{|\dot{\psi}|}=\frac{2\pi}{\Omega\cos\alpha}$$

7.5.7　一回转仪可绕其质心做定点自由转动，若 $I_1=I_2=nI_3$，$t=0$ 时，对称轴与进动轴之间的夹角为 θ_0，证明：

(1) 刚体作规则进动；

(2) 自转角速度$\dot{\psi}$与进动角速度$\dot{\varphi}$间有如下关系：

$$\dot{\psi}=(n-1)\dot{\varphi}\cos\theta_0$$

证明　(1) 本题也可用 7.5.4 题的结果，那里已证明了$\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$均为常量，足以说明该定点转动是规则进动，这里不再重复.

(2) 像 7.5.4 题那样取两组坐标系，也可利用 7.5.4 题解的结果：

$$\dot{\varphi}=\frac{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2+I_3^2\omega_{z0}^2}}{I_1}\tag{1}$$

$$\dot{\psi} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0} \tag{2}$$

$$\cos\theta = \cos\theta_0 = \frac{I_3\omega_{z0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}} \tag{3}$$

由式(1)、(3),可得

$$\cos\theta_0 = \frac{I_3\omega_{z0}}{I_1\dot{\varphi}}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3\omega_{z0}}{I_1\cos\theta_0} \tag{4}$$

由式(2)、(4),得

$$\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} = \frac{1 - \dfrac{I_3}{I_1}}{\dfrac{I_3}{I_1\cos\theta_0}} = \left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right)\cos\theta_0$$

代入 $I_1 = nI_3$,上式即可写为

$$\dot{\psi} = (n-1)\dot{\varphi}\cos\theta_0$$

7.5.8 若刚体关于质心的三个主转动惯量不相等,且 $I_1 > I_2 > I_3$,刚体绕质心做定点自由转动时,如让刚体绕一惯量主轴转动,它将继续围绕该轴转动.如果初始的转轴非常接近某一惯量主轴但不与之成一直线,以后转轴会不会远离这一惯量主轴,如不远离,围绕这惯量主轴的转动是稳定的,用欧拉动力学方程证明:绕与 I_1 和 I_3(它们分别是最大和最小的主转动惯量)相应的惯量主轴的运动是稳定的.

证明 设 ω_1、ω_2、ω_3 分别是角速度沿三个惯量主轴的分量,由欧拉动力学方程.

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

设初始时刻转轴非常接近 x 轴.即 $t=0$ 时

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0 + \delta_0)\boldsymbol{i} + \varepsilon_0\boldsymbol{j} + \sigma_0\boldsymbol{k}$$

δ_0、ε_0、σ_0 均为小量.以后的角速度表为

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0 + \delta)\boldsymbol{i} + \varepsilon\boldsymbol{j} + \sigma\boldsymbol{k}$$

如 δ、ε、σ 仍保持小量,则绕与 I_1 相应的 x 轴的转动是稳定的,如不能都保持小量,则是不稳定的.

设 δ、ε、σ 均为小量,代入欧拉动力学方程,

$$I_1(\dot{\omega}_0 + \dot{\delta}) - (I_2 - I_3)\varepsilon\sigma = 0$$

$$I_2\dot{\varepsilon} - (I_3 - I_1)\sigma(\omega_0 + \delta) = 0$$

$$I_3\dot{\sigma} - (I_1 - I_2)(\omega_0 + \delta)\varepsilon = 0$$

注意 $\dot{\omega}_0 = 0$,并略去二阶小量 $\varepsilon\sigma$、$\sigma\delta$、$\delta\varepsilon$,上述三式变为

$$I_1\dot{\delta} = 0 \tag{1}$$

$$I_2\dot{\varepsilon} - (I_3 - I_1)\omega_0\sigma = 0 \tag{2}$$

$$I_3\dot{\sigma} - (I_1 - I_2)\omega_0\varepsilon = 0 \tag{3}$$

对式(1)积分,用初始条件得 $\delta=\delta_0$,即

$$\omega_x = \omega_0 + \delta = \omega_0 + \delta_0$$

式(2)对 t 求导,再将式(3)代入得

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\omega_0^2\varepsilon = 0 \tag{4}$$

同样,式(3)对 t 求导,再将式(2)代入得

$$\ddot{\sigma} + \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\omega_0^2\sigma = 0 \tag{5}$$

因为

$$I_1 > I_3, I_1 > I_2$$

所以

$$\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\omega_0^2 > 0$$

只要初始条件 ε_0、σ_0 为小量,由式(4)、(5)可知,以后 ε、σ 均为小量. 这就证明了绕相应于最大主转动惯量的轴的定点转动是稳定的.

讨论绕相应于最小主转动惯量的轴的定点转动是否稳定的问题,可以不必另列欧拉动力学方程,仍可利用上面的式(4)、(5),把 I_1、I_2、I_3 的大小关系改为 $I_1<I_2, I_1<I_3$ 即可,此时,$I_1-I_3<0, I_1-I_2<0$. 但仍有

$$\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\omega_0^2 > 0$$

因此相应于最小主转动惯量的轴的定点转动也是稳定的.

如 $I_1>I_2, I_1<I_3$ 或 $I_1>I_3, I_1<I_2$,都有 $\dfrac{(I_1-I_3)(I_1-I_2)}{I_2 I_3}\omega_0^2<0$,因此绕相应于既不最大又不最小的主转动惯量的轴的定点转动是不稳定的.

7.5.9　一个物体围绕其质心做定点自由转动,主转动惯量 $I_1>I_2>I_3$. 若开始时,$\omega_{z0}>0, \omega_{x0}<0$,且有 $J^2=2I_2T$,其中 J 是对固定点的角动量,T 是动能. 证明:

$$\omega_x = -\frac{J}{I_2}\left[\frac{I_2(I_2 - I_3)}{I_1(I_1 - I_3)}\right]^{1/2}\operatorname{sech}\tau$$

$$\omega_y = \frac{J}{I_2}\tanh\tau$$

$$\omega_z = \frac{J}{I_2}\left[\frac{I_2(I_1 - I_3)}{I_3(I_1 - I_3)}\right]^{1/2}\operatorname{sech}\tau$$

其中

$$\tau = \frac{J}{I_2}\left[\frac{(I_1-I_2)(I_2-I_3)}{I_1 I_3}\right]^{1/2} t$$

当 t 趋于无穷大时,将发生什么情况?

证明

$$I_1\dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z = 0 \tag{1}$$

$$I_2\dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_z\omega_x = 0 \tag{2}$$

$$I_3\dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\omega_x\omega_y = 0 \tag{3}$$

$$J^2 = I_1^2\omega_x^2 + I_2^2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2$$

$$= 2I_2T = I_2(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2)$$

所以
$$I_1(I_1 - I_2)\omega_x^2 + I_3(I_3 - I_2)\omega_z^2 = 0$$

$$\omega_x = -\sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_3)}{I_1(I_1 - I_2)}}\omega_z \tag{4}$$

(只取负值是考虑到初始条件 $\omega_{z0}>0,\omega_{x0}<0.$)

再用 $J^2=I_1^2\omega_x^2+I_2^2\omega_y^2+I_3^2\omega_z^2$,将 ω_y 表成 ω_z 的函数,

$$I_2^2\omega_y^2 = J^2 - I_1^2\omega_x^2 - I_3^2\omega_z^2$$

$$= J^2 - \frac{I_1I_3(I_2 - I_3)}{I_1 - I_2}\omega_z^2 - I_3^2\omega_z^2$$

$$= J^2 - \frac{I_2I_3(I_1 - I_3)}{I_1 - I_2}\omega_z^2$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{J^2}{I_2^2} - \frac{I_3(I_1 - I_3)}{I_2(I_1 - I_2)}\omega_z^2}$$

$$= \sqrt{\frac{J^2}{I_2^2}\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)} - \omega_z^2}\cdot\sqrt{\frac{I_3(I_1 - I_3)}{I_2(I_1 - I_2)}} \tag{5}$$

将式(4)、(5)代入式(3),

$$\dot{\omega}_z + \sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1I_2}}\cdot\sqrt{\frac{J^2}{I_2^2}\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)} - \omega_z^2}\,\omega_z = 0$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\omega_z(a^2 - \omega_z^2)^{1/2}} = -\int\sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1I_2}}\mathrm{d}t$$

其中
$$a^2 = \frac{J^2I_2(I_1 - I_2)}{I_2^2I_3(I_1 - I_3)}$$

用积分公式:
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(a^2 - u^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{a}{u}\right)$$

$$-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{a}{\omega_z}\right) = -\sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1I_2}}t$$

$$\operatorname{arc\,cosh}\left[\frac{J}{I_2}\sqrt{\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)}}\Big/\omega_z\right]$$

$$= \frac{J}{I_2}\sqrt{\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)}}\cdot\sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1I_2}}t$$

$$= \frac{J}{I_2}\sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_1I_3}}t$$

令
$$\tau = \frac{J}{I_2}\sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_1I_3}}t$$

$$\frac{J}{I_2}\sqrt{\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)}}\Big/\omega_z = \cosh\tau$$

$$\omega_z = \frac{J}{I_2}\sqrt{\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)}}\operatorname{sech}\tau$$

$$\omega_x = -\sqrt{\frac{I_3(I_2-I_3)}{I_1(I_1-I_3)}}\omega_z = -\frac{J}{I_2}\sqrt{\frac{I_2(I_2-I_3)}{I_1(I_1-I_3)}}\operatorname{sech}\tau$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{I_3(I_1-I_3)}{I_2(I_1-I_2)}}\left[\frac{J^2}{I_2^2}\frac{I_2(I_1-I_2)}{I_3(I_1-I_3)} - \frac{J^2}{I_2^2}\frac{I_2(I_1-I_2)}{I_3(I_1-I_3)}\operatorname{sech}^2\tau\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{J}{I_2}\tanh\tau$$

当 $t\to\infty$ 时，$\operatorname{sech}\tau\to 0$，$\tanh\tau\to 1$，所以 $\omega_x\to 0$，$\omega_y\to\frac{J}{I_2}$，$\omega_z\to 0$.

最终将变成围绕固连于刚体的过质心的 y 轴(主转动惯量居中的惯量主轴)以恒定角速度$\frac{J}{I_2}$转动，y 轴的正向与 $\boldsymbol{J}$ 的方向一致.

7.5.10 一个直径为 20cm、密度为 5g/cm³ 的球在自由空间以 2πrad/s 的角速度转动. 有一只质量为 10^{-3}g 的聪明的小跳蚤居住在固定在球面上又在转轴上的一所无质量的小房子里，如图 7.111 所示，为了让小房子位于原赤道处，小跳蚤很快地跳到纬度 45°处，呆在那里等适当的时间，问要等多长时间实现这种转移.

(注意：忽略小跳蚤在球面上跳动期间发生的微小进动.)

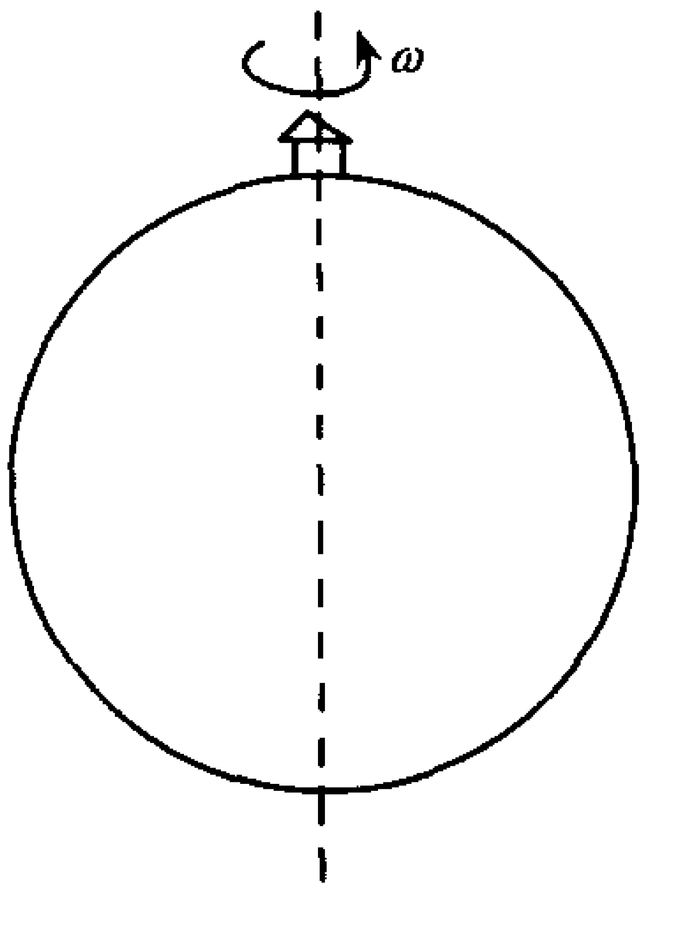


图 7.111

解 自由空间是指系统在空间中不受任何外力，系统以一定角速度转动，必然是在一个惯性系中围绕通过质心的某个惯量主轴做恒定角速度的转动.

忽略由于小跳蚤跳到纬度 45°这一过程引起的微小进动，可把跳蚤跳到 45°处时视为 $t=0$，原来的角速度$\boldsymbol{\omega}$视为初始条件，考虑系统(包括球和跳蚤)以后的运动. $t=0$ 时，$\boldsymbol{\omega}$不与系统的一条惯量主轴共线，转轴不能保持原来的方向，或者说$\boldsymbol{\omega}$将随 t 发生变化. 由于跳蚤的质量比球的质量小得多，可认为球心是系统的质心，以后的运动是围绕球心的定点转动，围绕质心的定点自由转动是欧拉情形. 由于系统有旋转对称轴，取适当的动、静两组坐标，它将是规则进动.

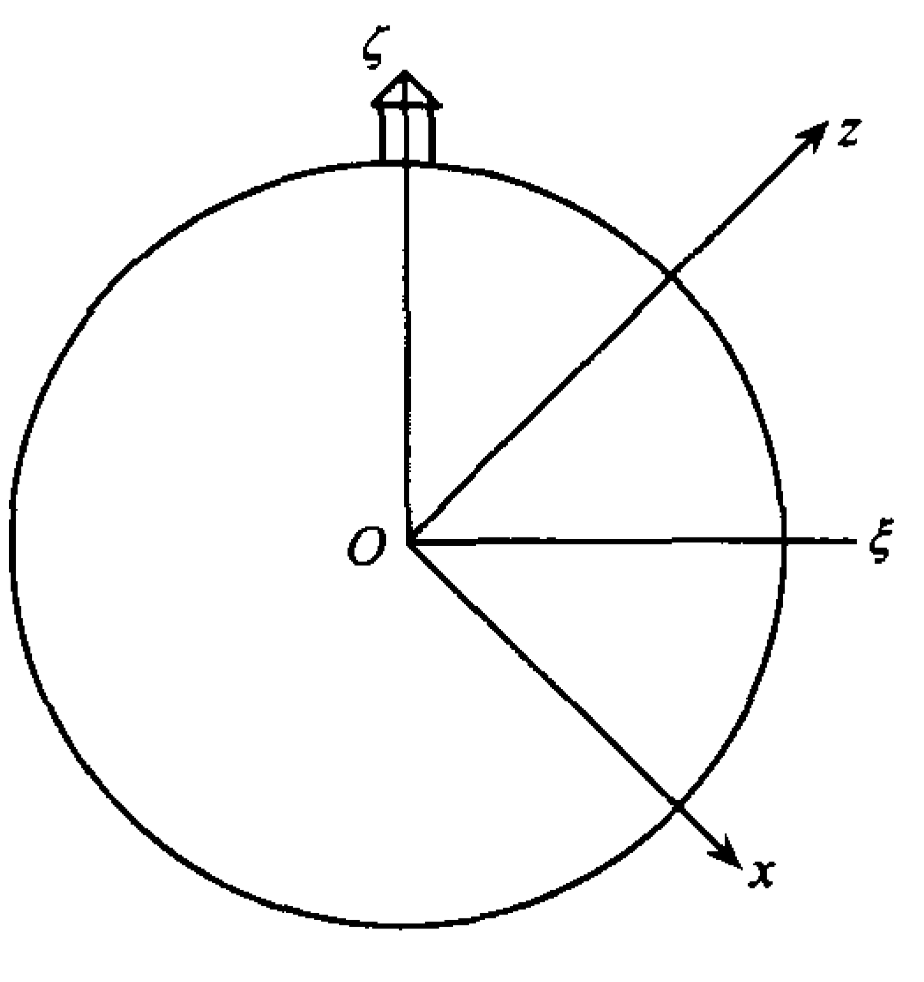


图 7.112

取图 7.112 所示的两组坐标系，$O\xi\eta\zeta$ 为静系，ζ 轴沿原来$\boldsymbol{\omega}$的方向，$Oxyz$ 为动系，固连于球，z 轴通过跳蚤的新位置，$t=0$ 时，x、ξ、z 和 ζ 轴共面，图 7.112 画的就是 $t=0$ 时的情况. z 轴不仅是惯量主轴，而且是旋转对称轴，$I_1=I_2$，欧拉动力学方程为

$$I_1\dot{\omega}_x - (I_1-I_3)\omega_y\omega_z = 0 \tag{1}$$

$$I_1\dot{\omega}_y - (I_3-I_1)\omega_z\omega_x = 0 \tag{2}$$

$$I_3\dot{\omega}_z = 0 \tag{3}$$

由式(3)积分得

$$\omega_z = \omega_{z0}$$

代入式(1)、(2)，联立两式消去 ω_y 可得

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0$$

其中 $\Omega=\frac{I_1-I_3}{I_1}\omega_{z0}$，这里 $I_1>I_3$，

$$\omega_x = A\sin(\Omega t + \alpha) \tag{4}$$

$$\omega_y = \frac{1}{\Omega}\dot{\omega}_x = A\cos(\Omega t + \alpha) \tag{5}$$

其中 A、α 可由初始条件决定，

欧拉运动学方程为

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

又有　J 和 $J_z=I_3\omega_{z0}$ 为常量. 故 $\cos\theta=\frac{J_z}{J}$ 为常量，$\theta=\theta_0$，$\dot{\theta}=0$.

欧拉运动学方程在此情况下可写成

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta_0\sin\psi \tag{6}$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta_0\cos\psi \tag{7}$$

比较式(4)、(5)与式(6)、(7)，可得

$$\dot{\psi} = \Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_{z0}$$

由图可以看出，当

$$t = \frac{\pi}{|\dot{\psi}|} = \frac{\pi}{|\Omega|} = \frac{\pi I_1}{(I_1 - I_3)\omega_{z0}}$$

时，跳蚤居住的小房子到达原赤道的位置.

今球的质量为　　$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$（R 为半径）

$$I_1 = \frac{2}{5}MR^2 + mR^2 \quad (m\text{ 为跳蚤的质量})$$

$$I_3 = \frac{2}{5}MR^2, \qquad \omega_{z0} = \omega_0\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$$

$$t = \frac{\pi\left(\frac{2}{5}MR^2 + mR^2\right)}{mR^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0} \approx \frac{\pi \cdot \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\pi R^3\rho}{m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0}$$

代入 $R=20\text{cm}$，$\rho=5\text{g/cm}^3$，$m=10^{-3}\text{g}$，$\omega_0=2\pi\text{rad/s}$，可得 $t=4.7\times10^7\text{s}$.

说明：所谓“忽略小跳蚤在跳动期间发生的微小进动”，是指可以近似采用我们用的初始条件. 实际上跳动的结果不仅引起了以后的规则进动，也使 $t=0$ 时的角速度偏离了 ζ 轴方向，因为系统的角动量是守恒量，跳动前后均沿 ζ 轴方向，跳动后，转轴不沿惯量主轴，角速度方向不再与角动量一致，而是围绕 ζ 轴（角动量方向）做进动. $t=0$ 时已具有了自转角速度和进动角速度，它们分别沿 z 轴和 ζ 轴方向，角速度方向将偏离 ζ 轴，但自转

角速度很小，偏离ζ轴也很小，所用近似还是合理的.

7.5.11　质量为M、半径为R的均质球固连在一根长度为$l(l\gg R)$无质量的刚性杆的一端，球可以绕杆自转，被置于地球的均匀重力场中，球和杆可以围绕杆的另一端做无摩擦定点转动. 若此杆和球绕竖直轴以不变的角速度$\boldsymbol{\omega}$转动，方向向上，没有章动，球和杆又绕杆以$\boldsymbol{\Omega}$的恒定角速度转动，方向沿杆指向外，求章动角θ.

解　这是拉格朗日情形，刚体又做规则进动，且有旋转对称轴，可取NKZ坐标系，

$$\begin{cases}I_1\dot{\omega}_x+I_3\Omega_y\omega_z-I_1\Omega_z\omega_y=M_x\\I_1\dot{\omega}_y+I_1\Omega_z\omega_x-I_3\Omega_x\omega_z=M_y\\I_3\dot{\omega}_z+I_1(\Omega_x\omega_y-\Omega_y\omega_x)=M_z\end{cases}\tag{1}$$

注意式中的$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\Omega}$均不是题目中的$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\Omega}$，这里的$\boldsymbol{\Omega}$是NKZ坐标系的角速度，它随刚体进动，即是题目中的$\boldsymbol{\omega}$，这里的$\boldsymbol{\omega}$是题目中的$\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega}$，不要混淆. 在导出对本题有用的公式以前都不改用本题的符号.

一般情况，NKZ坐标系还随刚体进动和章动，不随刚体自转，总可使x轴与N轴重合

$$\Omega_x=\dot{\theta},\quad \Omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta,\quad \Omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\Omega}+\dot{\boldsymbol{\psi}}\\&=\dot{\theta}\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j}+(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{3}$$

外力矩是重力产生的，取竖直向上为ζ轴正向，设质心的坐标为$(0,0,l)$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=l\boldsymbol{k}\times mg(-\boldsymbol{\zeta}^0)\\&=l\boldsymbol{k}\times(-mg\sin\theta\boldsymbol{j}-mg\cos\theta\boldsymbol{k})=mgl\sin\theta\boldsymbol{i}\end{aligned}\tag{4}$$

将式(2)、(3)、(4)代入方程组(1)，

$$I_1\ddot{\theta}+I_3(\dot{\varphi}\sin\theta)(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})-I_1\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=mgl\sin\theta\tag{5}$$

$$I_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin\theta)+I_1(\dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\theta}-I_3\dot{\theta}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=0\tag{6}$$

$$I_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=0\tag{7}$$

由规则进动，$\theta=\theta_0$，故$\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$，式(5)简化为

$$I_3\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})-I_1\dot{\varphi}^2\cos\theta_0=mgl$$

令

$$I_1=\frac{2}{5}MR^2+Ml^2,\qquad I_3=\frac{2}{5}MR^2$$

$$\dot{\varphi}=\omega,\qquad \dot{\psi}=\Omega,\qquad m=M$$

代入上式，

$$\frac{2}{5}MR^2\omega(\omega\cos\theta_0+\Omega)-\left(\frac{2}{5}MR^2+Ml^2\right)\omega^2\cos\theta_0=Mgl$$

解出

$$\cos\theta_0=\frac{2R^2\omega\Omega-5gl}{5l^2\omega^2}$$

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{2R^2\omega\Omega - 5gl}{5l^2\omega^2}\right)$$

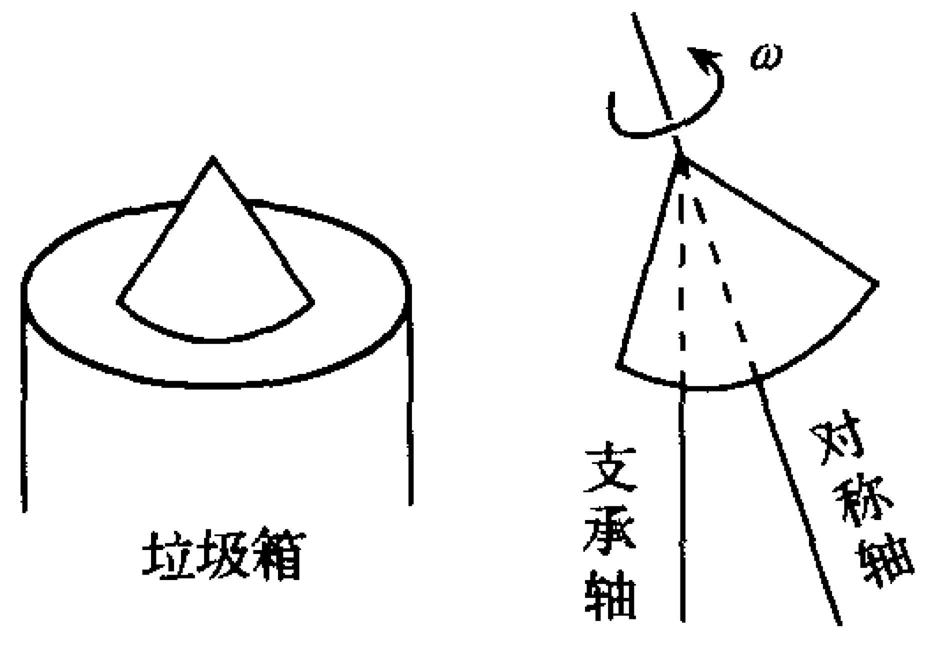


图 7.113

7.5.12 垃圾箱上有一锥形盖由一个安在盖中心的轴支承着.假定使盖的圆锥倾斜,并使它很快地绕自己的对称轴旋转,如图 7.113 所示.问对自旋方向$\boldsymbol{\omega}$而言,盖进动的方向相同还是相反?并求进动角速度.

解 方法一:垃圾箱盖具有旋转对称轴,可采用 NKZ 坐标系,取 z 轴沿对称轴,ζ 轴竖直向上,如图 7.114 所示,图中 C 为质心,设离固定点 O 的距离为 l.取 NKZ 坐标系,可使 $m\boldsymbol{g}$、y、ζ、z 轴保持共面.(设盖的质量为 m),

$$\boldsymbol{M} = -l\boldsymbol{k}\times m\boldsymbol{g}(-\boldsymbol{\zeta}^0)$$
$$= -l\boldsymbol{k}\times(-mg\sin\theta\,\boldsymbol{j} - mg\cos\theta\boldsymbol{k}) = -mgl\sin\theta\boldsymbol{i}$$

用上题得到的式(1)、(2)、(3),

$$I_1\ddot{\theta} + I_3\dot{\varphi}\sin\theta(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) - I_1\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = -mgl\sin\theta \tag{1}$$

$$I_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin\theta) + I_1\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - I_3\dot{\theta}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = 0 \tag{2}$$

$$I_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = 0 \tag{3}$$

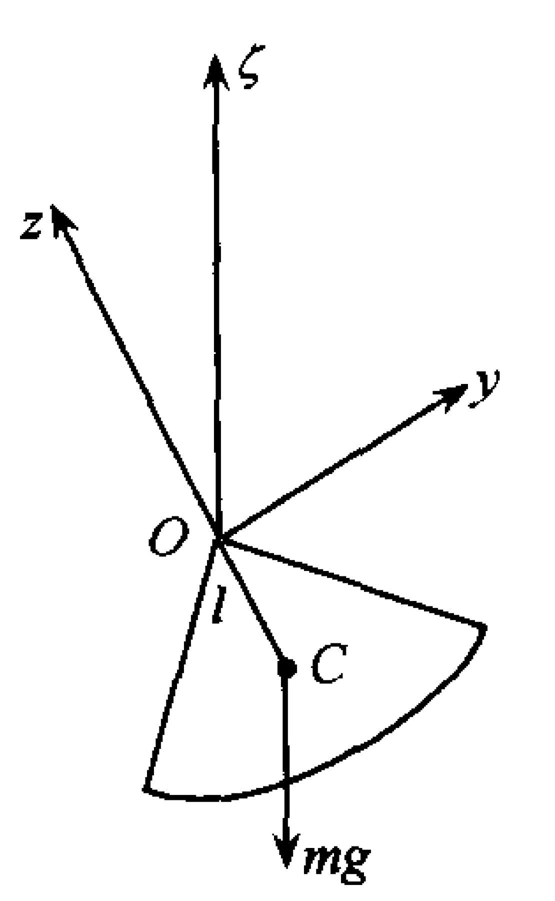


图 7.114

由式(3)得

$$\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = \omega_{z0} \tag{4}$$

因为 ω 很大,在不长时间内

$$\dot{\psi} \approx \omega \tag{5}$$

近似为规则进动,

$$\theta \approx \theta_0,\qquad \dot{\theta} \approx 0,\qquad \ddot{\theta} \approx 0 \tag{6}$$

由式(1)、(4)、(6),进动角速度$\dot{\varphi}$近似满足下列方程:

$$I_1\dot{\varphi}^2\cos\theta_0 - I_3\omega_{z0}\dot{\varphi} - mgl = 0$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} \approx \frac{I_3\omega_{z0} \pm \sqrt{I_3^2\omega_{z0}^2 + 4I_1mgl\cos\theta_0}}{2I_1\cos\theta_0}$$

今 $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$.故 $\cos\theta_0>0$,从 $\boldsymbol{M}$ 沿 $-\boldsymbol{i}$ 方向可知$\dot{\varphi}<0$,故只能取

$$\dot{\varphi} \approx \frac{I_3\omega_{z0} - \sqrt{I_3^2\omega_{z0}^2 + 4I_1mgl\cos\theta_0}}{2I_1\cos\theta_0}$$

因为 ω 很大,由式(4)和式(5),

$$\omega_{z0} \approx \omega$$

$$I_3^2\omega_{z0}^2 \gg 4I_1 mgl\cos\theta_0$$

$$\dot{\varphi} \approx \frac{1}{2I_1\cos\theta_0}\left[I_3\omega_{z0} - I_3\omega_{z0}\left(1 + \frac{2I_1 mgl\cos\theta_0}{I_3^2\omega_{z0}^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{2I_1 mgl\cos\theta_0}{2I_1\cos\theta_0 \cdot I_3\omega_{z0}} \approx -\frac{mgl}{I_3\omega}$$

从上往下看，自转做逆时针转动，进动做顺时针转动，两者转向相反.

方法二：用高速陀螺的初级理论.

因为 ω 很大，可用高速陀螺的初级理论，

$$\boldsymbol{J} \approx I_3\omega_{z0}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{J} \approx \dot{\varphi}\boldsymbol{\zeta}^0 \times I_3\omega_{z0}\boldsymbol{k} = I_3\omega_{z0}\dot{\varphi}\boldsymbol{\zeta}^0 \times \boldsymbol{k}$$

其中$\boldsymbol{\omega}_p$ 是进动角速度，

$$\boldsymbol{M} = -l\boldsymbol{k} \times (-mg\,\boldsymbol{\zeta}^0) = -mgl\,\boldsymbol{\zeta}^0 \times \boldsymbol{k}$$

所以

$$I_3\omega_{z0}\dot{\varphi} \approx -mgl$$

$$\dot{\varphi} \approx -\frac{mgl}{I_3\omega_{z0}} = -\frac{mgl}{I_3\omega}$$

7.5.13　一个刚性、方形的无质量框架包含四个转动着的圆盘，如图 7.115 所示. 每个圆盘的质量均为 m、转动惯量均为 I，转动角速度均为 ω_0. 框架的一个角装上枢轴绕支座自由地转动时框架是水平的，求进动角速度.

解　取固连于框架的 x、y、z 坐标如图 7.116 所示，z 轴竖直向上. 设框架的进动角速度为 Ω.

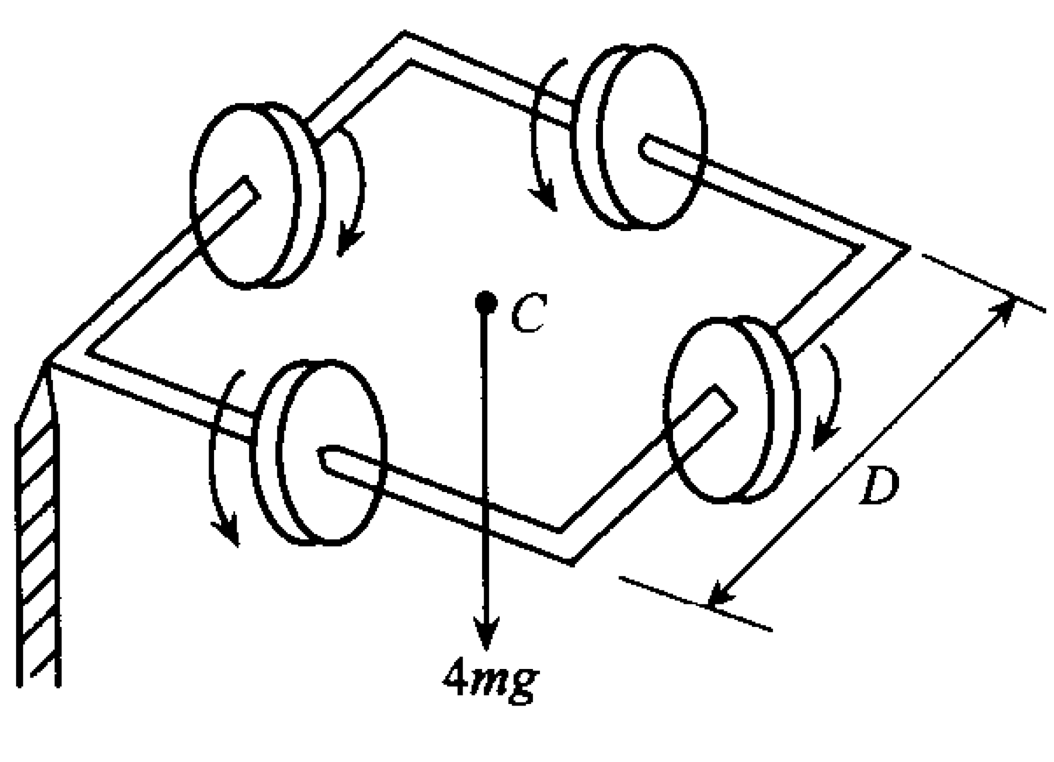


图 7.115

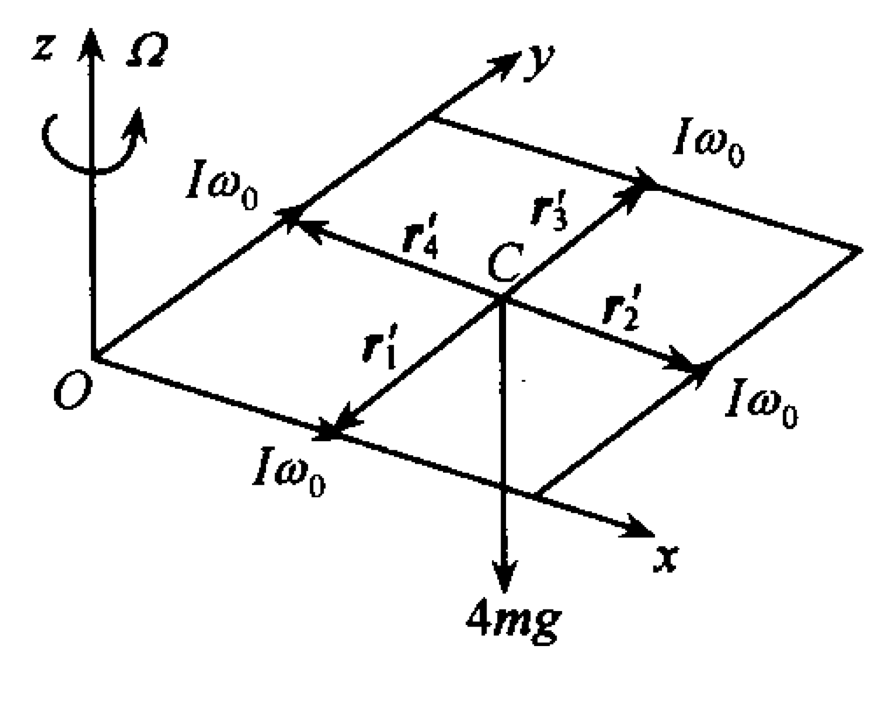


图 7.116

计算四圆盘对 O 点的角动量，先计算四圆盘对质心 C 的角动量，

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{C}} = I\omega_0\boldsymbol{i} + \boldsymbol{r}'_1 \times m(\Omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}'_1) + I\omega_0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{r}'_2 \times m(\Omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}'_2)$$
$$+ I\omega_0\boldsymbol{i} + \boldsymbol{r}'_3 \times m(\Omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}'_3) + I\omega_0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{r}'_4 \times m(\Omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}'_4)$$

其中$\boldsymbol{r}'_1 = -\frac{D}{2}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}'_2 = \frac{D}{2}\boldsymbol{i}$，　$\boldsymbol{r}'_3 = \frac{D}{2}\boldsymbol{j}$，　$\boldsymbol{r}'_4 = -\frac{D}{2}\boldsymbol{i}$. 代入上式，经计算得

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{C}} = 2I\omega_0(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + mD^2\Omega\boldsymbol{k}$$

现在计算四圆盘对 O 点的角动量,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \boldsymbol{J}_C + \overrightarrow{OC} \times 4m(\Omega\boldsymbol{k} \times \overrightarrow{OC}) \\ &= \boldsymbol{J}_C + 4m[\Omega\boldsymbol{k}(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OC}(\overrightarrow{OC} \cdot \Omega\boldsymbol{k})] \\ &= \boldsymbol{J}_C + 4m(OC)^2\Omega\boldsymbol{k} = 2I\omega_0(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + 3mD^2\Omega\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + \Omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{J} \\ &= 0 + \Omega\boldsymbol{k} \times [2I\omega_0(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + 3mD^2\Omega\boldsymbol{k}] \\ &= 2I\omega_0\Omega(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \overrightarrow{OC} \times (-4mg\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{D}{2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \times (-4mg\boldsymbol{k}) = 2mgD(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{i})\end{aligned}$$

因为
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

所以
$$2I\omega_0\Omega(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{i}) = 2mgD(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{i})$$

$$\Omega = \frac{mgD}{I\omega_0}$$

进动角速度的方向竖直向上,从上往下看做逆时针转动.

7.5.14 在北纬 45°处,将一个回转仪安装在轴承上,轴承给予的约束使对称轴只能在水平面内运动,此外,无其他外力矩.考虑地球的自转,证明对称轴沿当地的南北方向时的运动是稳定的,假定转子可近似为一个薄圆环(即轮辐和其他部分的质量可忽略),求对称轴围绕这个南北方向的小振动周期.

解 取坐标系原点 O 在转子中心,动坐标系 $Oxyz$ 既部分固连于转子,z 轴为转子的对称轴,又部分固连于地球,x 轴竖直向上.转子围绕 x、y、z 轴的转动惯量为 I_1、I_1、I_3,z 轴与正北方向的夹角为 θ,如图 7.117 所示.y 轴、z 轴和南北方向均在水平面内.

设转子的自转角速度为 ω,转子的角速度为

$$\dot{\theta}\boldsymbol{i} + \omega\boldsymbol{k}$$

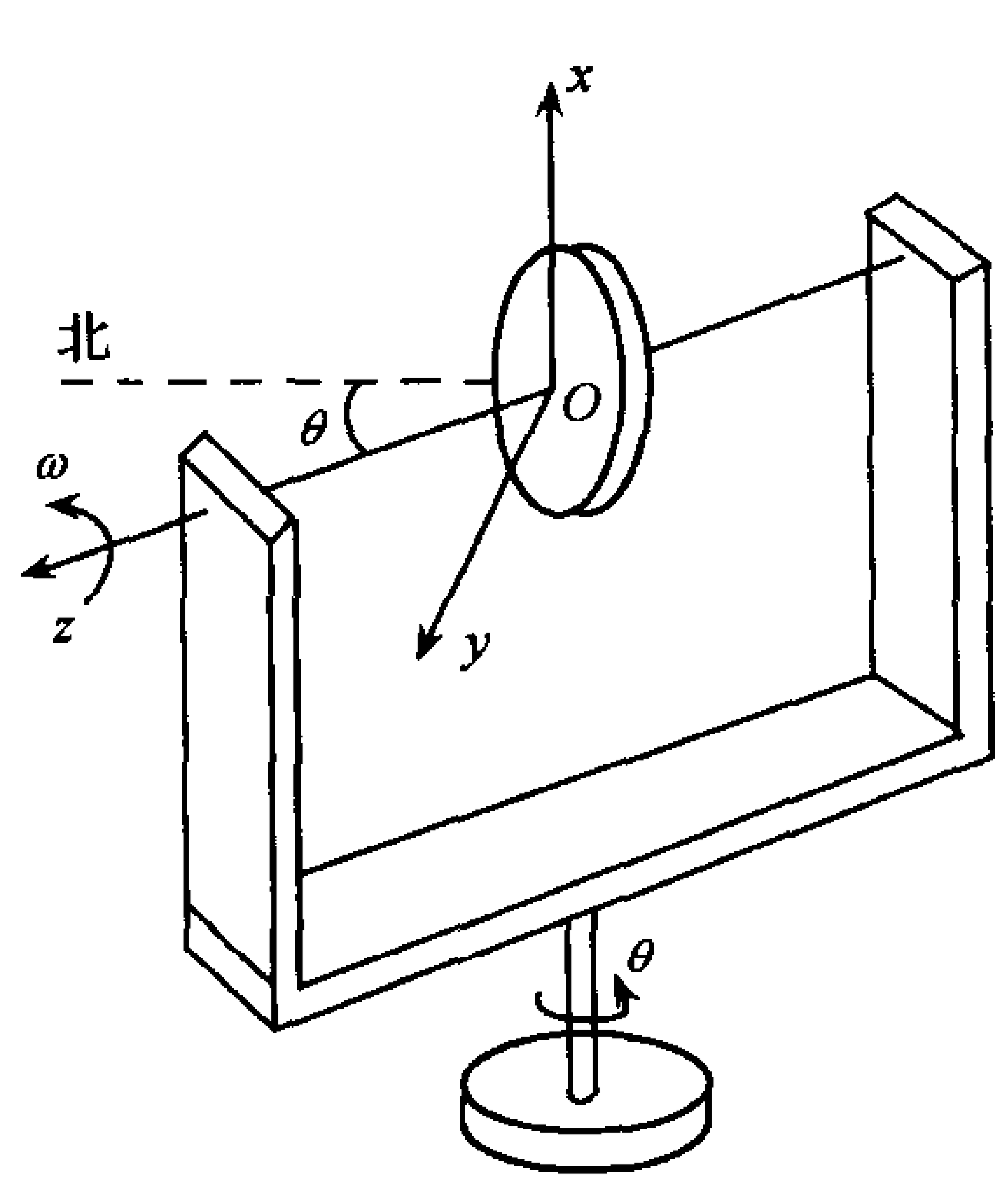


图 7.117

转子的角动量为

$$\boldsymbol{J} = I_1\dot{\theta}\boldsymbol{i} + I_3\omega\boldsymbol{k}$$

设地球的自转角速度大小为 Ω,地球的角速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega\cos45°\boldsymbol{i} + \Omega\sin45°(\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega(\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

这是用动坐标系表达的对惯性系(随地球公转的平动参考系)的角动量.

动坐标系相对于地球的角速度为 $\dot{\theta}\boldsymbol{i}$,对惯性系的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\theta}\boldsymbol{i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega + \dot{\theta}\right)\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega(\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})$$

对惯性系中的固定点 O 的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{J} \\ &= I_1\ddot{\theta}\boldsymbol{i} + I_3\dot{\omega}\boldsymbol{k} + \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega + \dot{\theta}\right)\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega(\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})\right] \times (I_1\dot{\theta}\boldsymbol{i} + I_3\omega\boldsymbol{k}) \\ &= \left(I_1\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{2}}{2}I_3\Omega\omega\sin\theta\right)\boldsymbol{i} + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}I_1\Omega\dot{\theta}\cos\theta - I_3\omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega + \dot{\theta}\right)\right]\boldsymbol{j} \\ &\quad + \left(I_3\dot{\omega} - \frac{\sqrt{2}}{2}I_1\Omega\dot{\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2}$$

作用于转子的外力有重力和轴承处受到的作用力，重力作用于 O 点，对 O 点的力矩为零，轴承处受到的力是使转子的对称轴限在水平面内的力，必沿 x 轴方向，且与 z 轴相交，故有

$$M_x = 0, \qquad M_z = 0 \tag{3}$$

用式(1)、(2)、(3)，写式(1)的三个分量方程：

$$I_1\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{2}}{2}I_3\Omega\omega\sin\theta = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}I_1\Omega\dot{\theta}\cos\theta - I_3\omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega + \dot{\theta}\right) = M_y \tag{5}$$

$$I_3\dot{\omega} - \frac{\sqrt{2}}{2}I_1\Omega\dot{\theta}\sin\theta = 0 \tag{6}$$

可以看出，当 $\theta=0,\dot{\theta}=0,\ddot{\theta}=0,\omega=$常量时，式(4)、(5)、(6)均能满足. 说明这种运动是存在的.

对于 θ 很小的运动，$\sin\theta\approx\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}$ 均为一级小量，由式(6)可知$\dot{\omega}$也是小量，

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon, \qquad \varepsilon\text{ 为一级小量.}$$

在上述运动($\theta=0$、$\omega=\omega_0$)受到微扰时，式(4)保留一级小量的方程为

$$I_1\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{2}}{2}I_3\Omega\omega_0\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{2}\,I_3\Omega\omega_0}{2I_1}\theta = 0$$

这是一个简谐振动的微分方程，θ 将继续保持为小量，这就证明了上述运动是稳定的.

小振动的角频率为　　$\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{I_3}{I_1}\Omega\omega_0}$

小振动周期为　　$T=2\pi\sqrt{\sqrt{2}\dfrac{I_1}{I_3\Omega\omega_0}}$

若把转子近似为薄圆环,设质量为 m、半径为 R,则 $I_1=\frac{1}{2}mR^2,I_3=mR^2$,

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{2}\,\Omega\omega_0}}$$

7.5.15 一个有固定点的重对称陀螺,以恒定的角速度 Ω 绕竖直轴进动,章动角为 θ_0 不变,陀螺质量为 m,质心离固定点的距离为 h,对固定点的三个主转动惯量为 I_1、$I_2=I_1$ 和 I_3,求自转角速度 $\dot{\psi}$.

解 取 ζ 轴竖直向上,z 轴沿对称轴,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=h\boldsymbol{k}\times(-mg\boldsymbol{\zeta}^0)\\&=h\boldsymbol{k}\times(-mg)(\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k})\\&=mgh\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{i}-mgh\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$I_1\dot{\omega}_x-(I_1-I_3)\omega_y\omega_z=mgh\sin\theta\cos\psi \tag{1}$$

$$I_1\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=-mgh\sin\theta\sin\psi$$

$$I_3\dot{\omega}_z=0 \tag{2}$$

由式(1)、(2)可得

$$I_1\dot{\omega}_x-(I_1-I_3)\omega_y\omega_{z0}=mgh\sin\theta\cos\psi \tag{3}$$

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

今 $\dot{\varphi}=\Omega,\theta=\theta_0$ 不变,即 $\dot{\theta}=0$,则

$$\omega_x=\Omega\sin\theta_0\sin\psi$$

$$\omega_y=\Omega\sin\theta_0\cos\psi \tag{4}$$

$$\omega_z=\Omega\cos\theta_0+\dot{\psi} \tag{5}$$

$$\dot{\omega}_x=\Omega\sin\theta_0\cos\psi\,\dot{\psi} \tag{6}$$

将式(4)、(5)、(6)代入式(3),并代入 $\theta=\theta_0$,

$$I_1\Omega\,\dot{\psi}\sin\theta_0\cos\psi-(I_1-I_3)\Omega\sin\theta_0\cos\psi(\Omega\cos\theta_0+\dot{\psi})=mgh\sin\theta_0\cos\psi$$

可解出

$$\dot{\psi}=[(I_1-I_2)\Omega^2\cos\theta_0+mgh]/I_3\Omega$$

7.5.16 六个质量均为 m 的质点位于三个长度为 $2l$、互相正交的无质量的刚性杆的两端,如图 7.118 所示.绕 O 点做无摩擦定点转动.要使此系统能绕竖直轴(即 $\theta=0$)稳定地自转,其自转角速度 s 应当多大?

解 以固定点 O 为原点,选取两组坐标系,静系 ζ 轴竖直向上,动系 z 轴沿旋转对称轴,

$$I_1=I_2=m(2l)^2+2ml^2+2m(\sqrt{2}\,l)^2=10ml^2$$

$$I_3=4ml^2$$

$$\boldsymbol{M}=l\boldsymbol{k}\times(-6mg)\boldsymbol{\zeta}^0$$
$$=l\boldsymbol{k}\times(-6mg)(\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k})$$
$$=6mgl\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{i}-6mgl\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{j}$$

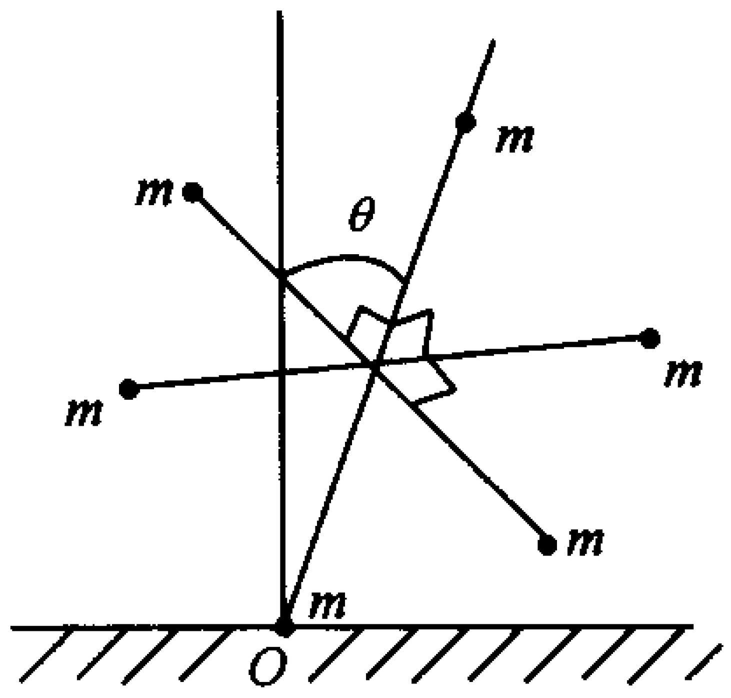


图 7.118

由欧拉动力学方程得

$$10\dot{\omega}_x-6\omega_y\omega_z=\frac{6g}{l}\sin\theta\cos\psi \tag{1}$$

$$10\dot{\omega}_y+6\omega_x\omega_z=-\frac{6g}{l}\sin\theta\sin\psi \tag{2}$$

$$\dot{\omega}_z=0 \tag{3}$$

式(1)×cosψ－式(2)×sinψ，得

$$10\dot{\omega}_x\cos\psi-10\dot{\omega}_y\sin\psi-6\omega_y\omega_z\cos\psi-6\omega_x\omega_y\sin\psi=\frac{6g}{l}\sin\theta \tag{4}$$

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi \tag{5}$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi \tag{6}$$

$$\dot{\omega}_x=\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi+\ddot{\theta}\cos\psi-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi \tag{7}$$

$$\dot{\omega}_y=\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi-\ddot{\theta}\sin\psi-\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \tag{8}$$

式(7)×cosψ－式(8)×sinψ，得

$$\dot{\omega}_x\cos\psi-\dot{\omega}_y\sin\psi=\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta+\ddot{\theta} \tag{9}$$

式(6)×cosψ＋式(5)×sinψ，得

$$\omega_y\cos\psi+\omega_x\sin\psi=\dot{\varphi}\sin\theta \tag{10}$$

用式(3)得

$$\omega_z=\omega_{z0} \tag{11}$$

用式(9)、(10)、(11)，式(4)可改写为

$$5\ddot{\theta}+5\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta-3\dot{\varphi}\omega_{z0}\sin\theta=\frac{3g}{l}\sin\theta \tag{12}$$

设进动角速度$\dot{\varphi}=\omega$，自转角速度$\dot{\psi}=s$，要绕竖直轴($\theta=0$)稳定地自转，偏离$\theta=0$要很小，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$. $\omega_{z0}=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\approx\omega+s$.

在θ很小时，式(12)在代入上述各近似式后得

$$5\ddot{\theta}+\left(2\omega s-3\omega^2-\frac{3g}{l}\right)\theta=0$$

在$\theta=0$稳定自转，要求自转角速度s满足下列关系：

$$2\omega s-3\omega^2-\frac{3g}{l}>0$$

$$s>\frac{3}{2}\omega+\frac{3g}{2\omega l}$$

ω是进动角速度，满足上式的自转角速度可保持在$\theta=0$附近运动.

7.5.17　证明上题的转动系统围绕O点做规则进动时，如章动角为60°，则角速度在

对称轴上的分量不小于$\sqrt{\dfrac{15g}{2l}}$.

证明　用上题导出的式(12),

$$5\ddot{\theta}+5\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta-3\dot{\varphi}\omega_{z0}\sin\theta=\frac{3g}{l}\sin\theta$$

今做规则进动,$\ddot{\theta}=0$,且有 $\theta=60°$,

$$5\dot{\varphi}\dot{\psi}-3\dot{\varphi}\omega_{z0}=\frac{3g}{l}\tag{1}$$

$$\omega_{z0}=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos 60°=\dot{\psi}+\frac{1}{2}\dot{\varphi}$$

$$\dot{\psi}=\omega_{z0}-\frac{1}{2}\dot{\varphi}\tag{2}$$

将式(2)代入式(1),

$$5\dot{\varphi}\left(\omega_{z0}-\frac{1}{2}\dot{\varphi}\right)-3\dot{\varphi}\omega_{z0}=\frac{3g}{l}$$

$$-\frac{5}{2}\dot{\varphi}^2+2\omega_{z0}\dot{\varphi}-\frac{3g}{l}=0$$

$\dot{\varphi}$要有实数解必须其系数满足下列不等式:

$$(2\omega_{z0})^2-4\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3g}{l}\right)\geqslant 0$$

所以

$$\omega_{z0}\geqslant\sqrt{\frac{15g}{2l}}$$

7.5.18　一个由四叶片螺旋桨推进的飞机,相对于惯性系以不变的角速度 Ω 在一个水平圆周上做逆时针飞行(从上方看),螺旋桨以不变的角速度 ω 做顺时针旋转(由驾驶员看).要保持这样的飞行,轴承加在螺旋桨上的力矩应多大?方向如何?

解　方法一:螺旋桨为系统,坐标系原点在螺旋桨的中心,z 轴沿对称轴,x、y 轴在叶片上,$Oxyz$ 固连于螺旋桨.

螺旋桨的角速度由两部分组成:一部分是自转角速度 ω,另一部分是做水平圆周运动的角速度 Ω.

中心主转动惯量为

$$I_1=I_2,\quad I_3=2I_1$$

为了不发生螺旋桨的角速度与上述的自转角速度混淆,我们用ω'表示螺旋桨的角速度.

欧拉动力学方程为

$$I_1\dot{\omega}'_x+I_1\omega'_y\omega'_z=M_x\tag{1}$$

$$I_2\dot{\omega}'_y-I_1\omega'_x\omega'_z=M_y\tag{2}$$

$$2I_1\dot{\omega}'_z=M_z\tag{3}$$

系统的运动是已知的,今 $\omega'_z=\omega$,取时间的零点,可把 ω'_x、ω'_y 写成

$$\omega'_x=\Omega\sin\omega t$$

$$\omega'_y=\Omega\cos\omega t$$

写上述两式时，考虑到题目中讲的"螺旋桨以不变的角速度 ω 做顺时针旋转"图 7.119 中画出了 $t=0$ 时驾驶员看到的 x、y 轴的位置，y 轴竖直向上.

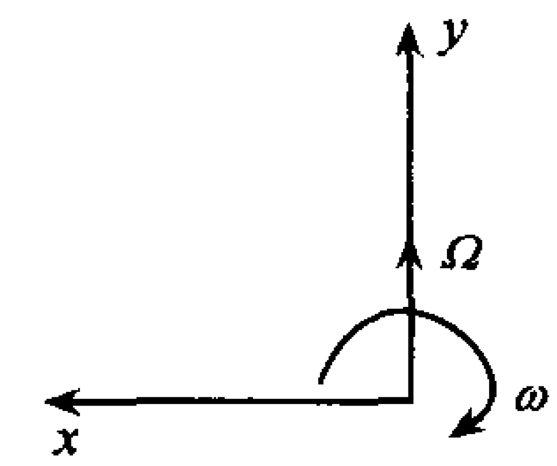


图 7.119

$$\dot{\omega}'_x = \Omega\omega\cos\omega t = \omega\omega'_y$$

$$\dot{\omega}'_y = -\Omega\omega\sin\omega t = -\omega\omega'_x$$

将 $\omega'_x\omega'_y$、$\dot{\omega}'_x$、$\dot{\omega}'_y$ 及 $\omega'_z=\omega$ 代入式(1)、(2)、(3)，得

$$M_x = 2I_1\omega\omega'_y = I_3\omega\omega'_y$$

$$M_y = -2I_1\omega\omega'_x = -I_3\omega\omega'_x$$

$$M_z = 0$$

$$\boldsymbol{M} = I_3\omega\omega'_y\boldsymbol{i} - I_3\omega\omega'_x\boldsymbol{j}$$

因为

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega'_x\boldsymbol{i} + \omega'_y\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega} = (\omega'_x\boldsymbol{i} + \omega'_y\boldsymbol{j})\times\omega\boldsymbol{k} = \omega\omega'_y\boldsymbol{i} - \omega\omega'_x\boldsymbol{j}$$

所以

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Omega}\times I_3\boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 方向竖直向上，$\boldsymbol{\omega}$ 方向向前，故 $\boldsymbol{M}$ 的方向在驾驶员看来是向左的，从上往下看，飞机在水平面上做逆时针的圆周运动，因此 $\boldsymbol{M}$ 的方向指向圆形轨道的中心.

$$M = I_3\omega\Omega \quad (\text{因为}\boldsymbol{\Omega}\perp\boldsymbol{\omega})$$

方法二：直接用角动量定理的矢量式更加简单，

$$\boldsymbol{J} = I_1\boldsymbol{\Omega} + I_3\boldsymbol{\omega}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\Omega}\times I_3\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times I_3\boldsymbol{\omega}$$

$$M = I_3\omega\Omega$$

说明：我们采用的是质心平动参考系，虽然它是非惯性系，但在这个参考系中对质心的角动量定理有与对惯性系中的固定点的角动量定理不仅有相同的表达式，而且无需考虑惯性力. 因此，以上两种方法求得的力矩均是真实外力的力矩.

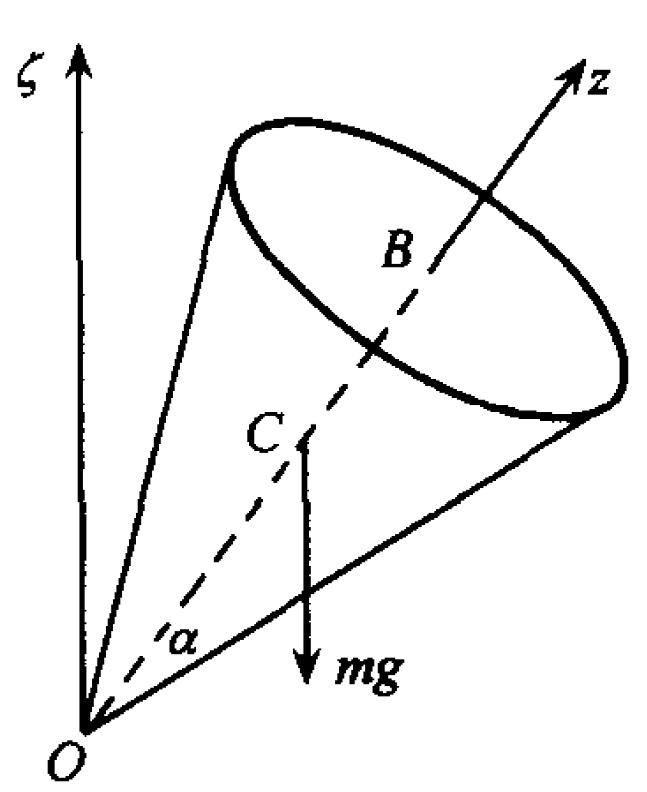


图 7.120

7.5.19　一个高度为 h、底面半径为 a、质量为 m 的均质正圆锥绕其顶点做规则进动，对称轴与铅垂线的夹角为 θ_0，围绕对称轴的角速度为 Ω，求进动角速度 ω_p.

解　由 7.2.7 题解得的关于图 7.120 中 B 点的惯量张量

$$\mathbf{I}(B)=\begin{pmatrix}\frac{1}{20}m(3a^2+2h^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{20}m(3a^2+2h^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}ma^2\end{pmatrix}$$

取对称轴为 z 轴，质心 C 的 z 坐标为

$$z_c=\frac{1}{m}\int_0^h\rho\pi(z\tan\alpha)^2z\mathrm{d}z=\frac{1}{4m}\rho\pi h^4\tan^2\alpha$$

其中 α 为正圆锥的半顶角，

$$m=\int_0^h\rho\pi(z\tan\alpha)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\rho\pi h^3\tan^2\alpha$$

所以

$$z_c=\frac{3}{4}h$$

因 z 轴对 C 点和 O 点都是惯量主轴，而且是旋转对称轴，对 C 点和 O 点，与 z 轴垂直的轴都是惯量主轴，先后用平行轴定理，依次可求出关于 C 点和 O 点的惯量张量：

$$\mathbf{I}(C)=\begin{pmatrix}\frac{1}{20}m(3a^2+2h^2)-m\left(\frac{h}{4}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{20}m(3a^2+2h^2)-m\left(\frac{h}{4}\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}ma^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{80}m(12a^2+3h^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{80}m(12a^2+3h^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}ma^2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(O)=\begin{pmatrix}\frac{1}{80}m(12a^2+3h^2)+m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{80}m(12a^2+3h^2)+m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}ma^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{20}m(a^2+4h^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{20}m(a^2+4h^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}ma^2\end{pmatrix}$$

欧拉动力学方程为

$$\frac{3}{20}m(a^2+4h^2)\,\dot{\omega}_x-\left[\frac{3}{20}m(a^2+4h^2)-\frac{3}{10}ma^2\right]\omega_y\omega_z=M_x$$

$$\frac{3}{20}m(a^2+4h^2)\dot{\omega}_y-\left[\frac{3}{10}ma^2-\frac{3}{20}m(a^2+4h^2)\right]\omega_x\omega_z=M_y$$

$$\frac{3}{10}ma^2\dot{\omega}_z=M_z$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\frac{3}{4}h\boldsymbol{k}\times(-mg)\boldsymbol{\zeta}^0\\&=\frac{3}{4}h\boldsymbol{k}\times(-mg)(\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k})\\&=\frac{3}{4}mgh\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{i}-\frac{3}{4}mgh\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

可得

$$\omega_z=\omega_{z0}$$

$$(a^2+4h^2)\dot{\omega}_x+(a^2-4h^2)\omega_{z0}\omega_y=5gh\sin\theta\cos\psi \tag{1}$$

$$(a^2+4h^2)\dot{\omega}_y-(a^2-4h^2)\omega_{z0}\omega_x=-5gh\sin\theta\sin\psi \tag{2}$$

欧拉运动学方程

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$\dot{\omega}_x=\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi+\ddot{\theta}\cos\psi-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_y=&\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi-\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi\\&-\ddot{\theta}\sin\psi-\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi\end{aligned} \tag{4}$$

式(1)×$\cos\psi$－式(2)×$\sin\psi$,并将式(3)、(4)代入,得

$$(a^2+4h^2)\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta+(a^2+4h^2)\ddot{\theta}+(a^2-4h^2)\omega_{z0}\dot{\varphi}\sin\theta=5gh\sin\theta$$

今为规则进动,$\ddot{\theta}=0,\theta=\theta_0,\dot{\psi}=\Omega$,要求$\dot{\varphi}$即$\omega_p$,代入上式,得

$$(a^2+4h^2)\omega_p\Omega\sin\theta_0+(a^2-4h^2)\omega_p(\Omega+\omega_p\cos\theta_0)\sin\theta_0=5gh\sin\theta_0$$

整理后得

$$(a^2-4h^2)\sin\theta_0\cos\theta_0\omega_p^2+(2a^2\Omega\sin\theta_0)\omega_p-5gh\sin\theta_0=0$$

$$(a^2-4h^2)\cos\theta_0\omega_p^2+2a^2\Omega\omega_p-5gh=0$$

$$\omega_p=\frac{a^2\Omega\pm\sqrt{a^4\Omega^2+5gh(a^2-4h^2)\cos\theta_0}}{(4h^2-a^2)\cos\theta_0}$$

7.5.20　一个半径为 a 的均质圆盘围绕其对称轴的角速度为 Ω,同时对称轴又在水平面内围绕竖直轴做进动,若圆盘的中心离固定点 O 的距离为 l,如图 7.121 所示,求进动角速度ω_p.

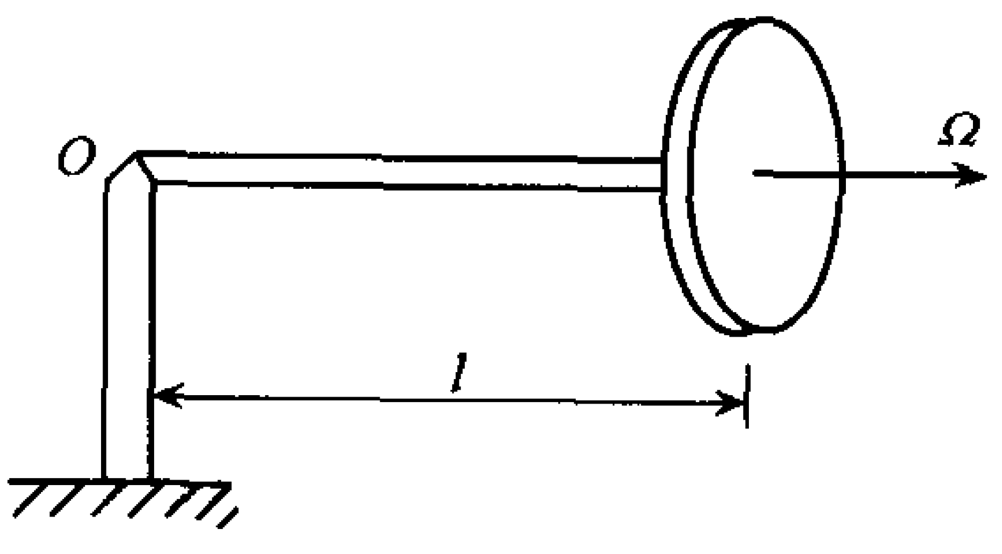


图 7.121

解　方法一:取圆盘的对称轴为 z 轴,ζ 轴竖直

向上，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

$$I_1=I_2=\frac{1}{4}ma^2+ml^2,\qquad I_3=\frac{1}{2}ma^2$$

由欧拉动力学方程，可得

$$\left(\frac{1}{4}ma^2+ml^2\right)\dot{\omega}_x-\left(ml^2-\frac{1}{4}ma^2\right)\omega_y\omega_z=mgl\sin\theta\cos\psi \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{4}ma^2+ml^2\right)\dot{\omega}_y+\left(ml^2-\frac{1}{4}ma^2\right)\omega_z\omega_x=-mgl\sin\theta\sin\psi \tag{2}$$

$$\dot{\omega}_z=0 \tag{3}$$

欧拉运动学方程

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi \tag{4}$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi \tag{5}$$

$$\omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta \tag{6}$$

像上题那样，用式(1)、(2)、(4)、(5)及式(4)、(5)对t求导的式子，可得

$$\left(\frac{1}{4}ma^2+ml^2\right)(\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)-\left(ml^2-\frac{1}{4}ma^2\right)\dot{\varphi}\omega_z\sin\theta=mgl\sin\theta$$

考虑规则进动，$\ddot{\theta}=0$，且$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dot{\psi}=\Omega$，再积分式(3)，用式(6)和$\theta=\dfrac{\pi}{2}$得到的$\omega_z=\omega_{z0}=\dot{\psi}=\Omega$，上式化为

$$\left(\frac{1}{4}ma^2+ml^2\right)\Omega\dot{\varphi}-\left(ml^2-\frac{1}{4}ma^2\right)\Omega\dot{\varphi}=mgl$$

$$\frac{1}{2}a^2\Omega\dot{\varphi}=gl$$

所以

$$\omega_p=\dot{\varphi}=\frac{2gl}{a^2\Omega}$$

$\dot{\varphi}>0$说明$\boldsymbol{\omega}_p$的方向竖直向上.

方法二：直接用角动量定理的矢量式比较简单.

$$\boldsymbol{J}=I_1\omega_p\boldsymbol{\zeta}^0+I_3\Omega\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=I_3\Omega\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=I_3\Omega\cdot\boldsymbol{\omega}_p\times\boldsymbol{k}=I_3\Omega\omega_p\boldsymbol{\zeta}^0\times\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}=l\boldsymbol{k}\times(-mg\boldsymbol{\zeta}^0)=mgl\boldsymbol{\zeta}^0\times\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}$$

所以

$$I_3\Omega\omega_p\boldsymbol{\zeta}^0\times\boldsymbol{k}=mgl\boldsymbol{\zeta}^0\times\boldsymbol{k}$$

$$I_3\Omega\omega_p=mgl$$

$$\omega_p=\frac{mgl}{I_3\Omega}=\frac{mgl}{\frac{1}{2}ma^2\Omega}=\frac{2gl}{a^2\Omega}$$

$$\boldsymbol{\omega}_p=\frac{2gl}{a^2\Omega}\boldsymbol{\zeta}^0$$

7.5.21　一个有旋转对称轴的刚体质量 $m=1\text{kg}$，绕对称轴上一点做定点转动，对此点三个主转动惯量分别为 $I_1=I_2=1\text{kgm}^2$，$I_3=2\text{kgm}^2$，质心离固定点的距离 $l=0.2\text{m}$，$t=0$ 时，$\dot{\varphi}_0=0$，$\dot{\psi}_0=100\text{s}^{-1}$，$\dot{\theta}_0=2\text{s}^{-1}$，$\theta_0=30°$，质心位于固定点的上方，求运动中章动角的上下边界，并画出对称轴上一点在空间中描绘出的曲线的草图.

解　定点转动的刚体具有旋转对称轴，可以取 NKZ 坐标系，此坐标系的 z 轴为对称轴，坐标系随刚体进动和转动，x 轴与 N 轴（xy 平面与 $\xi\eta$ 平面的交线，$\boldsymbol{n}^0$ 与$\boldsymbol{\zeta}^0\times\boldsymbol{k}$ 的方向一致）. 设$\boldsymbol{\Omega}$为坐标系的角速度，则

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j}+\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{k} \tag{1}$$

刚体的角速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\Omega}+\dot{\boldsymbol{\psi}}\\&=\dot{\theta}\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j}+(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2}$$

刚体对固定点的角动量

$$\boldsymbol{J}=I_1\omega_x\boldsymbol{i}+I_1\omega_y\boldsymbol{j}+I_3\omega_z\boldsymbol{k}$$

刚体对固定点的角动量定理，用 NKZ 坐标系表达为

$$\begin{cases}I_1\dot{\omega}_x+I_3\Omega_y\omega_z-I_1\Omega_z\omega_y=M_x\\I_1\dot{\omega}_y+I_1\Omega_z\omega_x-I_3\Omega_x\omega_z=M_y\\I_3\dot{\omega}_z+I_1(\Omega_x\omega_y-\Omega_y\omega_x)=M_z\end{cases} \tag{3}$$

因为 x 轴总与 ζ 轴垂直，

$$\boldsymbol{\zeta}^0=\sin\theta\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}$$

刚体受到的外力矩仅由重力引起，取 ζ 轴竖直向上，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=l\boldsymbol{k}\times(-mg\boldsymbol{\zeta}^0)\\&=l\boldsymbol{k}\times(-mg\sin\theta\boldsymbol{j}-mg\cos\theta\boldsymbol{k})\\&=mgl\sin\theta\boldsymbol{i}\end{aligned} \tag{4}$$

将式(1)、(2)、(4)代入方程组(3)，得

$$I_1\ddot{\theta}+I_3(\dot{\varphi}\sin\theta)(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})-I_1\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=mgl\sin\theta \tag{5}$$

$$I_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin\theta)+I_1(\dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\theta}-I_3\dot{\theta}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=0 \tag{6}$$

$$I_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=0 \tag{7}$$

由式(7)得

$$\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\omega_{z0} \tag{8}$$

将上式代入式(6)，然后两边乘以 $\sin\theta$，可写成全微分形式，

$$I_1\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin\theta)+I_1\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}-I_3\omega_{z0}\dot{\theta}\sin\theta=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3\omega_{z0}\cos\theta)=0$$

$$I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3\omega_{z0}\cos\theta = \alpha \tag{9}$$

α 为常量,也可用 $\boldsymbol{J}$ 在 ζ 轴的分量 J_ζ 为守恒量得出,

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\zeta}^0 = I_1\omega_y\sin\theta + I_3\omega_{z0}\cos\theta = \alpha$$

式(5)×$\dot{\theta}$+式(6)×$\dot{\varphi}\sin\theta$,可得

$$I_1\dot{\theta}\ddot{\theta} + I_1\dot{\varphi}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin\theta) = mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

积分上式得

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2\sin^2\theta = -mgl\cos\theta + h \tag{10}$$

其中 h 为常量,h 与机械能有关,两边加$\frac{1}{2}I_3\omega_{z0}^2$,则有

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}I_3\omega_{z0}^2 + mgl\cos\theta = h + \frac{1}{2}I_3\omega_{z0}^2 = E \tag{11}$$

左边前三项是刚体的动能,第四项为势能,故 E 为机械能.

用式(9)解出$\dot{\varphi}$,代入式(11)得

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{(\alpha - I_3\omega_{z0}\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + \frac{1}{2}I_3\omega_{z0}^2 + mgl\cos\theta = E \tag{12}$$

令 $u=\cos\theta$,则　　$\dot{u}=-\sin\theta\,\dot{\theta}=-\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\dot{\theta}=-\sqrt{1-u^2}\,\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{u}}{(1-u^2)^{1/2}}$$

引入 $u=\cos\theta$ 和$\dot{\theta}=\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}}\dot{u}$,可将式(13)变量 u 和$\dot{u}$满足的方程,解出$\dot{u}^2$ 得

$$\dot{u}^2 = \frac{1-u^2}{I_1}(2E - 2mglu - I_3\omega_{z0}^2) - \frac{1}{I_1^2}(\alpha - I_3\omega_{z0}u)^2$$

由$\dot{u}=0$,即

$$\frac{1-u^2}{I_1}(2E - 2mglu - I_3\omega_{z0}^2) - \frac{1}{I_1^2}(\alpha - I_3\omega_{z0}u)^2 = 0 \tag{13}$$

即可求出$\dot{\theta}=0$ 的两个 u 值,因为 $u=\cos\theta$,也就得到了章动角的上下边界.

今 $I_1=1\mathrm{kgm}^2$,$I_3=2\mathrm{kgm}^2$,$m=1\mathrm{kg}$;$l=0.2\mathrm{m}$,$t=0$ 时,$\dot{\varphi}_0=0$,$\dot{\psi}_0=100\mathrm{s}^{-1}$,$\dot{\theta}_0=2\mathrm{s}^{-1}$,$\theta_0=30°$,$\boldsymbol{r}_c=l\boldsymbol{k}$(质心在固定点的上方).

由式(8),

$$\omega_{z0} = \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0\cos\theta_0 = 100\mathrm{s}^{-1}$$

由式(9),

$$\alpha = I_1\dot{\varphi}_0\sin^2\theta_0 + I_3\omega_{z0}\cos\theta_0 = 173.2\mathrm{kgm^2s^{-1}}$$

由式(11),

$$E = \frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}_0^2 + I_1\dot{\varphi}_0^2\sin^2\theta_0 + I_3\omega_{z0}^2) + mgl\cos\theta_0 = 1.000\times10^4\mathrm{Nm}$$

由式(13),

$$(1-u^2)(7.370-3.92u)-(173.2-200u)^2=0$$

用逐级近似法可求得

$$u_1=0.8609,\qquad u_2=0.8709$$

相应的

$$\theta_1=30.58°,\qquad \theta_2=29.44°$$

由式(9)可算出在两个章动角边界时的进动角速度为

$$\dot{\varphi}(\theta_1)=3.94\mathrm{s}^{-1},\qquad \dot{\varphi}(\theta_2)=-4.06\mathrm{s}^{-1}$$

注意：在 $\theta_{\min}$即 θ_2，$\dot{\varphi}<0$；在 $\theta_{\max}$即 θ_1，$\dot{\varphi}>0$. 对称轴上一点在空间描绘出的曲线的示意图如图 7.122 所示，注意箭头方向.

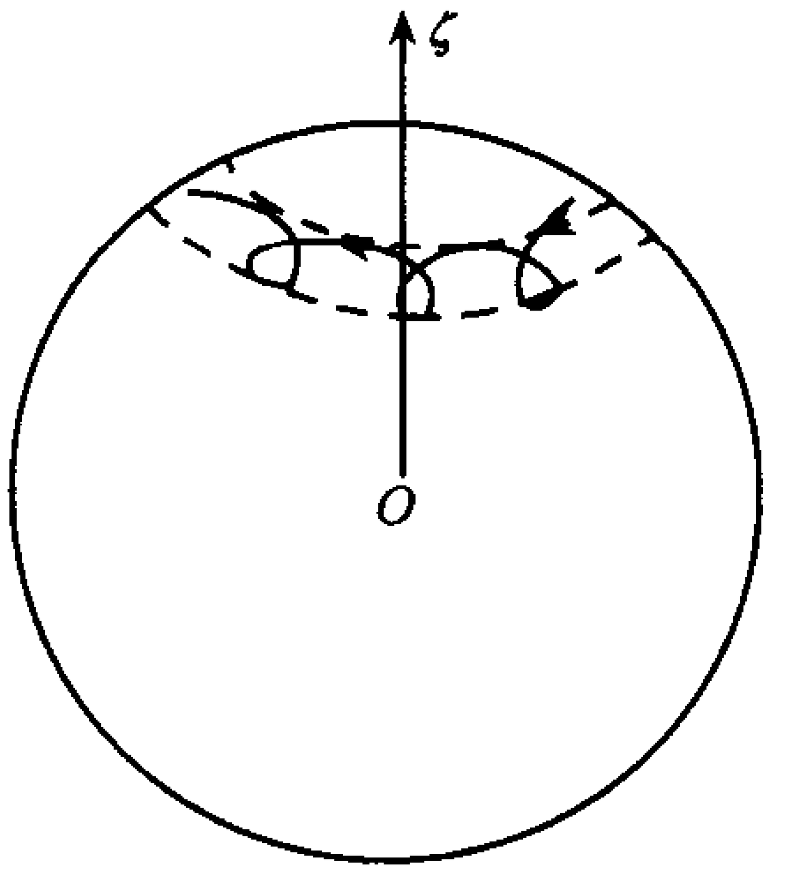


图 7.122

7.5.22　求上题的刚体运动中最小的自转角速度及其相应的章动角.

解　由上题式(9)，

$$I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3\omega_{z0}\cos\theta=\alpha$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\alpha-I_3\omega_{z0}\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}=\frac{\alpha-I_3\omega_{z0}u}{I_1(1-u^2)}$$

由上题式(8)，并代入上式，

$$\dot{\psi}=\omega_{z0}-\dot{\varphi}u=\omega_{z0}-\frac{\alpha-I_3\omega_{z0}u}{I_1}\cdot\frac{u}{1-u^2}$$

由$\dfrac{\mathrm{d}\dot{\psi}}{\mathrm{d}u}=0$ 求$\dot{\psi}$的极值，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[-(\alpha-I_3\omega_{z0}u)\frac{u}{1-u^2}\right]=0$$

经计算可得

$$-\left[\alpha u^2-2I_3\omega_{z0}u+\alpha\right]=0$$

$$u=\frac{1}{\alpha}\left(I_3\omega_{z0}\pm\sqrt{I_3^2\omega_{z0}^2-\alpha^2}\right)$$

上题已算得　　$\omega_{z0}=100\mathrm{s}^{-1}$，　$\alpha=173.2\mathrm{kgm^2s^{-1}}$

题目给出的　$I_3=2\mathrm{kgm}^2$，代入上式得

$$u=0.5774\ 及\ u=1.732$$

$|u|=|\cos\theta|\leqslant1$，只能取 $u=0.5774$，

$$\theta=\arccos(0.5774)=54.73°$$

这个章动角已超出了上题算出的章动角的取值范围，说明无极值.

用章动角的上下边界相应的两个 u 值代入$-[\alpha u^2-2I_3\omega_{z0}u+\alpha]$均得大于零，说明$\dot{\psi}$在运动所允许的 u 取值范围内是随 u 的增大而单调递增的，故在 u 的最小值处，$\dot{\psi}$有最小值. 即在 $u=u_1=0.8609$，$\theta=\theta_1=30.58°$时，

$$\dot{\psi}=\dot{\psi}_{\min}=\omega_{z0}-\frac{\alpha-I_3\omega_{z0}u_1}{I_1}\cdot\frac{u_1}{1-u_1^2}=96.6\mathrm{s}^{-1}$$

由于在刚体运动范围内，$\dot{\psi}$随 θ(或 u)单调变化(无极值)，可计算章动角的上下边界处相应的$\dot{\psi}$得到上述结论，在 $\theta=\theta_2=29.44°$，$\dot{\psi}=\dot{\psi}_{max}=103.5\text{s}^{-1}$.

7.5.23 一个有旋转对称轴的刚体，质量 $m=10\text{kg}$，绕对称轴上一点做定点转动，对此点三个主转动惯量分别为 $I_1=I_2=1\text{kgm}^2$，$I_3=2\text{kgm}^2$，质心离固定点的距离 $l=0.1\text{m}$，位于固定点的上方，$t=0$ 时，$\dot{\varphi}_0=-10\text{s}^{-1}$，$\dot{\psi}=100\text{s}^{-1}$，$\dot{\theta}_0=0$，$\theta_0=30°$. 求运动中章动角的上下边界，并画出对称轴上一点在空间中描绘出的曲线的草图.

解 由 7.5.21 题的式(8)，有

$$\omega_{z0}=\dot{\psi}_0+\dot{\varphi}_0\cos\theta_0=100+(-10)\cos 30°=91.34\text{s}^{-1}$$

由 7.5.21 题的式(9)，

$$\begin{aligned}\alpha&=I_1\dot{\varphi}_0\sin^2\theta_0+I_3\omega_{z0}\cos\theta_0\\&=1\cdot(-10)(\sin 30°)^2+2.91\cdot 34\cos 30°=155.7\text{kgm}^2\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

由 7.5.21 题的式(11)，

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}_0^2+I_1\dot{\varphi}_0^2\sin^2\theta_0+I_3\omega_{z0}^2)+mgl\cos\theta_0\\&=\frac{1}{2}[1\times(-10)^2\sin^2 30°+2\times(91.34)^2]+10\times 9.8\times 0.1\cos 30°=8364\text{Nm}\end{aligned}$$

由 7.5.21 题的式(13)，

$$\frac{1-u^2}{I_1}(2E-2mglu-I_3\omega_{z0}^2)-\frac{1}{I_1^2}(\alpha-I_3\omega_{z0}u)^2=0$$

可得

$$u^3-1705u^2+2902u-1235=0$$

题目给出的 $\theta=\theta_0=30°$时，$\dot{\theta}=0$，显然是章动角的一个边界，因此 $u=\cos 30°=0.8660$ 必为上式的一个解，用 $u-0.866$ 除上式，得

$$u^2-1704u+1426=0$$

$$u=852-\sqrt{(852)^2-1426}=0.8373$$

已将另一个 $u>1$ 的解舍去，故另一个边界为 $\theta=\arccos 0.8373=33.15°$

由 7.5.21 题的式(9)，

$$\dot{\varphi}=\frac{\alpha-I_3\omega_{z0}\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

可算出

$$\dot{\varphi}(\theta)|_{\theta=30°}=-10.0\text{s}^{-1}$$

$$\dot{\varphi}(\theta)|_{\theta=33.15°}=9.2\text{s}^{-1}$$

对称轴上一点在空间中描绘出的曲线的草图如图 7.123 所示，与 7.5.21 题的曲线相似.

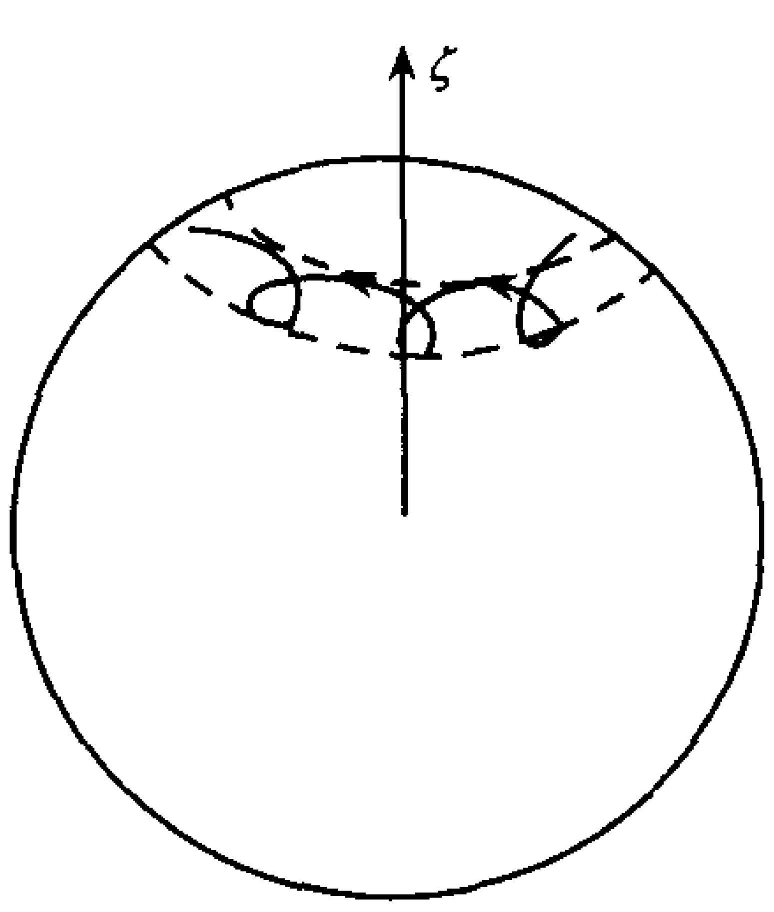


图 7.123

7.5.24 一个有旋转对称轴的刚体质量 $m=1\text{kg}$，绕对称轴上一点做定点转动，对此点三个主转动惯量分别为

$I_1=I_2=1\text{kgm}^2, I_3=2\text{kgm}^2$，质心离固定点的距离 $l=0.5\text{m}$，位于固定点的上方，$t=0$ 时，$\dot{\varphi}_0=0, \dot{\psi}_0=100\text{s}^{-1}, \dot{\theta}_0=10\text{s}^{-1}, \theta_0=60°$. 求运动中进动角速度的最大值和最小值(考虑代数值)，它们相应的章动角为何值？在此两时刻，自转角速度多大？

解　由 7.5.21 题的式(8)，

$$\omega_{z0}=\dot{\psi}_0+\dot{\varphi}_0\cos\theta_0=100+0=100\text{s}^{-1}$$

由 7.5.21 题的式(9)，

$$\alpha=I_1\dot{\varphi}_0\sin^2\theta_0+I_3\omega_{z0}\cos\theta_0=0+2\times 100\cos 60°=100\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

由 7.5.21 题的式(11)，

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}_0^2+I_1\dot{\varphi}_0^2\sin^2\theta_0+I_3\omega_{z0}^2)+mgl\cos\theta_0\\&=\frac{1}{2}[1\times 10^2+0+2\times(100)^2]+1\times 9.8\times 0.5\cos 60°\\&=1.0054\times 10^4\text{kgm}\end{aligned}$$

由 7.5.21 题的式(13)，

$$\frac{1-u^2}{I_1}(2E-2mglu-I_3\omega_{z0}^2)-\frac{1}{I_1^2}(\alpha-I_3\omega_{z0}u)^2=0$$

可得

$$u^3-4092.7u^2+4080.6u-1009.4=0$$

由逐步逼近法解得

$$u_1=0.4553,\quad \theta_1=62.92°$$
$$u_2=0.5426,\quad \theta_2=57.14°$$

由 7.5.21 题的式(9)，

$$\dot{\varphi}=\frac{\alpha-I_3\omega_{z0}u}{I_1(1-u^2)}$$

求 $\dot{\varphi}(u)$ 的极值位置，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}u}&=-\frac{I_3\omega_{z0}}{I_1(1-u^2)}-\frac{\alpha-I_3\omega_{z0}u}{I_1(1-u^2)^2}(-2u)=0\\&-I_3\omega_{z0}(1-u^2)+2u(\alpha-I_3\omega_{z0}u)=0\\&-I_3\omega_{z0}u^2+2\alpha u-I_3\omega_{z0}=0\end{aligned}$$

所以　　$(2\alpha)^2-4(-I_3\omega_{z0})(-I_3\omega_{z0})=(2\times 100)^2-4\times(2\times 100)^2<0$

$\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}u}=0$ 无实根，故在 $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ 间 $\dot{\varphi}$ 无极值，$\dot{\varphi}_{\max}$ 和 $\dot{\varphi}_{\min}$ 必在 u 或 θ 的上下边界，分别计算 $\dot{\varphi}(\theta_1)$、$\dot{\varphi}(\theta_2)$ 可知，

在 $\theta=\theta_1=62.92°$，

$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_{\max}=11.28\text{s}^{-1}$$

在 $\theta=\theta_2=57.14°$，

$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_{\min}=-12.07\text{s}^{-1}$$

由 7.5.21 题的式(8)得

$$\dot{\psi} = \omega_{z0} - \dot{\varphi}\cos\theta$$

$$\dot{\psi}(\theta_1) = 100 - 11.28 \times 0.4553 = 94.86\text{s}^{-1}$$

$$\dot{\psi}(\theta_2) = 100 - (-12.07) \times 0.5426 = 106.5\text{s}^{-1}$$

7.5.25 求上题运动过程中自转角速度的最大值.

解 在 7.5.22 题已由

$$\dot{\psi} = \omega_{z0} - \frac{\alpha - I_3\omega_{z0}u}{I_1}\frac{u}{1-u^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\dot{\psi}}{\mathrm{d}u} = 0$$

得出$\dot{\psi}$的极值位置在

$$u = \frac{1}{\alpha}\left[I_3\omega_{z0} \pm \sqrt{I_3^2\omega_{z0}^2 - \alpha^2}\right]$$

代入 $I_3=2\text{kgm}^2, \omega_{z0}=100\text{s}^{-1}, \alpha=100\text{s}^{-1}$,舍去 $u>1$ 的解,

$$u = 0.2679, \qquad \theta = \arccos u = 74.46°$$

已超出运动中章动角的取值范围,说明在运动中,$\dot{\psi}_{\max}$只能出现在章动角的上下边界,比较$\dot{\psi}(\theta_1)$和$\dot{\psi}(\theta_2)$是找$\dot{\psi}_{\max}$的最简单的办法,上题已算出$\dot{\psi}(\theta_1)$和$\dot{\psi}(\theta_2)$,可知

$$\dot{\psi}_{\max} = \dot{\psi}(\theta_2) = 106.5\text{s}^{-1}$$

7.5.26 在一个绕铅直轴以恒定角速度 Ω 转动的水平面上,置一个质量为 m、半径为 a、围绕过球心的任何轴转动的转动惯量均为 I 的球,球与水平面间的摩擦力使球在水平面上做纯滚动.证明:不论给球一个什么样的初始条件,在静参考系中,球心必做圆周运动,且做此圆周运动的角速度 ω_c 仅与转动平面的角速度以及球的质量分布有关,具有下式:

$$\omega_c = \frac{\Omega}{1 + \frac{ma^2}{I}}$$

证明 用静参考系,并取静坐标系,其原点 O 取在转动的水平面的固定点.

水平面上的 P 点对 O 点的位矢为 $\boldsymbol{r}_P$,其速度为

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

设 t 时刻,球心的位矢为 $\boldsymbol{r}$,球心的速度为$\dot{\boldsymbol{r}}$,则此刻,球与水平面接触点(因球做纯滚动,此接触点既是球上的点,又是水平面上的点)的速度为

$$\boldsymbol{v}_s = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

其中$\boldsymbol{\omega}$是球的角速度,$\boldsymbol{R}$ 是接触点对球心的位矢,

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

上式等号两边对 t 求导,注意$\dot{\boldsymbol{\Omega}}=0, \dot{\boldsymbol{R}}=0$,

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

由质心运动定理,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F} \tag{2}$$

$\boldsymbol{F}$ 是作用于球的摩擦力.

在质心平动参考系中对质心的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=I\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F} \tag{3}$$

由式(2)、(3)消去 $\boldsymbol{F}$,然后解出$\dot{\boldsymbol{\omega}}$,

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{R}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=\frac{m}{I}\boldsymbol{R}\times\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{4}$$

将式(4)代入式(1),

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\frac{m}{I}(\boldsymbol{R}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$$

因为 $$(\boldsymbol{R}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{R}=\ddot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})=\ddot{\boldsymbol{r}}R^2=a^2\ddot{\boldsymbol{r}}$$

这里考虑到 $\boldsymbol{R}\perp\ddot{\boldsymbol{r}}$,故有 $\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0$.

上式可改写为

$$\left(1+\frac{ma^2}{I}\right)\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} \tag{5}$$

式(5)两边点乘$\dot{\boldsymbol{r}}$,∵混合积$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}})=0$,可得

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0$$

所以 $$\ddot{\boldsymbol{r}}\perp\dot{\boldsymbol{r}}$$

球心的加速度与球心的速度垂直,说明质心加速度只有法向分量,没有切向分量,球心的速率不变,即$|\dot{\boldsymbol{r}}|=$常量.

另一种讲法:$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0$,$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}=0$,$\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{\mathrm{d}t}=0$,$\frac{\mathrm{d}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}{\mathrm{d}t}=0$,$|\dot{\boldsymbol{r}}|=$常量,再考虑式(5)两边大小相等,

$$\left(1+\frac{ma^2}{I}\right)|\ddot{\boldsymbol{r}}|=|\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}|=\Omega|\dot{\boldsymbol{r}}| \tag{6}$$

这里用了$\boldsymbol{\Omega}\perp\dot{\boldsymbol{r}}$,$\boldsymbol{\Omega}$与$\dot{\boldsymbol{r}}$的夹角为$\frac{\pi}{2}$,$\sin\frac{\pi}{2}=1$.

前已证明了$|\dot{\boldsymbol{r}}|=$常量,则由式(6),因为$\Omega|\dot{\boldsymbol{r}}|=$常量,

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}|=\text{常量}$$

$\ddot{\boldsymbol{r}}$只有法向加速度,上式也说明了法向加速度不变.由速率、法向加速度和曲率半径之间的关系,因速率和法向加速度均不变,可得出曲率半径不变,这就证明了球心将围绕一个固定的中心做圆周运动,我们用的是静参考系,又用静坐标系表达,这固定的中心当然是对静系而言的,但固定的中心一般不会是水平面的固定点,与所给的初条件有关.

下面接着求球心做圆周运动的角速度 ω_c.

球心既作圆周运动,其位矢可写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{\rho}$$

其中 O' 是静系中的固定点,$\boldsymbol{\rho}$是球心对 O' 点的位矢.取 O' 点为球心做圆周运动的中心,则 ρ 就是所做的圆周运动的半径.

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_c \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \\ &= \boldsymbol{\omega}_c \times (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega}_c(\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{\omega}_c) \\ &= -\omega_c^2 \boldsymbol{\rho}\end{aligned} \tag{8}$$

这里用了$\boldsymbol{\omega}_c \perp \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{\rho} = 0$.

将式(7)、(8)代入式(6),

$$\left(1 + \frac{ma^2}{I}\right) |-\omega_c^2 \boldsymbol{\rho}| = \Omega |\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}|$$

$$\left(1 + \frac{ma^2}{I}\right) \omega_c^2 \rho = \Omega \omega_c \rho$$

$$\omega_c = \frac{\Omega}{1 + \frac{ma^2}{I}}$$

初始条件不同,球心做圆周运动的中心不同,圆周运动的半径也不同,球心做圆周运动的速率不同,但做圆周运动的角速度是相同的,与初始条件无关,它只决定于水平面的转动角速度和球的质量分布$\frac{ma^2}{I}$,对于均质球,$I = \frac{2}{5}ma^2, \frac{ma^2}{I} = \frac{5}{2}$;对于均质薄球壳,$I = \frac{2}{3}ma^2, \frac{ma^2}{I} = \frac{3}{2}$. 两者不同是因为质量分布所致. 虽然,这两种情况有$\frac{ma^2}{I}$等于一个与质量m和球的半径a无关的数,但不能说"球心做圆周运动的角速度和球的质量、球的半径都无关,质量分布不同,$\frac{ma^2}{I}$等于不同的数",例如内半径为b、外半径为a的均质球壳的$\frac{ma^2}{I}$既与b有关又与a有关.

7.5.27 半径为a、质量为m的球在半径为b、内面粗糙的固定竖直圆柱内壁上做纯滚动. 试证其在铅直方向的运动将是简谐振动.

证明 用静参考系,用图 7.124 所示的动坐标系,动系原点取球心C,z轴竖直向上,x轴永远指向球与圆柱的接触点,动系只有C点固连于球,一方面随着原点C做平动,另一方面又以$\Omega \boldsymbol{k}$的角速度绕固定的ζ轴转动.

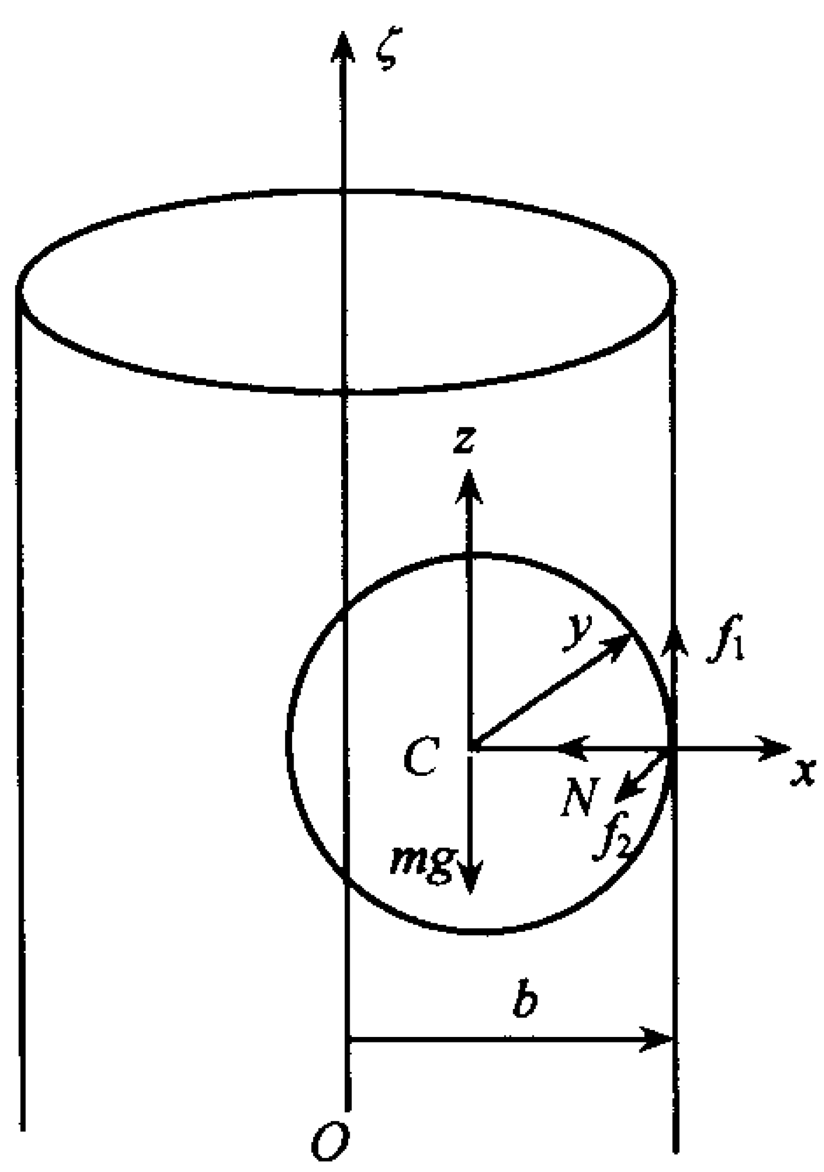


图 7.124

用x、y、ζ表示球的质心的位置坐标.

$$\ddot{x} = -(b-a)\Omega^2, \qquad \ddot{y} = (b-a)\dot{\Omega}$$

这是考虑到C点在xy平面内绕ζ轴做圆周运动写出的.

由质心运动定理,

$$m\ddot{x} = -m(b-a)\Omega^2 = -N$$

$$m\ddot{y} = m(b-a)\dot{\Omega} = -f_2 \tag{1}$$

$$m\ddot{\zeta} = f_1 - mg \tag{2}$$

其中f_1、f_2都是摩擦力,如图 7.124 所示.

在质心平动参考系中用对质心的角动量定理,先

计算球受到的对质心的外力矩，

$$\boldsymbol{M} = a\boldsymbol{i} \times (f_1\boldsymbol{k} - f_2\boldsymbol{j}) = -af_1\boldsymbol{j} - af_2\boldsymbol{k}$$

再计算球关于质心的角动量，

$$\boldsymbol{J} = I(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k})$$

其中 $I = \frac{2}{5}ma^2$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{J}\\ &= I(\dot{\omega}_x\boldsymbol{i} + \dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + \dot{\omega}_z\boldsymbol{k}) + \Omega\boldsymbol{k} \times I(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k})\\ &= (I\dot{\omega}_x - I\Omega\omega_y)\boldsymbol{i} + (I\dot{\omega}_y + I\Omega\omega_x)\boldsymbol{j} + I\dot{\omega}_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

$$I\dot{\omega}_x - I\Omega\omega_y = 0 \tag{3}$$

$$I\dot{\omega}_y + I\Omega\omega_x = -af_1 \tag{4}$$

$$I\dot{\omega}_z = -af_2 \tag{5}$$

由纯滚动条件$\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times a\boldsymbol{i} = 0$ 得

$$\Omega\boldsymbol{k} \times (b-a)\boldsymbol{i} + \zeta\boldsymbol{k} + (\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}) \times a\boldsymbol{i} = 0$$

$$(b-a)\Omega\boldsymbol{j} + \zeta\boldsymbol{k} - a\omega_y\boldsymbol{k} + a\omega_z\boldsymbol{j} = 0$$

$$(b-a)\Omega + a\omega_z = 0 \tag{6}$$

$$\dot{\zeta} - a\omega_y = 0 \tag{7}$$

由式(1)、(5)消去 f_2,得

$$ma(b-a)\dot{\Omega} - I\dot{\omega}_z = 0 \tag{8}$$

由式(6)、(8)可得

$$\dot{\Omega} = \dot{\omega}_z = 0$$

这里用了两式的系数行列式不等于零,所以 Ω、ω_z 均为常量.

由式(2)、(4)消去 f_1 得

$$ma\ddot{\zeta} + I\dot{\omega}_y + I\Omega\omega_x = -mga \tag{9}$$

由式(3)、(7)

$$\omega_y = \frac{\dot{\zeta}}{a} \tag{10}$$

$$\dot{\omega}_x = \Omega\omega_y = \frac{\Omega}{a}\dot{\zeta}$$

$$\omega_x = \frac{\Omega}{a}\zeta + \text{常量} \tag{11}$$

将式(10)、(11)代入式(9),可得

$$(I + ma^2)\ddot{\zeta} + I\Omega^2\zeta = \text{常量}$$

代入 $I=\frac{2}{5}ma^2$，上式改为

$$\ddot{\zeta}+\frac{2}{7}\Omega^2\zeta=常量$$

上式是简谐振动的微分方程，其解为

$$\zeta=常量+\zeta_0\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\Omega t+\alpha\right)$$

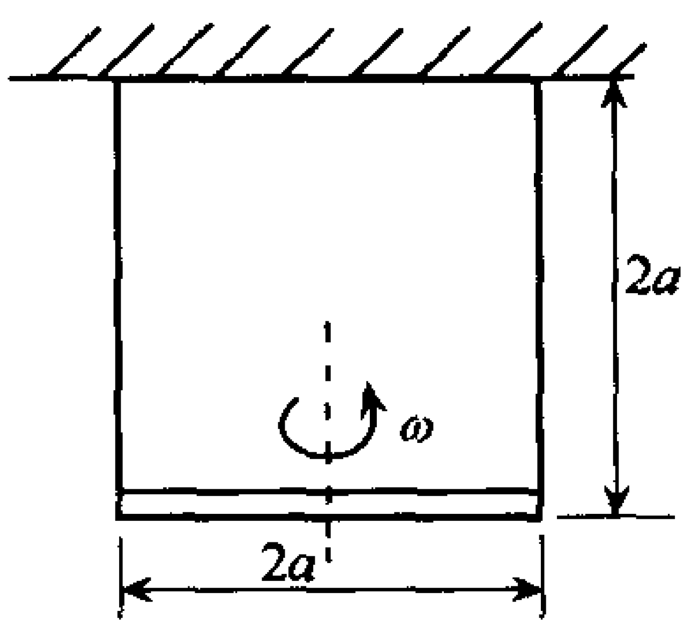


图 7.125

7.5.28 一质量为 m、长度为 $2a$ 的均质棒被两根长度均为 $2a$ 的、不可伸长的、平行的绳子系于两端悬挂起来，在水平位置处于平衡状态，突然给棒一个绕过其中心的竖直轴的角速度 ω，如图 7.125 所示. 求：

(1) 棒上升的高度；

(2) 每根绳子中的张力的初始增量.

解 取图 7.126 所示的固定坐标系，原点取在 $t=0$(棒刚获得角速度的时刻)时棒的中心所在位置. z 轴竖直向上，x 轴沿 $t=0$ 时棒的方向，向右.

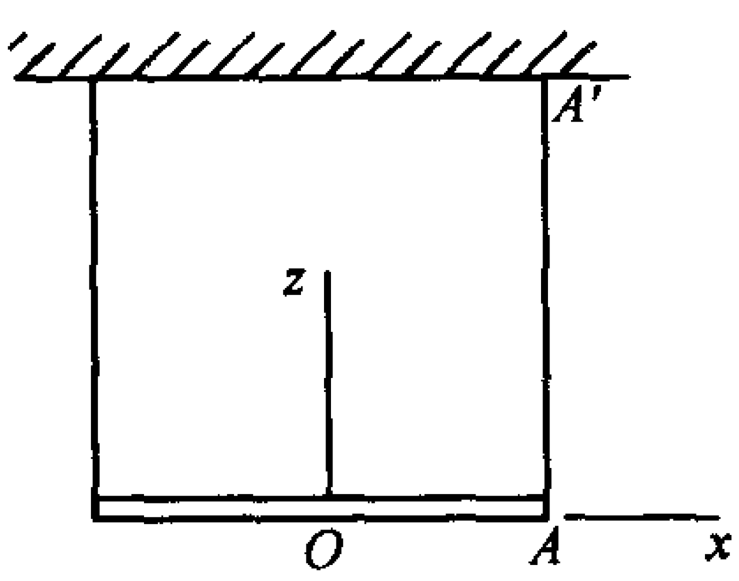


图 7.126

(1) 取在 xy 平面上即 $z=0$ 处为棒的势能零点. 在 $t=0$ 时，棒的机械能只有动能.

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{6}ma^2\omega^2$$

这里用了　$I=\frac{1}{12}m(2a)^2=\frac{1}{3}ma^2$.

在棒上升过程中，绳子张力不做功(因为绳子不可伸长，棒端在绳子张力方向无位移，得此结论)，引入重力势能，机械能守恒，当 $z=h,\omega=0$ 时，达到最大高度，此时动能为零，势能为 mgh.

$$\frac{1}{6}ma^2\omega^2=mgh$$

$$h=\frac{a^2\omega^2}{6g}$$

(2) 在运动过程中，棒始终处于水平面上，即棒上各点在同一时刻都有相同的 z 坐标，棒的中心始终在 z 轴上. 设 t 时刻，棒的中心坐标为$(0,0,z)$，棒与 x 轴的夹角为 θ，则图 7.126 中 A 点的坐标为$(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$，悬点 A'的坐标为$(a,0,2a)$，绳子不可伸长，A、A'距离不变.

$$a^2(1-\cos\theta^2)+(-a\sin\theta)^2+(2a-z)^2=(2a)^2$$

即

$$z^2-4az+2a^2(1-\cos\theta)=0$$

上式对 t 求导两次，得

$$z\ddot{z}-2a\ddot{z}+\dot{z}^2+a^2\ddot{\theta}\sin\theta+a^2\dot{\theta}^2\cos\theta=0$$

在 $t=0$ 时，$z=\dot{z}=0,\theta=0,\ddot{\theta}=0,\dot{\theta}=\omega$，代入上式，可得

$$\ddot{z}|_{t=0} = \frac{1}{2}a\omega^2$$

在 $t=0$ 时，用质心运动定理，

$$m\ddot{z}|_{t=0} = 2T - mg$$

$$T = \frac{1}{2}(mg + m\ddot{z}|_{t=0}) = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}ma\omega^2$$

在棒获得角速度前，每根绳中张力为 $T_0=\frac{1}{2}mg$.

$t=0$ 时，每根绳中的张力增量为

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{1}{4}ma\omega^2$$

7.5.29　一根长 $2a$、质量为 m 的均匀杆铰接于 A，可在图 7.127 所示的 xz 平面内绕 A 自由运动. 在 x 轴上的 A 端随 x 轴以恒定角速度 ω 绕竖直的 z 轴做圆心为 B、半径为 b 的水平的圆周运动，杆与竖直线的夹角为 θ，地球的重力场在竖直方向.

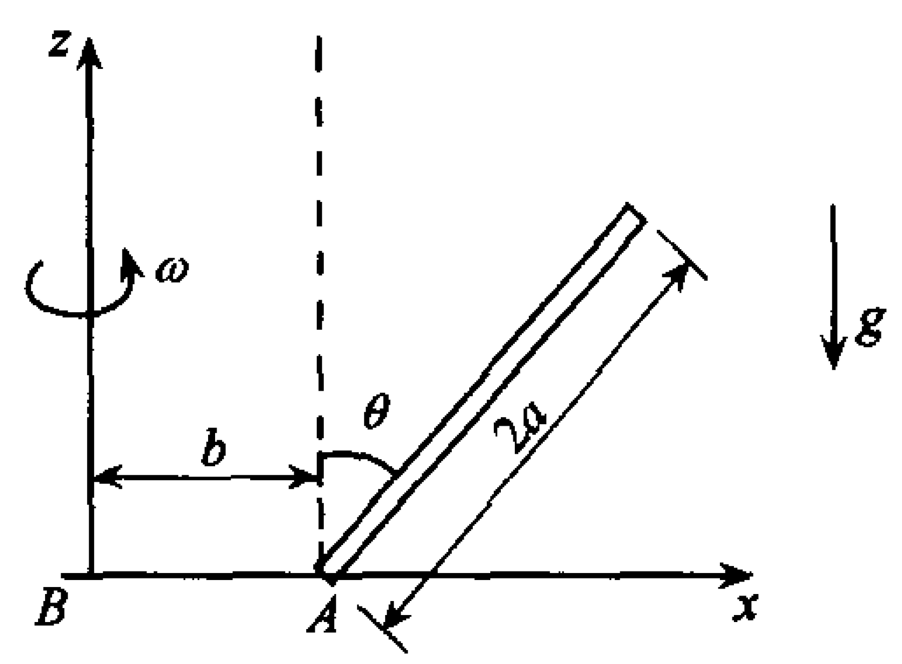


图 7.127

(1) 用 θ、$\dot{\theta}$、ω 表示杆的动能和势能；

(2) 找出杆的可能平衡位置的一般表达式；

(3) 用图解法解(2)问中找到的表达式，找出 θ 从 0 到 2π 每个象限中的平衡位置；

(4) 哪些平衡位置是稳定的，哪些是不稳定的？对于 θ 的每个象限，平衡位置是否存在，与参量 ω、b 和 a 有何关系？

(5) 在 θ 的每个象限中画出受力图以定性证实平衡位置的存在和稳定性.

解　在静参考系中，杆的运动是刚体的一般运动，今讨论平衡问题，采用以恒定角速度 ω 绕 z 轴转动的参考系，图中的 x、z 坐标都是固连于这个参考系的（z 轴对静参考系也是固定的）.

(1) 杆在此参考系中做定轴转动，动能为

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(2a)^2\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$

此参考系是非惯性系，需考虑惯性力，可以引入惯性力势能.

考虑杆在 θ 位置时，杆从 l 至 $l+\mathrm{d}l$ 段质元所受的惯性离轴力为 $\frac{m}{2a}(b+l\sin\theta)\omega^2\mathrm{d}l$，从 θ 到 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 运动时，该惯性离轴力对质元所做的功为

$$W = \frac{m}{2a}(b + l\sin\theta)\omega^2\mathrm{d}l\cdot\cos\theta l\mathrm{d}\theta$$

取杆位于 $\theta=0$ 处为惯性离轴力势能的零点，杆处于 θ 位置时的惯性离轴力势能为

$$-\int_0^\theta \mathrm{d}\theta\int_0^{2a}\frac{m}{2a}(b + l\sin\theta)l\omega^2\cos\theta\mathrm{d}l$$

$$= -ma\omega^2\sin\theta\left(b + \frac{2}{3}a\sin\theta\right)$$

杆的势能为惯性离轴力势能与重力势能之和，重力势能也取 $\theta=0$ 处为其势能零点，

$$V=-ma\omega^2\sin\theta\left(b+\frac{2}{3}a\sin\theta\right)-mga(1-\cos\theta)$$

(2) 杆的平衡位置满足关系 $\frac{dV}{d\theta}=0$，得到平衡位置必须满足的一般表达式为

$$\omega^2\left(b+\frac{4}{3}a\sin\theta\right)\cos\theta+g\sin\theta=0$$

$$g\tan\theta=-a\omega^2\left(\frac{b}{a}+\frac{4}{3}\sin\theta\right)$$

(3) 用图解法解(2)问中得到的平衡位置 θ 满足的方程，横坐标为 θ，纵坐标为 y_1 和 y_2.

$$y_1=\tan\theta,\qquad y_2=-\frac{b\omega^2}{g}-\frac{4a\omega^2}{3g}\sin\theta$$

画出两条曲线 $y_1(\theta)$ 和 $y_2(\theta)$，两条曲线的交点的 θ 值为平衡位置，y_2 曲线我们画了两种情况：一种情况，$\frac{4}{3}a<b$；另一种情况 $\frac{4}{3}a>b$.

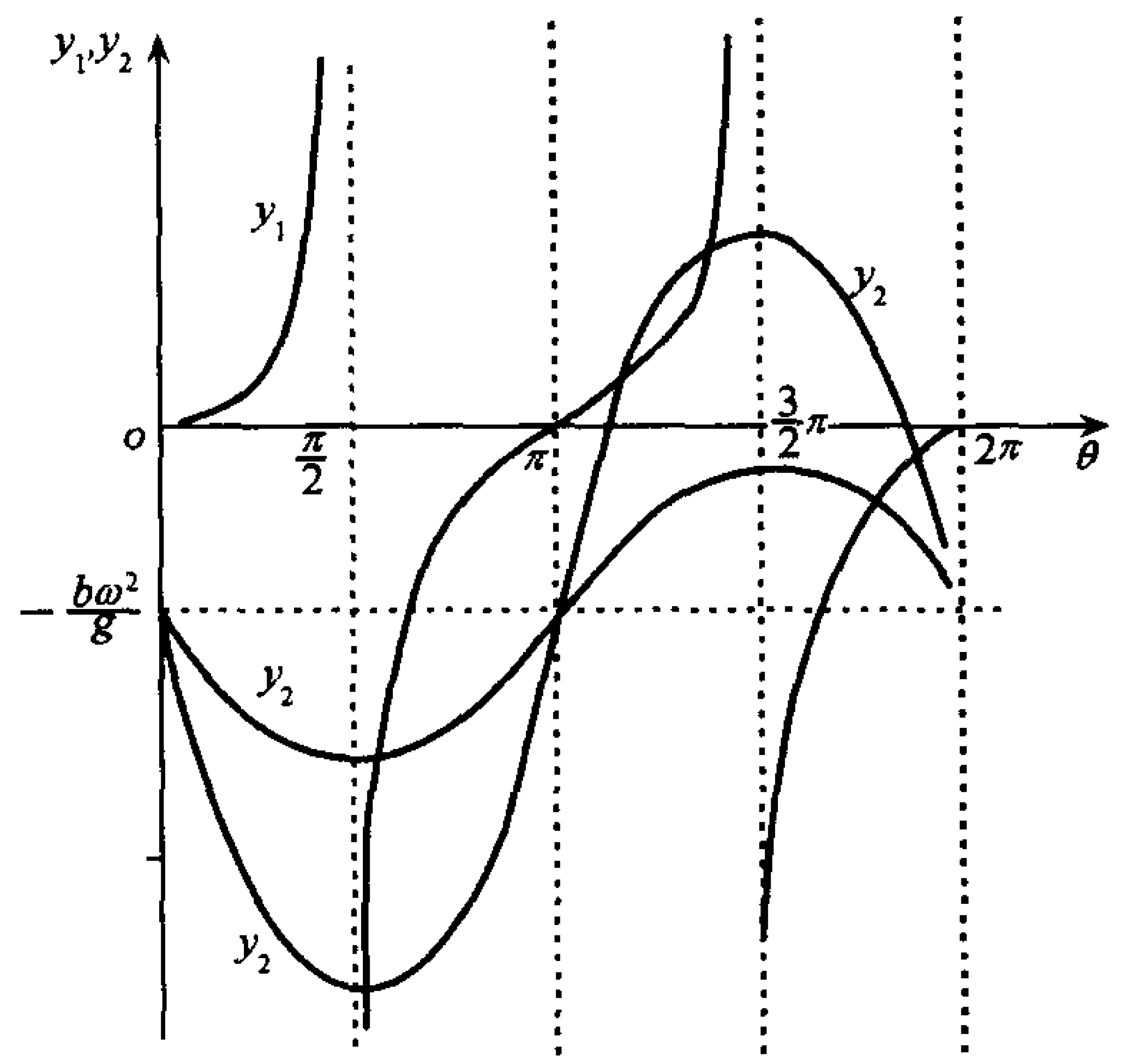


图 7.128

由图 7.128 可见，θ 在第一象限没有平衡位置，在第二和第四象限各有一个平衡位置，在第三象限，可能没有，也可能有一个，有两个平衡位置. 如 $\frac{4}{3}a<b$，没有平衡位置，如 $\frac{4}{3}a>b$，可能没有、可能有一个、也可能有两个.

(4) 在平衡位置处，如 $\frac{d^2V}{d\theta^2}>0$，则该处的平衡是稳定的；如 $\frac{d^2V}{d\theta^2}<0$，则该处的平衡是不稳定的.

$$\frac{dV}{d\theta}=-ma\omega^2\left(b+\frac{4}{3}a\sin\theta\right)\cos\theta-mag\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=ma\omega^2\left(b+\frac{4}{3}a\sin\theta\right)\sin\theta-\frac{4}{3}ma^2\omega^2\cos^2\theta-mag\cos\theta$$

在平衡位置，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0$，

用

$$mag\sin\theta=-ma\omega^2\left(b+\frac{4}{3}a\sin\theta\right)\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}&=ma\omega^2\left(b+\frac{4}{3}a\sin\theta\right)\sin\theta-\frac{4}{3}ma^2\omega^2\cos^2\theta+ma\omega^2\left(b+\frac{4}{3}a\sin\theta\right)\cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=mab\omega^2\csc\theta+\frac{4}{3}ma^2\omega^2\sin^2\theta\end{aligned}\tag{1}$$

也可表成

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=-mag\sec\theta-\frac{4}{3}ma^2\omega^2\cos^2\theta\tag{2}$$

在第二象限，用式(1)，因为 $\csc\theta>0$，第一项、第二项均为正值，$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}>0$，故平衡是稳定的.

在第四象限，用式(2)，因为 $\sec\theta>0$，第一项、第二项均为负值，$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}<0$，故平衡是不稳定的.

在第三象限，$\csc\theta<0$，$\sec\theta<0$，如果有平衡位置存在，无论用式(1)还是式(2)，都是一项正一项负，$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}>0$ 还是 <0 都可能，与参量 a、b 和 ω 都有关.

从图 7.128 看，平衡位置与参量 a、b 和 ω 的关系如下：在第二象限和第四象限，平衡位置各有一个，与参量 a、b 和 ω 均无关；在第三象限平衡位置是否存在，存在一个还是两个，与参量 a、b 有关，与 ω 无关.

(5) 在每个象限中，杆受力情况如图 7.129(a)、(b)、(c)、(d)、(e)所示，(c)、(d)图是在第三象限的无平衡位置和有平衡位置的两种情况，mg 是重力，作用点均在质心 C，$\boldsymbol{F}$ 为惯性离轴力，作用点一般均不在质心 C，其大小等于各质元所受惯性离轴力之和，其作用点可由各质元所受惯性力对质心的力矩之和等于合惯性力对质心的力矩来确定，由此可以确定它的位置向何方偏离质心；N 为铰链对杆的作用力，(b)、(d)、(e)是在平衡位置，N 一般不沿杆的方向，在平衡位置，$\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g}=0$，$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{F}$、$m\boldsymbol{g}$ 的作用线交于一点，如图 7.129

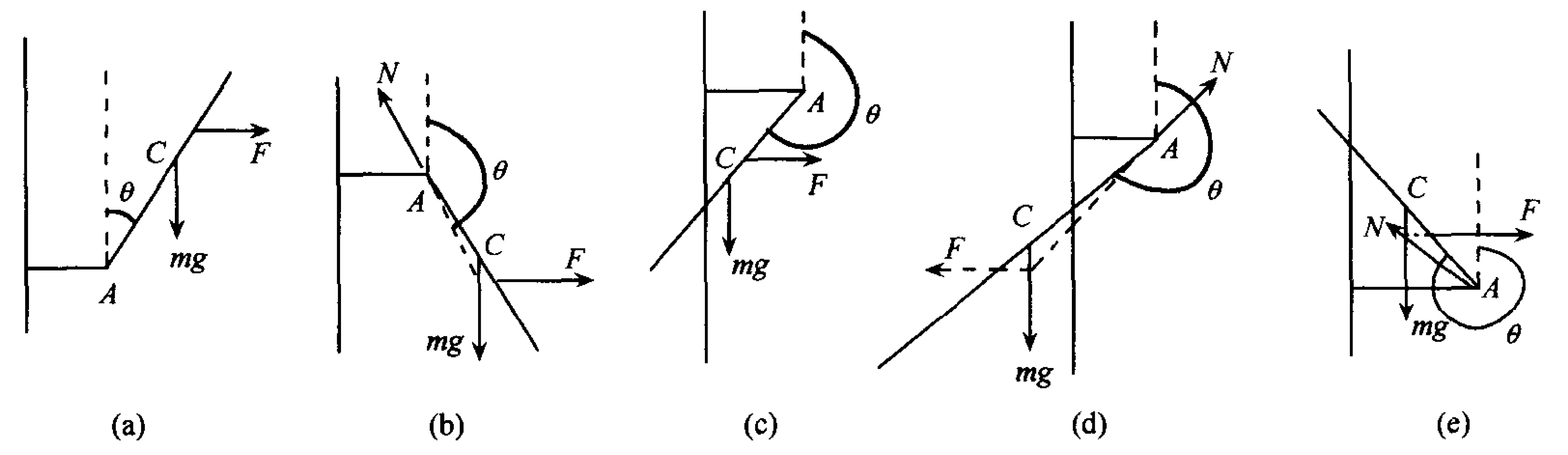


图 7.129

所示,平衡时,mg 和 F 对 A 的力矩大小相等、方向相反. 由此可见,(a)、(c)的情况不可能有平衡位置,这就说明了在第一角限没有平衡位置,在第三象限可能没有平衡位置,(b)、(d)、(e)的情况说明在第二、第四象限均有平衡位置,在第三象限可能有平衡位置. (a)、(c)图不是平衡位置,铰链对杆的作用力 N 的方向不好确定,图中就不好画了.

考虑杆的位置少许偏离平衡位置,对于第二象限的(b)图,如 θ 减小,mg 大小不变,力臂增大,F 变大,作用点可能少许外移,但力臂不一定增大,F 对 A 点的力矩的绝对值可能变大也可能变小,mg 对 A 点的力矩的绝对值一定增大,合力矩可能是恢复力矩(定性地不能说明一定是),因此这里定性地说,可以理解在第二象限的平衡是稳定平衡. 对于第四象限的(e)图,如 θ 增大,F 增大,如略去其作用点的移动,力臂增大,F 对 A 点的力矩的绝对值增大,而 mg 对 A 点的力矩的绝对值减小(因力臂减小了),因此合力矩将使偏离加剧,在第四象限的平衡是不稳定的. 考虑作用点的移动,是向质心方向移动,更是使力臂增大,因此定性说明也能作出第四象限的平衡不稳定的结论. (d)图在第三象限的平衡,定量的表达式不代入参量值前都无法说明稳定还是不稳定,定性地看自然也不能得出肯定的结论.

7.5.30 由于两极处略扁,地球绕极轴的转动惯量比绕赤道轴的转动惯量稍大,假定极轴是旋转对称轴.

(1) 证明在地球表面外的引力势(即单位质量质点具有的势能)的主要项可展成

$$U=-\frac{GM_e}{r}\left[1-\frac{C-A}{2M_ea^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2(3\cos^2\theta-1)\right]$$

其中 C 和 A 分别是地球绕极轴和赤道轴的转动惯量,M_e 是地球质量,a 是地球的平均半径,r 是到地球质心的距离,θ 是 $\boldsymbol{r}$ 与极轴的夹角,系数 $\frac{C-A}{M_ea^2}\sim10^{-3}$;

(2) 第二项对于围绕地球做圆周运动的卫星有什么长期效应?

(3) 如果卫星的运动平面的法线与地球的极轴夹角为 α,取圆形轨道的时间平均导出这个效应大小的表达式.

解 (1) 取极轴为 z 轴,赤道面为 xy 平面,原点取地球中心,$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 表示卫星的位矢,$\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}$ 表示地球一质元 $\mathrm{d}M_e$ 的位矢,质元与卫星的距离为 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.

引力势(卫星的每单位质量的势能)为

$$U=-\int\frac{G\mathrm{d}M_e}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\int\frac{G\mathrm{d}M_e}{(r^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}'^2)^{1/2}}$$

$$=-\int\frac{G}{r}\left[1-\frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}M_e$$

作泰勒展开,略去 $\left(\frac{r'}{r}\right)^3$ 及更高级小量,

$$U=-\int\frac{G}{r}\left[1+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}-\frac{r'^2}{2r^2}+\frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2}{r^4}\right]\mathrm{d}M_e$$

积分中 $\boldsymbol{r}$ 是常矢量,又假定地球是一个旋转对称的椭球,

$$\int\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'\mathrm{d}M_e=\boldsymbol{r}\cdot\int\boldsymbol{r}'\mathrm{d}M_e=0$$

$$U=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{r^3}\int\left[\frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2}{r^2}-\frac{r'^2}{2}\right]\mathrm{d}M_e$$
$$=-\frac{GMe}{r}-\frac{G}{r^3}\int\frac{3(xx'+yy'+zz')^2-(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}{2r^2}\mathrm{d}M_e$$

由于对称，含 $x'y'$、$y'z'$、$z'x'$ 诸因子的项的积分都为零，

$$U=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{r^3}\int\frac{2(x^2x'^2+y^2y'^2+z^2z'^2)-(x^2y'^2+x^2z'^2+y^2x'^2+y^2z'^2+z^2x'^2+z^2y'^2)}{2r^2}\mathrm{d}M_e$$

又因 x 和 y 轴的选取可以是任意的（只要在赤道面上），含 x'^2 项和含 y'^2 项（系数是相同的常量）的积分相等，例如 $\int\frac{x^2}{2r^2}y'^2\mathrm{d}M_e=\int\frac{x^2}{2r^2}x'^2\mathrm{d}M_e$，于是

$$U=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{r^3}\int\frac{x^2x'^2+y^2y'^2+2z^2z'^2-x^2z'^2-y^2z'^2-2z^2x'^2}{2r^2}\mathrm{d}M_e$$
$$=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{r^3}\int\frac{(x^2+y^2)x'^2-2z^2x'^2+(2z^2-x^2-y^2)z'^2}{2r^2}\mathrm{d}M_e$$
$$=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{r^3}\int\frac{(3z^2-r^2)(z'^2-x'^2)}{2r^2}\mathrm{d}M_e$$
$$=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{r^3}\int\left(\frac{3z^2}{2r^2}-\frac{1}{2}\right)(z'^2+y'^2-x'^2-y'^2)\mathrm{d}M_e$$
$$=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{2r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2}-1\right)(I_{xx}-I_{zz})$$

又因 $I_{xx}=I_{zz}=A, I_{zz}=C, z=r\cos\theta$，

$$V=-\frac{GM_e}{r}-\frac{G}{2r^3}(3\cos^2\theta-1)(A-C)$$
$$=-\frac{GM_e}{r}\left[1-\frac{C-A}{2M_ea^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2(3\cos^2\theta-1)\right]$$

(2) U 的展开式中的第二项为

$$U_2=G(C-A)\left(\frac{3z^2}{2r^5}-\frac{1}{2r^3}\right)$$

它对卫星的每单位质量引起附加力

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U_2$$

因 $\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \nabla r^{-5}=-\frac{5\boldsymbol{r}}{r^7}, \nabla r^{-3}=-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}, \nabla z^2=2z\boldsymbol{k}$，

$$\boldsymbol{F}=\frac{3G(A-C)}{2r^5}\left[\left(1-\frac{5z^2}{r^2}\right)\boldsymbol{r}+2z\boldsymbol{k}\right]$$

方括号中的第一部分仍是有心力，但它不是与距离平方成反比的有心力，它不会改变卫星关于地球中心的角动量（大小、方向均不变），因而不影响轨道平面，只是使卫星稍偏离圆形轨道，第二部分的力

$$\boldsymbol{F}_2=\frac{3G(A-C)}{r^5}z\boldsymbol{k}$$

不是有心力，它使轨道平面绕 z 轴进动.

(3) 由于卫星的运动非常接近于绕原点为圆心的匀速率圆周运动，由对称性，在卫星

$$\overline{M} = -\frac{3G(C-A)\sin 2\alpha}{4r^3}i$$

设轨道平面的进动角速度为$\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\Omega}$也是$Oxyz$坐标系绕$z$轴的转动角速度，

$$\frac{\overline{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\overline{\partial \boldsymbol{J}}}{\mathrm{d}t} + \overline{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{J} = \overline{\boldsymbol{M}}$$

所以
$$\frac{\overline{\partial \boldsymbol{J}}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \overline{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{J} = \overline{\boldsymbol{M}}$$

式中$\boldsymbol{J}$为卫星单位质量的对地球中心的角动量，

$$\boldsymbol{J} = r^2\omega(-\sin\alpha\boldsymbol{j} + \cos\alpha\boldsymbol{k})$$

$$\overline{\Omega}\boldsymbol{k} \times r^2\omega(-\sin\alpha\boldsymbol{j} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) = -\frac{3G(C-A)\sin 2\alpha}{4r^3}\boldsymbol{i}$$

$$\overline{\Omega} = -\frac{3G(C-A)\cos\alpha}{2r^5\omega}$$

结论是取圆形轨道的时间平均，卫星的运动平面的法线与地球的极轴的夹角α不变，但法线将以$\overline{\boldsymbol{\Omega}}=-\dfrac{3G(C-A)\cos\alpha}{2r^5\omega}\boldsymbol{k}$的平均角速度绕极轴进动，这个$|\overline{\Omega}|$是非常小的. 设卫星以$r=a$紧靠地球表面做圆周运动，其角速度$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{a}}\sim10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$，用$\dfrac{C-A}{M_e a^2}\sim10^{-3}$，可算出$|\overline{\Omega}|\sim10^{-7}\mathrm{s}$. 比卫星做圆周运动的角速度小得多.

7.5.31 (1) 一个有限的轴对称物体，质量密度为$\rho=\rho(x,y,z)=\rho(r,\theta)$($r$、$\theta$为球坐标)，在距离物体比较远的地方，引力势形式为

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{f(\theta)}{r^2} + \cdots$$

其中

$$M = \int \rho(x',y',z')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$$
$$= 2\pi\int \rho(r',\theta')r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'$$

是总质量. 求$f(\theta)$；

(2) 一个小的检验体，密度为$\sigma(x,y,z)$，被放置在引力势$U(x,y,z)$的地方，求小检验体的引力势能；

(3) 若上述小检验体放在一个球对称的引力势$U=-\dfrac{GM}{r}$的势场中，使检验体的质心在$(0,0,r_0)$，试证：r_0足够大处引力势能为

$$V = -\frac{mMG}{r_0} + \frac{d}{r_0^2} + O(1/r_0^3)$$

其中$m=\int_\tau \sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，并求$d$.

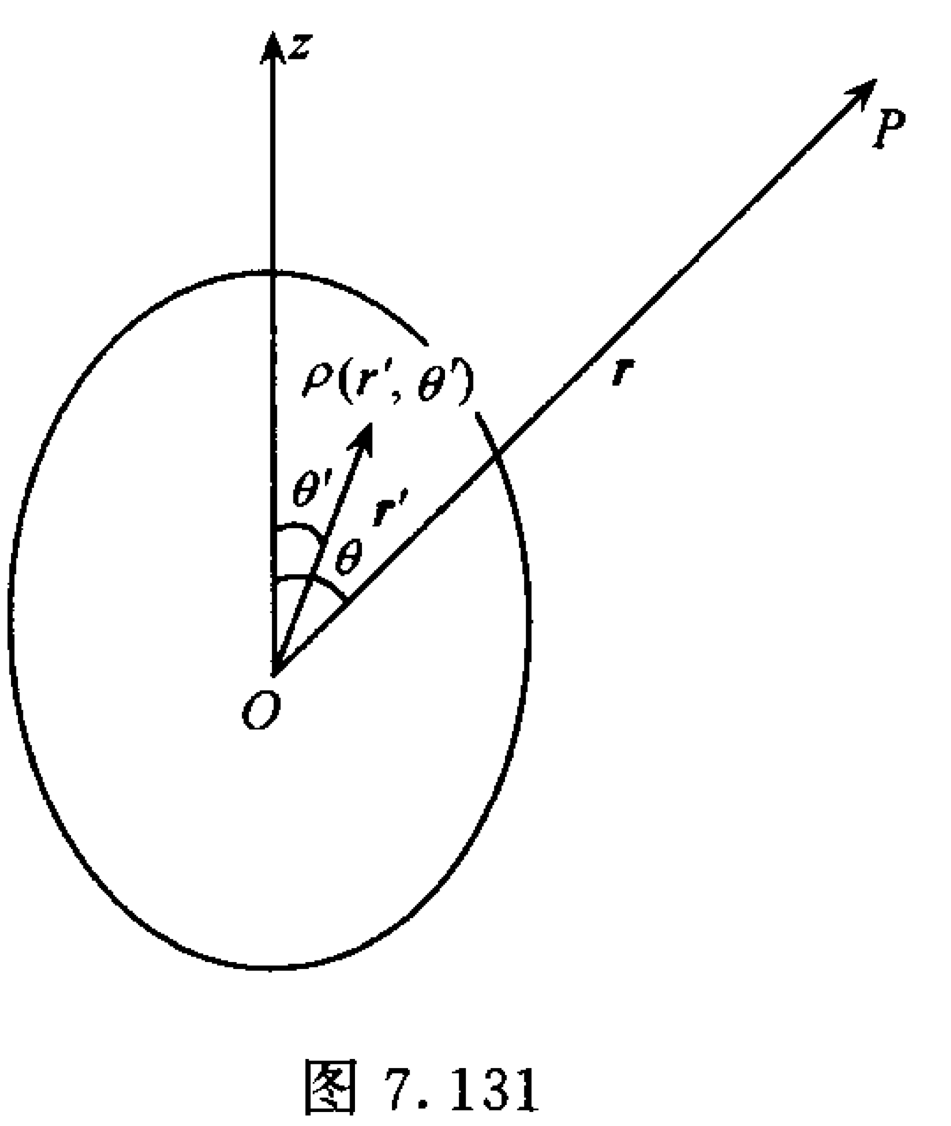


图 7.131

解 (1) 题目已经要求取对称轴为z轴，在图7.131中远离物体的P点的引力势为

$$U(r,\theta)=-\int\frac{G\rho(r',\theta')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

其中 V' 是物体的体积，

$$\mathrm{d}V'=r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi$$

由于物体轴对称，被积函数与 φ 无关，可对 φ 积分，

$$U=-\int\frac{G\rho(r',\theta')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot 2\pi r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

因为 $r\gg r'$，略去二级及二级以上小量，

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}\right)\approx\frac{1}{r}\left[1+\frac{r'}{r}\cos(\theta-\theta')\right]$$

$$\begin{aligned}U&=-2\pi G\int\frac{1}{r}\rho(r',\theta')\left[1+\frac{r'}{r}\cos(\theta-\theta')\right]r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\\&=-\frac{G}{r}\cdot 2\pi\int\rho(r',\theta')r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\\&\quad-\frac{G}{r^2}\cdot 2\pi\int\rho(r',\theta')r'^3\cos(\theta-\theta')\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\\&=-\frac{GM}{r}+\frac{f(\theta)}{r^2}\end{aligned}$$

其中

$$f(\theta)=-2\pi G\int\rho(r',\theta')r'^3\cos(\theta-\theta')\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'$$

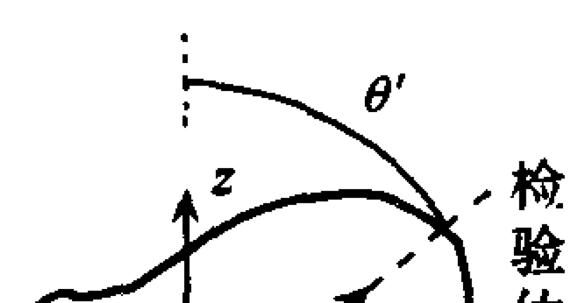
(2) 既然是小检验体，其自身产生的引力势与势场的引力势 $U(x,y,z)$ 相比是可以不计的，小检验体的引力势能为

$$V=\int_\tau\sigma(x,y,z)U(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 τ 是小检验体的体积.

(3) 今 $U(x,y,z)=-\frac{GM}{r}$，检验体的势能为

$$V=-\int_\tau\sigma(x,y,z)\,\frac{GM}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



设 C 为检验体的质心，位于相对于质心的位矢 $\boldsymbol{r}'$ 处的体积元 $\mathrm{d}\tau$ 的(见图 7.132)位矢为

检验体的引力势能为

$$\begin{aligned} V &= -\frac{GM}{r_0}\int_\tau \sigma(r',\theta',\varphi)\left[1-\frac{r'}{r_0}\cos\theta' + O\left(\frac{1}{r_0^2}\right)\right]r'^2\sin\theta'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GM}{r_0^2}\int_\tau \sigma(r',\theta',\varphi)r'^3\cos\theta'\sin\theta'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi + O\left(\frac{1}{r_0^3}\right) \\ &= -\frac{GMm}{r_0} + \frac{d}{r_0^2} + O\left(\frac{1}{r_0^3}\right) \end{aligned}$$

其中

$$d = \frac{GM}{2}\int_\tau \sigma(r',\theta',\varphi)r'^3\sin 2\theta'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi$$

第八章　流体力学基础

8.1　流体运动学

8.1.1　已知流体运动的速度场为

$$v_x = x + t,\quad v_y = y + t,\quad v_z = 0$$

求用拉格朗日变量表示的速度分布.

解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + t$$

$$\mathrm{d}x - (x + t)\mathrm{d}t = 0$$

设有积分因子 $\varphi(t)$，即

$$\varphi(t)\mathrm{d}x - (x + t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$$

为恰当微分. 由全微分条件，

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\varphi$$

积出

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

$$\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}x - x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0$$

$$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{-t}) + \mathrm{d}\left(-\int t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right) = 0$$

$$-\int t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t} = t\mathrm{e}^{-t} - \int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (t + 1)\mathrm{e}^{-t}$$

$$\mathrm{d}[(x + t + 1)\mathrm{e}^{-t}] = 0$$

$$(x + t + 1)\mathrm{e}^{-t} = C \ (C\text{ 为常量})$$

$$x = C\mathrm{e}^{t} - (t + 1)$$

若 $t = 0$ 时，$x = x_0$，则

$$C = x_0 + 1$$

$$x = (x_0 + 1)\mathrm{e}^{t} - (t + 1)$$

$$v_x = (x_0 + 1)\mathrm{e}^{t} - 1$$

同样解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + t$$

若 $t=0$ 时，$y=y_0$，因与上述的微分方程同型，可直接写出

$$v_y = (y_0 + 1)\mathrm{e}^{t} - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,\qquad z = z_0$$

$$v_z = 0$$

故用拉格朗日变量表示的速度分布为

$$v_x = (x_0 + 1)e^t - 1$$
$$v_y = (y_0 + 1)e^t - 1$$
$$v_z = 0$$

8.1.2　某一流体流动的拉格朗日描述是

$$x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{y_0}{x_0}\right)$$
$$y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sin\left(\omega t + \arctan\frac{y_0}{x_0}\right)$$

其中 ω 是常量,求出用欧拉方式描述的速度场.

解

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = -\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,\omega\sin\left(\omega t + \arctan\frac{y_0}{x_0}\right) = -\omega y$$
$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,\omega\cos\left(\omega t + \arctan\frac{y_0}{x_0}\right) = \omega x$$

用欧拉方式描述的速度分布为

$$\boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$$

8.1.3　流体运动的速度场为

$$v_x = yzt,\quad v_y = zxt,\quad v_z = 0$$

问当 $t=10$ 时,在点(2,5,3)处的质元的加速度为何值?

解　今知用欧拉变量描述的$\boldsymbol{v}$,用欧拉变量描述的 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{v}$ 有下列关系:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

故

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_x \\ &= \frac{\partial(yzt)}{\partial t} + yzt\frac{\partial(yzt)}{\partial x} + z_x t\frac{\partial(yzt)}{\partial y} + 0 \\ &= yz + xz^2t^2 \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_y \\ &= \frac{\partial(zxt)}{\partial t} + yzt\frac{\partial(zxt)}{\partial x} + zxt\frac{\partial(zxt)}{\partial y} + 0 \\ &= zx + yz^2t^2 \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_z = 0 \end{aligned}$$

故　$t=10$ 时,在点(2,5,3)处质元的加速度为

$$a_x = 5\times 3 + 2\times 3^2\times 10^2 = 1815$$
$$a_y = 3\times 2 + 5\times 3^2\times 10^2 = 4506$$
$$a_z = 0$$

8.1.4　流体沿 x 方向定常运动,速度按线性规律递增,已知流体质元流经相距 $l=$

50cm 的 A、B 两点的速度 $v_A=2\text{ms}^{-1}$、$v_B=6\text{ms}^{-1}$,如图 8.1 所示. 试求流经这两点时质元的加速度.

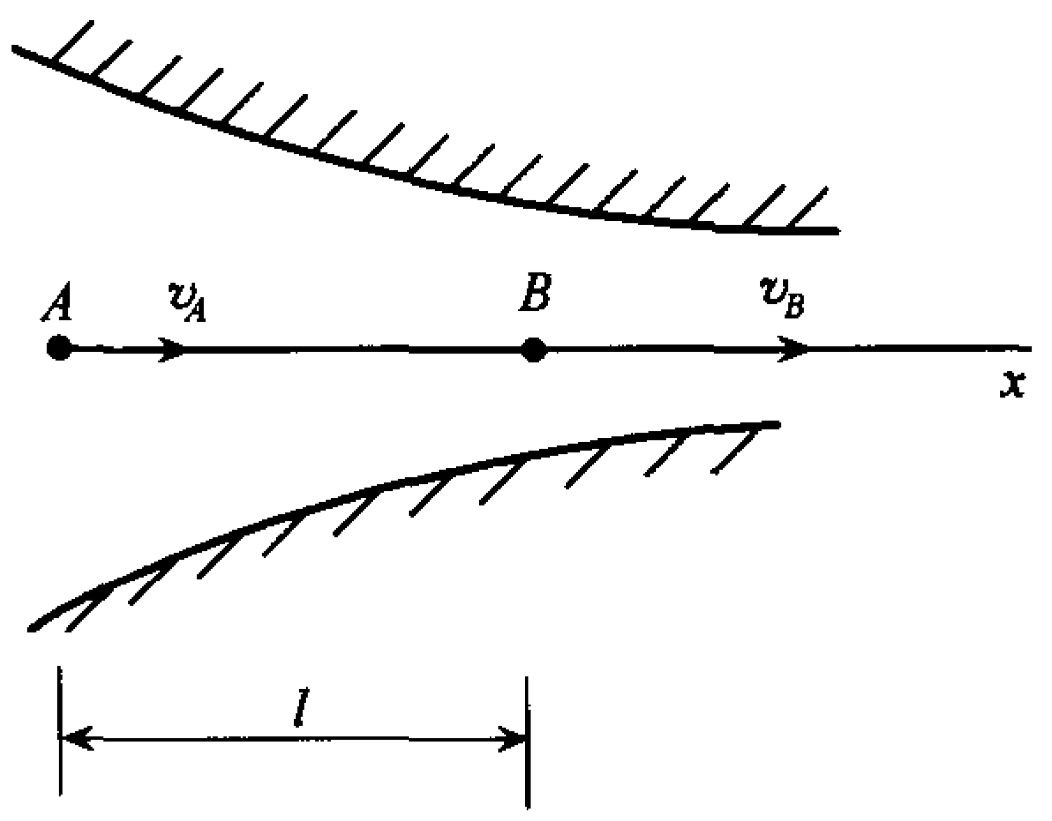


图 8.1

解　速度按线性规律递增,

$$v=\alpha+\beta x$$

α、β 均为常量,取 A 点为 x 轴的原点,则

$$x=0, v=v_A=2\text{ms}^{-1}$$

$$x=l=0.50\text{m}, \qquad v=v_B=6\text{ms}^{-1}$$

可定出 $\alpha=2, \beta=8$,

$$v=2+8x$$

$$a=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=16(1+4x)$$

故在 A 点, $x=0, a_A=16\text{ms}^{-2}$

在 B 点, $x=0.5$ m, $a_B=48\text{ms}^{-2}$

8.1.5　流体在平面上做定常流动,其速度场用极坐标表示为

$$\boldsymbol{v}(r,\varphi)=br\boldsymbol{e}_\varphi$$

其中 b 为常量,求该流动的加速度场.

解　将速度场改用直角坐标表示,参看图 8.2,

$$v_x=-br\sin\varphi=-by$$

$$v_y=br\cos\varphi=bx$$

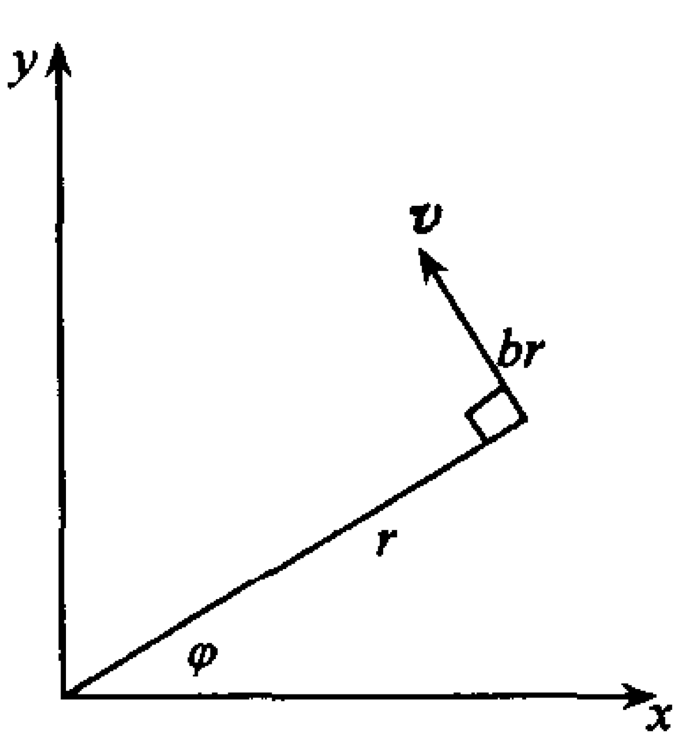


图 8.2

用

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$$

$$a_x=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_x$$

$$=0+(-by)\frac{\partial(-by)}{\partial x}+bx\frac{\partial(-by)}{\partial y}=-b^2x$$

$$a_y=\frac{\partial v_y}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_y$$

$$=0+(-b_y)\frac{\partial(bx)}{\partial x}+bx\frac{\partial(bx)}{\partial y}=-b^2y$$

所以

$$\boldsymbol{a}=-b^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) \quad 或 \quad \boldsymbol{a}=-b^2r\boldsymbol{e}_r$$

8.1.6　已知一定常流动的速度场为

$$v_x=2kx, \quad v_y=2ky, \quad v_z=-4kz$$

其中 k 为常量,试求通过(1,1,1)点的流线方程.

解　流线满足的常微分方程为

$$\frac{dx}{2kx}=\frac{dy}{2ky}=\frac{dz}{-4kz}$$

由

$$2ky\,dx=2kx\,dy$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

$$\ln x = \ln y + \ln c_1$$

$$x = c_1 y \tag{1}$$

由
$$-4kz\mathrm{d}x = 2kx\mathrm{d}z,$$

$$-2\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$z = \frac{c_2}{x^2} \tag{2}$$

要通过(1,1,1)点，将 $x=1,y=1$ 代入式(1)，定出 $c_1=1$，将 $x=1,z=1$ 代入式(2)，定出 $c_2=1$，故通过(1,1,1)点的流线方程为

$$x = y,\qquad z = \frac{1}{x^2}$$

8.1.7 已知某运动的速度场为

$$\boldsymbol{v} = (1 + At)\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j}$$

其中 A 为常量．求：

(1) $t=t_0$ 时通过 (x_0,y_0) 点的流线方程；

(2) $t=t_0$ 时位于 (x_0,y_0) 点的流体质元的轨道方程；

(3) $t=t_0$ 时位于 (x_0,y_0) 点的流体质元在 t 时刻的速度．

解 (1)流线满足的常微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1 + At} = \frac{\mathrm{d}y}{2x}$$

其中 t 是参量

$$\int_{x_0}^{x} 2x\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{y} (1 + At)\Big|_{t=t_0}\mathrm{d}y$$

$$x^2 - x_0^2 = (1 + At_0)(y - y_0)$$

或
$$y - y_0 = \frac{1}{1 + At_0}(x^2 - x_0^2)$$

(2) 轨道方程满足的常微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1 + At} = \frac{\mathrm{d}y}{2x} = \mathrm{d}t$$

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t}(1 + At)\mathrm{d}t$$

$$x - x_0 = \left(t + \frac{1}{2}At^2\right)\Big|_{t=t_0}^{t} = (t - t_0) + \frac{1}{2}A(t^2 - t_0^2)$$

$$\int_{y_0}^{y}\mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t}2x\mathrm{d}t = 2\int_{t_0}^{t}\left[x_0 + (t - t_0) + \frac{1}{2}A(t^2 - t_0^2)\right]\mathrm{d}t$$

$$y - y_0 = 2x_0(t - t_0) + (t - t_0)^2 + \frac{1}{3}A(t^3 - 3t_0^2 t + 2t_0^3)$$

(3) 将(2)向中求得的轨道方程亦即运动学方程对 t 求导，即得

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + At$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x_0 + 2(t - t_0) + A(t^2 - t_0^2)$$

它们是 t_0 时刻位于 (x_0, y_0) 的流体质元在 t 时刻的速度分量,写成矢量式为

$$\boldsymbol{v} = (1 + At)\boldsymbol{i} + [2x_0 + 2(t - t_0) + A(t^2 - t_0^2)]\boldsymbol{j}$$

8.1.8 流体运动的速度分布若为

$$\boldsymbol{v} = (x + t)\boldsymbol{i} - (y - t)\boldsymbol{j}$$

求通过 $(-1,-1)$ 点的流线及 $t=0$ 时通过 $(-1,-1)$ 点的迹线.

解 流线满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x + t} = \frac{\mathrm{d}y}{-(y - t)}$$

其中 t 是参量

$$\ln(x + t) = -\ln(y - t) + \ln C$$

$$(x + t)(y - t) = C$$

将 $x=-1, y=-1$ 代入上式定 C,

$$C = (-1 + t)(-1 - t) = -(t^2 - 1)$$

$$(x + t)(y - t) = -(t^2 - 1)$$

$$xy + yt - xt - 1 = 0$$

上式就是通过 $(-1,-1)$ 点的流线方程,t 是参量,给定 t 值,就给出了此时流线的 x、y 的曲线方程.

迹线满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x + t} = \frac{\mathrm{d}y}{-(y - t)} = \mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -(y - t) \tag{1}$$

两式均是非齐次的一阶常系数线性微分方程,我们用常数变易法,先求相应的齐次方程的解.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$$

$$x = c\mathrm{e}^t$$

把常数 c 变成 t 的函数

$$x = c(t)\mathrm{e}^t \tag{2}$$

$$\dot{x} = \dot{c}\,\mathrm{e}^t + c\mathrm{e}^t \tag{3}$$

将式(2)、(3)代入式(1)得 $c(t)$ 满足的微分方程

$$\dot{c}\,\mathrm{e}^t = t$$

$$c = \int t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -t\mathrm{e}^{-t} + \int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= -t\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + c_1$$

所以
$$x=-(t+1)+c_1e^t$$
同样用常数变易解$\frac{dy}{dt}=-(y-t)$，可得
$$y=t-1+c_2e^{-t}$$
由 $t=0$ 时，$x=-1,y=-1$，可定出 $c_1=0,c_2=0$.

带参量 t 的在 $t=0$ 通过$(-1,-1)$点的迹线方程为
$$x=-(t+1),\qquad y=t-1$$
上两式消去 t，即得不带参量的迹线方程
$$x+y+2=0$$

8.1.9　流体运动的轨迹为
$$x=x_0e^{-2bt},\quad y=y_0e^{bt},\qquad z=z_0e^{bt}$$
其中 b 为非零常量.判断此流动是否定常流动?

解
$$v_x=\frac{dx}{dt}=-2bx_0e^{-2bt}=-2bx$$
$$v_y=\frac{dy}{dt}=by_0e^{bt}=by$$
$$v_z=\frac{dz}{dt}=bz_0e^{bt}=bz$$
$$\boldsymbol{v}=-2bx\boldsymbol{i}+by\boldsymbol{j}+bz\boldsymbol{k}$$
∵　$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0$，此流动是定常流动.

8.1.10　对 8.1.5 题所述的流体运动，如取以恒定速度 V 沿 x 轴向正方向运动的参考系 S'，固连于它的两个坐标轴 x'、y'轴分别与 x、y 轴平行，且 $t=0$ 时，两坐标系完全重合.问在 S' 系中看此流动是否是定常流动？给出 t 时刻通过任意点(x'_0,y'_0)的流线方程.

解　8.1.5 题所述的流体运动的速度场为
$$\boldsymbol{v}(r,\varphi)=br\boldsymbol{e}_\varphi$$
用直角坐标系表示，
$$v_x=-br\sin\varphi=-by$$
$$v_y=br\cos\varphi=bx$$
改用 S'参考系，参看图 8.3，

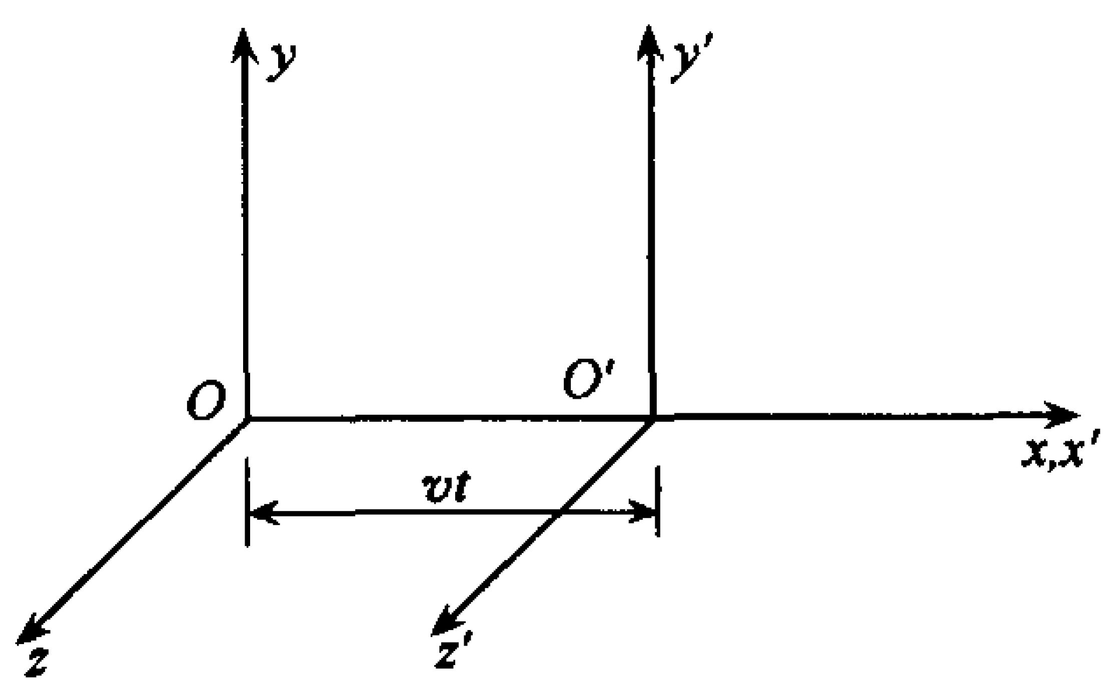


图 8.3

$$x=x'+Vt$$
$$y=y'$$
$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}+V=v'_x+V$$
$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt}=v_{y'}$$
∴
$$v_{x'}=v_x-V=-by'-V$$
$$v_{y'}=v_y=bx=b(x'+Vt)$$
$$\frac{\partial v_{y'}}{\partial t}\neq 0$$

所以在 S' 系中看流动不是定常流动.

在 S' 系中流线满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x'}{-by'-V}=\frac{\mathrm{d}y'}{b(x'+Vt)}$$

其中 t 为参量.

$$\int_{x_0'}^{x'}b(x'+Vt)\mathrm{d}x'=-\int_{y_0'}^{y'}(by'+V)\mathrm{d}y'$$

$$\frac{1}{2}b(x'+Vt)^2-\frac{1}{2}b(x_0'+Vt)^2=-\frac{1}{2b}[(by'+V)^2-(by_0'+V)^2]$$

t 时刻在 S' 系中看通过 (x_0',y_0') 的流线方程为

$$(x'+Vt)^2+\left(y'+\frac{V}{b}\right)^2=(x_0'+Vt)^2+\left(y_0'+\frac{V}{b}\right)^2$$

8.1.11 判断下述不可压缩流体的运动是否可能存在:

(1) $v_x=x, v_y=y, v_z=z$;

(2) $v_x=2x^2+y, v_y=2y^2+z, v_z=-4(x+y)z+xy$;

(3) $v_x=yzt, v_y=xzt, v_z=xyt$.

解 流体的运动都得遵从由质量守恒定律导出的连续性方程,连续性方程的一种表达式为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

不可压缩流体,密度 ρ 是常量,不随时间而变,也不随位置而变,$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$,故不可压缩流体的运动,必须满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

由此式来判断所给的三个运动是否可能存在.

(1) $$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=3\neq 0$$

这个运动不可能存在

(2) $$\frac{\partial v_x}{\partial x}=4x,\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=4y,\quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=-4(x+y)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=4x+4y-4(x+y)=0$$

这个运动可能存在.

(3) $$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

这个运动也可能存在.

8.1.12 分别判断 8.1.5 题,8.1.9 题所述流动的流体是不是不可压缩流体?

解 如上题所述,不可压缩流体的运动必须满足的连续性方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

8.1.5 题和 8.1.9 题所述的流动未限定是不可压缩流体,运动肯定存在,如运动不满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$,流体是可压缩的,如满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$,则流体是不可压缩的.

8.1.5 题所述的运动，速度场为

$$\boldsymbol{v}(r,\varphi) = br\boldsymbol{e}_\varphi$$

改用直角坐标，速度场可表示为

$$v_x = -by, \qquad v_y = bx$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

说明做 8.1.5 题所述的流动的流体是不可压缩的.

也可以不改用直角坐标，直接用极坐标的散度公式计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(v_\varphi)}{\partial \varphi}$$

今

$$v_r = 0, v_\varphi = br,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(br)}{\partial \varphi} = 0$$

也可得出同样的结论.

8.1.9 题所述的运动

$$v_x = -2bx, \quad v_y = by, \quad v_z = b_z$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2b + b + b = 0$$

说明做此流动的流体也是不可压缩的.

8.1.13　某流体沿截面积不变的直圆管流动，流速为

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)\text{th}x$$

其中 v_1、v_2 为常量，在 $x=-\infty$ 处，密度 $\rho=\rho_1$. 问此流体是否可压缩？并求沿管道的密度分布.

解　$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}(v_2-v_1)\frac{\mathrm{d}\,\text{th}x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}(v_2-v_1)\text{sech}^2x\neq 0$，流体是可压缩的.

由连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

及 $\frac{\partial v}{\partial t}=0$ 为定常流动，$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ 得

$$v\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$v\mathrm{d}\rho + \rho\mathrm{d}v = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

在 $x=-\infty$ 处，$\rho=\rho_1$，

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)\text{th}x\,|_{x=-\infty} = v_1$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\int_{v_1}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$\ln \frac{\rho}{\rho_1} = -\ln \frac{v}{v_1}$$

$$\rho = \frac{\rho_1 v_1}{v}$$

将 $v=\frac{1}{2}(v_1+v_2)+\frac{1}{2}(v_2-v_1)\text{th}x$ 代入,可得

$$\rho = \rho_1 v_1 \left[\frac{1}{2}(v_1+v_2)+\frac{1}{2}(v_2-v_1)\text{th}x\right]^{-1}$$

8.1.14 判断以下流动的类型:定常不定常,有旋无旋,如果是无旋的,求出速度势,流体可否压缩?

(1) $v_x=-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$,　$v_y=\frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}$,　$v_z=\frac{y}{x^2+y^2}$;

(2) $v_r=(n+1)ar^n e^{-k(n+1)\varphi}$,　$v_\varphi=-k(n+1)ar^n e^{-k(n+1)}\varphi$,　$v_z=0$,

其中 k、n、a 均为常量.

解　(1)$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0$,是定常流动.

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial x_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}-\frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^4}\cdot 2(x^2+y^2).2x$$

$$=\frac{2xz(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^4}\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y$$

$$=\frac{2xz(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$　　流动是无旋的.

下面求速度势 ϕ:

$$\phi=\int\left[-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x+\frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y+\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}z\right]$$

选择图 8.4 的积分路线:

路段 1:$y=0$,$z=0$,故 $\mathrm{d}y=0$,$\mathrm{d}z=0$,x 从 0 积到 x;

路段 2：x 保持不变，$dx=0,z=0,dz=0$，y 从 0 积到 y；

路段 3：x、y 均保持不变，$dx=0,dy=0$，z 从 0 积到 z.

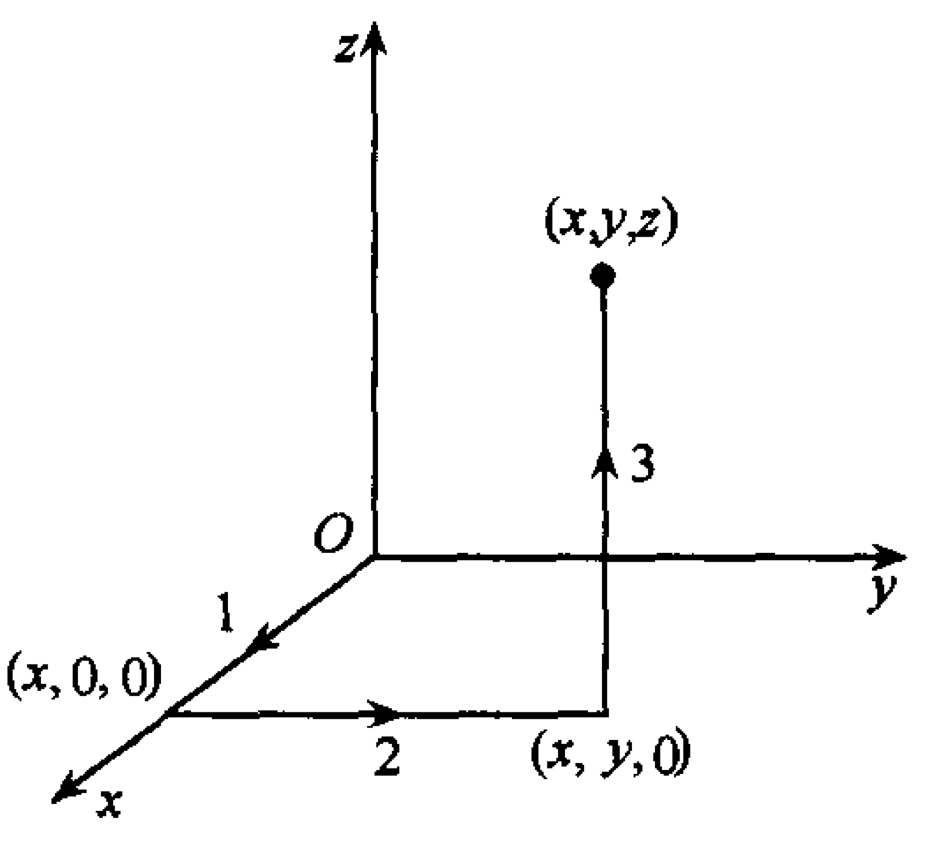


图 8.4

$$\phi=\int_0^x\left[-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}\right]\Bigg|_{\substack{y=0\\z=0}}dx+\int_0^y\frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}\Bigg|_{\substack{z=0\\x不变}}dy+\int_0^z\frac{y}{x^2+y^2}\Bigg|_{x,y不变}dz=\frac{yz}{x^2+y^2}$$

这里取原点为速度势的零点，零点的选取是随意的，选择不同的零点，速度势有不同的函数，但选同样的零点，速度势的函数不受积分路径选取的影响.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^4}\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x=\frac{2yz(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}-\frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^4}\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y=-\frac{2yz(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

流体是不可压缩的.

(2) $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0$，是定常流动.

用柱坐标的旋度公式

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{k}$$

这里

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}=0,\qquad \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial v_z}{\partial r}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[-k(n+1)ar^{n+1}e^{-k(n+1)\varphi}\right]=-k(n+1)^2ar^{n-1}e^{-k(n+1)\varphi}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(n+1)ar^ne^{-k(n+1)\varphi}\right]$$

$$= -k(n+1)^2 a r^{n-1} e^{-k(n+1)\varphi}$$

$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$,流动是无旋的.

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k} = v_r \boldsymbol{e}_r + v_\varphi \boldsymbol{e}\varphi + v_z \boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = (n+1) a r^n e^{-k(n+1)\varphi}$$

上式对 r 积分

$$\phi = \int (n+1) a r^n e^{-k(n+1)\varphi} dr + f(\varphi) = a r^{n+1} e^{-k(n+1)\varphi} + f(\varphi)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -k(n+1) a r^n e^{-k(n+1)\varphi} + \frac{1}{r} f'(\varphi)$$

又有 $\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = v_\varphi = -k(n+1) a r^n e^{-k(n+1)\varphi}$

两式比较,可得

$$f'(\varphi) = 0, \quad f(\varphi) = 常量$$

速度势的零点可以随意选取,故令 $f(\varphi) = 0$.

$$\phi = a r^{n+1} e^{-k(n+1)\varphi}$$

这样选取 $f(\varphi) = 0$,是选原点为速度势的零点.

也可用(1)问中求 ϕ 的方法,选取图 8.5 的积分路径,

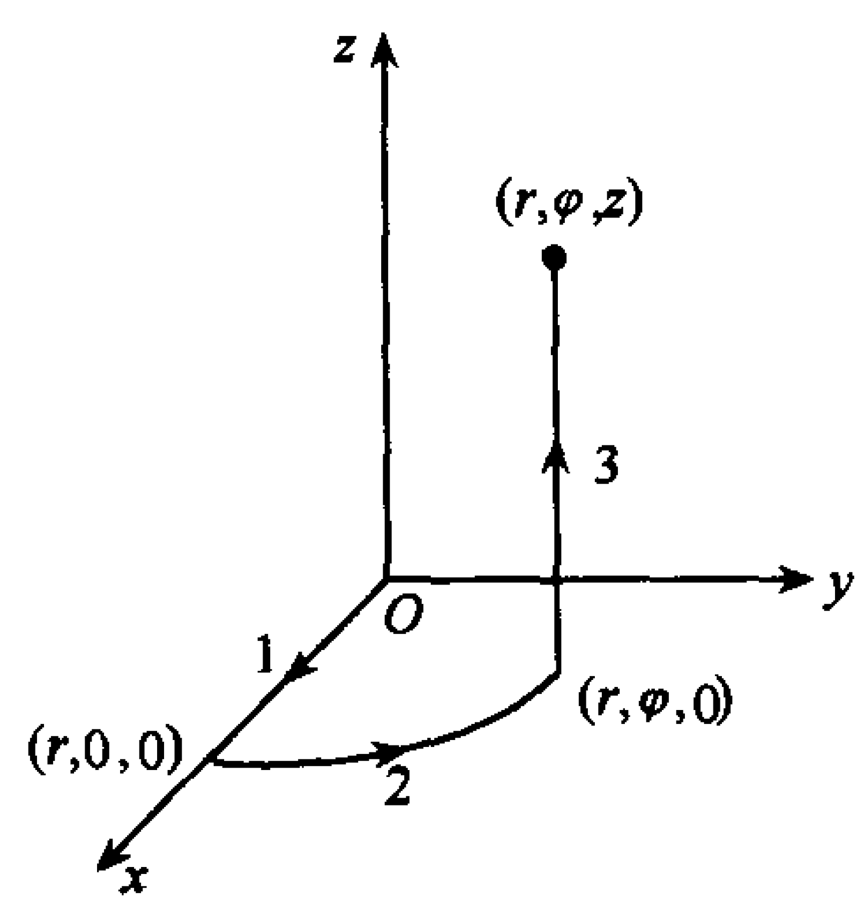


图 8.5

$$\begin{aligned}
\phi &= \int \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\
&= \int v_r dr + r v_\varphi d\varphi + v_z dz \\
&= \int_0^r (n+1) a r^n e^{-k(n+1)\varphi}\Big|_{\varphi=0} dr \\
&\quad + \int_0^\varphi r[-k(n+1) a r^n e^{-k(n+1)\varphi}]\big|_{r不变} d\varphi \\
&\quad + \int_0^z o \cdot dz \\
&= a r^{n+1} + a r^{n+1} e^{-k(n+1)\varphi} - a r^{n+1} = a r^{n+1} e^{-k(n+1)\varphi}
\end{aligned}$$

与上法结果相同.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= (1-k^2)(n+1)^2 a r^{n-1} e^{-k(n+1)\varphi} \neq 0
\end{aligned}$$

流体是可压缩的.

§ 8.2　流体静力学

8.2.1　一根横截面积为 1cm² 的管子铅直地连在一个容器上,容器高度为 1cm,横截面积为 100cm². 今把水注入到离容器底面的高度 100cm,管子上端封闭,并将水面上方的

气体抽空，求：

(1) 水对容器底面的作用力：

(2) 系统内水的重量；

(3) 解释(1)问和(2)问所得数值为何不同？

(4) 如置于磅秤上，磅秤示重多大？(容器质量可忽略不计).

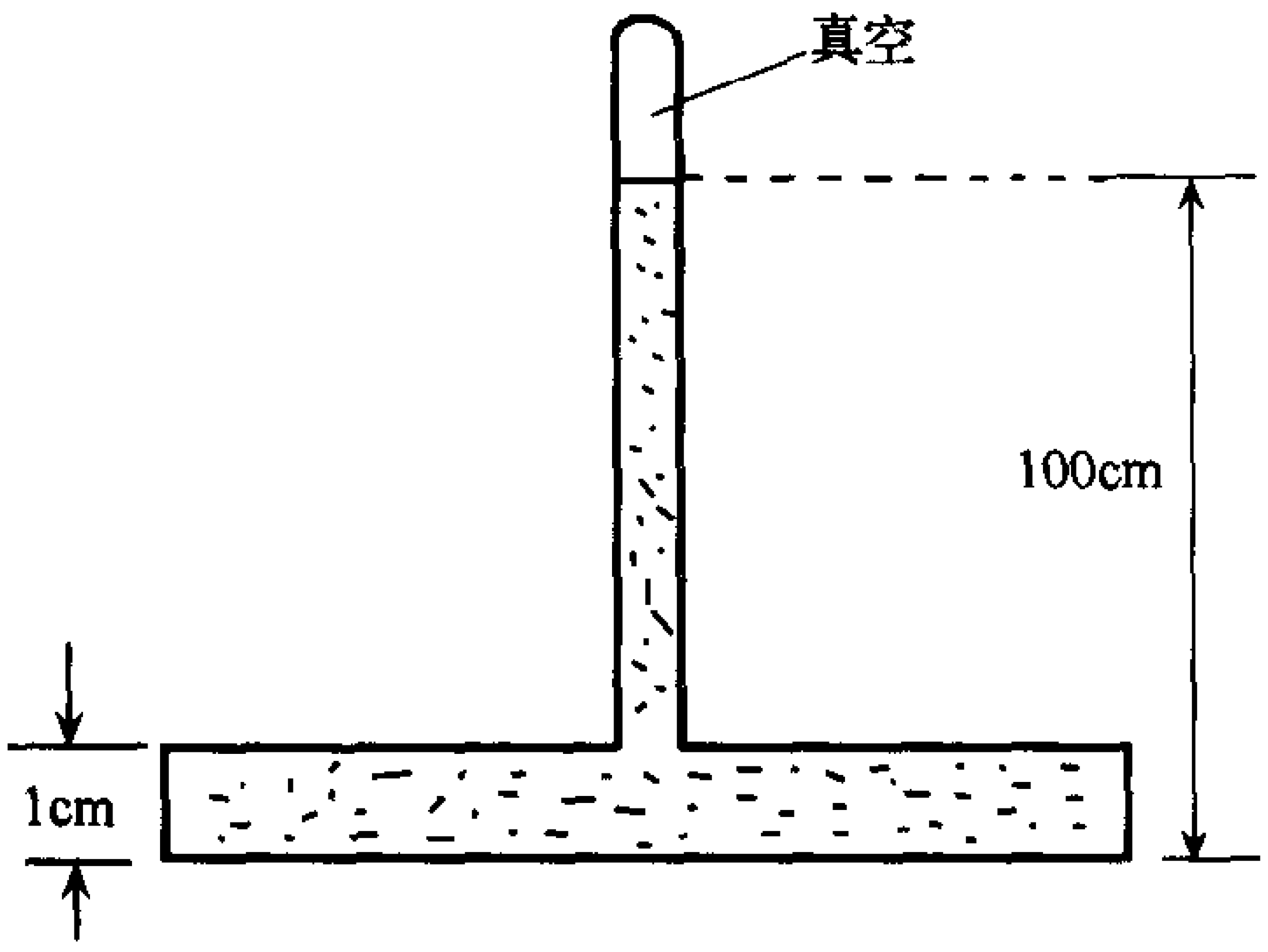


图 8.6

解　(1) $F=\rho ghS=\left(\frac{1\times10^{-3}}{10^{-6}}\right)\times9.8\times1\times100\times10^{-4}=98\text{N}$

(2) $W=\rho Vg=\left(\frac{1\times10^{-3}}{10^{-6}}\right)\times(0.01\times100\times10^{-4}+1\times10^{-4}\times0.99)\times9.8=1.95\text{N}$

(3) 水对容器底面的作用力所以大于水的重量，是因为还有容器顶部给水的作用力，处于平衡时，水的压强的大小与截面的取向无关，在容器顶部，顶部给予水的力等于那里水的压强与顶部面积的乘积，它正好等于 $F-W$.

(4) 以容器、管子及水为系统，磅秤的示数等于磅秤的支持力 N，不计容器质量.

$$N=W=1.95\text{N}=\frac{1.95}{9.8}=0.199\text{kg 力}$$

8.2.2　设一盛着水的长方体水箱以与水平面夹角为 α 的恒力 F 往斜面上拉，斜面的倾角为 θ. 取固连于水箱的 x、y、z 坐标，如图 8.7 所示. 水箱置于水平面上静止时，水面高度为 h，水箱 x 方向的边长为 L_1，z 方向的边长为 L_2，水的密度为 ρ，大气压强为 p_0，求相对于水箱平衡后：

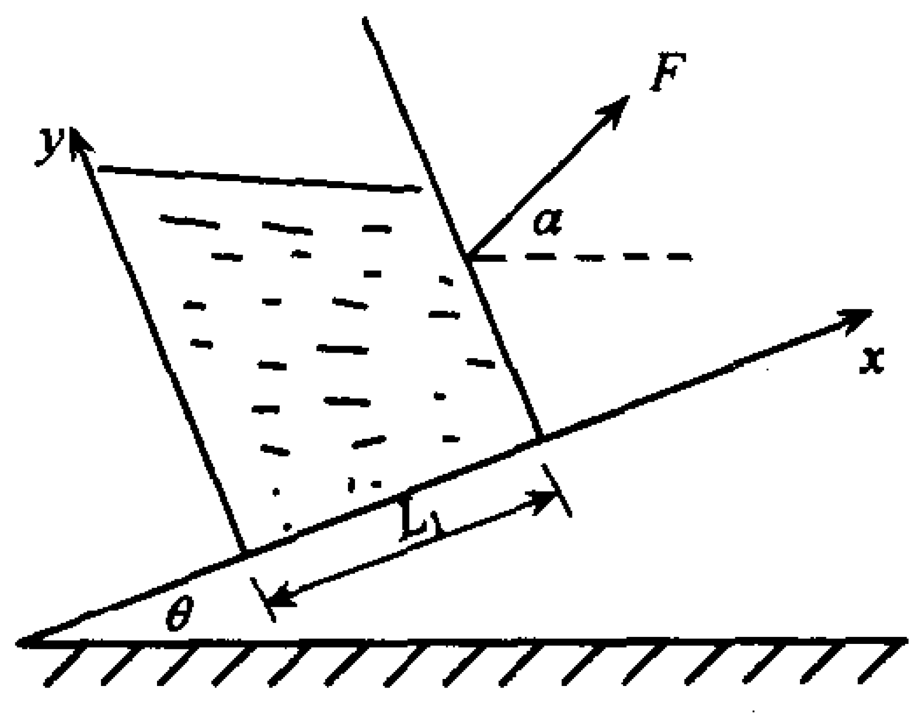


图 8.7

(1)水的压强分布 $p(x、y)$；

(2) $x=0$ 处的水箱壁受到的总压力 N；

(水箱的质量可以忽略不计.)

解　(1)需用水箱为参考系，它是个非惯性系，设加速度为 $\boldsymbol{a}$，它沿 x 方向，

$$\rho L_1L_2ha=F\cos(\alpha-\theta)$$

$$a=\frac{F}{\rho L_1L_2h}\cos(\partial-\theta)$$

在水箱参考系中水处于平衡状态，平衡方程为

$$\rho\boldsymbol{F}=\nabla p$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是单位质量所受的质量力(或叫彻体力)，注意不要与题目所给的 F 发生混淆. 这里质量力包含两种力：一是惯性力；一是重力.

$$\boldsymbol{F}=(-a-g\sin\theta)\boldsymbol{i}-g\cos\theta\boldsymbol{j}$$

平衡方程为

$$-\rho(a+g\sin\theta)\boldsymbol{i}-\rho g\cos\theta\boldsymbol{j}=\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho(a+g\sin\theta)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g\cos\theta$$

$$\mathrm{d}p=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y=-\rho(a+g\sin\theta)\mathrm{d}x-\rho g\cos\theta\mathrm{d}y$$

$$p=-\rho(a+g\sin\theta)x-\rho g\cos\theta y+c$$

由 $x=\frac{1}{2}L_1$、$y=h$ 处 $p=p_0$ 可定常量 c,

$$p_0=-\rho(a+g\sin\theta)\cdot\frac{1}{2}L_1-\rho g\cos\theta\cdot h+c$$

$$c=p_0+\frac{1}{2}\rho L_1(a+g\sin\theta)+\rho gh\cos\theta$$

所以

$$p=p_0-\rho(a+g\sin\theta)\left(x-\frac{1}{2}L_1\right)-\rho g(y-h)\cos\theta$$

其中 $a=\dfrac{F\cos(\alpha-\theta)}{\rho L_1L_2h}$.

(2) $x=0$ 处的压强分布为

$$p=p_0+\frac{1}{2}\rho L_1(a+g\sin\theta)-\rho g(y-h)\cos\theta$$

要计算 $x=0$ 处水箱壁受到的总压力,需要作积分,积分上限是此处水面的高度,设此处水面高度为 H,在 $y=H$ 处,$p=p_0$,代入上式可求 H,

$$p=p_0+\frac{1}{2}\rho L_1(a+g\sin\theta)-\rho g(H-h)\cos\theta$$

$$H=h+\frac{L_1(a+g\sin\theta)}{2g\cos\theta}$$

水对 $x=0$ 处容器壁的总压力为

$$N=-\boldsymbol{i}\int_0^H\left[p_0+\frac{1}{2}\rho L_1(a+g\sin\theta)-\rho g(y-h)\cos\theta\right]L_2\mathrm{d}y$$

$$=-\boldsymbol{i}\left\{\left[p_0+\frac{1}{2}\rho(a+g\sin\theta)L_1\right]L_2H-\frac{1}{2}\rho g(H^2-2Hh)L_2\cos\theta\right\}$$

其中

$$H=h+\frac{L_1(a+g\sin\theta)}{2g\cos\theta},\qquad a=\frac{F\cos(\alpha-\theta)}{\rho L_1L_2h}.$$

8.2.3 在平行放置的半径为 a、相距为 $2b$ 的两个金属环之间张一肥皂薄膜,如图 8.8 所示.求肥皂膜达到平衡后的形状(重力忽略不计).

解 取图 8.9 所示的柱坐标,用 $r=r(z)$ 来表示平衡后的肥皂膜的形状.

考虑位于 $z\sim z+\mathrm{d}z$ 的薄膜受两边的力的合力为零.设肥皂膜的表面张力系数为 σ.注意每个金属环上张的薄膜有紧挨的内外两层,在 z 方向.

$$(2\sigma\cdot2\pi r\cos\theta)\big|_z-(2\sigma\cdot2\pi r\cos\theta)\big|_{z+\mathrm{d}z}=0\tag{1}$$

其中 θ 是薄膜的切平面与 z 轴的夹角,

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\tag{2}$$

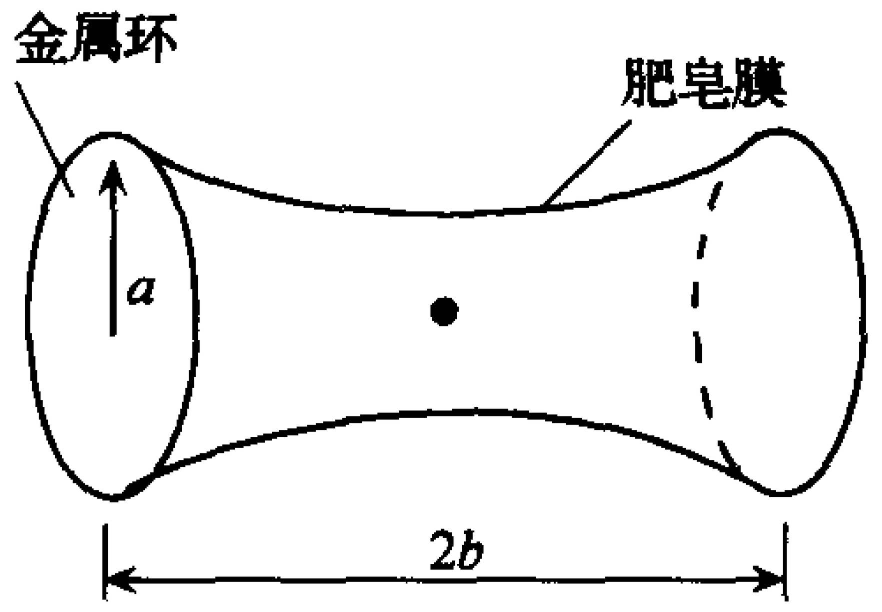


图 8.8

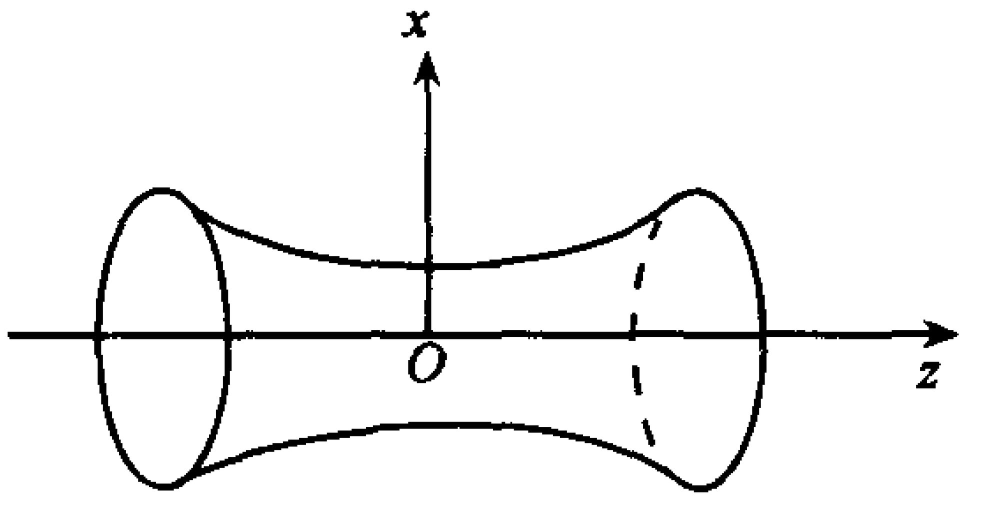


图 8.9

式(1)左边第二次作泰勒展开,仅保留一级小量,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(r\cos\theta)=0$$

积分上式,并注意在 $z=0$ 处 $\theta=0$,设 $z=0$ 处 $r=r_0$,则

$$r\cos\theta=r_0 \tag{3}$$

用式(2)消去式(3)中的 $\cos\theta$,得到

$$\frac{r}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2}}=r_0$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}=\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2}-1}$$

$$\int_0^z\mathrm{d}z=\int_{r_0}^r\frac{r_0\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-r_0^2}}$$

$$z=r_0\mathrm{arcch}\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

这里用了 $\mathrm{arc\ ch}1=0$

$$r=r_0\mathrm{ch}\left(\frac{z}{r_0}\right)$$

其中 r_0 可由 $z=b$ 时 $r=a$ 定出,即 r_0 满足的式子为

$$a=r_0\mathrm{ch}\left(\frac{b}{r_0}\right)$$

不难看出,得到的 $r=r(z)$ 不仅 $z>0$ 处适用,$z<0$ 处也适用.

8.2.4　一桶水围绕它的竖直对称轴以恒定的角速度 ω 旋转,求稳定后水的表面的形状.

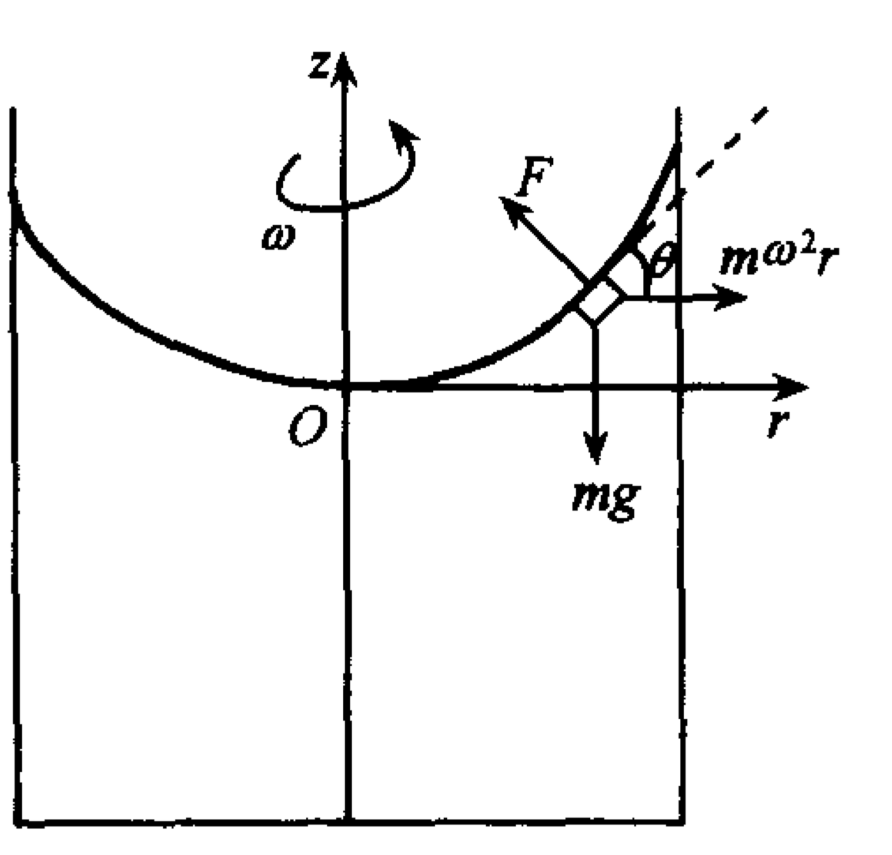


图 8.10

解　方法一:考虑液体表面处一质量为 m 的水的质元,它位于(r,φ,z),如图 8.10 所示,r、φ、z 是柱坐标,随圆桶一起绕 z 轴以恒定角速度转动.该质元受到三个力:$\boldsymbol{F}$ 是周围的水和大气对它的作用力,它一定垂直于水的表面;重力 $-mg\boldsymbol{k}$;惯性离轴力 $m\omega^2r\boldsymbol{e}_r$(采用此坐标系为参考系)。在此转动参考系中,水是平衡的.在与 $\boldsymbol{F}$ 垂直的方向合力为零,

$$m\omega^2 r\cos\theta - mg\sin\theta = 0 \tag{1}$$

其中 θ 是在质元所在的竖直平面与水的表面的交线的切线方向与水平面的夹角.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \tan\theta \tag{2}$$

由式(1)、(2)两式消去 θ,得到反映水的表面形状的 $z=z(r)$ 满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$\int_0^z \mathrm{d}z = \int_0^r \frac{\omega^2 r}{g}\mathrm{d}r, z = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

方法二:用平衡方程 $\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$.

采用转动参考系,利用上述平衡方程求出压强分布,式中 $\boldsymbol{F}$ 是彻体力,包括重力和惯性离轴力,用图示的柱坐标,

$$\boldsymbol{F} = \omega^2 r\boldsymbol{e}_r - g\boldsymbol{k}$$

$$\rho\omega^2 r\boldsymbol{e}_r - \rho g\boldsymbol{k} = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial p}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z = \rho\omega^2 r\mathrm{d}r - \rho g\mathrm{d}z$$

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho gz + c$$

在 $r=0$、$z=0$ 处,$p=p_0$(大气压). 定出 $c=p_0$,

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho gz$$

在表面,$p=p_0$,代入上式,即得反映表面形状的 $r=r(z)$,

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho gz = 0$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

8.2.5　若上题的圆桶半径为 R,装入密度为 ρ 的不可压缩的液体,不转动时可装到桶底以上 h 处,以恒定角速度 ω 转动后达到稳定状态,液体既未溢出,底部仍处处充满液体. 求:

(1) 在底部上方高度为 z 处的圆桶壁上的压强 $p_1(z)$ 的表达式;

(2) 沿轴线在底部上方高度为 z 处的压强 $p_0(z)$ 的表达式;

(3) 在一位静止的观察者看来,流体的运动是不是无旋流动?

解　根据题意,坐标系的原点应取在底部的圆心,仍可用上题求出的压强分布带有待定常数 c 的式子.

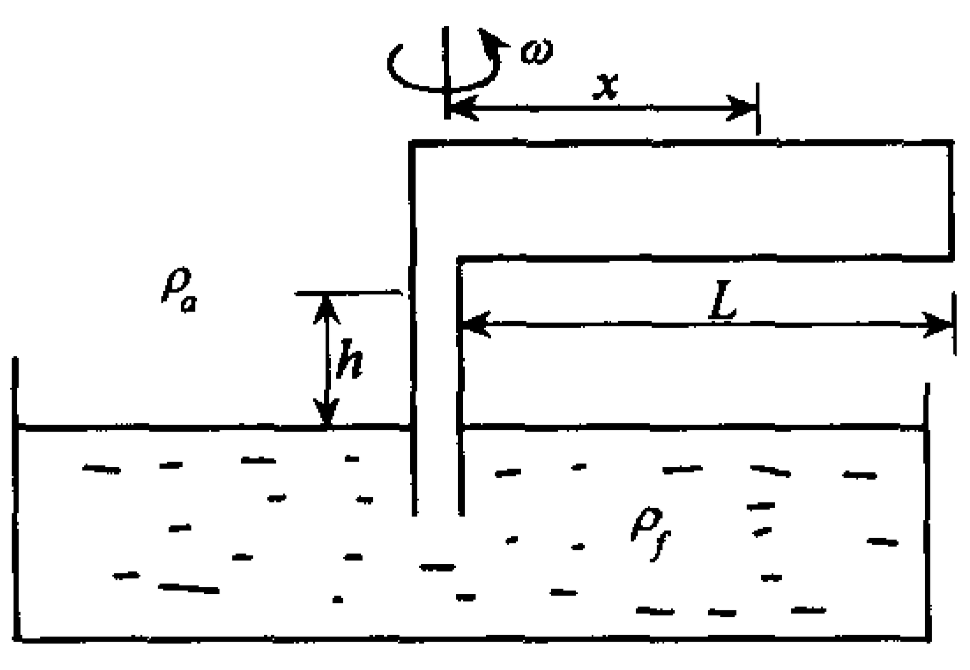


图 8.11

想气体，忽略空气密度随高度的变化，忽略毛细现象和表面摩擦. 求液体在竖直管中上升的高度 h(准确到 ω^2 项).

解　在水平管中由于装置的转动空气的压强 p 和密度 ρ 是不均匀的，用转动参考系，水平管中的空气处于平衡状态. 设水平管的截面积为 S，考虑离轴 $x\sim x+\mathrm{d}x$ 段空气，在 x 方向受到的合力为零，

$$p(x)S+\rho(x)S\omega^2x\mathrm{d}x-p(x+\mathrm{d}x)S=0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\omega^2\rho(x)x \tag{1}$$

由理想气体的状态方程

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

其中 m 和 V 分别是气体的质量和体积，M 为气体的摩尔质量，T 为绝对温度，R 为普适气体常数，

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT} \tag{2}$$

用式(2)消去式(1)中的 $\rho(x)$，可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{M\omega^2}{RT}x\mathrm{d}x$$

积分上式，得

$$\ln\frac{p}{p_0}=\frac{M\omega^2}{2RT}x^2$$

其中 p_0 是管中 $x=0$ 处的空气压强，

$$p=p_0\exp\left(\frac{M\omega^2}{2RT}x^2\right) \tag{3}$$

由式(2)，因为 M、R、T 均为常量(其中 T 因各处温度相同，故在此为常量)，

$$\frac{\rho}{p}=\frac{M}{RT}=\text{常量}$$

因此 $\rho(x)$ 与 $p(x)$ 有类似的关系

$$\rho=\rho_0\exp\left(\frac{M\omega^2}{2RT}x^2\right) \tag{4}$$

其中 ρ_0 是管中 $x=0$ 处的空气密度.

考虑到管中的空气质量在转动前和转动后没有变化，竖直管是细管，其中的空气质量可以不计，

$$\int_0^L\rho(x)S\mathrm{d}x=\rho_aSL \tag{5}$$

对于适度的 ω 值，$\frac{M\omega^2}{2RT}$ 为小量，

$$\exp\left(\frac{M\omega^2}{2RT}x^2\right)\approx1+\frac{M\omega^2}{2RT}x^2 \tag{6}$$

将式(6)代入式(4)，再代入式(5)，可得

$$\rho_0 \approx \frac{\rho_a}{1+\dfrac{M\omega^2L^2}{6RT}} \approx \rho_a\left(1-\frac{M\omega^2L^2}{6RT}\right) \tag{7}$$

再次考虑 $p(x)$与 $\rho(x)$有类似的关系，

$$p_0 \approx p_a\left(1-\frac{M\omega^2L^2}{6RT}\right)$$

对在竖直管中上升的液体用平衡条件

$$p_0 + \rho_f gh = p_a \tag{8}$$

将式(7)代入式(8)，解出

$$h = \frac{M\omega^2L^2}{6RTg}\frac{p_a}{\rho_f}$$

外部的大气也遵从理想气体的状态方程，也有同样的温度 T，由式(2)，

$$\rho_a = \frac{p_aM}{RT}$$

$$h = \frac{\rho_a\omega^2L^2}{6\rho_f g}$$

8.2.7　杆式天平被用来测量密度 ρ_1 很低、体积为 V_1 的固体的质量 m_1. 将固体放在天平的左盘，将具有很高密度的金属砝码放在天平的右盘，使之达到平衡.

(1) 如先在空气中实现平衡，然后将天平罩抽成真空，还能保持平衡吗？若不能，哪边的盘子将下沉？

(2) 确定在空气(密度为 ρ_A)中达到平衡测得的质量 m_1 的百分数误差.

解　(1)在空气中达到平衡，则

$$(m_1g - \rho_AV_1g)l = (m_2g - \rho_AV_2g)l$$

其中 l 是天平的盘子的悬点至刀刃的距离，也是平衡时固体和砝码的力臂，V_2 是砝码的体积，ρ_AV_1g 和 ρ_AV_2g 分别是固体和砝码受到的空气的浮力，m_2 为砝码的质量.

天平罩被抽成真空后，浮力不存在了，因 $\rho_1\ll\rho_2$，有 $V_1\gg V_2$，$m_1gl>m_2gl$，因此置有固体的左盘将下沉.

(2) 考虑到 $\rho_1\ll\rho_2$，因而 $V_2\ll V_1$，

$$m_1 - \rho_AV_1 = m_2$$

上式中 m_1 是固体的真实质量，m_2 是测出的固体质量，故测量的百分数误差

$$\frac{m_1-m_2}{m_1} = \frac{\rho_AV_1}{\rho_1V_1} = \frac{\rho_A}{\rho_1}\times 100\%$$

固体的密度 ρ_1 愈低，测量的百分数误差愈大.

8.2.8　组成天体的一种假想物质具有状态方程

$$p = \frac{1}{2}k\rho^2$$

其中 p 是压强，ρ 是质量密度，k 为常量.

(1) 证明对于这种物质，在流体静力学平衡条件下，密度和引力势之间有线性关系，

注意正比项的代数符号；

(2) 写出在流体静力学平衡时密度所满足的微分方程，可用什么边界条件或别的物理约束？

(3) 假定是球对称的，求出平衡时天体的半径.

解　(1) 设作用在这种物质单位体积上的外力为 $\boldsymbol{f}$，考虑 $x\sim x+\mathrm{d}x$、$y\sim y+\mathrm{d}y$、$z\sim z+\mathrm{d}z$ 围成的体积元，在 x 轴方向的平衡方程为

$$f_x(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + p(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - p(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

同样考虑 y 轴、z 轴方向，列平衡方程，可得

$$f_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad f_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

可把三式合写成

$$\boldsymbol{f} = \nabla p$$

设 $\boldsymbol{F}$ 为作用在单位质量物质上的外力，$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{F}$，平衡方程为

$$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$$

单位质量物质所受外力是由天体自身的引力势 U 引起的，

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U$$

$$-\rho\nabla U = \nabla p$$

将状态方程 $p=\frac{1}{2}k\rho^2$ 代入上式，

$$-\rho\nabla U = \frac{1}{2}k\nabla\rho^2 = k\rho\nabla\rho$$

$$\nabla U = -k\nabla\rho \tag{1}$$

把上式写成分量方程，

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -k\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -k\frac{\partial U}{\partial z}$$

三式分别对 x、y、z 积分，对 x 积分时，y、z 视为参量，余类推，得

$$U = -k\rho + f_1(y,z)$$

$$U = -k\rho + f_2(z,x)$$

$$U = -k\rho + f_3(x,y)$$

三式都得满足，只能是

$$U = -k\rho + \text{常量}$$

(2) 引力势满足泊松方程

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho \tag{2}$$

将式(1)两边求散度，与式(2)比较，

$$\nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = -k\nabla \cdot \nabla \rho = -k\nabla^2\rho$$

$$-k\nabla^2\rho = 4\pi G\rho$$

流体静力学平衡时,密度满足的偏微分方程为

$$\nabla^2\rho = -\frac{4\pi G}{k}\rho \tag{3}$$

可用的边界条件是在天体的边缘 $p=0$,由状态方程,这里也有 $\rho=0$,还有在天体内部各处密度 $\rho \geqslant 0$ 且有限.

(3) 方法一:对于球对称的天体,可采用球坐标,原点取在天体的中心.

用球坐标,

$$\nabla^2\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2}$$

今密度 ρ 具有球对称性,即 $\rho=\rho(r)$.

$$\nabla^2\rho = \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}$$

式(3)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r} = -\frac{4\pi G}{k}\rho \tag{4}$$

令 $\omega^2=\frac{4\pi G}{k}$,并作变量代换:$u=\rho r$ 或 $\rho=\frac{u}{r}$,因

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{r^2}u + \frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}r^2} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r^3}u$$

式(4)改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \omega^2 u = 0$$

立刻可写出其解为

$$u = u_0\sin(\omega r + \beta)$$

$$\rho = \frac{u}{r} = \frac{r_0\rho_0}{r}\sin(\omega r + \beta) \tag{5}$$

边界条件:$r=R$ 处,$\rho=0$,R 为天体半径,

$$\frac{r_0\rho_0}{R}\sin(\omega R + \beta) = 0$$

$$\omega R + \beta = n\pi \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$(\because \rho \geqslant 0, n \neq 0)$$

再用天体内部各处 $\rho\geqslant 0$,$\sin(\omega r+\beta)\geqslant 0$,$\omega r+\beta\leqslant\pi$,$n$ 只能取 $n=1$,

$$\beta = \pi - \omega R$$

$$\rho = \frac{r_0\rho_0}{r}\sin(\omega r + \pi - \omega R) = \frac{r_0\rho_0}{r}\sin[\omega(R - r)] \tag{6}$$

又由 $\boldsymbol{F}=-\nabla U=k\nabla\rho$

球坐标的梯度表达式为

$$\nabla\rho=\frac{\partial\rho}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

这里　$\rho=\rho(r),\nabla\rho=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$

$$\boldsymbol{F}=k\nabla\rho=\boldsymbol{e}_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{r_0\rho_0}{r}\sin(\omega R-\omega r)\right]k$$

$$=-\left[\frac{1}{r^2}kr_0\rho_0\sin(\omega R-\omega r)+\frac{1}{r}kr_0\rho_0\omega\cos(\omega R-\omega r)\right]\boldsymbol{e}_r$$

由于球对称，在 $r=0$ 处 $\boldsymbol{F}=0$，由此可得出

$$\omega R=\pi \tag{7}$$

这样，

$$R=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{4\pi G}{k}}}=\sqrt{\frac{\pi k}{4G}}$$

$$\boldsymbol{F}=-kr_0\rho_0\left[\frac{\sin\omega r-\omega r\cos\omega r}{r^2}\right]\boldsymbol{e}_r$$

当 $r\to0$ 时，有 $\boldsymbol{F}=0$，根据如下：

$$\lim_{r\to0}\frac{\sin\omega r-\omega r\cos\omega r}{r^2}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{\omega\cos\omega r-\omega\cos\omega r+\omega^2 r\sin\omega r}{2r}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{1}{2}\omega^2\sin\omega r=0$$

方法二：式(7)可从式(5)，考虑 $r=0$ 处 ρ 有限得出 $\beta=0$，再用式(6)得到 $\omega R=\pi$，所以天体的半径为

$$R=\frac{\pi}{\omega}=\sqrt{\frac{\pi k}{4G}}$$

8.2.9　为描述由于行星的缓慢转动使赤道鼓起，计算旋转的表面形状. 假定行星完全由不可压缩的密度为 ρ、总质量为 M 以恒定角速度 ω 转动的流体组成. 转动时，行星中心至两极的平衡距离为 R_p.

(1) 写出本题的流体静力学平衡方程；

(2) 作粗糙近似，即用靠近表面处引力场写为 $-\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，求行星表面附近的压强；

(3) 求出行星表面的方程；

(4) 如赤道鼓起 R_e-R_p 是行星半径的小部分，对(3)问得到的表达式作近似，用以描述表面对球状的偏离；

(5) 对于地球的情形($R_p=6400\text{km}, M=6\times10^{24}\text{kg}$)，对赤道鼓起的高度作一数值估计.

解　(1)用此行星参考系，它是对惯性系做绕行星的对称轴(极轴)以恒定角速度 ω

转动的转动参考系，用固连于它的球坐标，原点在行星的中心，极轴为 z 轴，如图 8.12 所示. 图中画出了行星上任意点 $P(r,\theta,\varphi)$ 处单位质量受到的两个彻体力：

$$\boldsymbol{F}_1 = -F_1\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{F}_2 = \omega^2 r\cos\lambda(\cos\lambda\boldsymbol{e}_r + \sin\lambda\boldsymbol{e}_\theta)$$

$\boldsymbol{F}_1$ 是星体其余部分对它的万有引力，$\boldsymbol{F}_2$ 是惯性离轴力，其中 λ 是 P 点所在处的纬度，$\lambda=\frac{\pi}{2}-\theta$.

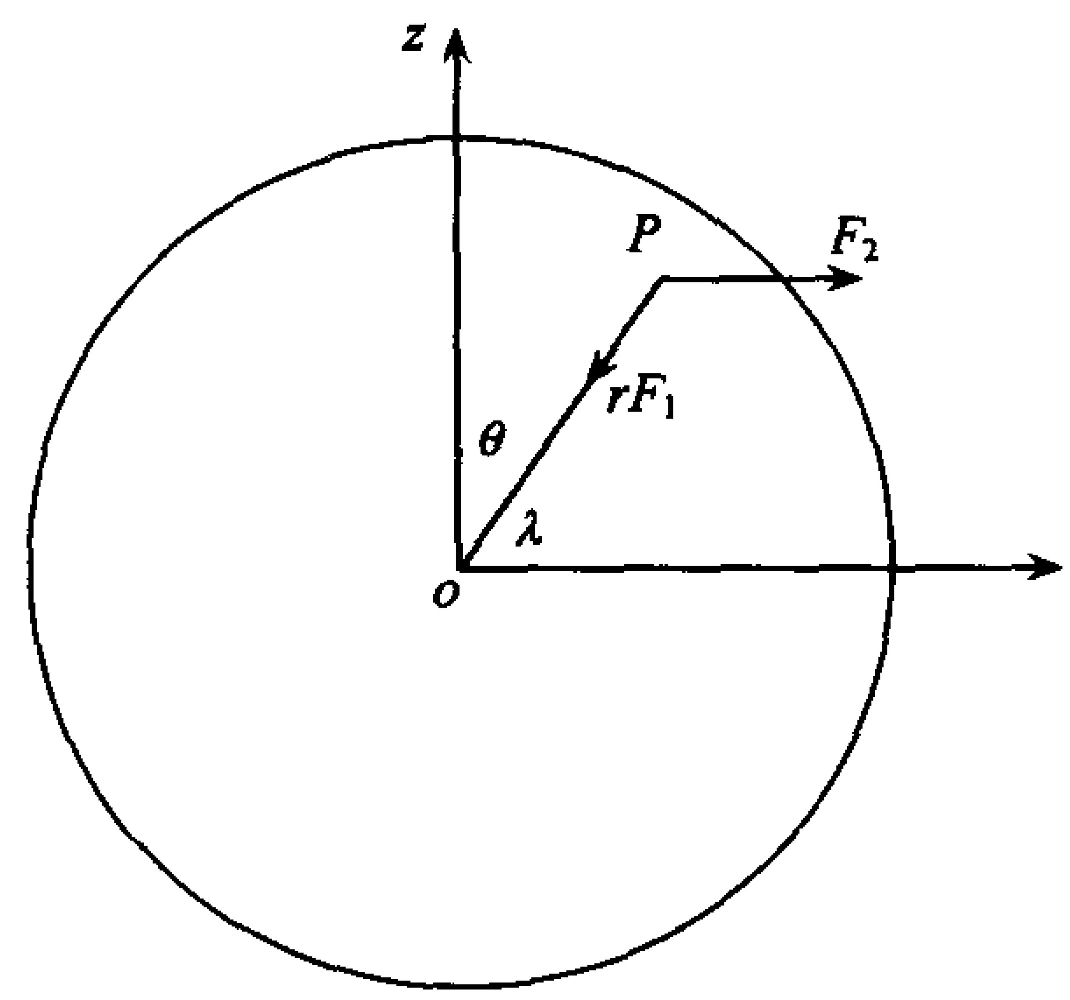


图 8.12

用球坐标的梯度表达式

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

平衡方程为

$$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$$

代入 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，并写成分量方程：

$$\rho(-F_1 + \omega^2 r\cos^2\lambda) = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\rho\omega^2 r\cos\lambda\sin\lambda = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

(2)求行星表面附近的压强. 按题目所述作粗糙近似，

$$\boldsymbol{F}_1 = -\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho GM}{r^2} + \rho\omega^2 r\cos^2\lambda$$

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = -\rho\omega^2 r^2\cos\lambda\sin\lambda$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda + \frac{\partial p}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(-\frac{\rho GM}{r^2} + \rho\omega^2 r\cos^2\lambda\right)\mathrm{d}r - \rho\omega^2 r^2\cos\lambda\sin\lambda\mathrm{d}\lambda$$

因为
$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\frac{\rho GM}{r^2} + \rho\omega^2 r\cos^2\lambda\right) = \frac{\partial}{\partial r}(-\rho\omega^2 r^2\cos\lambda\sin\lambda)$$

上述 $\mathrm{d}p$ 的式子为恰当微分，

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}\left(\frac{\rho GM}{r} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\cos^2\lambda\right)$$

$$p = \frac{\rho GM}{r} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\cos^2\lambda + c$$

用 $r=R$ 处 $p=0$,定出 c,

$$c=-\frac{\rho GM}{R}-\frac{1}{2}\rho\omega^2R^2\cos^2\lambda$$

所以

$$p=\rho GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2-R^2)\cos^2\lambda$$

对于纬度 λ 处,在表面以下深 h 的一点,

$$r=R-h,h\ll R$$

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{1}{R-h}-\frac{1}{R}=\frac{1}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)^{-1}-\frac{1}{R}\approx\frac{h}{R^2}$$

$$r^2-R^2=R^2\left(1-\frac{h}{R}\right)^2-R^2\approx R^2\left(1-\frac{2h}{R}\right)-R^2=-2Rh$$

$$p(h,\lambda)=\left(\frac{GM}{R^2}-R\omega^2\cos^2\lambda\right)\rho h$$

(3) 行星表面是一个等势面,单位质量的势能是万有引力势和惯性离轴力势之和,

$$U=U_1+U_2$$

$$U_1=-\frac{GM}{r}+\text{常量}$$

$$\boldsymbol{F}_2=\omega^2r\cos^2\lambda\boldsymbol{e}_r+\omega^2r\cos\lambda\sin\lambda\boldsymbol{e}_\theta$$

与

$$\boldsymbol{F}_2=-\nabla U_2=-\frac{\partial U_2}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial U_2}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

比较可得

$$\frac{\partial U_2}{\partial r}=-\omega^2r\cos^2\lambda$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial_\theta}=-\omega^2r^2\cos\lambda\sin\lambda$$

因为

$$\frac{\partial U_2}{\partial\theta}=-\frac{\partial U_2}{\partial\lambda}$$

后式可改写为

$$\frac{\partial U_2}{\partial\lambda}=\omega^2r^2\cos\lambda\sin\lambda$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U_2&=\frac{\partial U_2}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial U_2}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda\\&=-\omega^2r\cos^2\lambda dr+\omega^2r^2\cos\lambda\sin\lambda\mathrm{d}\lambda\\&=-\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\omega^2r^2\cos^2\lambda\right)\end{aligned}$$

$$U_2=-\frac{1}{2}\omega^3r^2\cos^2\lambda+\text{常量}$$

$$U=U_1+U_2=-\frac{GM}{r}-\frac{1}{2}\omega^2r^2\cos^2\lambda+\text{常量}$$

在行星表面,$U=$常量,

$$-\frac{GM}{r}-\frac{1}{2}\omega^2r^2\cos^2\lambda=c$$

由两极离中心的距离为 R_p，代入 $\lambda=\pm\frac{\pi}{2}$，$r=R_p$，可定出 c 为

$$c=-\frac{GM}{R_p}$$

行星表面的方程为

$$\frac{GM}{r}+\frac{1}{2}\omega^2r^2\cos^2\lambda=\frac{GM}{R_p}$$

或

$$\frac{1}{2}\omega^2r^3\cos^2\lambda-\frac{GM}{R_p}r+GM=0$$

(4) 在赤道处，$\lambda=0$，$r=R_e$，代入上式得

$$\omega^2R_e^3=2GM\frac{R_e-R_p}{R_p}$$

表面对球状的偏离为

$$\frac{R_e-R_p}{R_p}=\frac{\omega^2R_e^3}{2GM}$$

(5) 对于地球，$R_p=6400\text{km}$，$M=6\times10^{24}\text{kg}$，

$$\omega=\frac{2\pi}{24\times3600}=7.27\times10^{-5}\text{s}$$

又

$$G=6.67\times10^{-11}\text{Nm}^2(\text{kg})^{-2}$$

$$R_e-R_p\approx\frac{(6.4\times10^6)^4\times(7.37\times10^{-5})^2}{2\times6.67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}=1.1\times10^4\text{m}$$

$$\frac{R_e-R_p}{R_p}\approx1.8\times10^{-3}=0.18\%$$

赤道鼓起的高度约 11 公里，偏离球状约 0.18%.

8.2.10 用图 8.13 所示的 U 形管测量汽车的加速度. 当汽车加速行驶时，测得 $h=100\text{mm}$，求汽车的加速度(图中 $L=200\text{mm}$).

解 设汽车的加速度为 a，必沿 x 轴正向，用汽车参考系，U 形管内的水处于平衡状态. 由平衡方程

$$\rho\boldsymbol{F}=\nabla p$$

$$\rho(-a\boldsymbol{i}-g\boldsymbol{j})=\nabla p$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho a,\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g$$

$$\mathrm{d}p=-\rho a\mathrm{d}x-\rho g\mathrm{d}y$$

$$p=-\rho(ax+gy)+c$$

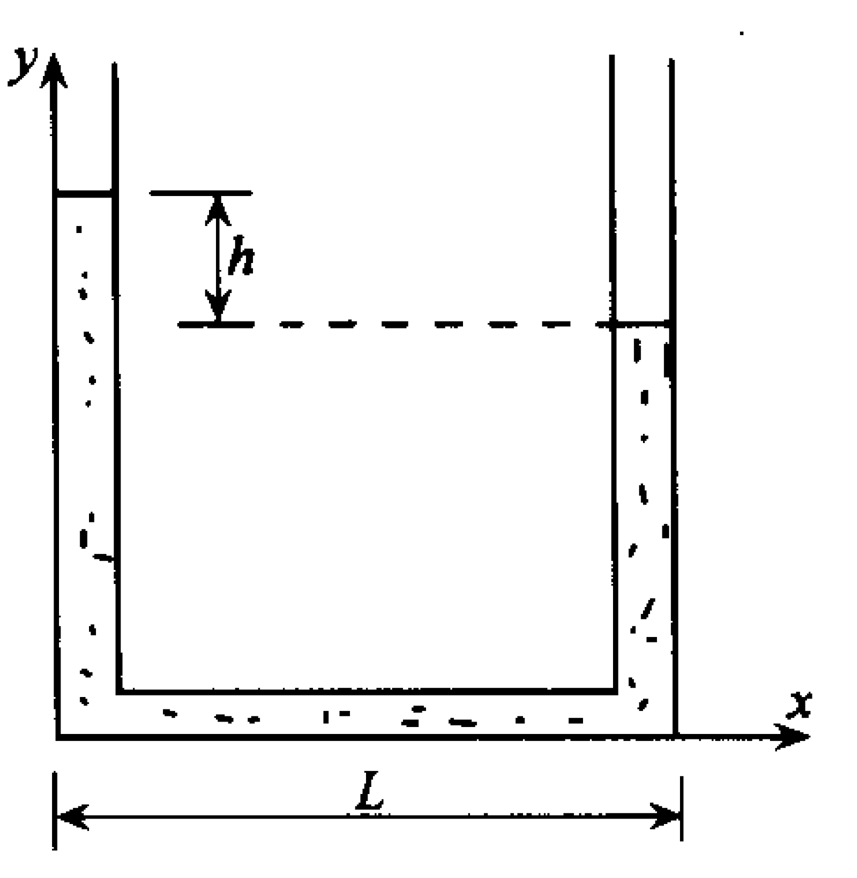


图 8.13

设 $x=0$ 处水面高度为 y_1，$x=L$ 处水面高度为 y_2，$y_1-y_2=h$.

在 $(0,y_1)$ 处及 (L,y_2) 处，压强均为大气压，

$$-\rho(a\cdot0+gy_1)+c=-\rho(aL+gy_2)+c$$

$$aL=(y_1-y_2)g=hg$$

$$a = \frac{h}{L}g = \frac{100 \times 10^{-3}}{200 \times 10^{-3}} \times 9.8 = 49\text{ms}^{-2}$$

8.2.11 具有铅垂轴的、半径为 r 的半球内盛满液体. 求被两个互相垂直的平面所切出的八分之一球面上压力的合力 $\boldsymbol{N}$ 及其作用线. 设自由面上压力为零,液体的密度为 ρ.

解 考虑 $x\geqslant0$、$y\geqslant0$、$z\geqslant0$ 的处于四分之一的半球内的液体为系统.

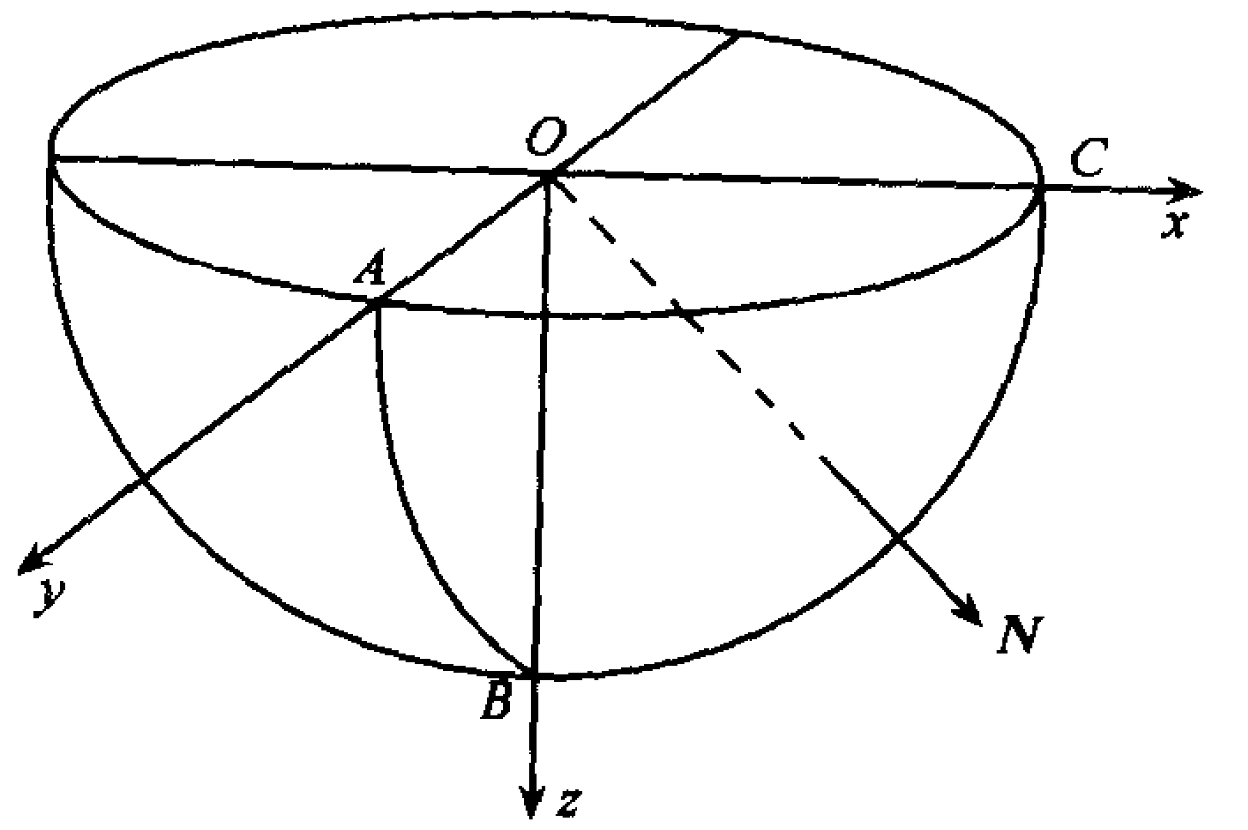


图 8.14

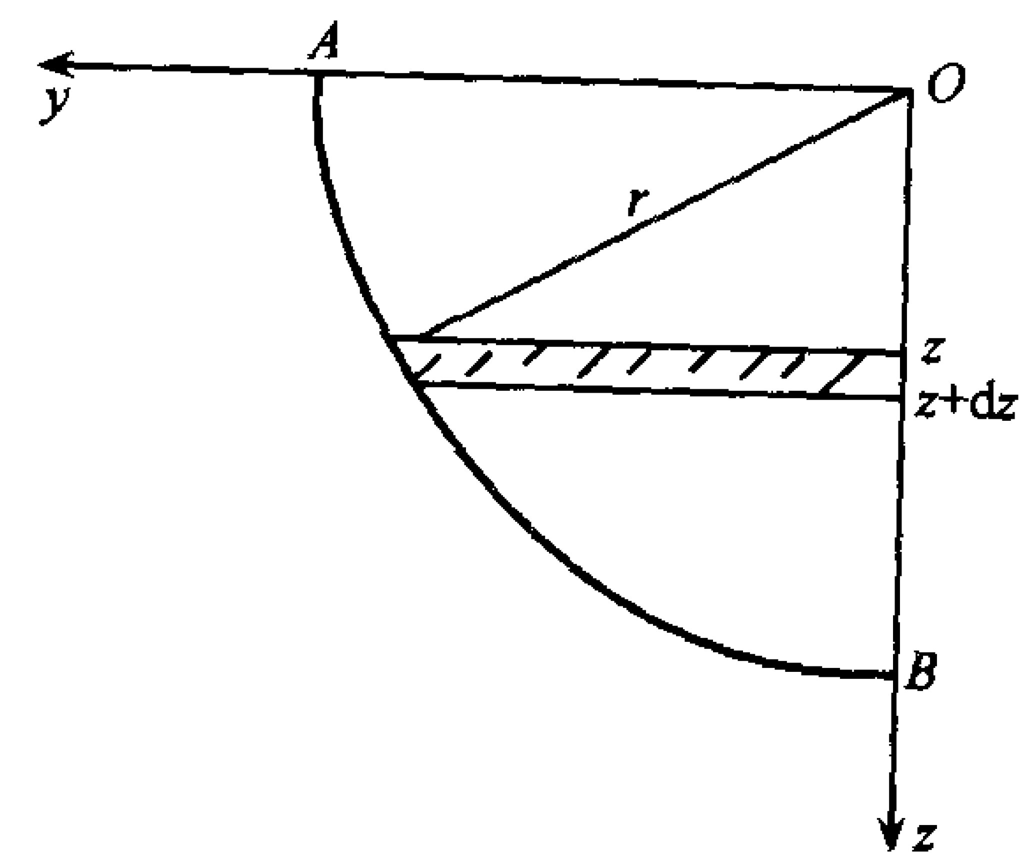


图 8.15

对八分之一球面的压力的合力 $\boldsymbol{N}$ 可写成

$$\boldsymbol{N} = N_x\boldsymbol{i} + N_y\boldsymbol{j} + N_z\boldsymbol{k}$$

N_x 等于 $x\leqslant0$、$y\geqslant0$、$z\geqslant0$ 处四分之一半球内的液体对系统的作用力.

界面 OAB 上在 $z\sim z+\mathrm{d}z$ 间作用于系统的压力为

$$\mathrm{d}N_x = \rho gz\sqrt{r^2 - z^2}\mathrm{d}z$$

通过 OAB 面对系统的作用力

$$N_x = \int_0^r \rho gz\sqrt{r^2 - z^2}\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{2}\rho g\int\sqrt{r^2 - z^2}\mathrm{d}(-z^2) = \frac{1}{3}\rho gr^3$$

根据对称性,可以写出

$$N_y = \frac{1}{3}\rho gr^3$$

N_z 的大小等于八分之一球面 ABC 对系统的作用力的 z 方向的分量,等于这八分之一球体内液体的重量,

$$N_z = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi r^3\rho g = \frac{1}{6}\pi\rho gr^3$$

所以

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{3}\rho gr^3\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\rho gr^3\boldsymbol{j} + \frac{1}{6}\pi\rho gr^3\boldsymbol{k}$$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = \frac{1}{6}\rho gr\sqrt{8 + \pi^2}$$

八分之一球面 ABC 上各处的压力均沿球面的法线方向,其作用线都汇交于球心 O,其合力的作用线亦必通过共点力系的作用线交点 O,设合力的作用点为(x,y,z),则

$$\boldsymbol{N} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ N_x & N_y & N_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$N_x y - N_y x = 0$$

$$N_y z - N_z y = 0$$

代入 N_x、N_y、N_z，从上述两个方程可得

$$x = y, \qquad z = \frac{\pi}{2} y$$

作用线是这两个平面的交线，作用点是此交线与八分之一球面 ABC 的交点. 两式与 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 联立解得

$$x = y = \frac{2r}{\sqrt{8+\pi^2}}, \qquad z = \frac{\pi r}{\sqrt{8+\pi^2}}$$

作用线也可表示为参数方程形式，

$$x = \frac{2r}{\sqrt{8+\pi^2}} t, \quad y = \frac{2r}{\sqrt{8+\pi^2}} t, \quad z = \frac{\pi r}{\sqrt{8+\pi^2}} t$$

其中 t 为参数.

8.2.12 证明：任意曲面在彻体力仅有重力的静止流体中，所受的总压力的水平分量等于该曲面在垂直面上的投影面积上所受的总压力.

证明 把曲面看成无限个面元组成，每个面元是一个平面. 取任一面元，面积为 ΔS，其法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{n}=n_x\boldsymbol{i}+n_y\boldsymbol{j}+n_z\boldsymbol{k}$. z 轴沿竖直方向.

该面元所受的压力为

$$p\Delta S\boldsymbol{n}$$

其水平的 x 分量为

$$p\Delta S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i} = p\Delta S n_x = p\Delta S\cos\alpha = p(\Delta S)_{yz}$$

其中 α 是 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴的夹角，也是 ΔS 与垂直于 x 轴的竖直平面 yz 的夹角，$(\Delta S)_{yz}$是 ΔS 面在 yz 平面上的投影. 这就证明了对于任一面元所受的压力的水平分量，等于该面元在垂直于这个水平方向的投影面积上所受的压力.

彻体力仅有重力，p 只与 z 有关，如曲面所受总压力的水平分量沿某一方向，其单位矢量用 $\boldsymbol{n}_h$ 表示，则

$$\int p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_h \mathrm{d}S = \int p(z)l(z)\mathrm{d}z$$

$l(z)$如图 8.16 所示，闭合曲线围成的面积 $S_\perp$是曲面所受压力的水平分量相垂直的投影面积，$l(z)\mathrm{d}z$是投影面积的面元，$\int p(z)l(z)\mathrm{d}z$ 是垂直的投影面积上所受的总压力. 这个总压力当然沿其法线方向，法线的单位矢量为 $\boldsymbol{n}_h$. 如彻体力还有其他力，则 p 将是 x、y、z 的函数，上述等式不能成立，也就不能得出所要证明的结论.

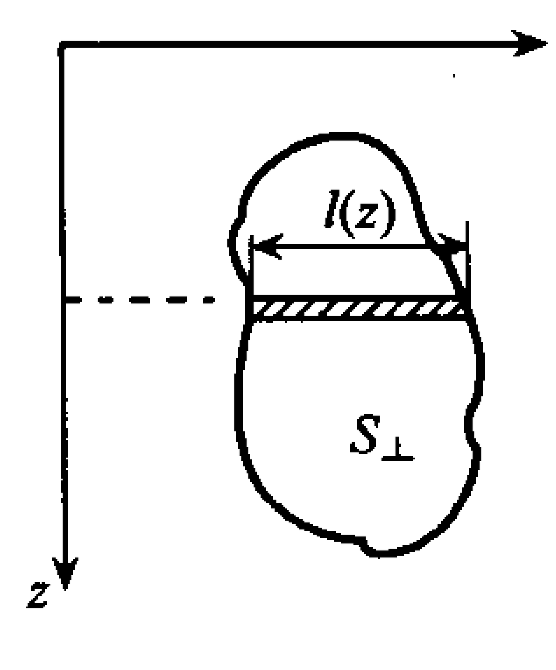


图 8.16

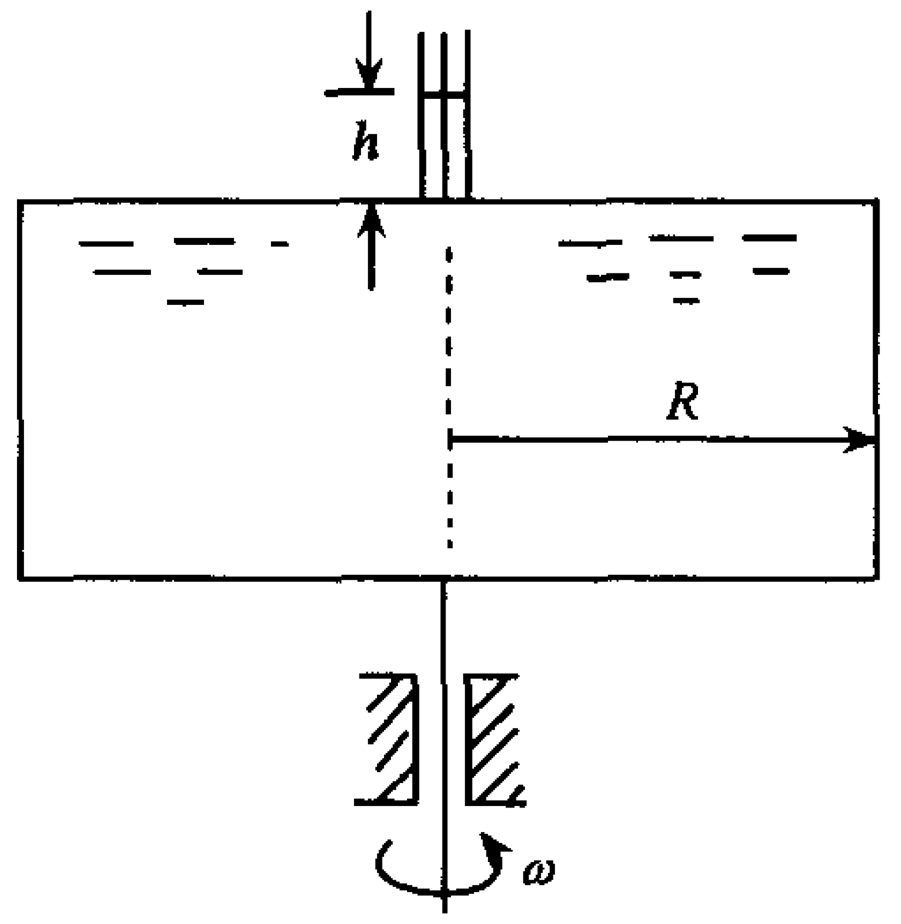


图 8.17

8.2.13　一半径为 R 的圆柱形容器，其顶盖中心装有一敞口的测压管(见图 8.17). 容器装满密度为 ρ 的水，测压管中的水面比顶盖高 h，大气压为 p_0，当容器绕其对称轴以角速度 ω 旋转时，顶盖受到水向上的作用力有多大？

解　取以 ω 的角速度旋转的转动参考系，可用平衡方程，取顶盖中心为坐标原点，z 轴竖直向上.

$$\rho(\omega^2 r\boldsymbol{e}_r - g\boldsymbol{k}) = \nabla p$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\mathrm{d}p = \rho\omega^2 r\mathrm{d}r - \rho g\mathrm{d}z$$

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + c$$

在 $r=0$、$z=h$ 处，$p=p_0$，

$$p_0 = -\rho g h + c,\quad c = p_0 + \rho g h$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g(z-h)$$

顶盖处，$z=0$，顶盖受到水向上的作用力为

$$\begin{aligned} F &= \int_0^R p(r,0)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^R \left(p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g h\right)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r \\ &= \pi R^2\left(p_0 + \rho g h + \frac{1}{4}\rho\omega^2 R^2\right) \end{aligned}$$

8.2.14　一离心分离机，其容器半径为 R，高度为 H. 容器静止时装水高度为 h，水的密度为 ρ. 为使水不溢出，角速度不能超过何值？

解　利用上题得到的 $p(r,z)$，

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + c$$

当 $\omega=\omega_{\max}$ 时，水刚好不溢出，$r=R$，$z=H$ 处，$p=p_0$，由此定 c.

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho\omega_{\max}^2 R^2 - \rho g H + c$$

$$c = p_0 - \frac{1}{2}\rho\omega_{\max}^2 R^2 + \rho g H$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega_{\max}^2(r^2 - R^2) - \rho g(z - H)$$

令 $p=p_0$,可由上式得到水面的方程

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\omega_{\max}^2(r^2 - R^2) = g(z - H) \\ r^2 = R^2 + \frac{2g(z-H)}{\omega_{\max}^2}\end{gathered} \tag{1}$$

设水面最低点的 z 坐标为 $z=h'$,那里 $r=0$,由式(1),

$$h' = H - \frac{1}{2g}\omega_{\max}^2 R^2$$

水的密度 ρ 为常量,是不可压缩的,旋转时水不溢出的条件下,旋转时水的体积与不旋转时的体积相等.

$$\int_{h'}^{H}\pi[R^2 - r^2(z)]\mathrm{d}z + \pi R^2 h' = \pi R^2 h$$

左边

$$\begin{aligned} &= -\frac{2\pi g}{\omega_{\max}^2}\int_{h'}^{H}(z-H)\mathrm{d}z + \pi R^2\left(H - \frac{1}{2g}\omega_{\max}^2 R^2\right) \\ &= -\frac{\pi g}{\omega_{\max}^2}(H^2 - h'^2) + \frac{2\pi g H}{\omega_{\max}^2}(H - h') + \pi R^2\left(H - \frac{1}{2g}\omega_{\max}^2 R^2\right)\end{aligned}$$

代入 $h'=H-\frac{1}{2g}\omega_{\max}^2R^2$,化简后可得

$$\text{左边} = \pi R^2 H - \frac{1}{4g}\pi\omega_{\max}^2 R^4$$

所以

$$\pi R^2 H - \frac{1}{4g}\pi\omega_{\max}^2 R^4 = \pi R^2 h$$

解出

$$\omega_{\max} = \frac{2}{R}\sqrt{g(H-h)}$$

8.2.15 设有单位质量受到的彻体力场为:

$$F_x = \frac{1}{2}(y^2 + z^2) + 2\lambda(y+z)x$$

$$F_y = \frac{1}{2}(z^2 + x^2) + 2\mu(z+x)y$$

$$F_z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2\nu(x+y)z$$

其中 λ、μ、ν 均为常数.问 λ、μ、ν 为何值时,在此力场作用下的均质流体可能达到平衡.

解 均质流体是不可压缩的单相流体,ρ 为常量.平衡方程

$$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$$

可改为

$$\boldsymbol{F} = \nabla\left(\frac{1}{\rho}p\right)$$

因梯度的旋度等于零,均质流体的平衡方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

对于题目给的彻体力 $\boldsymbol{F}$,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=y+2\lambda x,\frac{\partial F_y}{\partial x}=x+2\mu y$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=z+2\mu y,\frac{\partial F_z}{\partial g}=y+2\nu z$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}=x+2\nu z,\frac{\partial F_x}{\partial z}=z+2\lambda x$$

只有当 $\lambda=\mu=\nu=\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}$$

$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 可能达到平衡.

8.2.16 一个充满水的密闭容器,以等角速度 ω 绕一水平轴旋转,能否达到相对平衡?如能达到相对平衡,求出等压面方程.

解 取固连于密闭容器的 x、y、z 轴,其中 x 轴取水平转轴,用绕 x 轴等角速 ω 转动的参考系.

单位质量受到的彻体力为

$$\boldsymbol{F}=\omega^2y\boldsymbol{j}+\omega^2z\boldsymbol{k}+g\cos(\omega t+\alpha)\boldsymbol{j}+g\sin(\omega t+\alpha)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{F}$ 显含时间 t,不可能相对平衡.

8.2.17 图 8.18 中圆形截面的活塞直径 $d=4\text{cm}$,圆柱体状重物 W 的底面直径 $D=24\text{cm}$.当作用在活塞上的力 F 为 100N 时,能举起重物的质量多大?

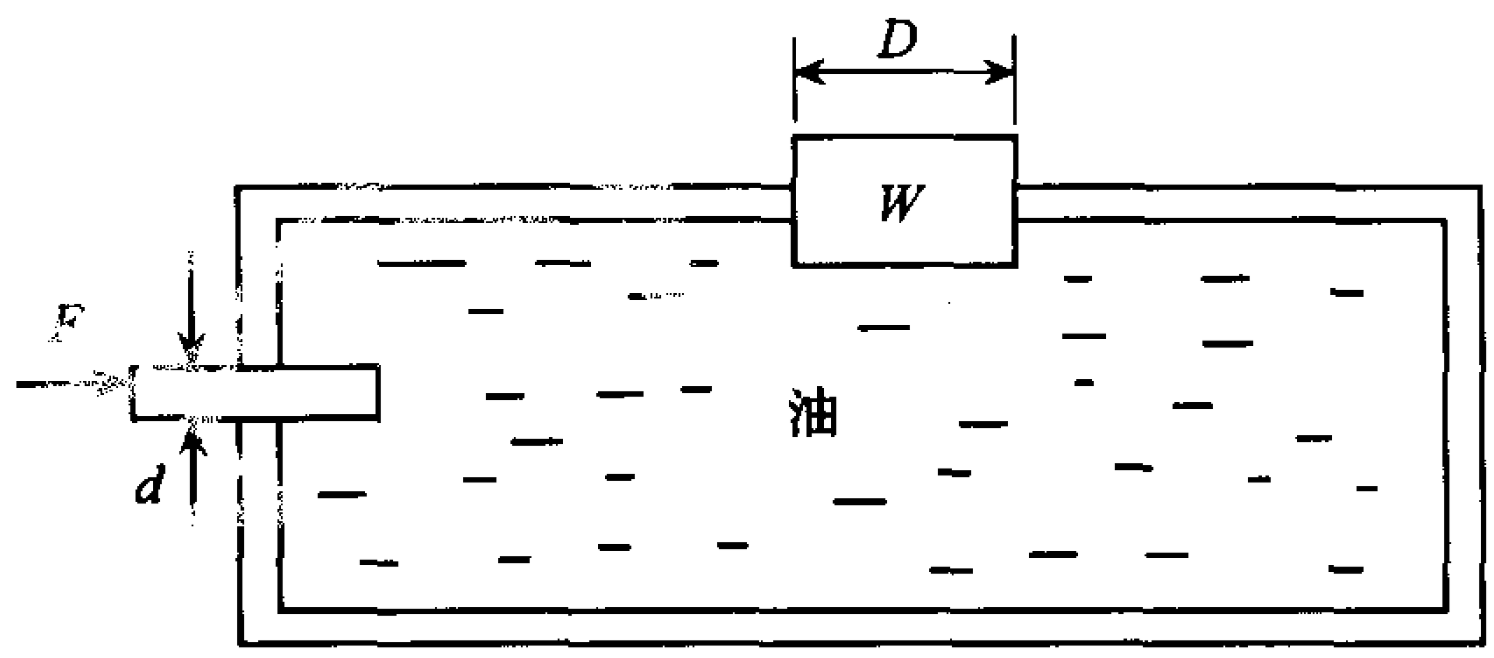


图 8.18

解 重物处的压强与活塞处的压强以及各处油的压强均相等,由此可计算能举起的重物质量为

$$m=\frac{W}{g}=\frac{1}{g}\cdot\frac{F}{\frac{1}{4}\pi d^2}\cdot\frac{1}{4}\pi D^2$$

$$=\frac{100}{9.8}\times\frac{(0.24)^2}{(0.04)^2}=367\text{kg}$$

8.2.18 许多初等教科书表述流体静力学的帕斯卡原理为:"封闭液体压强的任何变化可无缩减地、瞬时地传递到该液体的所有其他部分."这是否违背相对论?解释清楚这里

所说时“瞬时地”意味着什么？

答　帕斯卡原理只适用于不可压缩的液体，任何流体都不是绝对不可压缩的，所谓不可压缩的流体只是对一类可压缩性较小的流体的一种近似，一种简化了的模型. 正如对于低速的机械运动可用牛顿的力学理论一样，不能认为它们违背了相对论.

液体内压强的变化是以在该液体中传播声波的速度传播的，因通常容器的尺度比较小，声速又相当大，压强变化传递到容器内各处的液体所需时间非常短，几乎可以忽略. 就像一些碰撞问题冲力很大但作用时间极短一样，都可作“瞬时地”处理.

8.2.19　如图 8.19 所示，盛水容器底部开有直径 $d=5\text{cm}$ 的圆孔，用空心金属球封住. 球重 2.45N，半径 $r=4\text{cm}$，水深 $H=20\text{cm}$. 试求升起该球所需之力.

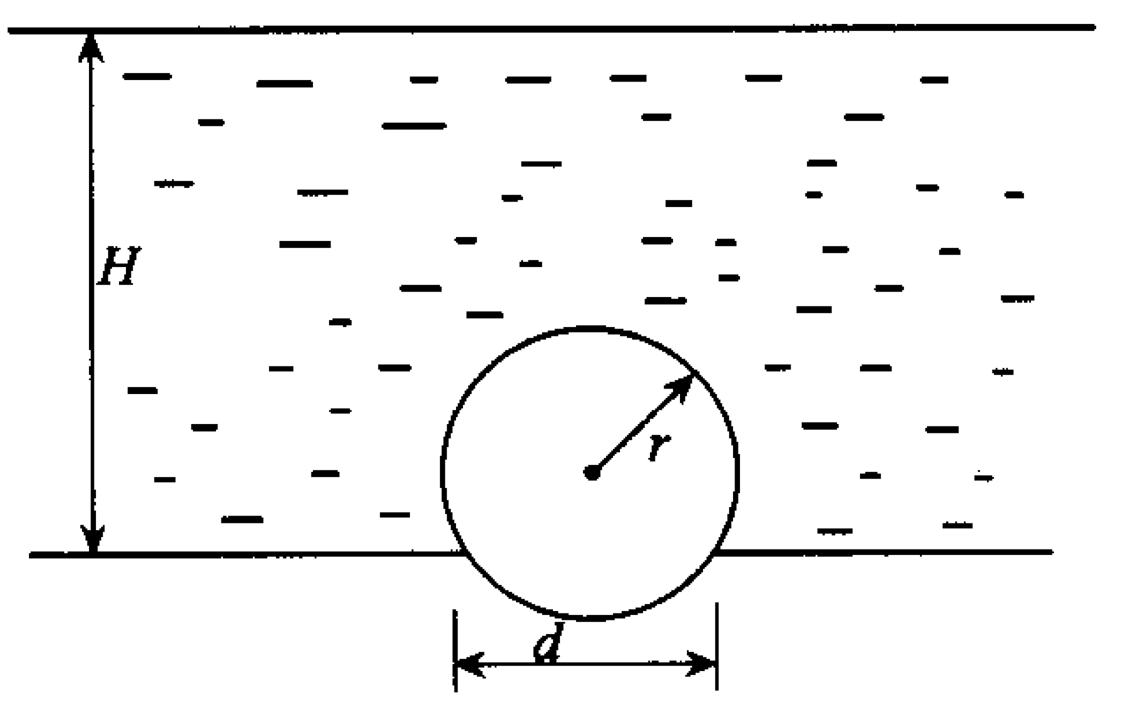


图 8.19

解　水对金属球的浮力等于被金属球排开的水的重量.

取 z 轴竖直向下，原点取在金属球的中心，被金属球排开的水的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3-\int_{\sqrt{r^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}}^{r}\pi(r^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3-\pi r^2\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]+\frac{1}{3}\pi\left\{r^3-\left[\sqrt{r^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]^3\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi\sqrt{r^2-\frac{1}{4}d^2}\left(\frac{2}{3}r^2+\frac{1}{12}d^2\right)=2.59\times10^{-4}\text{m}^3$$

升起该球所需之力为

$$F=W-\rho gV+\rho gH\cdot\frac{1}{4}\pi d^2$$

$$=3.45-10^3\times9.8\times2.59\times10^{-4}+10^3\times9.8\times0.20\times\frac{\pi}{4}(0.05)^2$$

$$=3.76\text{N}$$

注意：由于圆孔处无水，水对金属球的作用力不是浮力，而是压力. 这里设想在圆孔处有一个向上的力，又有一个同样大小的向下的力，前者与金属球与水接触面所受的压力一起成为对金属球的浮力，后者就是 $\rho gH\cdot\frac{1}{4}\pi d^2$.

如直接计算水对金属球的作用力，根据对称性，其合力必沿竖直方向. 设合力向上(实际是向下的)，采用球坐标的 θ 作为积分变量. 合力为

$$\int_{\theta_0}^{\pi}\rho g\left[r\cos\theta+H-\sqrt{r^2-S\left(\frac{1}{2}d\right)^2}\right]\cos\theta\cdot2\pi r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}\theta$$

其中 $\theta_0=\arcsin\left(\frac{d}{2r}\right)$，$\rho g\left[r\cos\theta+H-\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}d\right)^2}\right]$是在 z 处水的压强，$\rho g\left[r\cos\theta+H-\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}d\right)^2}\right]\cos\theta$ 是 z 处的压强在竖直向上方向的分量，$2\pi r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}\theta$

是金属球面上处于 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$ 间的面积.

$$F=W-\int_{\theta_0}^{\pi}\rho g\left[r\cos\theta+H-\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}d\right)^2}\right]\cos\theta\cdot 2\pi r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

经计算可得同样结果.

8.2.20 一个均质的正立方体木块,边长为 1m,加重物后浸入水中达到平衡时,恰好一半浸入水中,重心位置如图 8.20(a)所示,当木块转过 45°角,如图 8.20(b)所示.求此位置木块受到的恢复力矩.

解 $$W=\rho\cdot\frac{1}{2}Vg=1\times10^3\times\frac{1}{2}\times1^3\times9.8=4.9\times10^3\mathrm{N}$$

$$M=4.9\times10^3\times0.25\times\sin45°=866\mathrm{Nm}$$

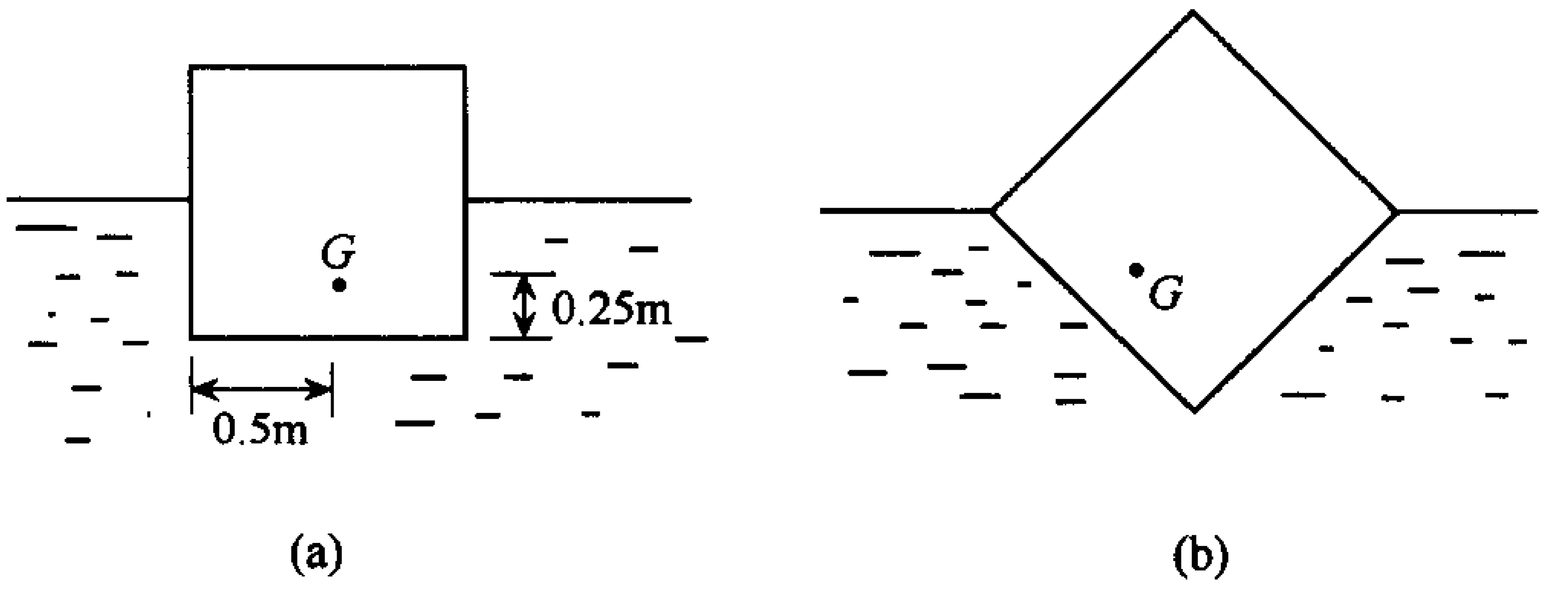


图 8.20

8.2.21 一个空间站是一个充满空气的半径为 a 的大圆筒,圆筒围绕其对称轴以角速度 ω 自旋,以提供边缘的加速度等于地球表面的重力加速度.若空间站内部温度 T 是常数,求圆筒中心处的压强与边缘处的压强之比.

解 取空间站为参考系,空气处于平衡状态,由平衡方程

$$\rho\boldsymbol{F}=\nabla p$$

其中彻体力 $\boldsymbol{F}$ 是惯性离轴力,

$$\boldsymbol{F}=\omega^2 r\boldsymbol{e}_r$$

$$\rho\omega^2 r\boldsymbol{e}_r=\frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

今 $\frac{\partial p}{\partial\varphi}=0,\frac{\partial p}{\partial z}=0$,$p$ 只是 r 的函数.

$$\rho\omega^2 r=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\tag{1}$$

这里 ρ 不是常量,是 r 的函数.

设空气的摩尔体积为 v,状态方程为

$$pv=RT$$

其中 R 是普适气体常数.

设空气的摩尔质量为 μ,

$$\mu=\rho v$$

$$p=\frac{1}{v}RT=\frac{\rho}{\mu}RT$$

$$\rho = \frac{\mu p}{RT} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),变量分离后可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mu\omega^2}{RT}r\mathrm{d}r$$

$$p = c\exp\frac{\mu\omega^2 r^2}{2RT} \tag{3}$$

在圆筒边缘对静参考系的加速度等于地球表面的重力加速度,

$$\omega^2 a = g$$

$$\omega^2 = \frac{g}{a} \tag{4}$$

将式(4)代入式(3),

$$p = c\exp\left(\frac{\mu g r^2}{2aRT}\right)$$

圆筒中心处的压强与边缘处的压强之比为

$$\frac{p(o)}{p(a)} = \frac{c}{c\exp\left(\dfrac{\mu g a}{2RT}\right)} = \exp\left(-\frac{\mu g a}{2RT}\right)$$

说明:按出题者的本意,空气将随圆筒一起旋转,处于相对平衡状态,还要用理想气体的状态方程,像上面那样解题.可是,这样作有理论上的缺憾:要空气跟着一起转动,必须认为空气是黏性气体,严格地讲不能用理想气体的状态方程.如果把空气作严格的理想气体处理,则它就不会跟圆筒同步转动了.如果完全不转动,$\dfrac{p(o)}{p(a)}=1$.

8.2.22 一个由气体组成的、半径为 R 的球状物体具有球对称性,密度 $\rho=\rho(r)$,引力势 $U=U(r)$,由压力支承自身的引力,压强 $p=p(r)$.下列哪些式子是物体的引力势能 V 的正确表达式.而另一些仅差一个正的或负的数字因子.

$$\text{(i)}\ -4\pi\int_0^R \rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}r^3\mathrm{d}r,\quad \text{(ii)}\ \frac{1}{G}\int_0^R\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2 r^2\mathrm{d}r$$

$$\text{(iii)}\ 2\pi\int_0^R \rho U r^2\mathrm{d}r,\qquad \text{(iv)}\ -4\pi\int_0^R p r^2\mathrm{d}r$$

解　对于密度为 $\rho(x,y,z)$、体积为 τ 的孤立系统,其自身引起的引力势能为

$$V = \frac{1}{2}\int_\tau \rho(x,y,z)U(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对于半径为 R 的球对称的球状气体系统,自身引起的引力势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\int_0^R \rho(r)U(r)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^R \rho U r^2\mathrm{d}r \end{aligned} \tag{1}$$

这正是(iii)的表达式.可见(iii)的表达式是正确的.

自身的引力由压力支承处于平衡状态,由平衡条件:

$$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$$

令 $\boldsymbol{F}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$，$\nabla p=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$(球对称)，

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \tag{2}$$

又引力势满足泊松方程

$$\nabla^2 U=4\pi G\rho$$

对于球对称情形，上式可写成

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)=4\pi G\rho$$

所以

$$\rho=\frac{1}{4\pi G}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)，

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-\frac{1}{4\pi G}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$

在球体以外，$p=0$，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=0$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}=0 \tag{4}$$

式(1)也即(iii)的表达式，可改写

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^R\frac{1}{4\pi G}U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2G}\left[\left(Ur^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\Big|_0^R-\int_0^R r^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\right]\\&=-\frac{1}{2G}\int_0^R r^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{5}$$

计算中用了式(4).

将式(5)与(ii)的表达式比较，可见(ii)的表达式缺了一个因子“$-\frac{1}{2}$”.

将式(3)代入(i)的表达式，

$$\begin{aligned}&-4\pi\int_0^R\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}r^3\mathrm{d}r\\&=-\frac{1}{G}\int_0^R r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r\\&=-\frac{1}{G}\left[\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\cdot r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\Big|_0^R-\int r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\cdot\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\right]\\&=\frac{1}{G}\int r\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\\&=\frac{1}{2G}\int r\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2\\&=\frac{1}{2G}\left[r^3\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\Big|_0^R-\frac{1}{2G}\int_0^R r^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\\&=-\frac{1}{2G}\int_0^R r^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\end{aligned}$$

此式与式(5)相同，式(5)是正确的表达式(iii)改写的，可见(i)的表达式也是正确的.

(iv)的表达式作如下改写：

$$-4\pi\int_0^R pr^2\mathrm{d}r = -\frac{4\pi}{3}\int p\mathrm{d}r^3$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[(r^3p)\Big|_0^R - \int_0^R r^3\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^R\left(-\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)r^3\mathrm{d}r = -\frac{4\pi}{3}\int_0^R\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}r^3\mathrm{d}r$$

在计算中用了式(2).

将上式与正确的(i)的表达式比较，可见(iv)的表达式多了一个因子“$\frac{1}{3}$”.

8.3　流体动力学

8.3.1　如图8.21所示，一低速风洞具有开口式的试验段，其横截面直径为d，一杯式酒精压力计连接于风洞较粗段上，此处横截面的直径为D. 当重力作用下的、密度为ρ的理想气体流过时，压力计高度读数为h，大气压强为p_0. 酒精密度为ρ'，流动是定常的. 求试验段流体的速度.

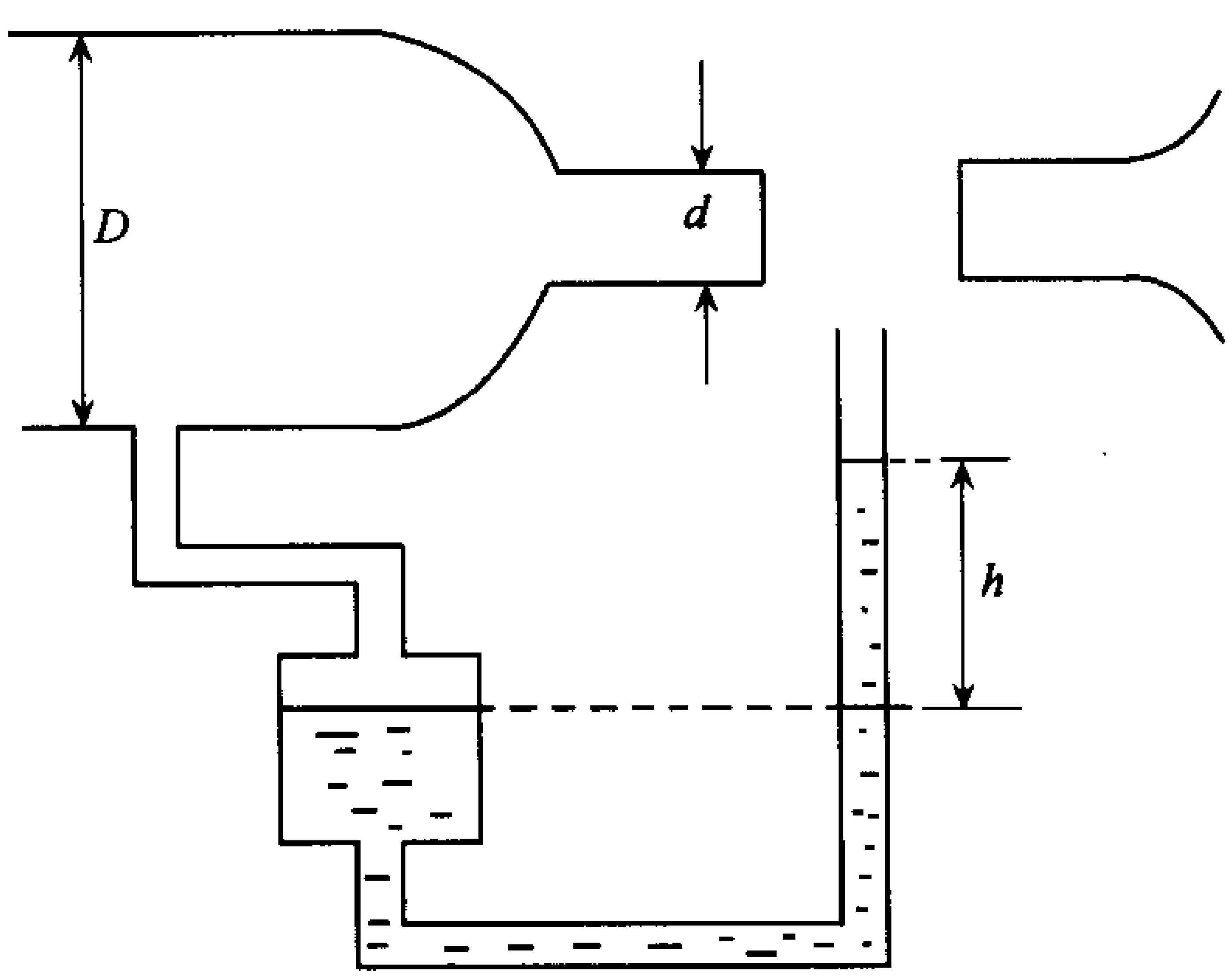


图 8.21

解　设理想流体在直径为D的粗段和直径为d的细段的流速分别为v_1、v_2. 由连续性方程，

$$\frac{1}{4}\pi D^2v_1 = \frac{1}{4}\pi d^2v_2 \tag{1}$$

由伯努利方程，

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \tag{2}$$

$$p_2 = p_0 \qquad (p_0\text{为大气压}) \tag{3}$$

$$p_1 = p_0 + \rho' gh \tag{4}$$

由式(1),

$$v_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_2 \tag{5}$$

将式(3)、(4)、(5)代入式(2),解出 v_2,得

$$v_2 = \frac{D^2}{\sqrt{D^4 - d^4}}\sqrt{\frac{2\rho' gh}{\rho}}$$

8.3.2 密度为 ρ 的水从一大容器流入一喇叭型导管,入口和出口处截面积分别为 S_1 和 S_2,导管长 H,如图 8.22 所示,大气压强为 p_0,运动是定常的,问 h 多大时,导管入口处压强为零.

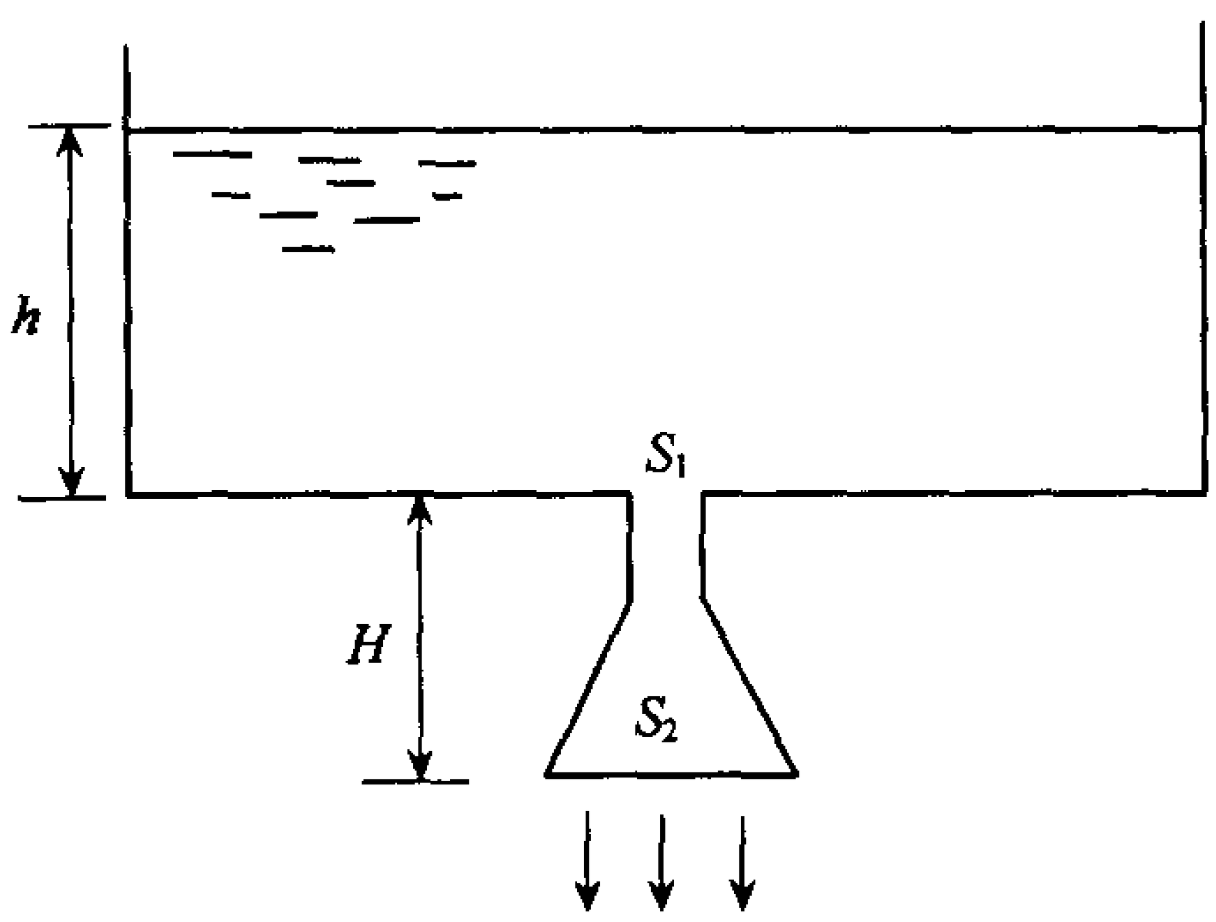


图 8.22

解 由伯努利方程,

$$p_0 + \rho g(h + H) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{1}$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H \tag{2}$$

其中 v_1、v_2 分别是导管入口和出口处的流速.

由连续性方程

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \tag{3}$$

由式(1)可得

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - H \tag{4}$$

由式(2)、(3)消去 v_1,解出 v_2^2,得

$$v_2^2 = \frac{2(p_0 - \rho g H)S_1^2}{\rho(S_2^2 - S_1^2)}$$

将上式代入式(4),得

$$h = \frac{S_1^2}{S_2^2 - S_1^2}\left(\frac{p_0}{\rho g} - \frac{S_2^2}{S_1^2}H\right)$$

8.3.3 如图 8.23 所示,压强为 1.08×10^5Pa 的空气以 30ms^{-1}的速度从 A、B 两个进

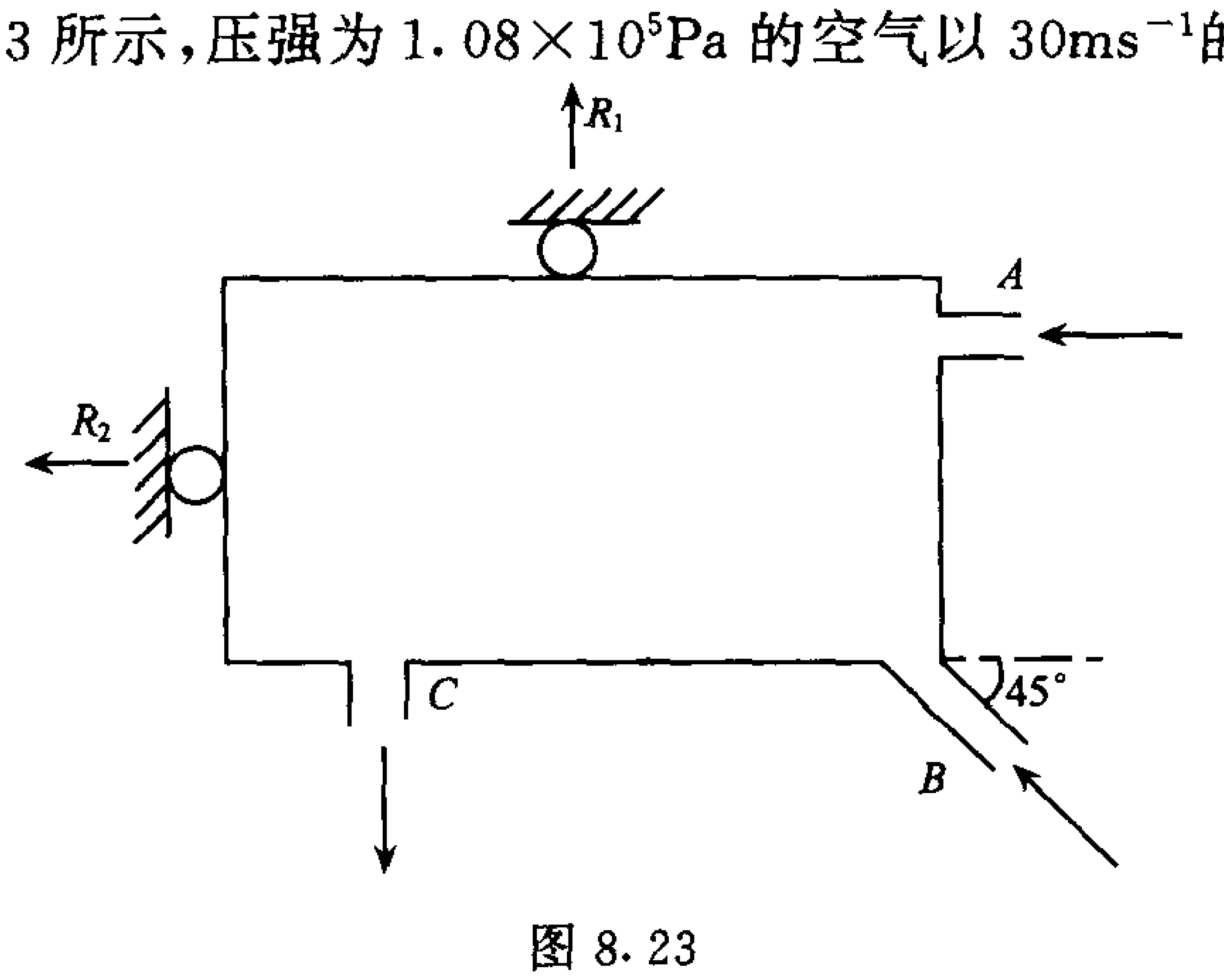


图 8.23

口流进箱内，进口面积都为 5cm^2，箱内的空气经过 C 排气口排入大气，排气压强等于大气压强，为 $1.013\times10^5\text{Pa}$. 气体不可压缩，密度为 1.225kg/m^3，进出口 A、B、C 处于同一高度，设为定常流动. 试求反作用力 R_1 和 R_2.

解　已知 $p_A=p_B=1.08\times10^5\text{Pa}$，

$$v_A = v_B = 30\text{ms}^{-1}$$

$$p_C = p_0 = 1.013\times10^5\text{Pa}$$

箱内压强为 p_C

$$\rho = 1.255\text{kg/m}^3$$

$$S_A = S_B = 5\times10^{-4}\text{m}^2$$

对箱内气体用动量定理，

$$(p_A - p_C)S_A + (p_B - p_C)S_B\sin45° - R_2 = Q_Av_A + Q_Bv_B\sin45° \tag{1}$$

$$(p_B - p_C)S_B\sin45° - R_1 = Q_Bv_B\sin45° - Q_Cv_C \tag{2}$$

其中 Q_A、Q_B、Q_C 分别是单位时间内从 A、B 两个进口流入的空气质量和从 C 出口流出的空气质量.

$$Q_A = \rho v_AS_A \tag{3}$$

$$Q_B = \rho v_BS_B = \rho v_AS_A \tag{4}$$

$$Q_C = Q_A + Q_B = 2\rho v_AS_A \tag{5}$$

将式(3)、(4)代入式(1)，解出

$$R_2 = (p_A - p_C)S_A(1+\sin45°) - \rho v_A^2S_A(1+\sin45°)$$

代入数据，经计算得

$$R_2 = 6.66\text{N}$$

对 A、C 两点用伯努利方程，

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + p_C$$

$$v_C = \sqrt{\frac{2(p_A - p_C)}{\rho} - v_A^2}$$

代入数据可得　$v_C = 100\text{m/s}$

将式(4)、(5)代入式(2)，解出

$R_1 = (p_B - p_C)S_A\sin45° - \rho v_A^2S_A\sin45° + 2\rho v_AS_Av_C$

代入数据后，可得　$R_1 = 5.65\text{N}$

8.3.4　一水塔的蓄水箱底离地面的高度 $H_0=20\text{m}$，其横截面为半径 $R=2\text{m}$ 的圆，蓄水深 $h=1\text{m}$，如果用装在高 $H_1=5\text{m}$ 处截面积为 2cm^2 的水龙头放水，假定始终都是定常流动，问需多久才能将水放完？

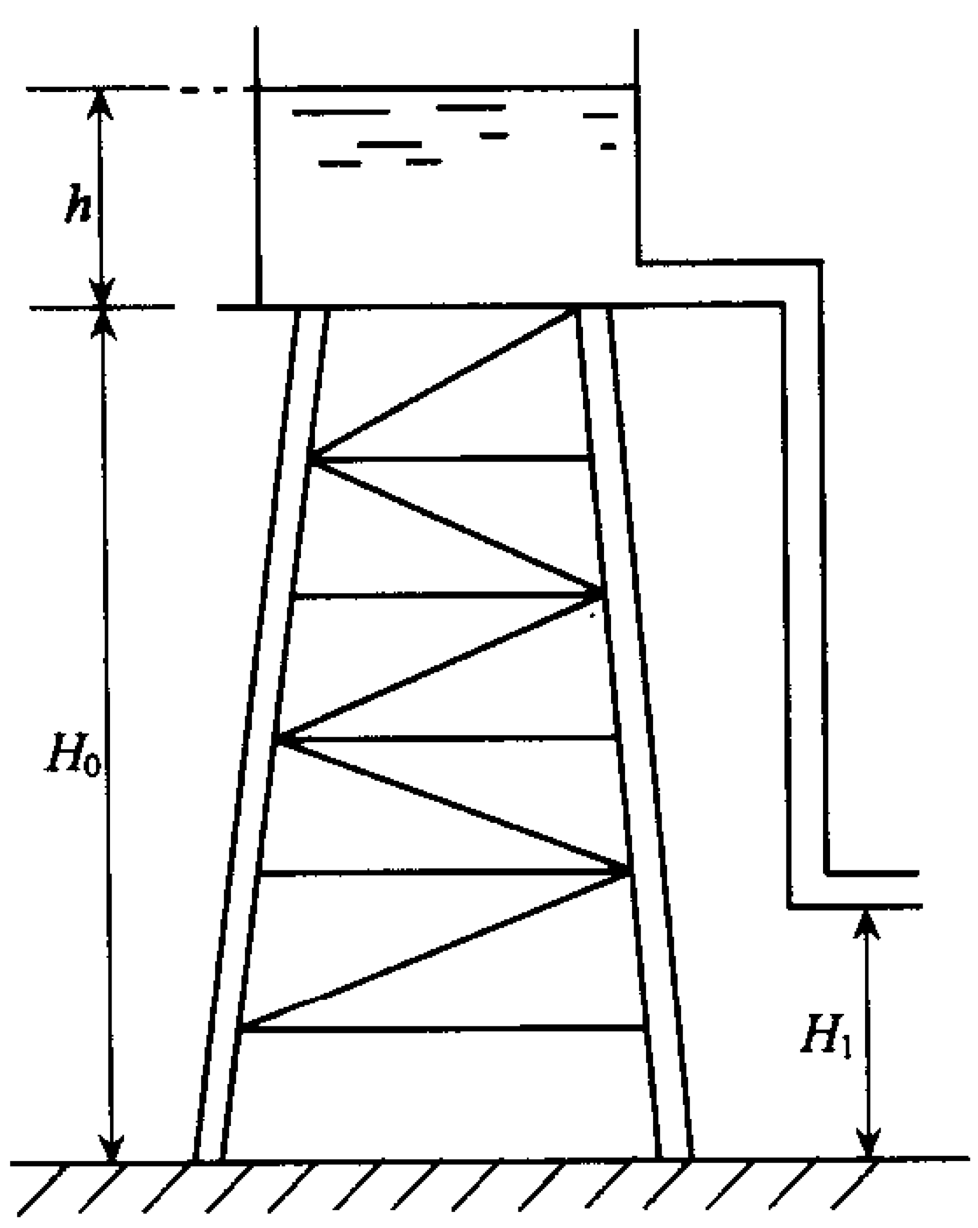


图 8.24

解　设大气压强为 p_0，当蓄水箱中水面比箱底高 x(m)时，水面处的流速为 v_0，水龙头流出的水速

为 v,

由伯努利方程,

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g H_1 + p_0 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g(H_0 + x) + p_0$$

由连续性方程

$$Sv = \pi R^2 v_0$$

其中 S 是水龙头的截面积.

从上述两式可解出 v_0 与 x 的函数关系为

$$v_0 = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 R^4 - S^2} \cdot 2g(H_0 - H_1 + x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v_0 = -\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 R^4 - S^2} \cdot 2g(H_0 - H_1 + x)}$$

将水放完所需的时间 t 为

$$\begin{aligned} t &= -\int_h^0 \sqrt{\frac{\pi^2 R^4 - S^2}{2gS^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{H_0 - H_1 + x}}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{\pi^2 R^4 - S^2}{2gS^2}} \cdot 2\sqrt{H_0 - H_1 + x}\Big|_0^h \\ &= \sqrt{\frac{2(\pi^2 R^4 - S^2)}{gS^2}}\left(\sqrt{H_0 - H_1 + h} - \sqrt{H_0 - H_1}\right) \end{aligned}$$

代入 $R=2\mathrm{m}, S=2\times10^{-4}\mathrm{m}^2, H_0=20\mathrm{m}, H_1=5\mathrm{m}, h=1\mathrm{m}, g=9.8\mathrm{ms}^{-2}$,可得

$$t = 3.61 \times 10^3 \mathrm{s}$$

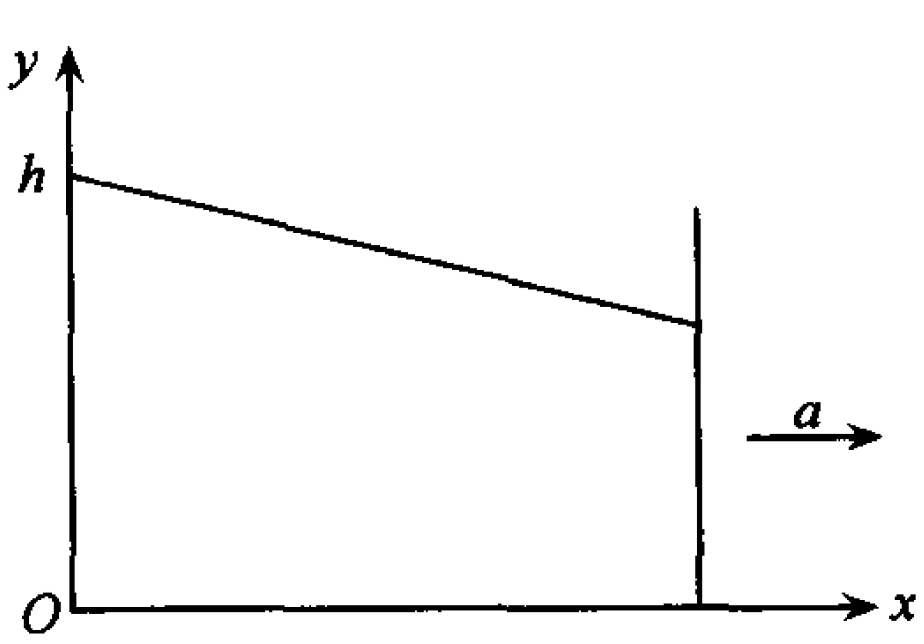


图 8.25

8.3.5 洒水车的大水槽的后端底部有一小孔,当洒水车以匀加速 a 前进时,后端水面的高度为 h. 求此刻水从小孔流出的速率.(以洒水车为参考系)

解 虽然水从后端底部的小孔流出,以洒水车为参考系,仍可近似认为洒水车中的水处于平衡状态. 说得更确切些,水从小孔中流出的过程是一个准静态过程.

取固连于洒水车的 xy 坐标,如图 8.25 所示,原点取在洒水车的大水槽的后端底部,x 轴水平沿车前进的方向,y 轴竖直向上.

单位质量的水受到的彻体力为

$$\boldsymbol{F} = -a\boldsymbol{i} - g\boldsymbol{j}$$

由平衡方程,

$$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$$

得　$\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho a, \quad \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y = -\rho a\mathrm{d}x - \rho g\mathrm{d}y$$

积分得

$$p = -\rho ax - \rho gh + c$$

由 $x=0, y=h$ 处 $p=p_0$(大气压)定出

$$c = p_0 + \rho gh$$

因为

$$p = p_0 + \rho gh - \rho(ax + gy)$$

上述压强分布适用于大水槽内部(包括小孔附近，那里水的流速 $v\approx 0$)，小孔附近的外部，$p=p_0$. 对小孔附近内、外两点用伯努利方程，

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

其中 v 为从小孔流出的水的速率(相对于洒水车)，

$$v = \sqrt{2gh}$$

8.3.6 半径为 R 的圆柱形水槽绕自身的铅直对称轴以匀角速 ω 转动，水槽侧壁有一小孔，水面最低处在小孔上方 h 处. 求此刻水从小孔流出时相对于水槽的速率.

解 取水槽为参考系，取固连于它的柱坐标系，原点取在对称轴上，与侧壁的小孔同高度处，z 轴沿竖直的对称轴，向上为正.

单位质量的水受到的彻体力为

$$\boldsymbol{F} = \omega^2 r\boldsymbol{e}_r - g\boldsymbol{k}$$

由平衡方程，$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\mathrm{d}p = \rho\omega^2 r\mathrm{d}r - \rho g\mathrm{d}z$$

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho gz + c$$

水面最低处，$r=0, z=h, p=p_0$，定出

$$c = p_0 + \rho gh$$

所以

$$p = p_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho gz$$

对小孔附近内、外两点用伯努利方程，

$$p_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh + \omega^2 R^2}$$

注意：用伯努利方程的两点必须处在同一条流线上. 考虑小孔附近内、外两点都确保在同一条流线上.

8.3.7 密度为 ρ 的理想流体通过截面积为正方形的、水平的圆弧形管道(见图 8.26)做定常流动，正方形边长为 $2L$，圆形轨道的中心线的半径为 R，测得通道在同一高度上内外侧压差为 Δp，通道内水流速度为 $v_r = v_z = 0, v_\varphi = \dfrac{A}{r}$，$A$ 为待定常数. 试证明通过通道的水流质量流量为

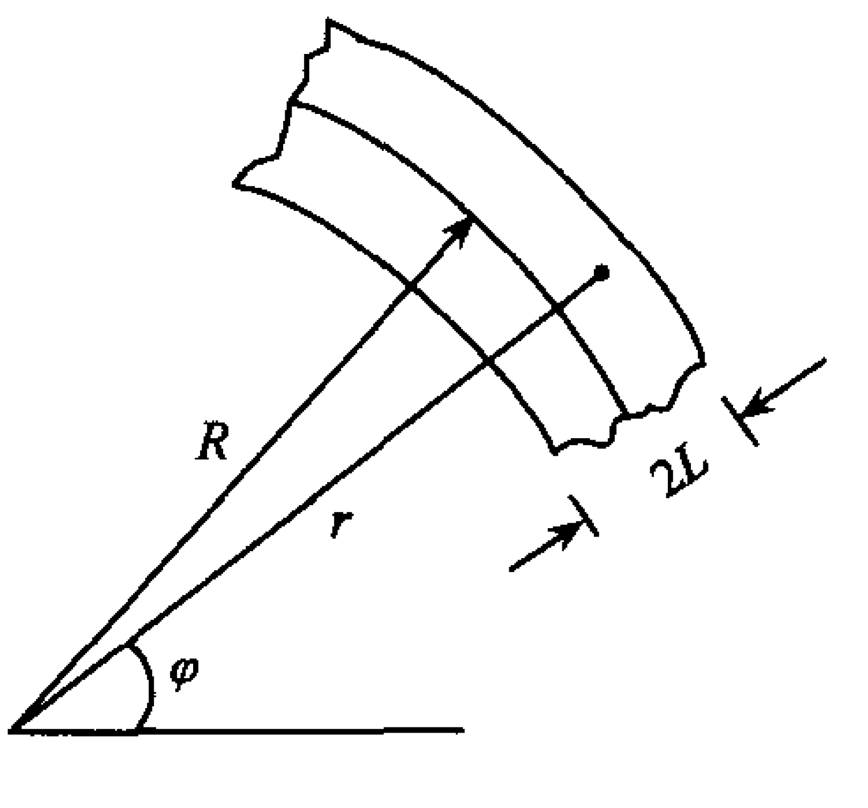


图 8.26

$$Q=\sqrt{\frac{2\rho L\Delta p}{R}}(R^2-L^2)\ln\left(\frac{R+L}{R-L}\right)$$

证明 该流动为无旋定常流动,证明无旋如下:

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}\varphi+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{k}$$

今 $v_r=0,v_z=0,\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}=0,\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}=0$

可见,$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$,流动是无旋的.

对于理想流体做无旋的定常流动,对任何两点(不要求在同一流线上)都有伯努利积分,即有同样的伯努利常数.

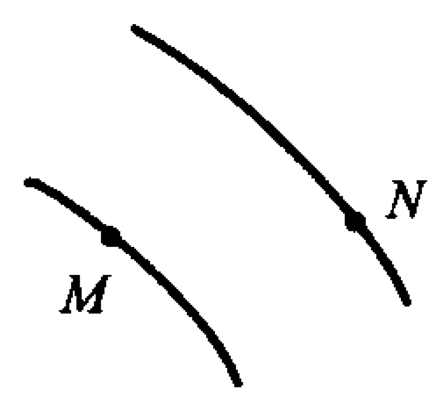


图 8.27

今对正方形截面的圆形管道的内外两侧,即 $r=R-L$ 和 $r=R+L$ 的两侧上的两点 M、N(见图 8.2.7)写伯努利积分.

$$v_M=\frac{A}{R-L},v_N=\frac{A}{R+L}$$

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A}{R-L}\right)^2+p_M=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A}{R+L}\right)^2+p_N$$

$$\Delta p=p_N-p_M=\frac{1}{2}\rho A^2\left[\frac{1}{(R-L)^2}-\frac{1}{(R+L)^2}\right]=\rho A^2\frac{2RL}{(R^2-L^2)^2}$$

$$A=\sqrt{\frac{\Delta p}{2\rho RL}}(R^2-L^2)$$

通过通道的水流质量流量为

$$Q=\int_{R-L}^{R+L}\rho\frac{A}{r}2L\mathrm{d}r=2\rho AL\ln\left(\frac{R+L}{R-L}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2\rho L\Delta p}{R}}(R^2-L^2)\ln\left(\frac{R+L}{R-L}\right)$$

8.3.8 密度为 ρ 的理想流体做定常流动,其流场的速度分布为

$$\boldsymbol{v}=\begin{cases}r\omega\boldsymbol{e}\varphi & 0\leqslant r\leqslant r_0\\ \dfrac{r_0^2\omega}{r}\boldsymbol{e}\varphi & r\geqslant r_0\end{cases}$$

其中 ω 为常量,求此流场的压强分布.设 $r\to\infty$时,$p=p_0$ 为周围的大气压强(不计重力的影响).

提示:可采用绕对称轴以恒定角速度 ω 转动的参考系或解用柱坐标表示的微分方程,

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

解 方法一:采用绕对称轴以恒定角速度 ω 转动的参考系,考虑 $0\leqslant r\leqslant r_0$ 区域的压强分布,此区域处于平衡状态,由平衡方程

$$\rho\boldsymbol{F}=\nabla p$$

$$\rho\omega^2r\boldsymbol{e}_r=\frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\rho\omega^2 r = \frac{\partial p}{\partial r},\quad 0 = \frac{\partial p}{\partial \varphi},\quad 0 = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\mathrm{d}p = \rho\omega^2 r\mathrm{d}r$$

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + c \tag{1}$$

再用静参考系考虑 $r \geqslant r_0$ 区域的压强分布，此区域的流动正如上题已证明的那样为无旋定常流动，对 $r \geqslant r_0$ 的各点有同样的伯努利常数，

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = 常量 \quad (r \geqslant r_0)$$

即

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{r_0^2\omega}{r}\right)^2 + p(r) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{r_0^2\omega}{r_0}\right)^2 + p(r_0)$$

将式(1)代入上式，得

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{r_0^2\omega}{r}\right)^2 + p(r) = \rho r_0^2\omega^2 + c$$

$$p(r) = -\frac{1}{2}\rho\left(\frac{r_0^2\omega}{r}\right)^2 + \rho r_0^2\omega^2 + c \tag{2}$$

用 $r \to \infty$ 时，由 $p = p_0$ 定 c，得

$$c = p_0 - \rho r_0^2\omega^2 \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)、(2)

$$p(r) = \begin{cases} p_0 - \rho r_0^2\omega^2 + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 & 0 \leqslant r \leqslant r_0 \\ p_0 - \frac{1}{2}\rho r_0^4\omega^2 \Big/ r^2 & r \geqslant r_0 \end{cases}$$

方法二：用柱坐标表示的微分方程，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1}$$

用柱坐标，

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + v_z\boldsymbol{k}$$

注意柱坐标中单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 是随 t 而变的，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial t}\boldsymbol{e}_r + v_r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi + v_\varphi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} - \dot{\varphi}v_\varphi\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \dot{\varphi}v_r\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial v_z}{\partial t}\boldsymbol{k}$$

式(1)的分量方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} - \dot{\varphi}v_\varphi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_r &= F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \dot{\varphi}v_r + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_\varphi &= F_\varphi - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_z &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_r = (v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\dot{\boldsymbol{e}\varphi} + v_z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial v_r}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla v_\varphi = (v_r \boldsymbol{e}_r + v_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + v_z \boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{\partial v \dot{\varphi}}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}\dot{\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$= v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla v_z = v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

代入方程组(2)，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} - \dot{\varphi} v_\varphi + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \dot{\varphi} v_r + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} &= F_\varphi - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

今 $v_r=0, v_z=0, \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}=0, \frac{\partial v_\varphi}{\partial t}=0, F_r=F_\varphi=F_z=0$，代入方程组(3)，可得

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \dot{\varphi} v_\varphi$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

在 $0 \leqslant r \leqslant r_0$ 区域，

$$v_\varphi = r\omega, \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{r} = \omega$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + c_1$$

在 $r \geqslant r_0$ 区域，

$$v_\varphi = \frac{r_0^2\omega}{r}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{r} = \frac{r_0^2\omega}{r^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho r_0^4\omega^2}{r^3}, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$p = -\frac{\rho r_0^4\omega^2}{2r^2} + c_2$$

用 $r \to \infty$、$p = p_0$ 定出 $c_2 = p_0$，

$$p = p_0 - \frac{\rho r_0^4\omega^2}{2r^2} \qquad r \geqslant r_0$$

在 $r = r_0$，

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2 + c_1 = p_0 - \frac{\rho r_0^4\omega^2}{2r_0^2}$$

定出 $c_1 = p_0 - \rho r_0^2\omega^2$，

所以
$$p = p_0 - \rho r_0^2\omega^2 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 \qquad 0 \leqslant r \leqslant r_0$$

与方法一得到的结果完全相同.

8.3.9　理想流体沿水平圆环做二维定常流动，不计重力的影响，若 $v_r=0$，v_φ 不随 φ 变化，试求：

(1) p 和 v_φ、r 满足的微分方程；

(2) 分别对 $v_\varphi=k$、$v_\varphi=kr$ 和 $v_\varphi=\frac{k}{r}$ 三种情况写出 p 与 r 的函数关系.

解　(1)用上题方法二给出的方程组(3)，且和上题一样，$v_r=0$，$v_z=0$，$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}=0$，$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}=0$，$F_r=F_\varphi=F_z=0$，则

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho}{r}v_\varphi^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

p 只是 r 的函数. p、v_φ、r 满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho\frac{v_\varphi^2}{r}$$

(2) $v_\varphi=k$ 的情况：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{\rho k^2}{r}$$

$$p = \rho k^2 \ln r + c$$

$v_\varphi=kr$ 的情况：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho k^2 r$$

$$p = \frac{1}{2}\rho k^2 r^2 + c$$

$v_\varphi=\frac{k}{r}$ 的情况：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho\frac{k^2}{r^3}$$

$$p = -\frac{\rho k^2}{r^2} + c$$

三式中的 c 均为常量.

8.3.10　密度为 ρ 的理想流体运动的速度势 $\phi=a(x^2-y^2)$，其中 a 为常量，若静止处压强为 p_0，求压强分布(不计重力).

解 $$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1}$$

今$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0,\boldsymbol{F}=0$,则

$$\boldsymbol{v}=\nabla\phi=2ax\boldsymbol{i}-2ay\boldsymbol{j}$$

式(1)的分量方程为

$$2ax\frac{\partial(2ax)}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-2ay\frac{\partial(-2ay)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0=\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-4\rho a^2x,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-4\rho a^2y,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=0$$

$$\mathrm{d}p=-4\rho a^2x\mathrm{d}x-4\rho a^2y\mathrm{d}y$$

$$p=-2\rho a^2(x^2+y^2)+c$$

静止处$\boldsymbol{v}=0$,其位置在$x=0$、$y=0$处.此处,$p=p_0$,定出$c=p_0$,

所以 $$p=p_0-2\rho a^2(x^2+y^2)$$

8.3.11 一种自己有引力作用的气体在没有压力的情况下球对称膨胀,未给膨胀的初条件,但知当密度为ρ_0时,在离中心半径为R_0处的表面流体元的速率为v_0,即$v(R_0)=v_0$.

(1) 求$v(R)$;

(2) 用v_0、R_0和ρ_0描述气体的最终结局.

解 (1)考虑气体表面单位质量的运动,由机械能守恒,

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{GM}{R}=\frac{1}{2}v_0^2-\frac{GM}{R_0}$$

其中$M=\frac{4}{3}\pi R_0^3\rho_0$是气体的总质量.$v$是球膨胀到半径为$R$时表面气体的速率,

$$v(R)=\left[v_0^2+\frac{8}{3}\pi GR_0^3\rho_0\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)\right]^{1/2}$$

(2)由上面得到的$v(R)$可见,R增大时,表面气体的速率v减小,最终结局是膨胀到半径满足下列方程的R:

$$v_0^2+\frac{8}{3}\pi GR_0^3\rho_0\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)=0$$

时,表面的气体的速率$v=0$,停止膨胀.

$$R=\frac{8\pi GR_0^3\rho_0}{8\pi GR_0^2\rho_0-3v_0^2}$$

气体在此半径的球内达到平衡状态.

讨论:原题有膨胀时保持气体均匀之意.我们把它改成了只是在半径为R_0时气体密度为ρ_0是均匀的.如果膨胀过程中球内各处总是均匀的,最终结局也应该是均匀的.整个

过程气体的机械能守恒.最终气体处于平衡后的势能应等于气体的球半径为 R_0 时的动能和势能之和.下面的计算说明，不可能是均匀膨胀的情况.

假定均匀膨胀，则球半径为 r 时，密度为 ρ，因气体质量一定，

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho = M = \text{常量}$$

$$3r^2\rho\mathrm{d}r + r^3\mathrm{d}\rho = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{3}{r}\mathrm{d}r = -\frac{3}{r}v\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{r}v$$

上式也可适用于球的内部.在同一时刻，内部各处 ρ 相同，$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ 也相同，$\frac{v}{r}=$常量.

在球半径为 R_0 时，

$$\frac{v}{r} = \frac{v_0}{R_0}$$

$$v = \frac{r}{R_0}v_0$$

此时，气体的动能为

$$T = \int_0^{R_0}\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_0}v_0\right)^2 \cdot \rho_0 \cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{2}{5}\pi\rho_0 R_0^3 v_0^2$$

气体的势能为

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{R_0}\left[-\frac{G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0}{r}\right]\rho_0 \cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r = -\frac{8}{15}\pi^2 G\rho_0^2 R_0^5$$

气体的机械能 E 为

$$E = T + V = \frac{2}{5}\pi\rho_0 R_0^3 v_0^2 - \frac{8}{15}\pi^2 G\rho_0^2 R_0^5$$

气体均匀膨胀，最终达到平衡，当然也应是均匀的.由此可算出最终气体的密度为

$$\rho = \left(\frac{R_0}{R}\right)^3\rho_0 = \left(\frac{8\pi G\rho_0 R_0^2 - 3v_0^2}{8\pi G\rho_0 R_0^2}\right)^3\rho_0$$

平衡后的势能为

$$V(R) = \frac{1}{2}\int_0^{R}\left[-\frac{G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r}\right]\rho \cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r = -\frac{8}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5$$

代入 $R=\frac{8\pi G R_0^3\rho_0}{8\pi G R_0^2\rho_0 - 3v_0^2}$ 和上述的 ρ，经计算可得

$$V(R) = \frac{1}{5}\pi\rho_0 R_0^3 v_0^2 - \frac{8}{15}\pi^2 G\rho_0^2 R_0^5$$

$$V(R) \neq E$$

但是机械能应该是守恒的，出现上述不合理情况的原因是均匀膨胀的假定不成立.

不是均匀膨胀,还不能作出结论最终的平衡状态各处密度就一定不均匀,还需作进一步的讨论.假定最终密度均匀,则由流体静力学平衡方程

$$\rho \boldsymbol{F} = \nabla p$$

可求出压强是 r 的函数,$p=p(r)$.

气体还得满足热力学平衡时的状态方程.一般讲,上述的压强分布 $p(r)$ 不会恰好满足所要求的状态方程.因此最终的平衡态,密度是球对称的,但不是均匀的.

8.3.12 (1)一艘质量为 M 的船浮在有竖直侧壁的深水槽中,一块质量为 m 的石头投入船内,槽中的水平面升高多少?如果石头没击中船而是落入水中,水平面升高多少?(如果需要,你可以对水槽、船和石头假设一个合理的形状);

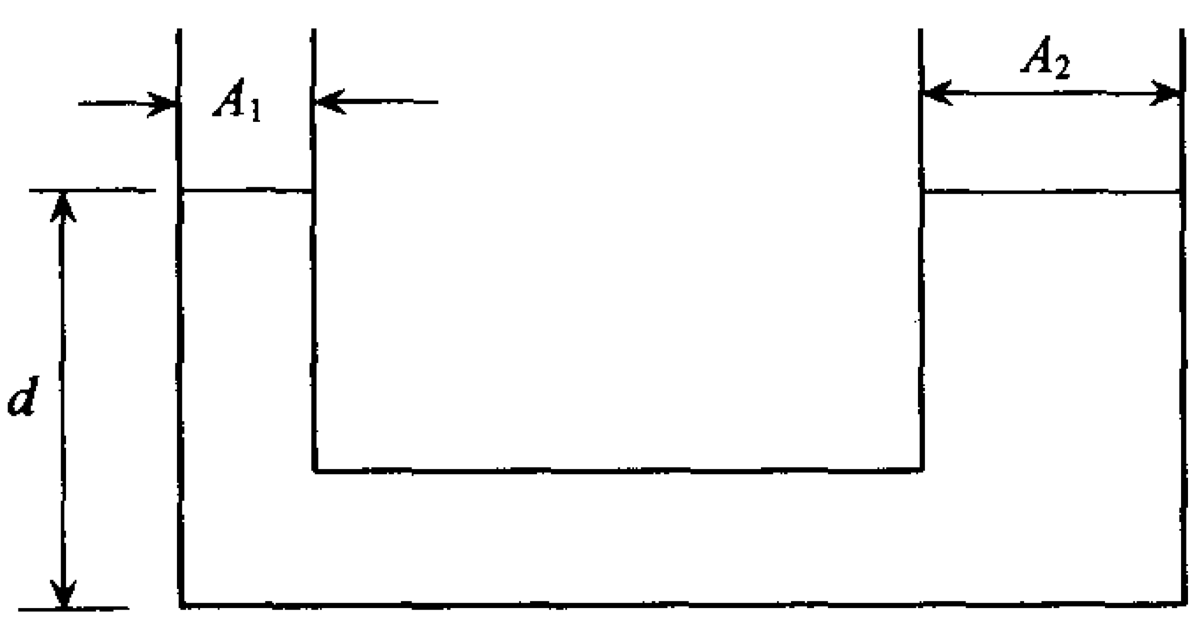


图 8.28

(2)一个两臂有不同的截面积 A_1、A_2 的 U 形管装入不可压缩的液体,液面高度为 d,如图 8.28 所示.空气被冲击性地吹入管的一端,忽略表面张力效应和液体的黏性,定量地描述液体以后的运动.

解 (1)设 ρ_w 和 ρ_r 分别为水和石头的密度,设船和水槽都是长方体,S_b 和 S_t 分别是船和水槽的水平的截面积.

石头投入船内时,设船排水深度的增量为 Δh,

$$mg = \rho_w S_b \Delta h \cdot g$$

$$\Delta h = \frac{m}{\rho_w S_b}$$

设引起水槽内水面增高 ΔH,则

$$(S_t - S_b)\Delta H = S_b \Delta h$$

$$\Delta H = \frac{S_b}{S_t - S_b}\Delta h = \frac{m}{\rho_w (S_t - S_b)}$$

如石头投入水槽中,水槽中水面升高 ΔH,

$$(S_t - S_b)\Delta H' = \frac{m}{\rho_r}$$

$$\Delta H' = \frac{m}{(S_t - S_b)\rho_r}$$

(2)这是一个理想流体做无旋的不定常流动,用这种运动的拉格朗日积分

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + U + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

其中 ϕ 是速度势,$\boldsymbol{v} = \nabla \phi$,$U$ 是单位质量所受的外力的势能,$f(t)$ 是时间的某一函数.在同一时刻,考虑管子两臂面上的两点 1、2,分别偏离平衡位置 x_1、x_2,如图 8.29 所示,用上式,

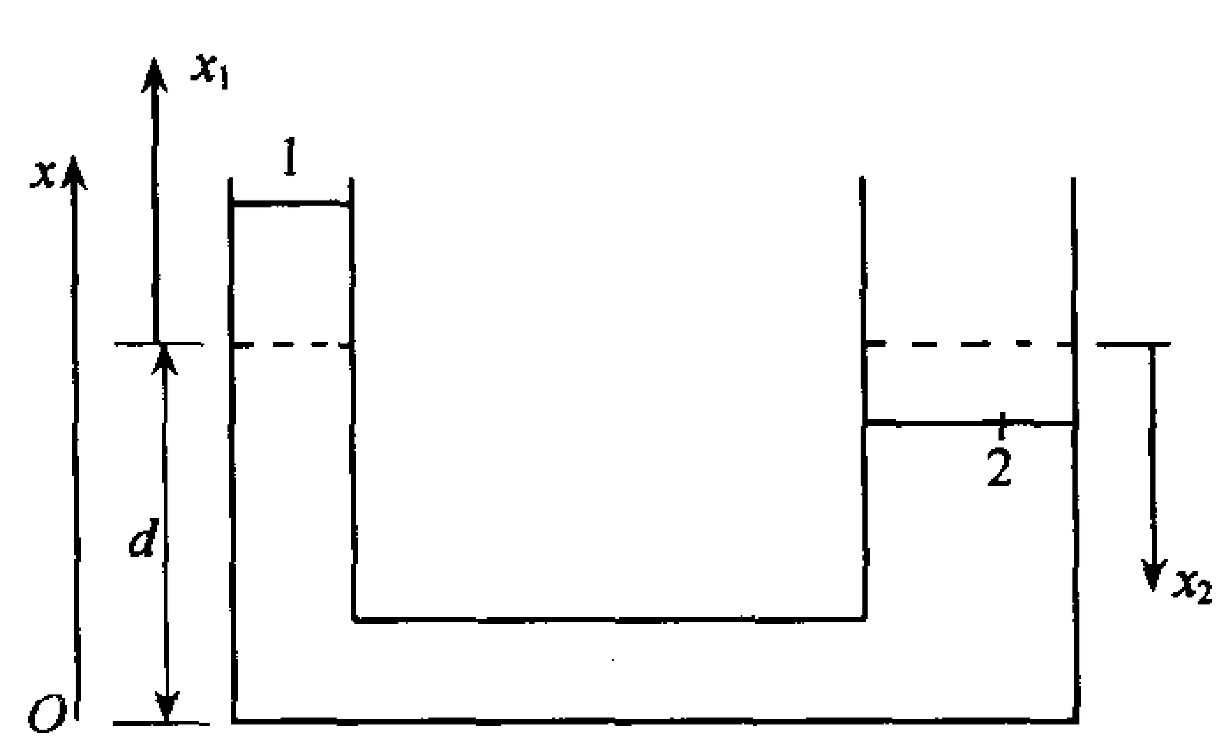


图 8.29

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}v_1^2+U_1+\frac{p_1}{\rho}$$
$$=\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{1}{2}v_2^2+U_2+\frac{p_2}{\rho}$$

其中 $p_1=p_2=p_0$(大气压),

$$U_1=g(d+x_1),U_2=g(d-x_2),v_1=\dot{x}_1,$$
$$v_2=\dot{x}_2$$
$$\phi_1=\int_0^{d+x_1}v_1\mathrm{d}x,\qquad \phi_2=\int_0^{d-x_2}(-v_2)\mathrm{d}x$$

积分下限可以任取,因为速度势的零点可以任取.

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=\int_0^{d+x_1}\frac{\partial v_1}{\partial t}\mathrm{d}x\approx\ddot{x}_1d$$
$$\frac{\partial p_2}{\partial t}=\int_0^{d-x_2}\left(-\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\approx-\ddot{x}_2d$$

这里 x_1、x_2、$\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$、$\ddot{x}_1$、$\ddot{x}_2$ 均为小量,作上述积分时,只保留一级小量,

上述拉格朗日积分可近似为

$$\ddot{x}_1d+g(d+x_1)=-\ddot{x}_2d+g(d-x_2)$$

$$\ddot{x}_1+\ddot{x}_2+\frac{g}{d}(x_1+x_2)=0$$

用连续性方程,

$$A_1x_1=A_2x_2$$

可得

$$\ddot{x}_1+\frac{g}{d}x_1=0$$

$$\ddot{x}_2+\frac{g}{d}x_2=0$$

因此液体随后的运动是做角频率为$\sqrt{\frac{g}{d}}$的简谐振动.

8.3.13 一个半径为 R 的球在不可压缩的($\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=0$,$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$为以球为参考系时在位矢 $\boldsymbol{r}$ 处流体的速度)、无黏性理想流体中做速度为 $\boldsymbol{u}$ 的匀速运动.

(1) 以球为参考系,求流体流过球表面任何点时的速度$\boldsymbol{v}$;

(2) 求出球的表面处的压强分布;

(3) 求保持球做匀速运动所必需的力.

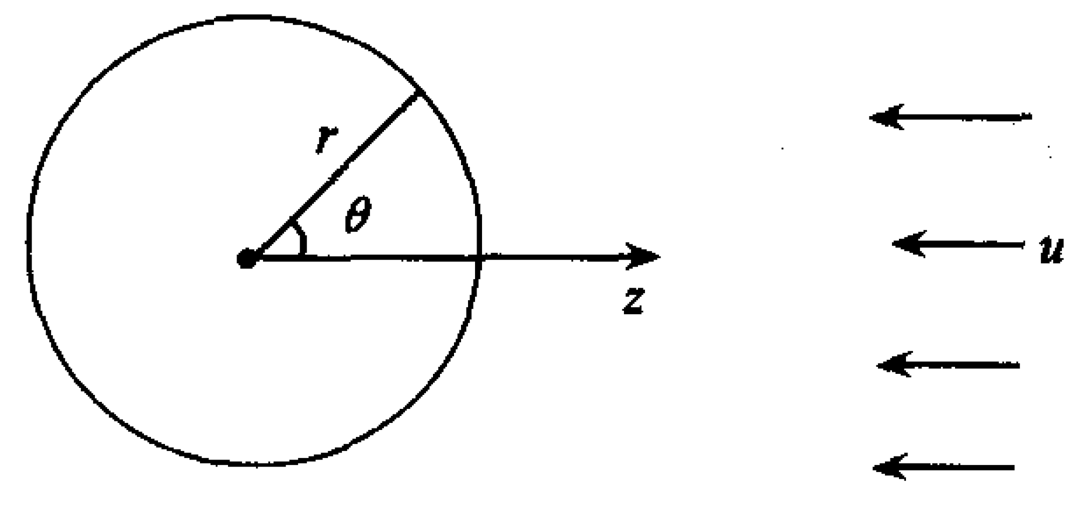


图 8.30

解 (1) 取球为参考系,流体做图 8.30 中所画的运动.用球坐标 r、θ、φ,原点位于球心,流体的速度沿 $\theta=\pi$ 的方向.定义速度势 ϕ 为

$$\boldsymbol{v}=\nabla\phi$$

因流体不可压缩,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

故速度势 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0$$

边界条件为

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \tag{1}$$

这是因为球面是不可穿透的，

$$\phi|_{r\to\infty} = -ur\cos\theta \tag{2}$$

这是因为在远离球的地方，$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}$，用球坐标表达为

$$\boldsymbol{v}|_{r\to\infty} = -u\cos\theta\boldsymbol{e}_r + u\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

与

$$\begin{aligned}\nabla\phi|_{r\to\infty} &= -u\nabla(r\cos\theta) \\ &= -u\left[\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right] \\ &= -u\cos\theta\boldsymbol{e}_r + u\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

完全相同，可见边界条件式(2)是正确的.

拉普拉斯方程的一般解为

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(a_n' r^n + b_n' r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)(c_m\cos m\varphi + d_m\sin m\varphi)$$

其中 $P_n^m(x)$ 是连带勒让德函数，

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$$

考虑到具有柱对称性，ϕ 与 φ 无关，只能取 $m=0$，故 ϕ 为

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n-1})P_n(\cos\theta)$$

其中 $P_n(x)$ 是勒让德多项式，

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \tag{3}$$

下面用边界条件确定 a_n 和 b_n.

由式(2)，即 $\phi|_{r\to\infty} = -ur\cos\theta$，可定出

$$a_1 r P_1(\cos\theta) = -ur\cos\theta$$

由式(3)可知，$P_1(\cos\theta) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)|_{x=\cos\theta} = \cos\theta$

所以

$$a_1 = -u$$

$$a_n = 0 \qquad (n \neq 1)$$

由式(1)，即 $\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$，

$$\phi = -ur\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n-1}P_n(\cos\theta)$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R}=-u\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}(-n-1)b_nR^{-n-2}P_n(\cos\theta)=0$$

可定出

$$b_n=0\quad(n\neq 1)$$

$$-u\cos\theta-2b_1R^{-3}\cos\theta=0$$

$$b_1=-\frac{1}{2}uR^3$$

所以

$$\phi=-ur\cos\theta-\frac{1}{2}uR^3r^{-2}\cos\theta$$

在球面上点(R,θ)处流体的速度为

$$\boldsymbol{v}(R,\theta)=\nabla\phi|_{r=R}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R}\boldsymbol{e}_r+\left.\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right|_{r=R}\boldsymbol{e}_\theta=\frac{3}{2}u\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

(2) 以球为参考系，理想流体做定常流动，注意流体未受彻体力(不计重力)，对同一流线上两点写伯努利积分，

$$\frac{1}{2}\rho v^2+p=\frac{1}{2}\rho u^2+p_0$$

等号右边取无穷远处，

$$v=u,p=p_0$$

左边取球面上的点(R,θ)，

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{3}{2}u\sin\theta\right)^2+p(R,\theta)=\frac{1}{2}\rho u^2+p_0$$

所以

$$p(R,\theta)=p_0+\frac{1}{2}\rho u^2\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)$$

(3) 流体作用于球向左的合力

$$F=\int p(R,\theta)\cos\theta\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^\pi\left[p_0+\frac{1}{2}\rho u^2\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)\right]\cos\theta\cdot2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta=0$$

因此，保持球做匀速运动无需给球外加作用力，这正是预期的结果，因为球在无摩擦情况下做匀速运动.

8.3.14　两个倾斜的、可视为无穷大的平行平板，倾角为α，相距为b，如图 8.31 所示. 其间有密度为ρ、黏度为η的不可压缩流体做定常的二维流动，平均速度为$\bar{v}$，考虑重力的影响，求图中 1、2 两点的压强差.

解　取x沿流体运动的反方向，z轴垂直于平行的平板，向上为正，两平板的z坐标分别为$z=0$和$z=b$.

考虑$x\sim x+\mathrm{d}x$、$y\sim y+\mathrm{d}y$、$z\sim z+\mathrm{d}z$的一块质元，在x和z方向受力分别如图 8.32(a)和(b)所示. 在x方向无加速度，

$$p|_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-p|_{x+\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\eta\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right|_{z+\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\eta\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right|_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\rho g\sin\alpha\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

对$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right|_{z+\mathrm{d}z}$和$p|_{x+\mathrm{d}x}$分别作泰勒展开，

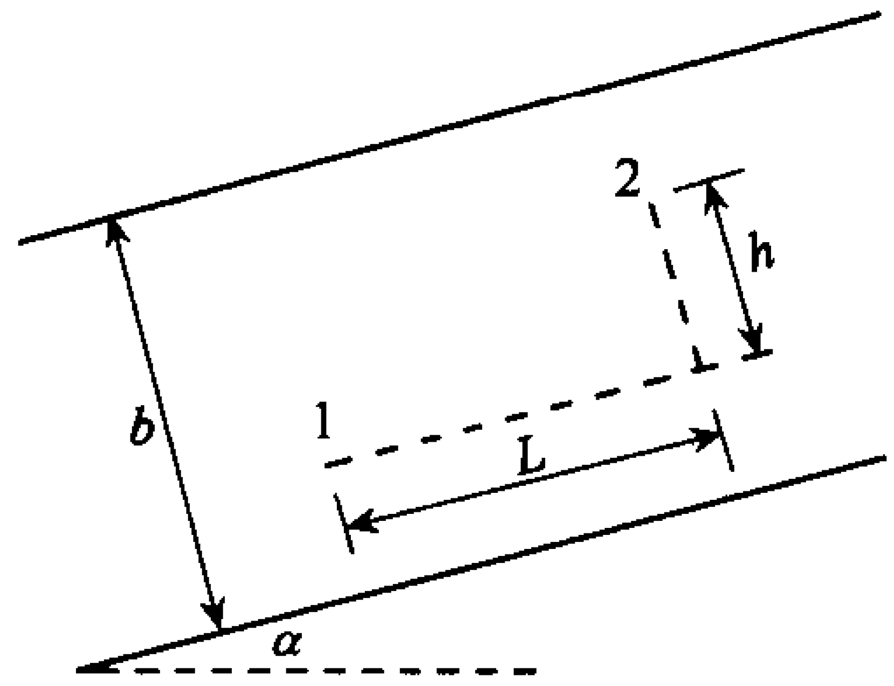


图 8.31

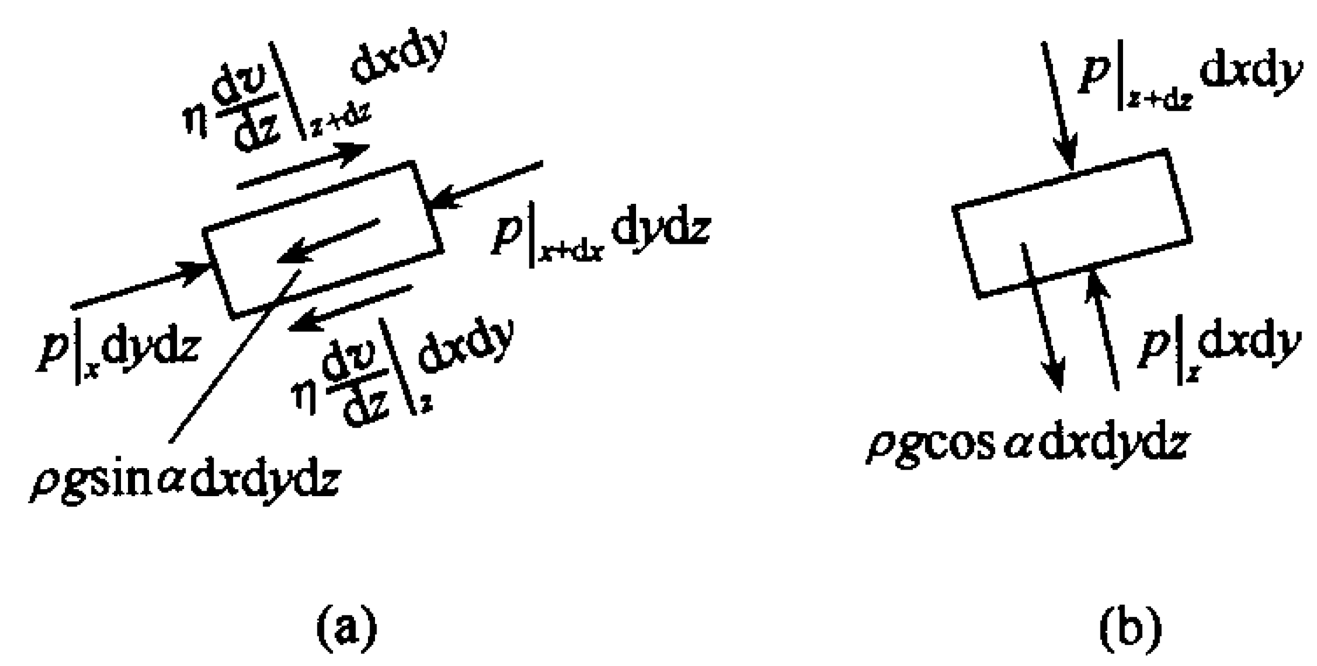


图 8.32

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right|_{z+\mathrm{d}z}=\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right|_{z}+\left.\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z}\mathrm{d}z+\cdots$$

$$p\,|_{x+\mathrm{d}x}=p\,|_{x}+\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x}\mathrm{d}x+\cdots$$

代入上式，略去高级小量，可得

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\eta\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}-\rho g\sin\alpha \tag{1}$$

在 z 方向无运动.

$$p\,|_{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-p\,|_{z+\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\rho g\cos\alpha\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

$$p\,|_{z+\mathrm{d}z}=p\,|_{z}+\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z}\mathrm{d}z+\cdots$$

代入上式，略去高级小量，可得

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g\cos\alpha \tag{2}$$

积分式(2)，

$$p(x,z)=-\rho gz\cos\alpha+f(x) \tag{3}$$

$f(x)$是 x 的某种函数.

由式(3)可知，$\frac{\partial p}{\partial x}$只能是 x 的函数，由连续性方程，因 ρ 为常量，流体在 y、z 方向无运动，可得$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$，也即$\frac{\partial v}{\partial x}=0\left(注意 v 是 z 的函数,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}\neq0\right)$，$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}$和 $\rho g\sin\alpha$ 都不是 x 的函数，因此式(1)中的$\frac{\partial p}{\partial x}$也不能是 x 的函数，只能是常量. 再由式(1)，$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}$也是常量.

式(1)改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha$$

对上式积分两次，得

$$v(z)=\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g\sin\alpha\right)z^2+c_1z+c_2$$

由边界条件：$z=0$ 处 $v=0$，及 $z=b$ 处 $v=0$，定出

$$c_2=0,\qquad c_1=-\frac{b}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g\sin\alpha\right)$$

所以
$$v(z)=\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g\sin\alpha\right)(z-b)z$$

$$\bar{v}=\frac{1}{b}\int_0^b v(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\eta b}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g\sin\alpha\right)\int_0^b(z^2-bz)\mathrm{d}z=-\frac{b^2}{12\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g\sin\alpha\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{12\eta\bar{v}}{b^2}-\rho g\sin\alpha \tag{4}$$

由式(2)、(4)，

$$\mathrm{d}p=-\left(\frac{12\eta\bar{v}}{b^2}+\rho g\sin\alpha\right)\mathrm{d}x-\rho g\cos\alpha\mathrm{d}z$$

$$p=-\left(\frac{12\eta\bar{v}}{b^2}+\rho g\sin\alpha\right)x-\rho gz\cos\alpha+c$$

$$p_2-p_1=-\left(\frac{12\eta\bar{v}}{b^2}+\rho g\sin\alpha\right)(x_2-x_1)-\rho g(z_2-z_1)\cos\alpha$$

$$=-\left(\frac{12\eta\bar{v}}{b^2}+\rho g\sin\alpha\right)L-\rho gh\cos\alpha$$

8.3.15　如图 8.33，某不可压缩的密度为 ρ、黏度为 η 的流体，在重力作用下沿倾角为 α 的固定平面做二维的定常层流型流动，流层厚度为 b，有自由表面，求：

(1) 垂直于纸面的单位宽度流量；

(2) 在自由表面下深度 d 为何值，该处的流速等于流动的平均速度.

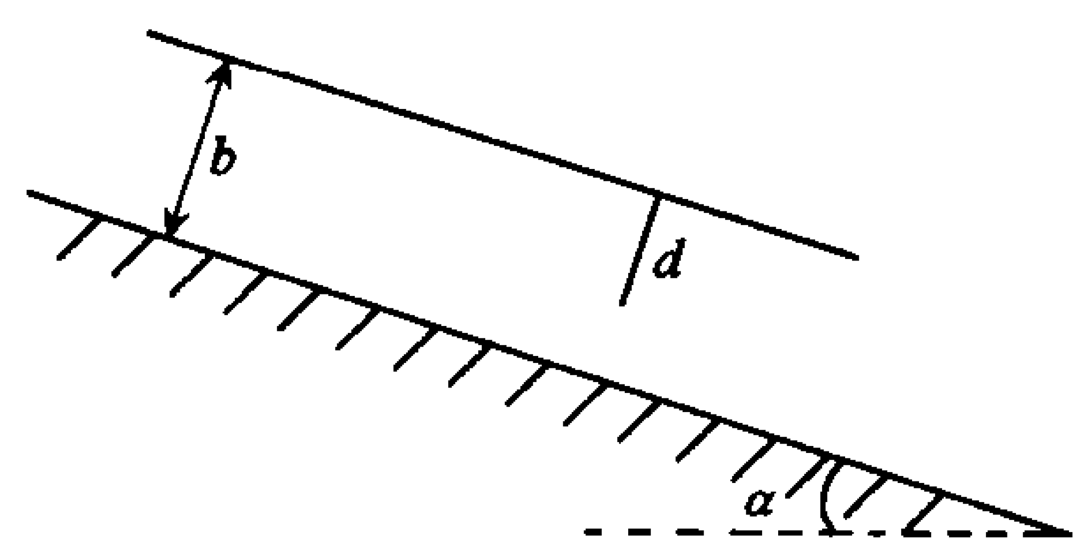


图 8.33

解　沿斜面流动方向取 x 轴，z 轴垂直于斜面向上.

未给平均速度 $\bar{v}$，也未给$\frac{\partial p}{\partial x}$，仅说"在重力作用下……做二维的定常层流型流动"，意味着靠重力抵消黏性力以维持定常流动，即$\frac{\partial p}{\partial x}=0$.

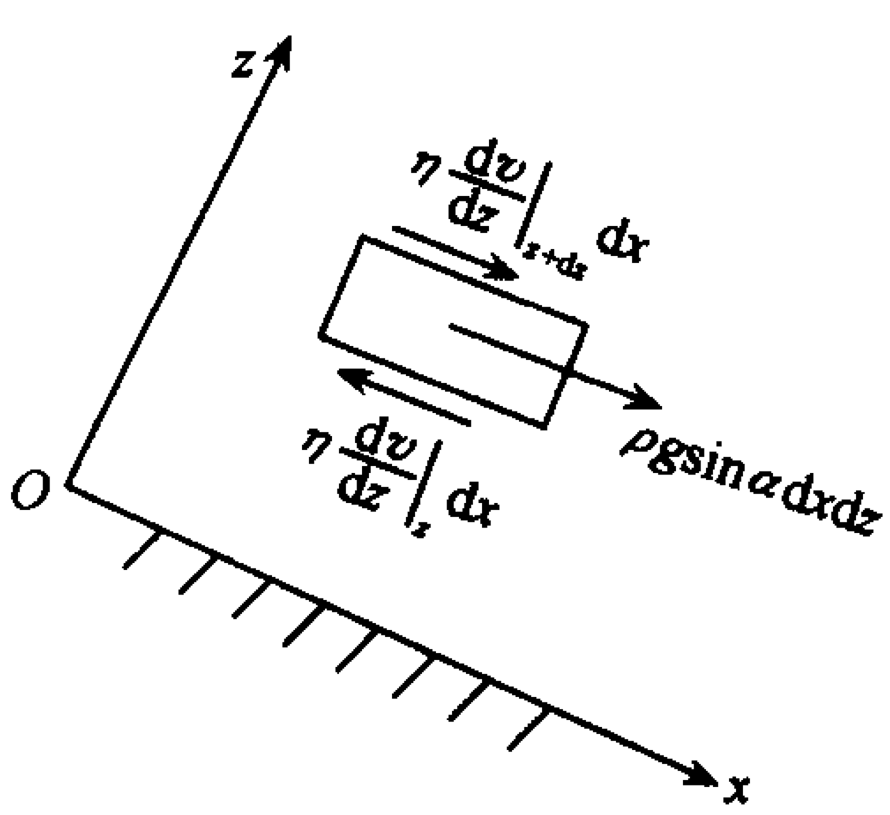


图 8.34

取 $x\sim x+\mathrm{d}x$、$z\sim z+\mathrm{d}z$、y 方向单位宽度的质元，x 方向受力如图 8.34 所示. 由于$\frac{\partial p}{\partial x}=0$，图中未画前后的压力.

在 x 方向无加速度，

$$\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z+\mathrm{d}z}\mathrm{d}x-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\bigg|_z\mathrm{d}x+\rho g\sin\alpha\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z+\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\bigg|_z+\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}\bigg|_z\mathrm{d}z+\cdots$$

代入上式，略去高级小量，

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha$$

积分上式，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}=-\frac{\rho g}{\eta}z\sin\alpha+c_1$$

在 $z=b$ 处为自由面，$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right|_{z=b}=0$，定出

$$c_1=\frac{\rho g}{\eta}b\sin\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}=-\frac{\rho g}{\eta}(z-b)\sin\alpha$$

$$v=-\frac{\rho g}{2\eta}(z^2-2bz)\sin\alpha+c_2$$

在 $z=0$ 处，$v=0$，定出 $c_2=0$

$$v=-\frac{\rho g}{2\eta}(z^2-2bz)\sin\alpha$$

垂直于纸面的单位宽度流量 q 为

$$q=\int_0^b v\mathrm{d}z=-\frac{\rho g}{2\eta}\sin\alpha\int_0^b(z^2-2bz)\mathrm{d}z=\frac{\rho g b^3}{3\eta}\sin\alpha$$

$$\bar{v}=\frac{q}{b}=\frac{\rho g b^2}{3\eta}\sin\alpha$$

在 $z=b-d$ 处，$v=\bar{v}$，

$$-\frac{\rho g}{2\eta}[(b-d)^2-2b(b-d)]\sin\alpha=\frac{\rho g b^2}{3\eta}\sin\alpha$$

解出

$$d=\frac{\sqrt{3}}{3}b$$

8.3.16 以长为 1m、半径为 1mm 的圆形管道连接两水槽. 试求两水槽水面差为 50cm 时管道中心线处的流速及流量. 已知水在 20℃时黏度为 $1.00\times10^{-3}\mathrm{Ns/m^2}$.

解 用不可压缩的黏性流体在圆管中做层流流动的公式

$$v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

今 $p_1-p_2=\rho gh$，$h=0.50\mathrm{m}$，$L=1\mathrm{m}$，$R=1\times10^{-3}\mathrm{m}$，$\eta=1.00\times10^{-3}\mathrm{Ns/m^2}$

$$v(0)=\frac{\rho gh}{4\eta L}R^2=\frac{10^3\times9.8\times0.50}{4\times1.00\times10^{-3}\times1}(1\times10^{-3})^2=1.23(\mathrm{m/s})$$

用计算流量的泊肃叶公式，

$$Q=\frac{(p_1-p_2)\pi\rho R^4}{8\eta L}=\frac{\pi\rho^2 ghR^4}{8\eta L}=1.92\times10^{-3}\mathrm{kg/s}$$

8.3.17 以 400kW 的泵在 4km 的距离上要以 $1.5\mathrm{m^3/s}$ 通过一水平圆管输送重燃油. 若效率为 75%，此油的密度为 $0.92\mathrm{g/cm^3}$，黏度为 0.19Pas. 求圆管的半径至少多大?

解 用 N 表示功率，

$$N=(p_1-p_2)\frac{Q}{\rho}$$

泊肃叶公式，

$$Q=\frac{(p_1-p_2)\pi\rho R^4}{8\eta L}$$

$$\frac{Q}{N}=\frac{\pi\rho^2R^4}{8\eta LQ}$$

$$R=\left(\frac{8\eta LQ^2}{\pi\rho^2N}\right)^{1/4}$$

今 $\eta=0.19\text{Pas},L=4\times10^3\text{m},\dfrac{Q}{\rho}=1.5\text{m}^3/\text{s},N=400\times10^3\times0.75\text{W}$，

$$R=\left[\frac{8\times0.19\times4\times10^3\times(1.5)^2}{\pi\times400\times10^3\times0.75}\right]^{\frac{1}{4}}=0.347\text{m}.$$

8.3.18　就一定常的圆管中的层流，离中心线 r 多大处的速度等于平均速度？

解　用不可压缩的黏性流体在圆管中做层流流动的公式

$$v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\frac{1}{4R^2}\int_0^R v(r)\cdot2\pi r\text{d}r\\&=\frac{1}{4R^2}\,\frac{p_1-p_2}{4\eta L}\cdot2\pi\left[R^2\cdot\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{4}R^4\right]\\&=\frac{(p_1-p_2)R^2}{8\eta L}\end{aligned}$$

或用泊肃叶公式和$\bar{v}=\dfrac{Q}{\rho\pi R^2}$得到上式，

$$v(r)=\bar{v}$$

$$\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2)=\frac{(p_1-p_2)R^2}{8\eta L}$$

解出
$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

8.3.19　水在 20℃ 时通过一直径为 0.20m 的水平圆管，当平均速度为 2.5m/s 时，管中每米有 3.77Pa/m 的压强降落. 问与用泊肃叶公式计算的所需压强降落比较有多大的误差？水在此温度下的黏度为 1.53×10^{-3}Pas.

解　按泊肃叶公式，

$$\bar{v}=\frac{Q}{\rho\pi R^2}=\frac{(p_1-p_2)R^2}{8\eta L}$$

$$\frac{p_1-p_2}{L}=\frac{8\eta\bar{v}}{R^2}=\frac{8\times1.53\times10^{-3}\times2.5}{(0.20/2)^2}=3.1(\text{Pa/m})$$

$$\text{误差}=\frac{3.77-3.1}{3.1}=21.6\%$$

8.3.20　密度 $\rho=0.93\text{g/cm}^3$、黏度 $\eta=1.48\times10^{-1}$Pas 的原油沿一半径 $r=1.27$cm 的铅直圆管做定常的层流流动. 相距 15m 的上下两个压力计的读数分别为 1.72×10^5Pa 和 4.13×10^5Pa.

(1) 确定流动的方向；

(2) 求出流量.

解　(1)铅直圆管的层流流动，必须考虑重力的作用，用推导泊肃叶公式的办法.

如向上流动，取 z 轴向上为正，公式中的$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\frac{p_2-p_1}{L}$应改为$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}+\rho g$，即$\frac{p_2-p_1}{L}$改为$\frac{p_2-p_1}{L}+\rho g$.

质量流量 Q 为

$$Q=\frac{1}{8\eta}\left(\frac{p_1-p_2}{L}-\rho g\right)\rho\pi R^4$$

p_1、p_2 分别是 z_1、z_2 处的压强，$z_1<z_2$.

如向下流动，取 z 轴向下为正，

$$Q=\frac{1}{8\eta}\left(\frac{p_1-p_2}{L}+\rho g\right)\rho\pi R^4$$

p_1、p_2 分别是 z_1、z_2 处的压强，$z_1<z_2$.

假定流动是自上而下的.

$$\frac{p_1-p_2}{L}+\rho g=\frac{1.72\times10^5-4.13\times10^5}{15}+0.93\times10^3\times9.8$$
$$=-6.95\times10^4(\mathrm{Pa/m})<0$$

则 $Q<0$，说明不可能自上而下流动.

不必再考虑流动是自下而上的，因为

$$\frac{p_1-p_2}{L}-\rho g=\frac{4.13\times10^5-1.72\times10^5}{15}-0.93\times10^3\times9.8$$
$$=6.95\times10^4(\mathrm{Pa/m})>0$$

正好是前一计算的负值. 结论是流动是自下而上的.

(2) 用上面已给出的自下而上流动的质量流量公式

$$Q=\frac{1}{8\eta}\left(\frac{p_1-p_2}{L}-\rho g\right)\rho\pi R^4$$
$$=\frac{1}{8\times1.48\times10^{-1}}6.95\times10^4\times0.93\times10^3\times\pi(1.27\times10^{-2})^4$$
$$=4.46(\mathrm{kg/s})$$

8.3.21 设 8.3.4 题的水塔中，蓄水箱是大容器，其中的水是黏性流体，黏度为 $\eta=1.00\times10^{-3}\mathrm{Pas}$.

(1) 假定流体做定常的层流流动，求流量；

(2) 若水是理想流体，并假定做定常的层流流动，求流量；

(3) 计算雷诺数，判断流动的真实类型.

解 (1) $v(r)=\frac{1}{4\eta}\left(\frac{p_1-p_2}{L}+\rho g\right)(R^2-r^2)$

$$\bar{v}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v(r)\cdot2\pi r\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{\pi R^2}\frac{p_1-p_2+\rho gL}{4\eta L}\cdot2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}R^4-\frac{1}{4}R^4\right)=\frac{p_1-p_2+\rho gL}{8\eta L}R^2$$

$$Q=\bar{v}\cdot\pi R^2\rho=\frac{(p_1-p_2+\rho gL)\pi\rho R^4}{8\eta L}$$

令 $\alpha=\dfrac{p_1-p_2+\rho gL}{L}$，则

$$\bar{v}=\frac{R^2}{8\eta}\alpha \tag{1}$$

$$Q=\frac{\pi\rho R^4}{8\eta}\alpha \tag{2}$$

设 B、B' 是蓄水箱出口内外的两点，水从蓄水箱的自由面流至 B' 这一段可视为理想流体，B 点处的流速 $v_B\approx0$.

对 B、B' 点写伯努利方程，

$$p_0+\rho gh=p_B{}'+\frac{1}{2}\rho\bar{v}^{\,2} \tag{3}$$

设 A 为水龙头出口处一点，对 B'、A 这一段黏性流体的定常层流流动用修改了的伯努利方程，注意由连续性方程，流速 v 相同.

$$p_B{}'+\rho gH_0=p_0+\rho gH_1+e \tag{4}$$

其中 e 是在这段路程中输送单位体积流体所需做的功.

由式(3)解出 $p_B{}'$，

$$p_B{}'=p_0+\rho gh-\frac{1}{2}\rho\bar{v}^{\,2} \tag{5}$$

将式(1)代入式(5)，再代入式(4)，得

$$p_0+\rho gh-\frac{1}{2}\rho\frac{R^4}{64\eta^2}\alpha^2+\rho gH_0=p_0+\rho gH_1+e \tag{6}$$

$$\begin{aligned}e&=\frac{N}{Q/\rho}=(p_1-p_2+\rho gL)\frac{Q}{\rho}\Big/\frac{Q}{\rho}=p_1-p_2+\rho gL\\&=L\alpha=(H_0-H_1)\alpha\end{aligned} \tag{7}$$

将式(7)代入式(6)，可得

$$\frac{\rho R^4}{128\eta^2}\alpha^2+(H_0-H_1)\alpha-\rho g(h+H_0-H_1)=0$$

这是 α 的二次代数方程，解出 α，因 $e>0$，舍去 $\alpha<0$ 的解，

$$\alpha=\frac{64\eta^2}{\rho R^4}\left[\sqrt{(H_0-H_1)^2+\frac{\rho^2gR^4}{32\eta^2}(h+H_0-H_1)}-(H_0-H_1)\right]$$

$$Q=\frac{\pi\rho R^4}{8\eta}\alpha=8\pi\eta\left[\sqrt{(H_0-H_1)^2+\frac{\rho^2gR^4}{32\eta^2}(h+H_0-H_1)}-(H_0-H_1)\right]$$

代入 $\eta=1\cdot10^{-3}\text{Pas}$，$\rho=1\cdot10^3\text{kg/m}^3$，$R=\sqrt{\dfrac{2\cdot10^{-4}}{\pi}}\text{m}$，$h=1\text{m}$，$H_0=20\text{m}$，$H_1=5\text{m}$，可得

$$Q=3.18\text{kg/s}$$

(2) 若水是理想流体，对 B、A 两点用伯努利方程，可得在水龙头出口处的流速为

$$v=\sqrt{2g(h+H_0-H_1)}$$

$$Q=\rho vS=\rho S\sqrt{2g(h+H_0-H_1)}=3.54\text{kg/s}$$

其中用了 $S=2\times10^{-4}\text{m}^2$.

(3) $R_e=\dfrac{\rho\bar{v}R}{\eta}$

$$\bar{v}=\frac{Q}{S\rho}=\frac{3.18}{2\times10^{-4}\times10^3}=15.9\text{m/s}$$

$$R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{\pi}}=7.98\times10^{-3}\text{m}$$

$$R_e=\frac{10^3\times15.9\times7.98\times10^{-3}}{1\times10^{-3}}=1.27\times10^5$$

雷诺数已大大超过在圆管中做层流型流动的下临界雷诺数 1000,应判断为:真实的流动不是层流型的,而是湍流型的.

8.3.22 试用纳维尔-斯托克斯方程导出适用于不可压缩的黏性流体在不计重力的圆管中做定常流动的关于流量的泊肃叶公式.

解 适用于不可压缩的黏性流体的纳维尔-斯托克斯方程为

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\eta\nabla^2\boldsymbol{v}+\nabla p=\rho\boldsymbol{F} \tag{1}$$

取柱坐标 r、φ、z,原点取在圆管的对称轴上,对称轴为 z 轴.

不计重力,在圆管中做层流型流动具有对称性,$v_r=0$,$v_\varphi=0$,$v_z=v$,即

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{k}$$

且 $v=v(r)$,即 $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=0$,$\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$. $\boldsymbol{F}=0$,因定常流动,$\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\alpha t}=0$,

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{k}\cdot\nabla v\boldsymbol{k}=v\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}=0$$

这里用了 $\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$,

式(1)化简为

$$\nabla p=\eta\nabla^2\boldsymbol{v}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}=\eta\nabla^2 v\boldsymbol{k}$$

因
$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial p}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\eta\nabla^2 v=\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]$$

又因 $v=v(r)$,故 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$,$\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$,

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r})=\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

上式等号右边只能是 r 的函数或是常量,与 φ、z 无关,可见 $\dfrac{\partial p}{\partial z}$ 与 z 无关,又 $\dfrac{\partial p}{\partial r}$、$\dfrac{\partial p}{\partial\varphi}$ 均为零,

$\dfrac{\partial p}{\partial z}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$ 为常量,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\frac{\Delta p}{L}=-\frac{p_1-p_2}{L}$$

$$\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{p_1-p_2}{L}$$

$$\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{p_1-p_2}{\eta L}r\mathrm{d}r$$

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{p_1-p_2}{2\eta L}r^2+c_1$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{p_1-p_2}{2\eta L}r+\frac{c_1}{r}$$

$$v=-\frac{p_1-p_2}{4\eta L}r^2+c_1\ln r+c_2$$

因为 $v(r)$有限，在 $r=0$ 处，$v(0)$有限，必须 $c_1=0$. 在管壁处，$v=0$，即 $v(R)=0$，定出

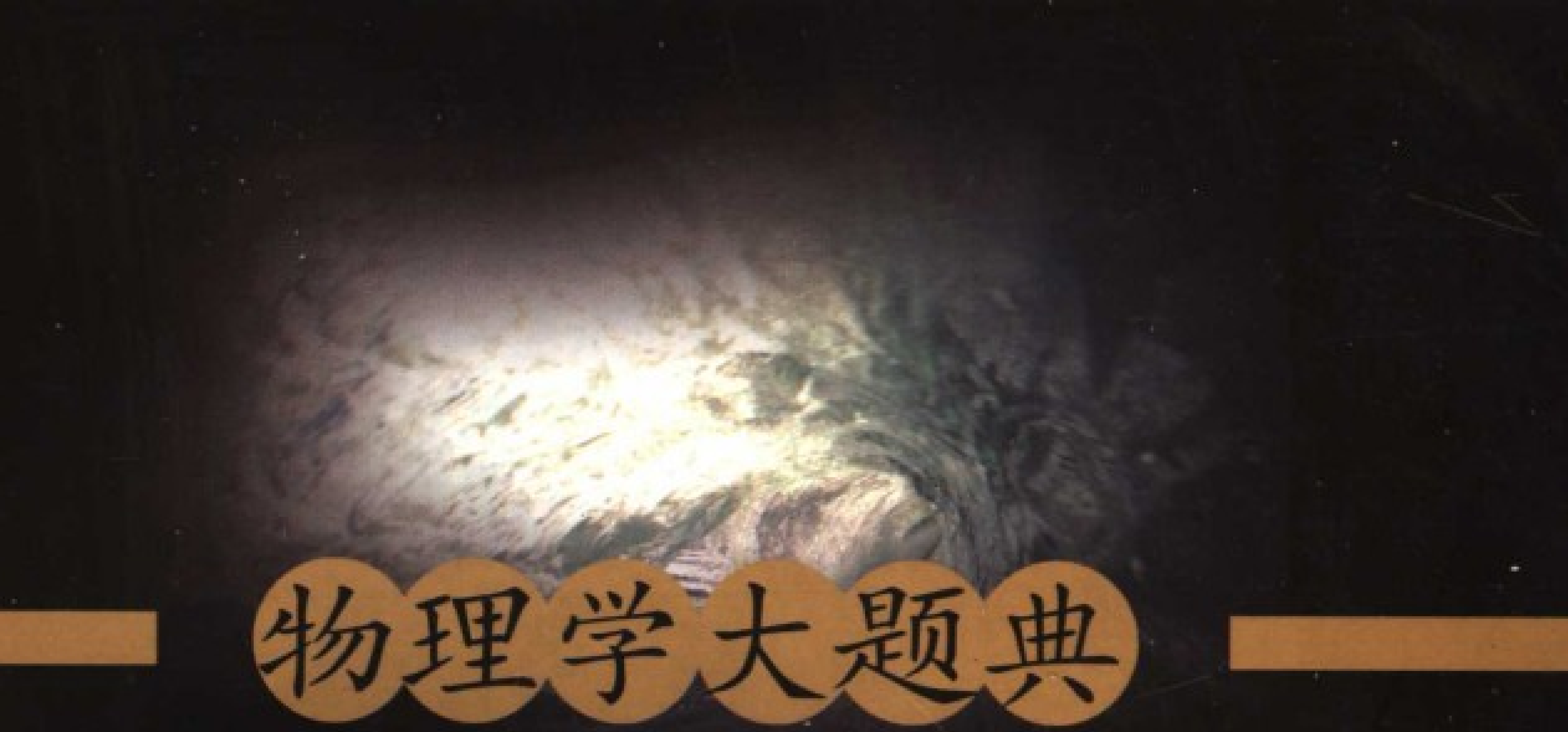
$$c_2=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}R^2$$

因为

$$v=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

单位时间内流过管子的流体质量为

$$Q=\rho\int_0^R v(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{1}{8\eta L}(p_1-p_2)\pi\rho R^4$$



物理学大题典

20年磨一剑　30位资深教授合作的结晶
150位高才生的灵性显现

《物理学大题典》是中国科学技术大学30位资深教授长期鼎力合作的成果。这套大型大学物理题解丛书的前身是在中国物理学界久负盛名的《美国物理试题与解答》丛书。《美国物理试题与解答》是CUSPEA项目的成果，内容主要是美国名牌大学研究生院的入学试题解答。本次修订工作历时近2年，丛书除继续涵盖力、热、光、电、近代物理到四大力学全部基础物理学内容之外，还包括了原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学和量子信息物理等内容，大体涵盖了当前综合性大学全部本科物理课程的内容。本次修订补充了近年美国的考题、中国的考题和俄罗斯等国的考题，也有一些题目源自编委们的科研工作成果。

《物理学大题典》以先进的教育理念为指导，注重物理、注重学科交叉、注重与科研结合，富于“当代感”，是物理系师生的必备工具书。

力学 上册 ①

①《力学》　②《电磁学与电动力学》　③《光学》
④《原子亚原子与相对论物理学》　⑤《热学　热力学　统计物理》
⑥《量子力学》　⑦《固体物理及物理量测量》

O-2243.0101
ISBN 7-03-015494-0
9 787030 154941 >

ISBN 7-03-015494-0
定　价：98.00 元
（上、下册）

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝力学　　（上册）
作者＝请自己补充
页数＝请自己补充
ＳＳ号＝１１４９７６８５
出版日期＝请自己补充
出版社＝请自己补充

封面
前言

目录

张永德/主编

物理学大题典

力学

1

下册

A Grand Dictionary of Physics Problems And Solutions

强元棨 程稼夫/编著



科学出版社
www.sciencep.com
中国科学技术大学出版社

《物理学大题典》编委会

前　言

物理学，由于它在自然科学中所具有的主导作用，在人类文明史中，特别是在人类物质文明史中，占据着极其重要的地位．经典物理学的诞生和发展曾经直接推动了欧洲物质文明的长期飞跃．20 世纪初诞生并蓬勃发展起来的近代物理学，又造就了上个世纪物质文明的辉煌．自 20 世纪末到 21 世纪初的当前时代，物理学正在以空前的活力，广阔深入地开创着向化学、生物学、生命科学、材料科学、信息科学和能源科学渗透和应用的新局面．在本世纪里，物理学再一次直接推动新一轮物质文明飞跃的伟大进程已经开始．

但是，发展到目前的物理学宽广深厚，累积的知识浩瀚无垠．教授和学习物理学都是一个相当艰苦而漫长的过程．在这个漫长过程的许多环节中，做习题是其中必要而又重要的环节．做习题是巩固所学知识的必要手段、是深化拓展所学知识的重要练习，是锻炼科学思维的体操．习题对于教师和学生双方都是重要的．

然而，和习题有关的事都是很不起眼的事．在有些人眼光中，求解和编纂练习题是全部教学活动中相当次要的环节．习题集也确实是所有著作中"最低层"的，大约只有"傻子"们才肯做的事．"聪明人"常会找诸如习题集不应当出之类的理由，光明正大地规避掉．

但是，在教授和学习过程中，只要是需要的，都是合理的，也总得有人去做才行．于是我们编委会的这些人，本着甘为孺子牛的精神，平时在科研和教学中一道题一道题地积累，现在又一道题一道题地编审，花费了大量时间做着这种不起眼的事．大家觉得，这件事终究是教与学双方共同需要的，也就是有益的．正如一个城市基础建设中，不能都去做地面上的摩天大楼和纪念碑等"抢眼球"的事，也还需要做诸如修建马路、下水道等基础设施的事．

这套《物理学大题典》的前身是中国科学技术大学出版社出版的《美国物理试题与解答》丛书（7 卷）．那套丛书于 20 世纪 80 年代后期由张永德发起并组织完成，内容包括普通物理的力、热、光、电、近代物理到四大力学的全部基础物理学．出版时他选择了"中国科学技术大学物理辅导班主编"的署名方式．自那套丛书出版之后，虽历经 10 余年，仍然有不断的需求，于是就有了现在的这套丛书——《物理学大题典》．

现在这套《物理学大题典》丛书的内容，除继续涵盖力、热、光、电、近代物理到四大力学全部基础物理学内容之外，还包括了原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学和量子信息物理等内容．就是说，追踪不断发展的科学轨迹，现在这套丛书仍旧大体涵盖了综合性大学全部本科物理课程的内容．

这次重新编审中，大部分教师仍为原来的，但也增加了一些新的成员．这次出版经大家着力重订和大量扩充，又耗时近两年而成．总计起来，这套丛书前后历时近 20 年，耗费了 30 余位富有科研和教学经验的教授、近 150 位 20 世纪 80 年代和现在的研究生及高年级本科生的巨大辛劳．丛书确实是大家长期共同劳动的结晶．

《物理学大题典》中包括了大量的美国物理试题.一般说来,美国物理试题涉及的数学并不繁难,但却或多或少具有以下特色:内容新颖,富于“当代感”;思路灵活,涉及面宽广;方法和结论简单而实用,试题往往涉及新兴和边沿交叉学科;不少试题本身似乎显得粗糙但却抓住了物理本质,显得“物理味”很足.纵观这些,我们深切感到,这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及思维方式的特色.惟鉴于此,我们不惮繁重,集众多人力而不怯,耗漫长岁月而不辍,还是值得的.

至于这次扩充修订所增添的大量题目,也是本着这种精神,摘自大家各自的科研工作成果,或是来自各人的教学心得,实是点滴聚成.

这里要强调指出,对于学生,确实有一个如何正确使用习题集的问题.有的同学,有习题集也不参考,咬牙硬顶,一个晚上自习时间只做了两道题.这种精神诚应嘉勉,但效率不高,也容易挫伤学习积极性,不利于培养学习兴趣;也有的同学,逮到合适解答提笔就抄,这样做是浮躁的、不踏实的.这两种学习方法都不可取.我们认为,正确使用习题集是一个“三步曲”过程:遇到一道题,先自己想一想,想出来了自己做最好;如果认真想了一些时间还想不出来,就不要老想了,不妨翻开习题集找答案,看懂之后,合上书自己把题目做出来;最后一步,要是参考习题集做出来的,就用一两分钟时间分析解剖一下,找找自己存在的不足,今后注意.如此“三步曲”下来,就既有效率又踏实了.本来,效率和踏实是一对矛盾,在这类“治学小道”之下,它俩就统一起来了.总之,正确使用之下的习题集肯定能够成为学生们有用的“爬山”工具.

丛书这次重订扩充工作是在科学出版社胡升华博士的倡议和支持下进行的.没有他的推动,这套丛书面世是不可能的.同时,在这次重订扩充工作里,我们得到了中国科学技术大学的部分教学资助,以及编委会中郭光灿和周又元两位院士和刘万东教授的支持.对于这些宝贵的支持,谨表示深切感谢.

丛书的力学卷共计 12 章,题目总数由原来 413 道增扩为 1070 道.原《美国物理试题与解答·力学》由强元棨、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田编,参加解题的人有马千乘、邓悠平、杨仲侠、季澍、杜英磊、杨德田、王平、李晓平、王琛、强元棨、陈伟、斯其苗、陈兵、李泽华、肖旭东、任勇、董志华、伍昌鸿、杨永安、何小东、黄剑辉、程稼夫、郭志椿.原力学卷题目来自美国几所著名大学(包括普林斯顿大学、麻省理工学院、哥伦比亚大学、加州大学伯克利分校、威斯康星大学、芝加哥大学、纽约州立大学布法罗分校)的试题和 CUSPEA 试题.本卷对原力学卷作了大幅度的改写.增加的题目来自强元棨《经典力学》(科学出版社,2003)上、下册全部习题(其中不少选自 E. A. Desloge《Classical Mechanics》、周衍柏《理论力学教程》等,部分是自拟的).此外,还选自 D. A. Wells《Theory and Problems of Lagrangian Dynamics》、B. B. 巴蒂金、И. И. 托普蒂金《电动力学习题集》、E. Г. 维克斯坦《电动力学习题汇编》和 R. 高特里奥、W. 萨文《近代物理学理论和习题》等.

编审者谨识

2005 年 5 月

目　　录

下 册

将式(1)、(3)代入式(2),

$$\dot{x}_c\boldsymbol{i}+\dot{y}_c\boldsymbol{j}+R\dot{\theta}\sin\varphi\boldsymbol{j}+R\dot{\theta}\cos\varphi\,\boldsymbol{i}=0$$

$$\dot{x}_c+R\dot{\theta}\cos\varphi=0$$

$$\dot{y}_c+R\dot{\theta}\sin\varphi=0$$

三个约束关系中只有一个是完整约束,后两个是微分约束(非完整约束),五个坐标 x_c、y_c、z_c、θ、φ 中独立的广义坐标有 4 个,它们是 x_c、y_c、θ 和 φ.

虚位移满足的关系为

$$\delta z_c=0$$

$$\delta x_c+R\cos\varphi\delta\theta=0$$

$$\delta y_c+R\sin\varphi\delta\theta=0$$

五个虚位移满足三个约束关系,独立的虚位移有两个,它们是 $\delta\varphi$ 和 δx_c、δy_c、$\delta\theta$ 三个虚位移中的任一个.

9.1.2 如图 9.2 所示,一个均质的、半径为 R 的圆盘沿水平的 x 轴做纯滚动,一根长 $2l$ 的均质细棒与圆盘保持无滑动接触,一端沿 x 轴滑动.运动时,圆盘与棒保持在同一竖直平面内,选取适当的坐标,写出约束关系,并说明描述系统需用多少个独立坐标.

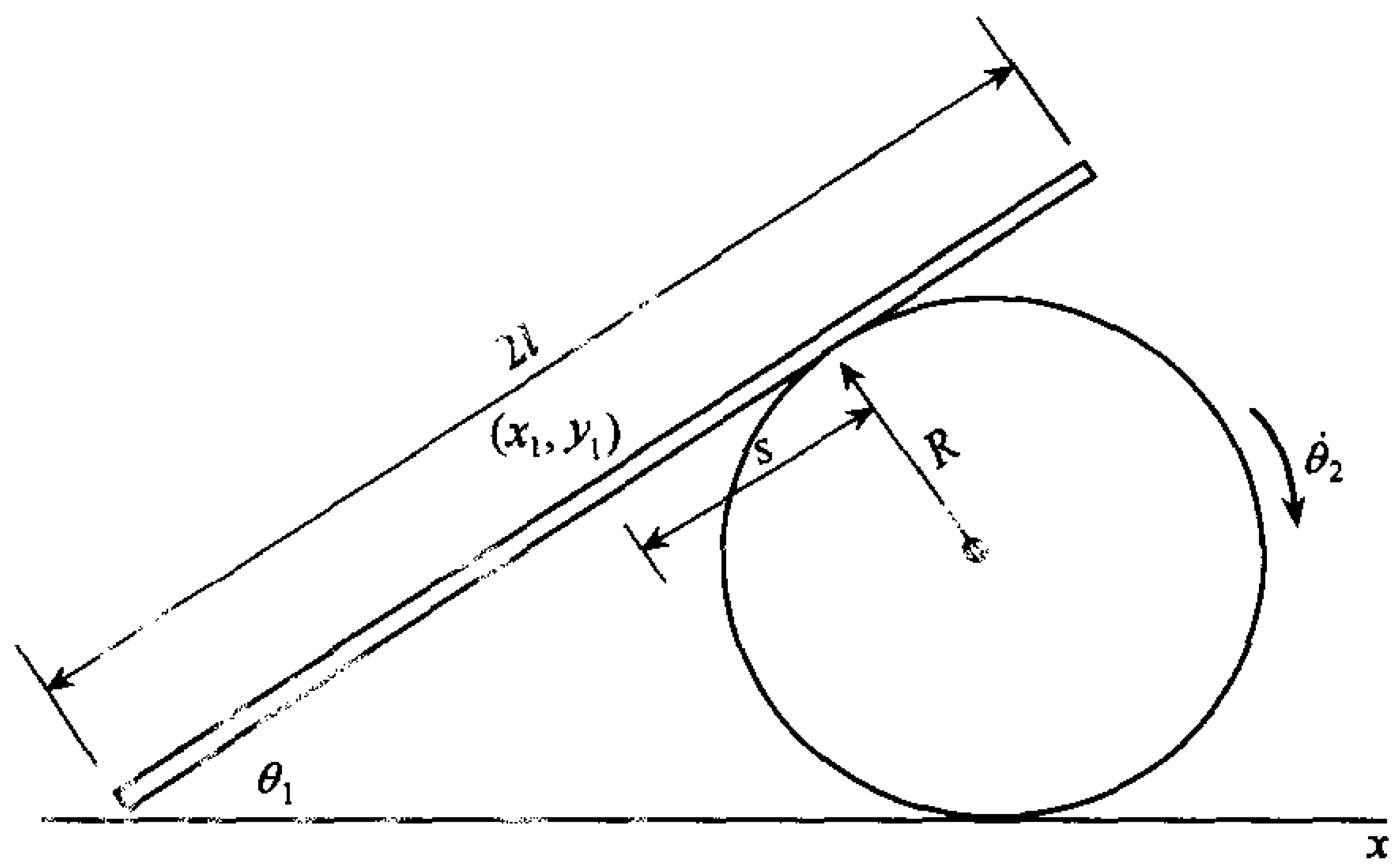


图 9.2

解 方法一:选 x_1、y_1 表示细棒的质心的位置,细棒与 x 轴的夹角 θ_1 表示细棒绕质心的转角,选 x_2 表示圆盘的质心位置,θ_2 表示圆盘绕其质心的转角,用棒与圆盘的切点至棒的质心的距离 s,共六个原用坐标.

显然 y_1 与 θ_1 之间有约束关系

$$y_1=l\sin\theta_1 \tag{1}$$

圆盘做纯滚动,圆盘与 x 轴的接触点速度为零.

$$\dot{x}_2-R\dot{\theta}_2=0$$

选择 x_2 和 θ_2 的零点,可积出

$$x_2-R\theta_2=0 \tag{2}$$

考虑棒与圆盘间做纯滚动,两接触点有相同的速度,

$$\dot{x}_1\boldsymbol{i}+\dot{y}_1\boldsymbol{j}+\dot{\theta}_1\boldsymbol{k}\times s(\cos\theta_1\boldsymbol{i}+\sin\theta_1\boldsymbol{j})$$

$$= \dot{x}_2 \boldsymbol{i} - \dot{\theta}_2 \boldsymbol{k} \times R(-\sin\theta_1 \boldsymbol{i} + \cos\theta_1 \boldsymbol{j})$$

可得

$$\dot{x}_1 - s\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 = \dot{x}_2 + R\dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \tag{3}$$

$$\dot{y}_1 + s\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 = R\dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \tag{4}$$

式(3)、(4)两个约束关系均为微分约束.

六个原用坐标,已写出两个几何约束,两个微分约束,是否有四个独立的广义坐标?回答是否定的,还有一个几何约束,它是

$$x_2 - x_1 + l\cos\theta_1 = l + s$$

因此独立的广义坐标是三个.

方法二:由式(3)、(4)可消去 s,式(3)乘 $\cos\theta_1$ 加式(4)乘 $\sin\theta_1$,则式(3)、(4)的约束关系变为

$$\dot{x}_1 \cos\theta_1 + \dot{y}_1 \sin\theta_1 = \dot{x}_2 \cos\theta_1 + R\dot{\theta}_2 \tag{5}$$

仍是微分约束,但现在原用坐标只有五个(不再取 s).两个几何约束、一个微分约束,独立的广义坐标为三个.

方法三:前两种方法都先引入广义坐标 s,这里一开始就不引入 s,用圆盘质心平动参考系来获得式(5)的约束关系.

在圆盘质心平动参考系中,棒的质心的速度为 $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\boldsymbol{i} + \dot{y}_1 \boldsymbol{j}$,两接触点的速度均沿圆盘的切线方向,也是沿棒的方向,考虑到刚体上任何两点在其连线方向的速度分量相等,由此可写棒上接触点的速度大小为

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\cos\theta_1 + \dot{y}_1 \sin\theta_1$$

圆盘上接触点的速度大小为 $R\dot{\theta}_2$,

所以

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\cos\theta_1 + \dot{y}_1 \sin\theta_1 = R\dot{\theta}_2$$

这就得到了式(5)的约束关系.

9.1.3　一根长为 $2a$、质量为 m 的杆 BC 用一根未伸长时长为 b、劲度系数为 k 的系在杆的 B 端的弹簧悬于固定点 A,如图 9.3 所示.系统的运动限于包含杆与弹簧的铅直平面内,选择适当的广义坐标,求作用于杆上的广义力分量.

解　取图 9.4 中 r、θ、φ 为广义坐标,弹簧的作用力必沿弹簧的方向,取杆的质心为 D,

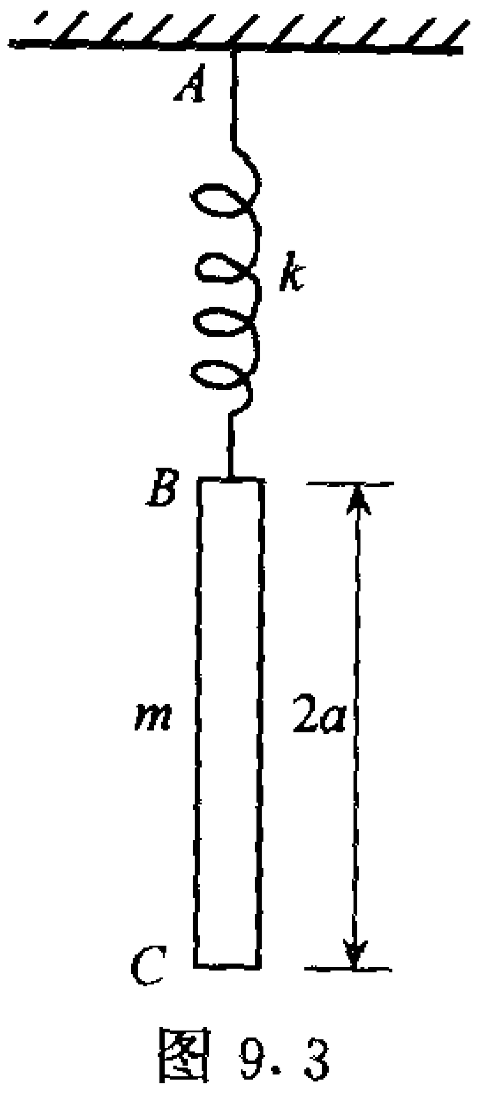


图 9.3

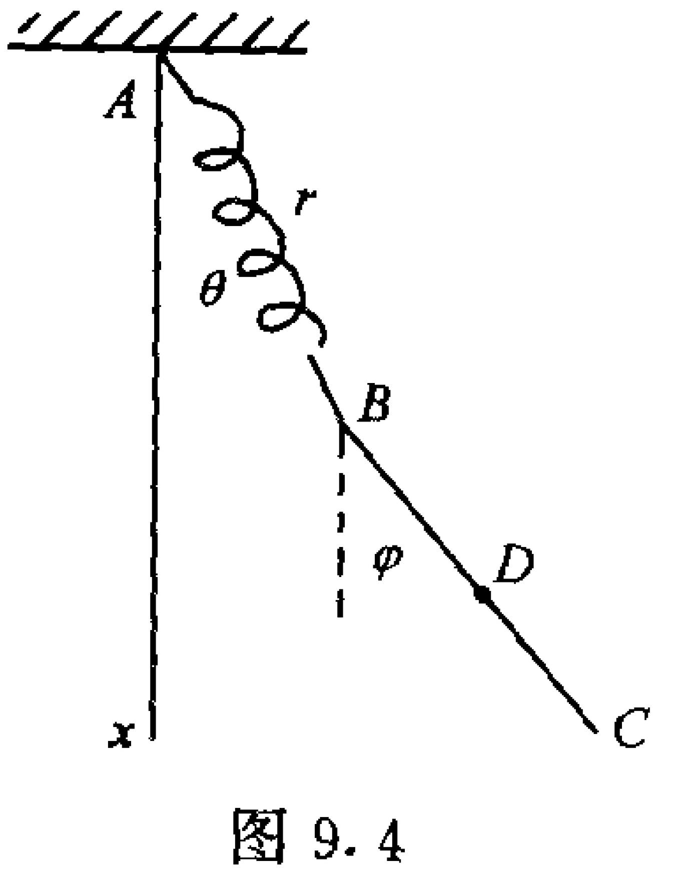


图 9.4

$$x_D = r\cos\theta + a\cos\varphi$$

$$\delta x_D = \cos\theta\delta r - r\sin\theta\delta\theta - a\sin\varphi\delta\varphi$$

作用于杆的弹簧力和重力做的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= -k(r-b)\delta r + mg\delta x_D \\ &= [-k(r-b) + mg\cos\theta]\delta r - mgr\sin\theta\delta\theta - mga\sin\varphi\delta\varphi\end{aligned}$$

所以作用于杆的广义力分量为

$$Q_r = -k(r-b) + mg\cos\theta$$

$$Q_\theta = -mgr\sin\theta$$

$$Q_\varphi = -mga\sin\varphi$$

9.1.4 一个在均匀重力场中运动的质点,如用球坐标来描述质点的运动,取竖直向上方向为极轴,求重力的三个广义力分量.

解

$$\delta W = -mg\delta z$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\delta z = \cos\theta\delta r - r\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta W = -mg\cos\theta\delta r + mgr\sin\theta\delta\theta$$

所以

$$Q_r = -mg\cos\theta$$

$$Q_\theta = mgr\sin\theta$$

$$Q_\varphi = 0$$

9.1.5 一个质量为 m、半径为 a 的均质薄圆筒,在另一个质量为 M、半径为 $2a$ 的均质薄圆筒内部做无滑滚动,后者又在水平面上做无滑滚动.选大圆筒的角位移 θ 以及两圆筒的轴构成的平面与铅直面的夹角 φ 为广义坐标,求作用于系统的所有力的广义力分量 Q_θ 和 Q_φ.

解 作用于系统的主动力只有作用于小圆筒的重力,水平面对大圆筒的支持力和静摩擦力均不做功,作用于大圆筒的重力也不做功,大圆筒对小圆筒的支持力及其反作用力(小圆筒对大圆筒的压力),由于在它们的作用线方向两接触点无相对速度,做功之和为零,两圆筒之间的一对静摩擦力也因在作用线方向两接触点无相对速度,做功之和为零.由于与这些力有关的约束都是稳定的双面几何约束,可能位移与虚位移完全一致,约束力在一切可能位移时不做实功,也对一切虚位移不做虚功.

取 z 轴竖直向上,原点取在水平面上,小圆筒质心的坐标为

$$z = 2a - a\cos\varphi$$

$$\delta W = -mg\delta z = -mga\sin\varphi\delta\varphi$$

作用于系统的所有力的广义力分量.

$$Q_\theta = 0, \qquad Q_\varphi = -mga\sin\varphi$$

9.1.6 如图 9.5 所示,一个质量为 m、半径为 a 的均质圆柱体,在一个质量为 M 的木块中割出一个半径为 b 的半圆柱形空心槽内做纯滚动,木块又由一个劲度系数为 k 的弹簧支承着,可沿竖直导轨做无摩擦运动.取木块的竖直向上的位移 x 和圆柱中心的角

位移 θ 为广义坐标，x 和 θ 的零点选在系统的平衡位置. 求作用于系统的所有力的广义力分量.

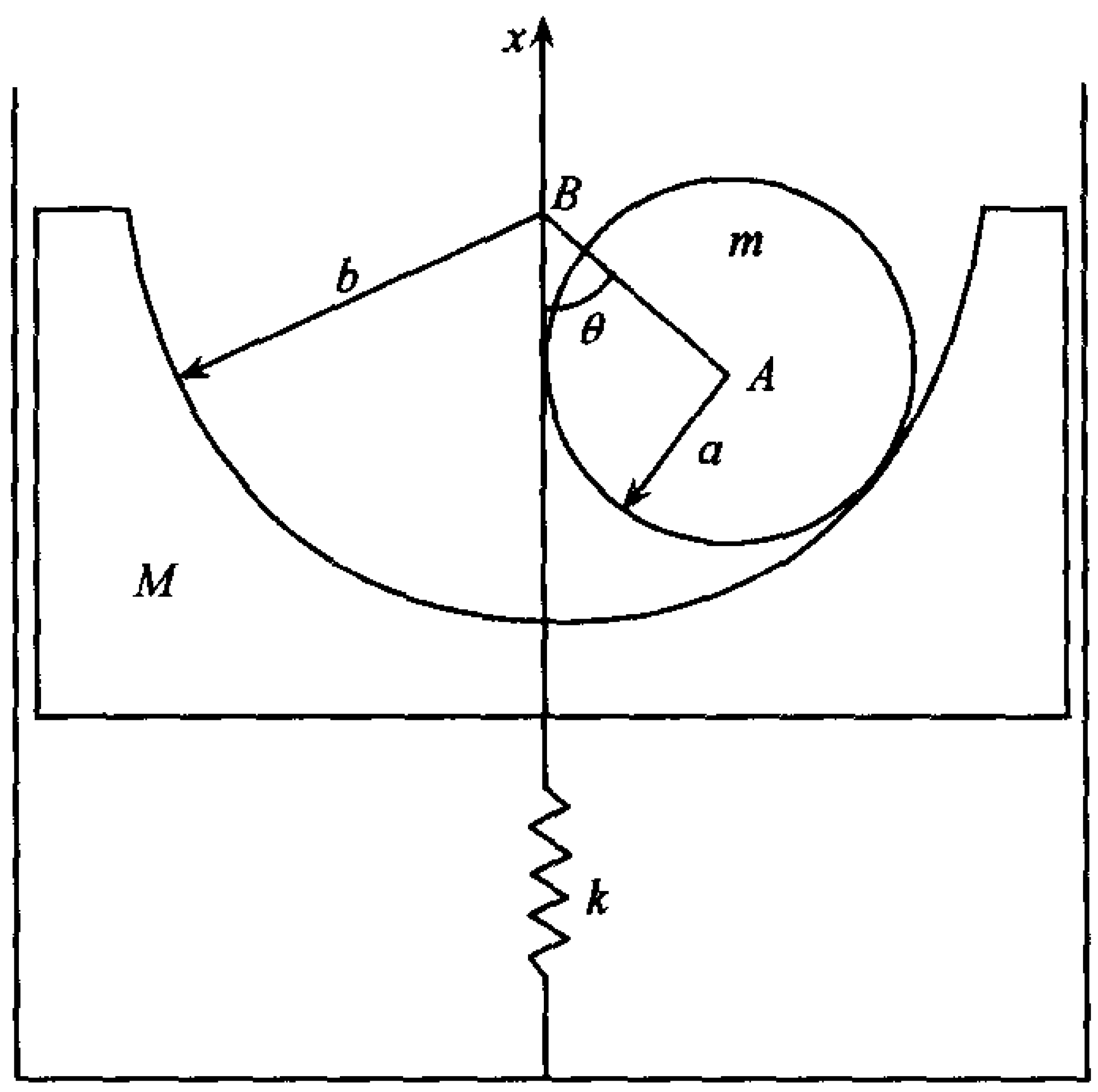


图 9.5

解　方法一：作用于系统的主动力，有作用于圆柱的重力 mg，作用于木块的重力 Mg 和弹簧力.

用木块中割出的半圆柱形空槽的圆心 B 表示木块的位置，A 为圆柱的对称轴.

设弹簧原长为 l_0，平衡时的弹簧长度为 l，

则　$(M+m)g=k(l_0-l)$

$$\delta W=-Mg\delta x_B-mg\delta x_A-k(l+x-l_0)\delta(l+x-l_0)$$

处于平衡时，B 点的 x 为零，

$$x_B=x,\qquad \delta x_B=\delta x$$

$$x_A=x_B-(b-a)\cos\theta=x-(b-a)\cos\theta$$

$$\delta x_A=\delta x+(b-a)\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta W=-Mg\delta x-mg[\delta x+(b-a)\sin\theta\delta\theta]-k(l-l_0+x)\delta x$$

$$=-mg(b-a)\sin\theta\delta\theta-kx\delta x$$

所以　$Q_x=-kx\qquad Q_\theta=-mg(b-a)\sin\theta$

方法二：求 Q_x 时，令 $\delta\theta=0$，

$$\delta W=Q_x\delta x=-(Mg+mg)\delta x-k(l+x-l_0)\delta(l+x-l_0)$$

用平衡时，

$$(M+m)g=k(l_0-l)$$

$$Q_x\delta x=-kx\delta x$$

所以

$$Q_x=-kx$$

求 Q_θ 时，令 $\delta x=0$，

$$\delta W=Q_\theta\delta\theta=-mg\delta x_A$$

$$x_A = -(b-a)\cos\theta$$

$$Q_\theta\delta\theta = -mg(b-a)\sin\theta\delta\theta$$

所以
$$Q_\theta = -mg(b-a)\sin\theta$$

9.1.7 xy 平面内的任何点可改用 c、y 为坐标或 c、x 为坐标,其中 c 满足 $xy=c$. 如重力沿 y 轴负向,求质量为 m 的质点所受重力的广义力.

解 取 c、y 为广义坐标时,

$$Q_c = 0, Q_y = -mg$$

取 c、x 为广义坐标时,

$$\delta W = -mg\delta y$$

因为

$$y = \frac{c}{x},\quad \delta y = \frac{1}{x}\delta c - \frac{1}{x^2}c\delta x$$

$$\delta W = -mg\left(\frac{1}{x}\delta c - \frac{1}{x^2}c\delta x\right)$$

∴
$$Q_c = -\frac{mg}{x}$$

$$Q_x = \frac{mgc}{x^2}$$

9.1.8 一个质量为 m 的质点系在不可伸长的绳子上,绳子穿过板 B 的小孔栓于固定点,板以 $s=A\sin\omega t$ 沿竖直轴 y 做上下运动,其中 A、ω 为常量,质点在图 9.6 所示的 xy 平面内运动,求质点受到的广义力(不计小孔处的摩擦力).

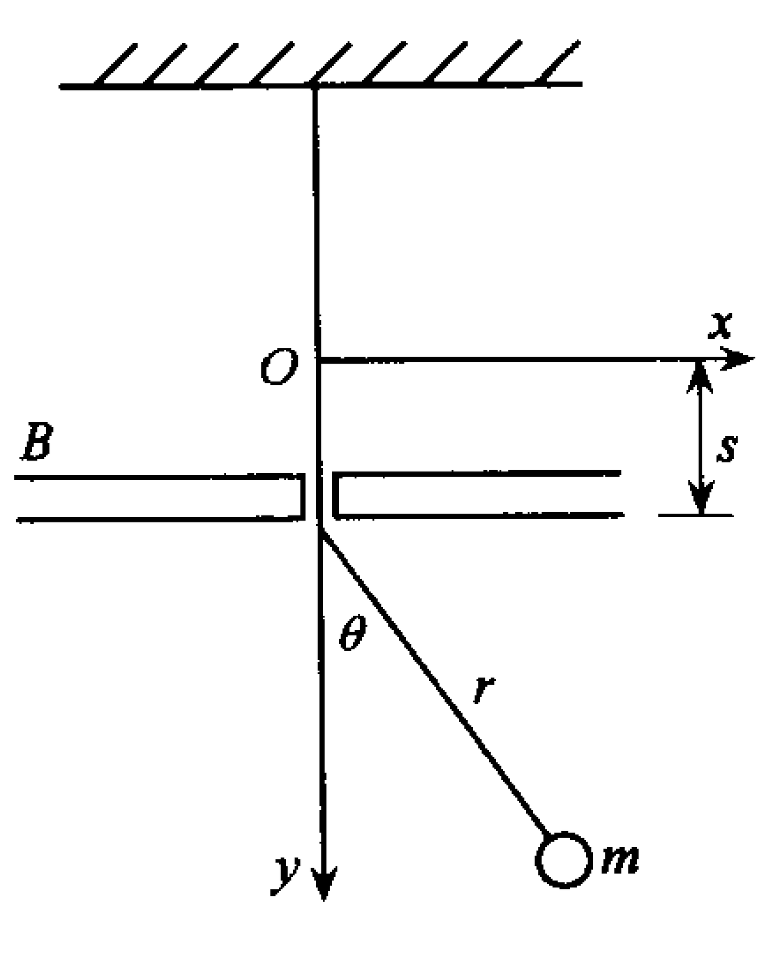


图 9.6

解 可以证明绳子张力 T 仍然是约束力. 设图中从固定的 O 点到质点这一段绳子长度为 l,$l=s+r=$常量,

$$x = r\sin\theta = (l-s)\sin\theta = (l - A\sin\omega t)\sin\theta$$

$$y = s + r\cos\theta = A\sin\omega t + (l - A\sin\omega t)\cos\theta$$

$$\delta x = (l - A\sin\omega t)\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta y = -(l - A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta$$

$$\begin{aligned}\delta W &= mg\delta y - T\sin\theta\delta x - T\cos\theta\delta y \\ &= -mg(l - A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta - T\sin\theta(l - A\sin\omega t)\cos\theta\delta\theta \\ &\quad - T\cos\theta[-(l - A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta] \\ &= -mg(l - A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta\end{aligned}$$

所以
$$Q_\theta = -mg(l - A\sin\omega t)\sin\theta$$

注意:该系统只有一个自由度,r 随 t 的变化是给定的,可把 $r=l-A\sin\omega t$ 视为约束. 故 $\delta r=0$,绳子张力的虚功 $-T\delta r=0$.

9.1.9 图 9.7 中木块 A、B 淹没在黏性液体中,黏性力与速度成正比,比例系数分别为 α_1、α_2,用图中 y、y_3 为广义坐标,求广义黏性力.

解 $\delta W = -\alpha_1\dot{y}_1\delta y_1 - \alpha_2\dot{y}_2\delta y_2$

$$y_1 = y + y_3$$

$$\delta y_1 = \delta y + \delta y_3$$

考虑到绳子不可伸长，

$$y_3 + y_2 - y = 常量$$

$$\delta y_3 + \delta y_2 - \delta y = 0$$

$$\delta y_2 = \delta y - \delta y_3$$

$$\delta W = -\alpha_1 \dot{y}_1(\delta y + \delta y_3) - \alpha_2 \dot{y}_2(\delta y - \delta y_3)$$

又　　$\dot{y}_2 = y\dot{y} - y\dot{y}_3$，　　$\dot{y}_1 = \dot{y} + \dot{y}_3$

$$\delta W = -\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3)(\delta y + \delta y_3) - \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_3)(\delta y - \delta y_3)$$

$$= [-\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) - \alpha(\dot{y} - \dot{y}_3)]\delta y$$

$$+ [-\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) + \alpha_2(y - \dot{y}_3)]\delta y_3$$

所以　　$Q_y = -\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) - \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_3)$

$$Q_{y_3} = -\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) + \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_3)$$

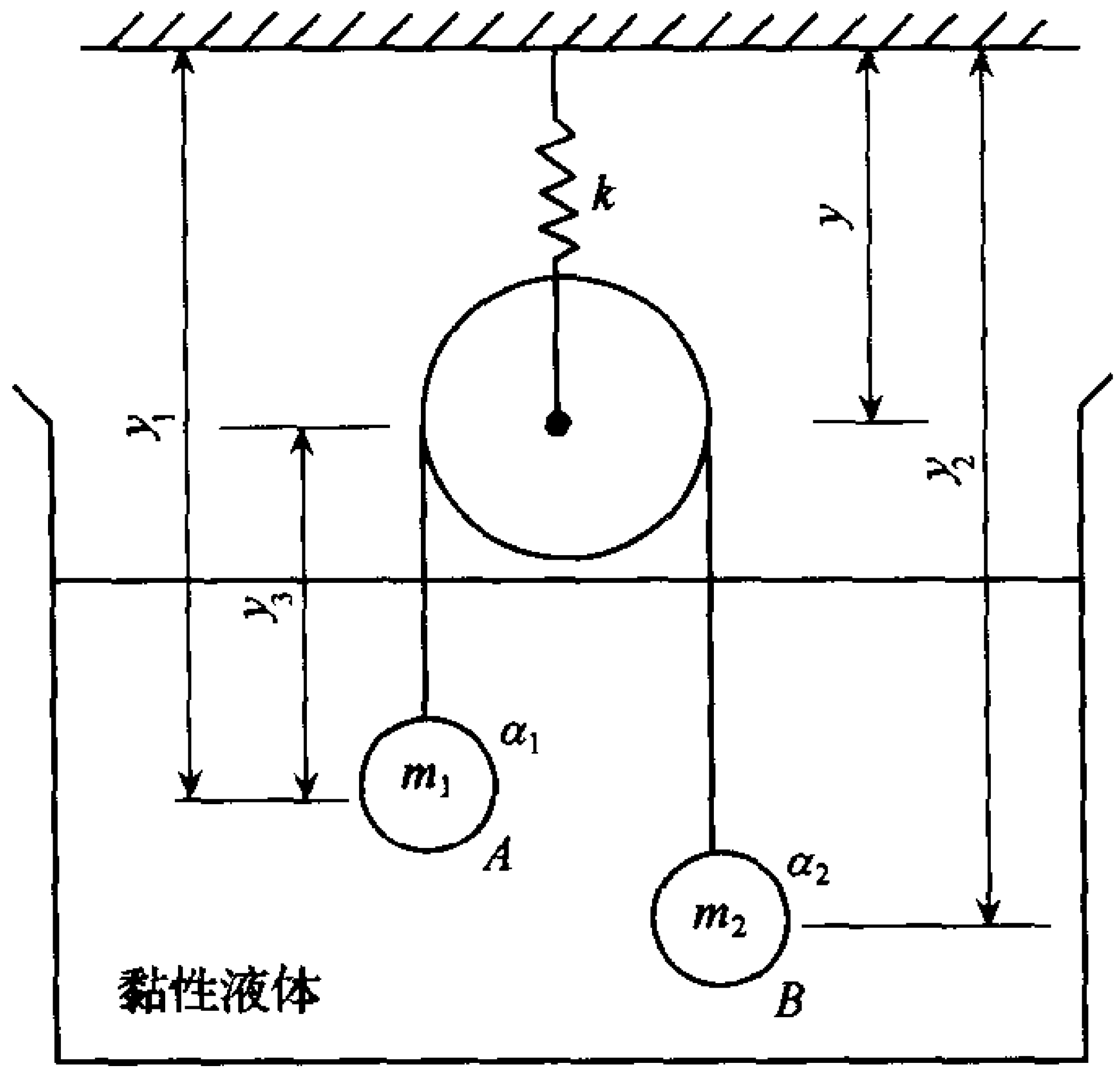


图 9.7

9.1.10　图 9.8 中棒形磁铁和两个单个磁极均受到铁质薄板的黏性阻力，阻力与相对速度成正比，比例系数分别为 α_1、α_2、α_3. 设磁棒、磁极和薄板均只做竖直方向的运动，运动中，磁棒、磁极均与薄板保持接触. 求广义黏性力 Q_{y_1}和 Q_{y_2}.

解　薄板的速度为 $\dot{y}_1$ 时，磁棒的速度为 $-\dot{y}_1$，磁极 A 的速度为 $\dot{y}_2 - \dot{y}_1$，磁极 B 的速度为 $-\dot{y}_2 - \dot{y}_1$.

磁棒受到的黏性力为 $-\alpha_1(-\dot{y}_1 - \dot{y}_1) = 2\alpha_1\dot{y}_1$，薄板受到磁棒给予的力是上述力的反作用力，为 $-2\alpha_1\dot{y}_1$. 磁极 A 受到薄板的黏性力为 $-\alpha_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - \dot{y}_1) = -\alpha_2(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_1)$，薄板受到磁极 A 的反作用力为 $\alpha_2(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_1)$；磁极 B 受到薄板的黏性力为 $-\alpha_3(-\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - \dot{y}_1) = \alpha_3(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$，薄板受到磁极 B 的反作用力为 $-\alpha_3(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$.

薄板的虚位移为 δy_1，磁棒的虚位移为 $-\delta y_1$，磁极 A 的虚位移为 $\delta y_2 - \delta y_1$，磁极 B 的虚位移为 $-\delta y_1 - \delta y_2$.

$$\delta W = 2\alpha_1\dot{y}_1(-\delta y_1) - \alpha_2(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_1)(\delta y_2 - \delta y_1) + \alpha_3(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(-\delta y_1 - \delta y_2)$$

$$+\left[-2\alpha_1\dot{y}_1+\alpha_2(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)-\alpha_3(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)\right]\delta y_1$$

$$=\left[-4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_1+2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_2\right]\delta y_1$$

$$+\left[2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_1-(\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_2\right]\delta y_2$$

所以

$$Q_{y_1}=-4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_1+2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_1$$

$$Q_{y_2}=2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_1-(\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_2$$

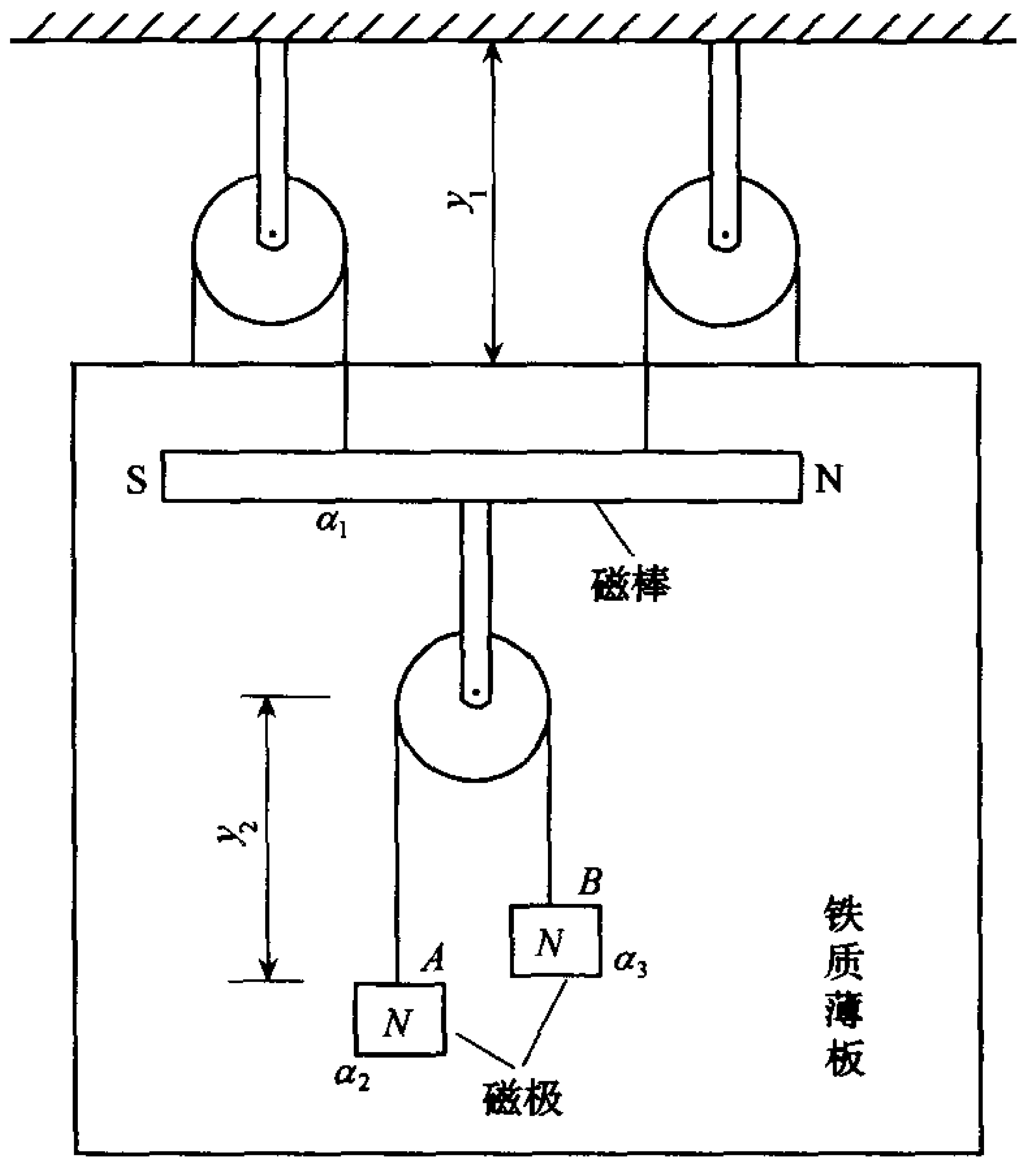


图 9.8

9.1.11　图 9.9 中 m_1、m_2 限于在光滑的水平线上运动，m_1、m_2 均固连着一个减震器，活塞 P_1、P_2 和 m_3 固连于水平棒上，活塞的作用力大小与相对速度的 n 次方成正比，方向与相对速度方向相反. 求广义力 Q_{x_1}、Q_{q_1}、Q_{q_2}(弹簧力用势能处理).

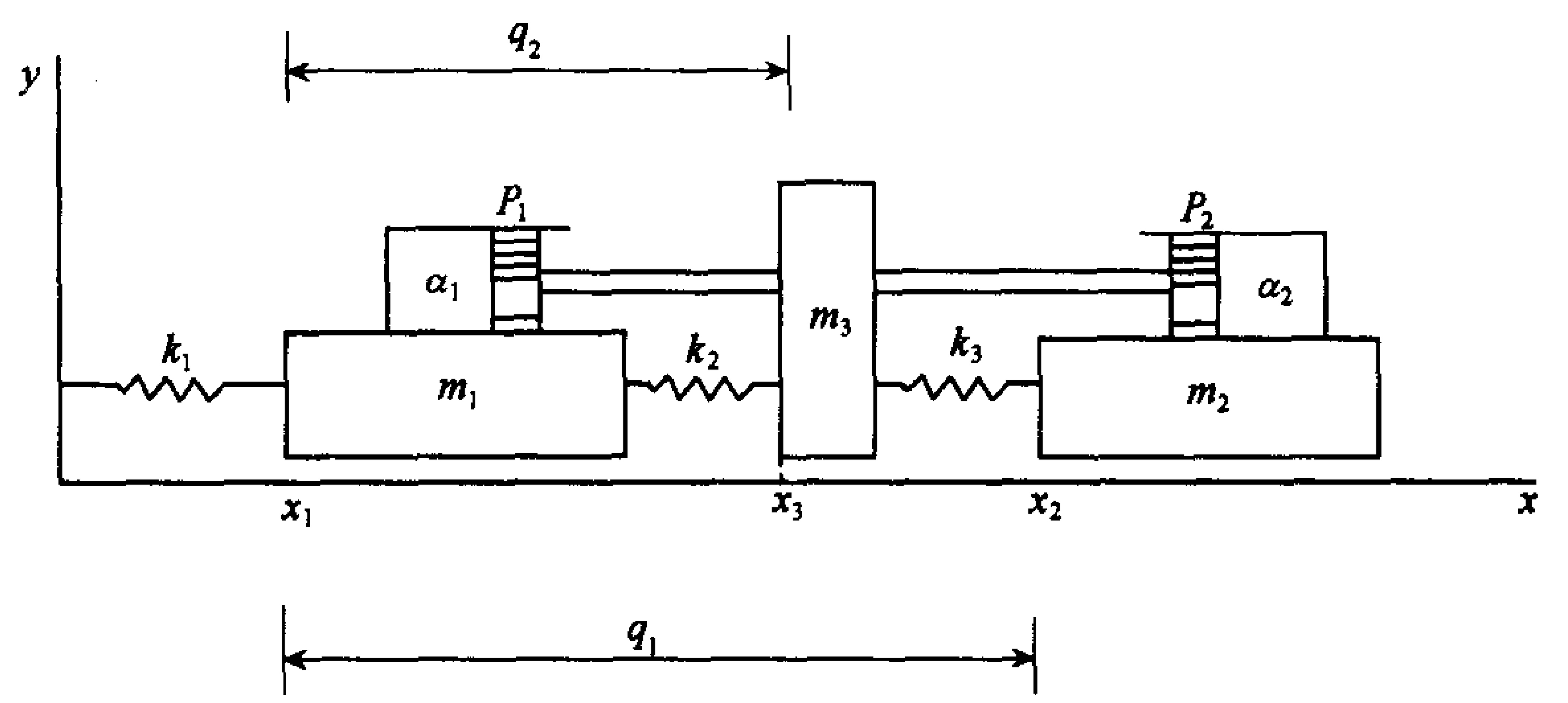


图 9.9

解　$\delta W=\alpha_1|\dot{x}_3-\dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3-\dot{x}_1)\delta x_1-\alpha_2|\dot{x}_2-\dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2-\dot{x}_3)\delta x_2$

$$-\alpha_1|\dot{x}_3-\dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3-\dot{x}_1)\delta x_3+\alpha_2|\dot{x}_2-\dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2-\dot{x}_3)\delta x_3$$

$$Q_{x_2}=-\alpha_2\dot{x}_2-\alpha_4(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-\alpha_5(\dot{x}_2-\dot{x}_3)$$

$$Q_{x_3}=-\alpha_3\dot{x}_3-\alpha_5(\dot{x}_3-\dot{x}_2)$$

用 x_1、q_1、q_2 为广义坐标时,

$$\dot{q}_1=\dot{x}_2-\dot{x}_1,\quad \dot{x}_2=\dot{q}_1+\dot{x}_1,\quad \delta x_2=\delta q_1+\delta x_1$$

$$\dot{q}_2=\dot{x}_3-\dot{x}_2=\dot{x}_3-(\dot{q}_1+\dot{x}_1)=\dot{x}_3-\dot{q}_1-\dot{x}_1$$

$$\dot{x}_3=\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2,\delta x_3=\delta x_1+\delta q_1+\delta q_2$$

$$\begin{aligned}\delta W=&[-\alpha_1\dot{x}_1-\alpha_4(-\dot{q}_1)]\delta x_1+[-\alpha_2(\dot{x}_1+\dot{q}_1)-\alpha_4\dot{q}_1-\alpha_5(-\dot{q}_2)](\delta q_1+\delta x_1)\\&+[-\alpha_5\dot{q}_2-\alpha_3(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)](\delta x_1+\delta q_1+\delta q_2)\\=&[-\alpha_1\dot{x}_1-\alpha_2(\dot{x}_1+\dot{q}_1)-\alpha_3(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)]\delta x_1+[-\alpha_2(\dot{x}_1+\dot{q}_1)\\&-\alpha_3(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)-\alpha_4\dot{q}_1]\delta q_1+[-\alpha_5\dot{q}_2-\alpha_3(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)]\delta q_2\end{aligned}$$

所以 $Q_{x_1}=-\alpha_1\dot{x}_1-\alpha_2(\dot{x}_1+\dot{q}_1)-\alpha_3(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)$

$$Q_{q_1}=-\alpha_2(\dot{x}_1+\dot{q}_1)-\alpha_3(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)-\alpha_4\dot{q}_1$$

$$Q_{q_2}=-\alpha_5\dot{q}_2-\alpha_3(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)$$

9.1.13 作用在 xy 平面上的哑铃的黏性阻力与其速度成正比,比例系数分别为 α_1、α_2,以图 9.11 所示的 x_1、y_1、φ 为广义坐标,求广义力.

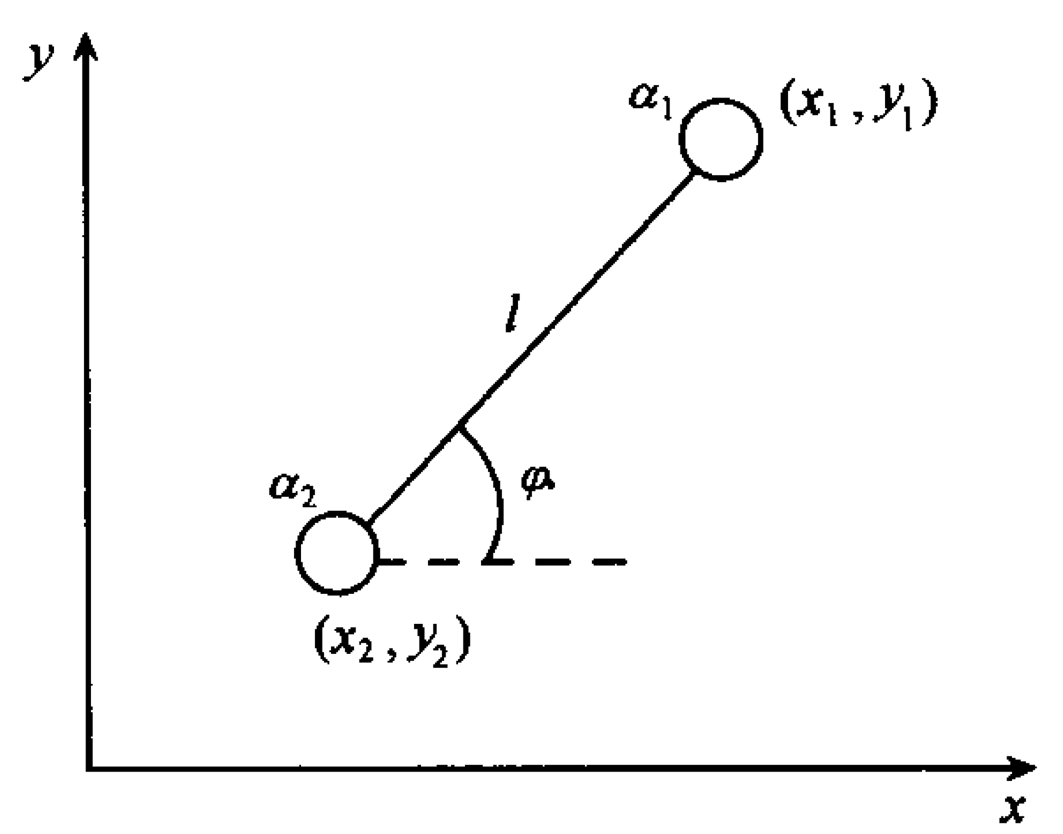


图 9.11

解

$$\delta W=-\alpha_1\dot{x}_1\delta x_1-\alpha_1\dot{y}_1\delta y_1-\alpha_2\dot{x}_2\delta x_2-\alpha_2\dot{y}_2\delta y_2$$

$$x_2=x_1-l\cos\varphi$$

$$\dot{x}_2=\dot{x}_1+l\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\delta x_2=\delta x_1+l\sin\varphi\,\delta\varphi$$

$$y_2=y_1-l\sin\varphi$$

$$\dot{y}_2=\dot{y}_1-l\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\delta y_2=\delta y_1-l\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$\begin{aligned}\delta W=&-\alpha_1\dot{x}_1\delta x_1-\alpha_1\dot{y}_1\delta y_1-\alpha_2(\dot{x}_1+l\sin\varphi\,\dot{\varphi})(\delta x_1\\&+l\sin\varphi\,\delta\varphi)-\alpha_2(\dot{y}_1-l\cos\varphi\,\dot{\varphi})(\delta y_1-l\cos\varphi\,\delta\varphi)\\=&[-\alpha_1\dot{x}_1-\alpha_2(\dot{x}_1+l\dot{\varphi}\sin\varphi)]\delta x_1+[-\alpha_1\dot{y}_1-\alpha_2(\dot{y}_1\\&-l\dot{\varphi}\cos\varphi)]\delta y_1+[-\alpha_2(\dot{x}_1+l\dot{\varphi}\sin\varphi)l\sin\varphi\\&-\alpha_2(\dot{y}-l\dot{\varphi}\cos\varphi)(-l\cos\varphi)]\delta\varphi\end{aligned}$$

所以

$$Q_{x_1}=-(\alpha_1+\alpha_2)\dot{x}_1-\alpha_2 l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$Q_{y_1}=-(\alpha_1+\alpha_2)\dot{y}_1+\alpha_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$Q_{\varphi}=-\alpha_2 l^2\dot{\varphi}-\alpha_2 l(\dot{x}_1\sin\varphi-\dot{y}_1\cos\varphi)$$

9.1.14 平板在 xy 平面上运动,坐标系 $O'x'y'$ 固连于平板,用 O' 点在静坐标系 Oxy

中的坐标 x、y 及 x'、x 轴的夹角 φ 表示平板的位形，面元 $\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$ 受到的黏性阻力为

$$\mathrm{d}f_x = -\alpha\dot{x}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \quad \mathrm{d}f_y = -\alpha\dot{y}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

其中 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 分别是 $\dot{x}(x',y')$、$\dot{x}(x',y')$ 的缩写，不要与 O' 点的速度分量 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 发生混淆. 求平板受到的广义力.

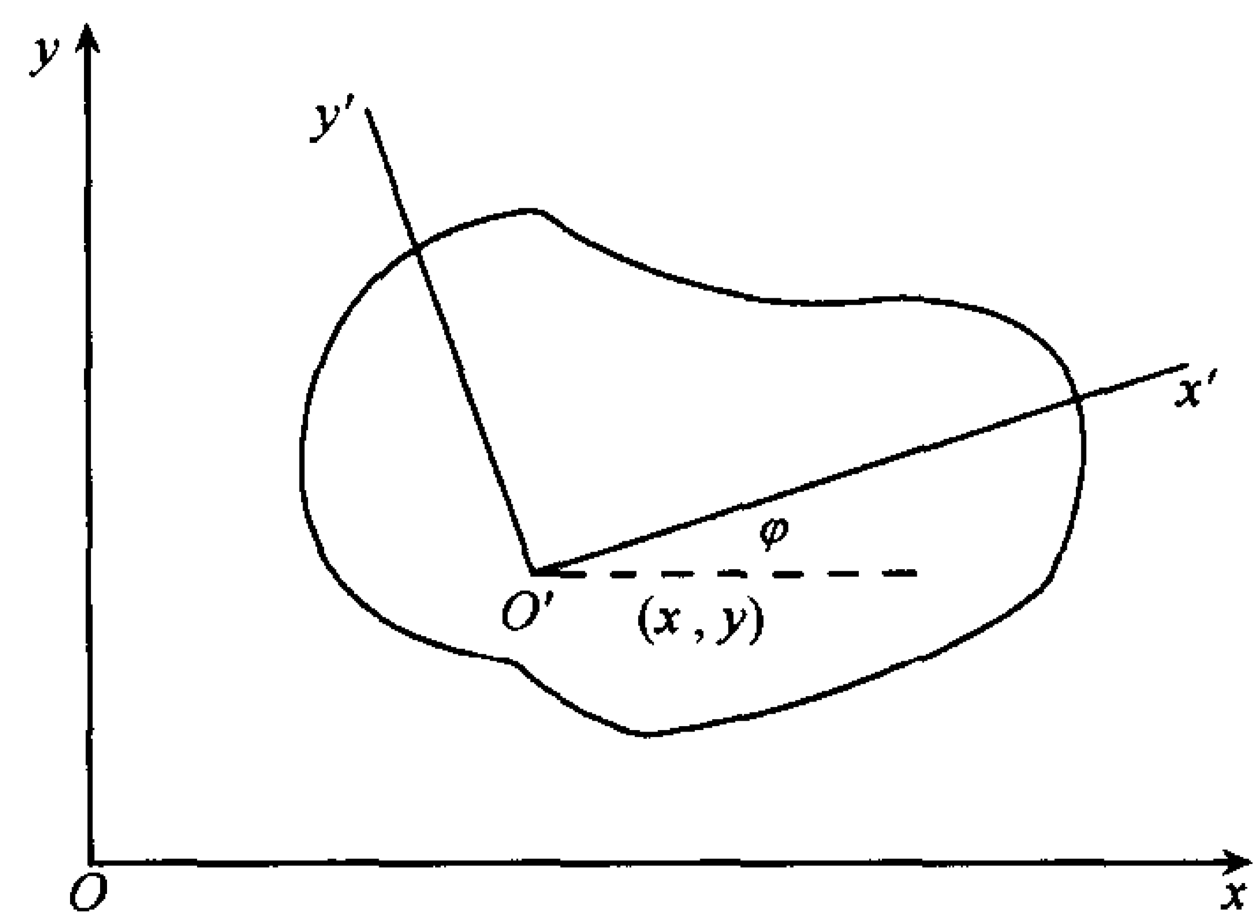


图 9.12

解 $x(x',y') = x + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$

$y(x',y') = y + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$

$$\dot{x}(x',y') = \dot{x} - x'\dot{\varphi}\sin\varphi - y'\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (1)$$

$$\dot{y}(x',y') = \dot{y} + x'\dot{\varphi}\cos\varphi - y'\dot{\varphi}\sin\varphi \quad (2)$$

$$\delta x(x',y') = \delta x - (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\delta\varphi \quad (3)$$

$$\delta y(x',y') = \delta y + (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\delta\varphi \quad (4)$$

面元 $\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$ 所受的黏性阻力做的虚功为

$$-\alpha\dot{x}(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\delta x(x',y') - \alpha\dot{y}(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\delta y(x',y')$$

平板所受的黏性阻力做的虚功为

$$\delta W = -\alpha\int[\dot{x}(x',y')\delta x(x',y') + \dot{y}(x',y')\delta y(x',y')]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

将(1)至(4)式代入上式，

$$\begin{aligned}\delta W =& -\alpha\int\Big\{(\dot{x} - x'\dot{\varphi}\sin\varphi - y'\dot{\varphi}\cos\varphi)[\delta x - (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\delta\varphi] \\ &+ (\dot{y} + x'\dot{\varphi}\cos\varphi - y'\dot{\varphi}\sin\varphi)[\delta y + (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\delta\varphi]\Big\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ =& -\alpha\int\Big\{(\dot{x} - x'\dot{\varphi}\sin\varphi - y'\dot{\varphi}\cos\varphi)\delta x + (\dot{y} + x'\dot{\varphi}\cos\varphi - y'\dot{\varphi}\sin\varphi)\delta y \\ &+ [(x'^2 + y'^2)\dot{\varphi} + (\dot{y}x' - \dot{x}y')\cos\varphi - (\dot{x}x' + \dot{y}y')\sin\varphi]\delta\varphi\Big\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ =& \Big[-\alpha\int(\dot{x} - x'\dot{\varphi}\sin\varphi - y'\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\Big]\delta x \\ &+ \Big[-\alpha\int(\dot{y} + x'\dot{\varphi}\cos\varphi - y'\dot{\varphi}\sin\varphi)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\Big]\delta y \\ &+ \Big\{-\alpha\int[(x'^2 + y'^2)\dot{\varphi} + (\dot{y}x' - \dot{x}y')\cos\varphi - (\dot{x}x' + \dot{y}y')\sin\varphi]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\Big\}\delta\varphi\end{aligned}$$

所以 $Q_x = -\alpha\int(\dot{x} - x'\dot{\varphi}\sin\varphi - y'\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$

$$Q_y = -\alpha\int(\dot{y} + x'\dot{\varphi}\cos\varphi - y'\dot{\varphi}\sin\varphi)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

$$Q_\varphi = -\alpha\int[(x'^2 + y'^2)\dot{\varphi} + (\dot{y}x' - \dot{x}y')\cos\varphi - (\dot{x}x' + \dot{y}y')\sin\varphi]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

注意：在得到式(1)、(2)时，x'、y' 是参量，求导时它们是常量. 在 Q_x、Q_y、Q_φ 的积分中，$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{\varphi}$ 以及 φ 均是参量，积分时是常量.

9.1.15　若上题所述的平板是边长为 $2a$ 和 $2b$ 的矩形板，取 O' 在其中心，x'、y' 轴平

行于矩形的边，x'轴平行于边长为 $2a$ 的边，y'轴平行于边长为 $2b$ 的边，求黏性阻力的广义力.

解　用上题导出的 Q_x、Q_y、Q_φ 三个积分式子，

$$Q_x=-\alpha\int_{-b}^{b}\mathrm{d}y'\int_{-a}^{a}(\dot{x}-x'\dot{\varphi}\sin\varphi-y'\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathrm{d}x'$$

$$=-\alpha\int_{-b}^{b}\left(2a\dot{x}-\frac{1}{2}x'^2\Big|_{-a}^{a}\dot{\varphi}\sin\varphi-2ay'\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\mathrm{d}y'$$

$$=-\alpha\left(4ab\dot{x}-ay'^2\Big|_{-b}^{b}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)=-4ab\alpha\dot{x}$$

同样可得

$$Q_y=-4ab\alpha\dot{y}$$

$$Q_\varphi=-\alpha\int_{-b}^{b}\mathrm{d}y'\int_{-a}^{a}[(x'^2+y'^2)\dot{\varphi}+(\dot{y}x'-\dot{x}y')\cos\varphi-(\dot{x}x'+\dot{y}y')\sin\varphi]\mathrm{d}x'$$

$$=-\alpha\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{1}{3}x'^3\Big|_{-a}^{a}+2ay'^2\right)\dot{\varphi}+\left(\frac{1}{2}\dot{y}x'^2\Big|_{-a}^{a}-2a\dot{x}y'\right)\cos\varphi-\left(\frac{1}{2}\dot{x}x'^2\Big|_{-a}^{a}+2a\dot{y}y'\right)\sin\varphi\right]\mathrm{d}y'$$

$$=-\alpha\left[\left(\frac{2}{3}a^3\cdot 2b+\frac{2}{3}a\cdot 2b^3\right)\dot{\varphi}\right]$$

$$=-\frac{4}{3}\alpha ab(a^2+b^2)\dot{\varphi}$$

9.1.16　一个半径为 r 的薄圆盘在一块涂油的平板上运动，设圆盘的面元受到油的黏性阻力，每单位面积、每单位速度受到的黏性力为 α，证明广义黏性力为

$$Q_x=-\alpha A\dot{x},\quad Q_y=-\alpha A\dot{y},\quad Q_\varphi=-\frac{1}{2}\alpha Ar^2\dot{\varphi}$$

其中 $A=\pi r^2$，x、y 是盘心的位置坐标，φ 表示圆盘的角位置.

证明　用 9.1.14 导出的公式，

$$Q_x=-\alpha\int(\dot{x}-x'\dot{\varphi}\sin\varphi-y'\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

$$Q_y=-\alpha\int(\dot{y}+x'\dot{\varphi}\cos\varphi-y'\dot{\varphi}\sin\varphi)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

$$Q_\varphi=-\alpha\int[(x'^2+y'^2)\dot{\varphi}+(\dot{y}x'-\dot{x}y')\cos\varphi-(\dot{x}x'+\dot{y}y')\sin\varphi]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

改用极坐标 r'、ϕ，

$$x'=r'\cos\phi,\qquad y'=r'\sin\phi$$

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=|J|\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial r'} & \frac{\partial x'}{\partial \phi'}\\ \frac{\partial y'}{\partial r'} & \frac{\partial y'}{\partial \phi'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\phi' & -r'\sin\phi'\\ \sin\varphi & r'\cos\varphi\end{vmatrix}=r'$$

$$Q_x=-\alpha\int(\dot{x}-r'\cos\phi'\cdot\dot{\phi}\sin\varphi-r'\sin\phi'\dot{\varphi}\cos\varphi)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'$$

$$=-\alpha\int_0^r\dot{x}\cdot 2\pi r'\mathrm{d}r'=-\alpha\pi r^2\dot{x}=-\alpha A\dot{x}$$

同样可得　　$$Q_y=-\alpha A\dot{y}$$

$$Q_\varphi=-\alpha\int[r'^2\dot{\varphi}+(\dot{y}r'\cos\phi'-\dot{x}r'\sin\phi')\cos\varphi$$

$$-(\dot{x}r'\cos\phi'+\dot{y}r'\sin\phi')\sin\varphi]r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'$$

$$=-\alpha\int_0^r 2\pi r'^3\dot{\varphi}\mathrm{d}r'=-\frac{1}{2}\alpha\pi r^4\dot{\varphi}=-\frac{1}{2}\alpha Ar^2\dot{\varphi}$$

9.1.17　若 9.1.10 题中磁铁与铁质薄板间的阻力与相对速度的平方成正比，求 Q_{y_1} 和 Q_{y_2}.

解　磁棒受到的阻力为

$$-\alpha_1|-\dot{y}_1-\dot{y}_1|(-\dot{y}_1-\dot{y}_1)=4\alpha_1|\dot{y}_1|\dot{y}_1$$

磁极 A 受到的阻力为

$$-\alpha_2|\dot{y}_2-\dot{y}_1-\dot{y}_1|(\dot{y}_2-\dot{y}_1-\dot{y}_1)=-\alpha_2|\dot{y}_2-2\dot{y}_1|(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)$$

磁极 B 受到的阻力为

$$-\alpha_3|-(\dot{y}_1+\dot{y}_2)-\dot{y}_1|[-(\dot{y}_1+\dot{y}_2)-\dot{y}_1]=\alpha_3|2\dot{y}_1+\dot{y}_2|(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)$$

薄板的虚位移为 δy_1，磁棒的虚位移为 $-\delta y_1$，磁极 A 的虚位移为 $\delta y_2-\delta y_1$，磁极 B 的虚位移为 $-(\delta y_1+\delta y_2)$，

$$\begin{aligned}\delta W=&4\alpha_1|\dot{y}_1|\dot{y}_1(-\delta y_1)-\alpha_2|\dot{y}_2-2\dot{y}_1|(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)(\delta y_2-\delta y_1)\\&+\alpha_3|2\dot{y}_1+\dot{y}_2|(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)[-(\delta y_1+\delta y_2)]+[-4\alpha_1|\dot{y}_1|\dot{y}_1\\&+\alpha_2|\dot{y}_2-2\dot{y}_1|(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)-\alpha_3|2\dot{y}_1+\dot{y}_2|(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)]\delta y_1\\=&[-8\alpha_1|\dot{y}_1|\dot{y}_1+2\alpha_2|\dot{y}_2-2\dot{y}_1|(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)-2\alpha_3|2\dot{y}_1+\dot{y}_2|(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)]\delta y_1\\&-[\alpha_2|\dot{y}_2-2\dot{y}_1|(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)+\alpha_3|2\dot{y}_1+\dot{y}_2|(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)]\delta y_2\end{aligned}$$

$$Q_{y_1}=-8\alpha_1|\dot{y}_1|\dot{y}_1+2\alpha_2|\dot{y}_2-2\dot{y}_1|(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)-2\alpha_3|2\dot{y}_1+\dot{y}_2|(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)$$

$$Q_{y_2}=-\alpha_2|\dot{y}_2-2\dot{y}_1|(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)-\alpha_3|2\dot{y}_1+\dot{y}_2|(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)$$

9.1.18　图 9.13 中木块 A、B 固连于长度为 l 的轻棒的两端，在木块 C 和 D 上沿棒的方向滑动，木块 C 在水平面上也可沿棒的方向滑动，D 是固定的. 图中画出了各接触面间的摩擦因数 μ_1、μ_2、μ_3，套在棒上的木块 E 可沿棒无摩擦滑动. 木块 A、B、C、D、E 的质量分别为 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5，如运动中 $\dot{x}_1>\dot{x}_3>0$，求这些摩擦力的广义力 Q_{x_1}、Q_{q_1}和 Q_{q_2}.

解　木块 A、B、E 组成的系统在竖直方向无加速度.

$$N_1+N_2=(m_1+m_2+m_5)g\tag{1}$$

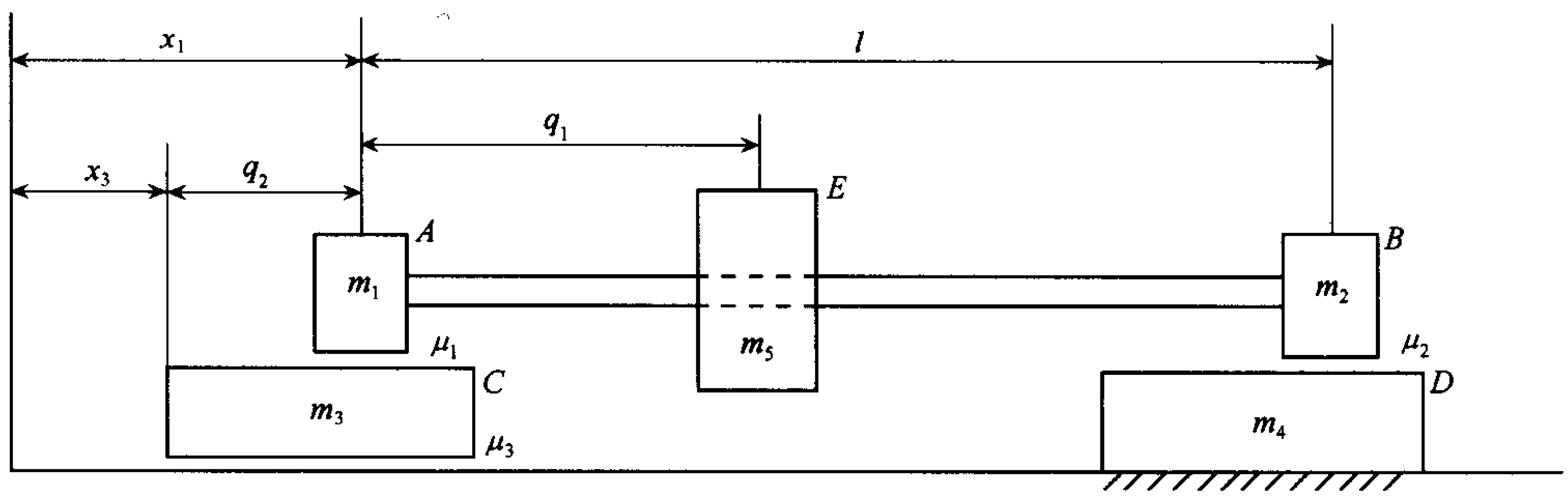


图 9.13

其中 N_1 是木块 C 对木块 A 的支持力，N_2 是木块 D 对木块 B 的支持力.

木块 A、B、E 均沿棒的方向运动，对与棒重合的空间中的直线上任何固定点的角动量恒为零，因此作用于此系统的力对此线上的任何固定点的力矩为零. 考虑对与 N_1 的作用点重合的固定点的力矩为零，

$$(N_2 - m_2 g)l - m_5 g q_2 = 0 \tag{2}$$

由(1)、(2)两式解出，

$$N_2 = m_2 g + m_5 g \frac{q_2}{l}$$

$$N_1 = m_1 g + m_5 g \frac{l - q_2}{l}$$

因运动中 $\dot{x}_1 > \dot{x}_3 > 0$，木块 A 受到木块 C 的摩擦力为 $-\mu_1 N_1$，负号表示力的方向与 x_1 的正向相反，木块 B 受到木块 D 的摩擦力为 $-\mu_2 N_2$，木块 C 受到水平面的摩擦力为 $-\mu_3(N_1 + m_3 g)$，

$$\begin{aligned}\delta W = &-\mu_1\left(m_1 + m_5\frac{l-q_2}{l}\right)g\delta x_1 - \mu_2\left(m_2 + m_5\frac{q_2}{l}\right)g\delta x_1 \\ &+ \mu_1\left(m_1 + m_5\frac{l-q_2}{l}\right)g\delta x_3 - \mu_3\left(m_1 + m_3 + m_5\frac{l-q_2}{l}\right)g\delta x_3\end{aligned}$$

因为　　$x_3 = x_1 - q_1$，　　$\delta x_3 = \delta x_1 - \delta q_1$

$$\begin{aligned}\delta W = &\left[-\mu_2\left(m_2 + m_5\frac{q_2}{l}\right)g - \mu_3\left(m_1 + m_3 + m_5 - m_5\frac{q_2}{l}\right)g\right]\delta x_1 \\ &+ \left[-\mu_1\left(m_1 + m_5 - m_5\frac{q_2}{l}\right)g + \mu_3\left(m_1 + m_3 + m_5 - m_5\frac{q_2}{l}\right)g\right]\delta q_1\end{aligned}$$

所以　$Q_{x_1} = -\mu_2\left(m_2 + m_5\frac{q_2}{l}\right)g - \mu_3\left(m_1 + m_3 + m_5 - m_5\frac{q_2}{l}\right)g$

$$Q_{q_1} = -\mu_1\left(m_1 + m_5 - m_5\frac{q_2}{l}\right)g + \mu_3\left(m_1 + m_3 + m_5 - m_5\frac{q_2}{l}\right)g$$

$$Q_{q_2} = 0$$

注意：因摩擦力与相对速度的方向相反，上述的广义力表达式是在 $\dot{x}_1 > \dot{x}_3 > 0$ 的情况下适用的. $\dot{x}_1$、$\dot{x}_3$ 的正负号发生变化或 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_3$ 正负号没变但大小关系发生变化，都会使摩

擦力的方向改变，因而影响 Q_{x_1}、Q_{q_1}式中各项的正负号.

9.1.19　一个半径为 R 的圆环在一个粗糙的平面上运动，用环心的坐标 x、y 及圆环的角位移 φ 为广义坐标，设 f 是单位长度的环受到的摩擦力的大小，求环受到的广义摩擦力(不要求算出积分).

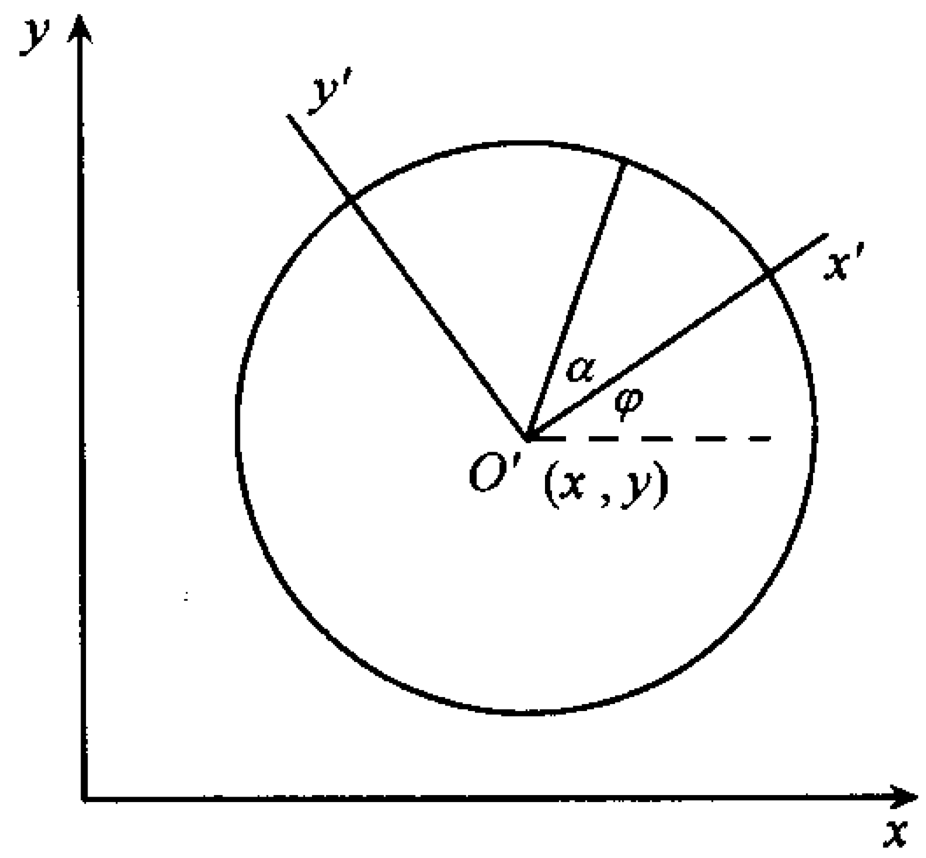


图 9.14

解　考虑图 9.14 中位于 $\alpha\sim\alpha+\mathrm{d}\alpha$ 的环元的速度

$$\boldsymbol{v}(\alpha)=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{\varphi}\boldsymbol{k}\times[R\cos(\varphi+\alpha)\boldsymbol{i}+R\sin(\varphi+\alpha)\boldsymbol{j}]$$

$$=[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{i}+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{j}$$

此环元受到的摩擦力为

$$-f\frac{\boldsymbol{v}(\alpha)}{v(\alpha)}R\mathrm{d}\alpha=-f\frac{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{i}+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{j}}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha$$

此环元的位矢为

$$\boldsymbol{r}(\alpha)=[x+R\cos(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{i}+[y+R\sin(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{j}$$

$$\delta\boldsymbol{r}(\alpha)=[\delta x-R\sin(\varphi+\alpha)\delta\varphi]\boldsymbol{i}+[\delta y+R\cos(\varphi+\alpha)\delta\varphi]\boldsymbol{j}$$

摩擦力对此环元做的虚功为

$$-f\frac{\boldsymbol{v}(\alpha)\cdot\delta\boldsymbol{r}(\alpha)}{v(\alpha)}R\mathrm{d}\alpha$$

$$=-f\frac{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)](\delta x-R\sin(\varphi+\alpha)\delta\varphi)}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha$$

$$-f\frac{[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)](\delta y+R\cos(\varphi+\alpha)\delta\varphi)}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha$$

$$=-f\frac{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]\delta x+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]\delta y}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha$$

$$-f\frac{\{R^2\dot{\varphi}+R[\dot{y}\cos(\varphi+\alpha)-\dot{x}\sin(\varphi+\alpha)]\}\delta\varphi}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha$$

摩擦力对圆环做的虚功为

$$\delta W=-f\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{v}(\alpha)\cdot\delta\boldsymbol{r}(\alpha)}{v(\alpha)}R\mathrm{d}\alpha$$

$$=-f\int_0^{2\pi}\frac{\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha\delta x$$

$$-f\int_0^{2\pi}\frac{\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha\delta y$$

$$-f\int_0^{2\pi}\frac{R^2\dot{\varphi}+R[\dot{y}\cos(\varphi+\alpha)-\dot{x}\sin(\varphi+\alpha)]}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha\delta\varphi$$

所以　$$Q_x=-f\int_0^{2\pi}\frac{\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)}{\{[\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}R\mathrm{d}\alpha$$

$$Q_y = -f\int_0^{2\pi} \frac{\dot{y} + R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)}{\{[\dot{x} - R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2 + [\dot{y} + R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}} R\mathrm{d}\alpha$$

$$Q_\varphi = -f\int_0^{2\pi} \frac{R^2\dot{\varphi} + R[\dot{y}\cos(\varphi+\alpha) - \dot{x}\sin(\varphi+\alpha)]}{\{[\dot{x} - R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2 + [\dot{y} + R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}} R\mathrm{d}\alpha$$

9.1.20 一个均质的三脚架,三只脚长度相等,置于光滑的水平面上,为使它不致滑下,用一绳套住三脚架的底部.若平衡时,每只脚与铅直线的夹角为 θ.试用虚功原理证明:绳中张力 T 与三脚架重量 W 之比为 $\dfrac{T}{W} = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\tan\theta$.

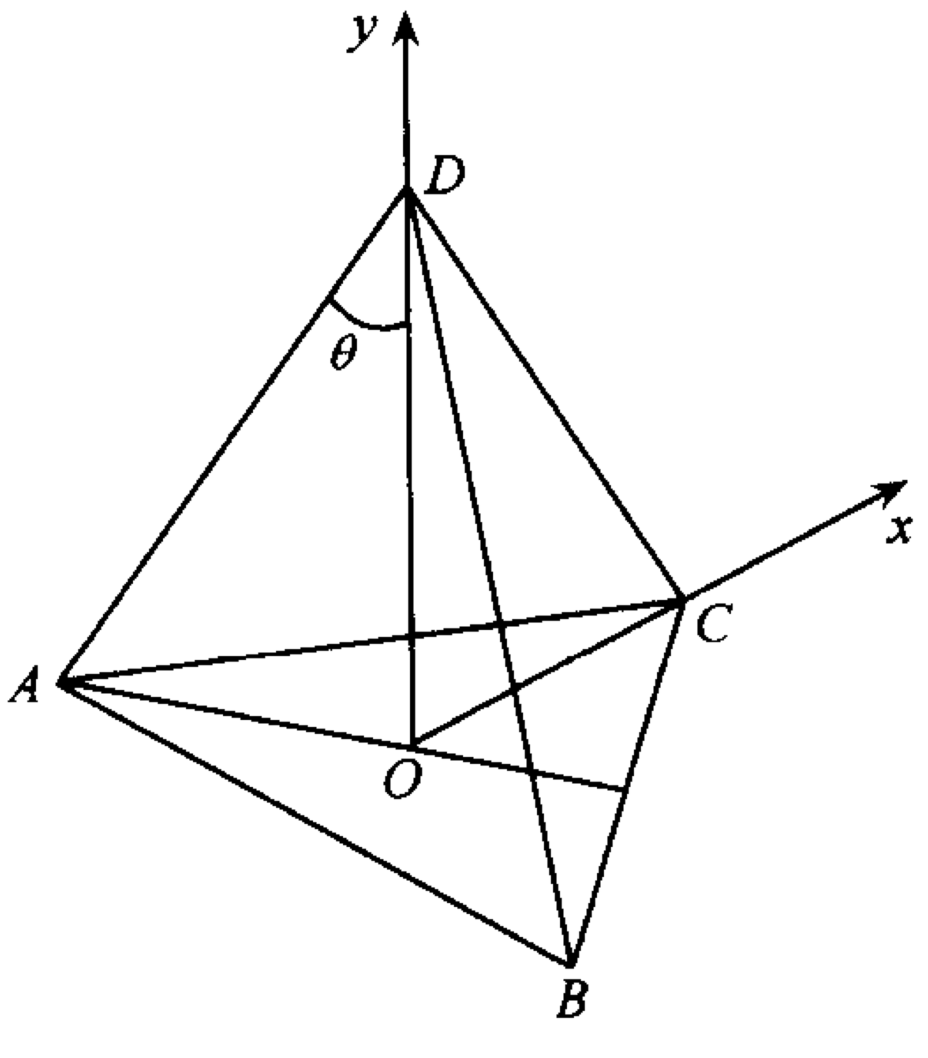


图 9.15

证明 取图 9.15 所示的坐标 x、y 轴,原点取在绳圈三角形的重心,y 轴竖直向上,x 轴沿一条中线.

三脚架的质心位于 OD 的中点.重力做虚功为 $-W\delta(\frac{1}{2}y_D)$,作用于 C 的两边绳子张力做虚功为 $-2T\cos30°\delta x_C$.考虑对称性,绳子张力做的虚功为 $3(-2T\cos30°)\delta x_C$.

平衡时,主动力做的虚功之和等于零,

$$\delta A = -W\delta(\frac{1}{2}y_D) + 3(-2T\cos30°)\delta x_C = 0$$

取 θ 为广义坐标,设三脚架每只脚长 l,

$$y_D = l\cos\theta, \quad x_C = l\sin\theta$$

$$\delta y_D = -l\sin\theta\delta\theta, \qquad \delta x_C = l\cos\theta\delta\theta$$

代入 $\delta A = 0$ 的式子,

$$\left(\frac{1}{2}Wl\sin\theta - 6T\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l\cos\theta\right)\delta\theta = 0$$

$$\frac{T}{W} = \frac{1}{6\sqrt{3}}\tan\theta$$

9.1.21 长度均为 l 的四根轻棒用光滑铰链构成一菱形 $ABCD$,AB 和 AD 两边支在同一水平线相距为 $2a$ 的两个钉子上,BD 间用一轻绳连接,C 点处挂一重量为 W 的重物,若 A 的顶角为 2α.如图 9.16 所示.试用虚功原理求绳中的张力.

解 取两钉子连线的中点为 x 轴、y 轴的零点,x 轴沿水平方向,y 轴竖直向下,取 α 为广义坐标.

$$x_D = l\sin\alpha, \delta x_D = l\cos\alpha\delta\alpha$$

$$y_C = 2l\cos\alpha - a\cot\alpha$$

$$\delta y_C = \left(-2l\sin\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\right)\delta\alpha$$

$$W\delta y_C - 2T\delta x_D = 0$$

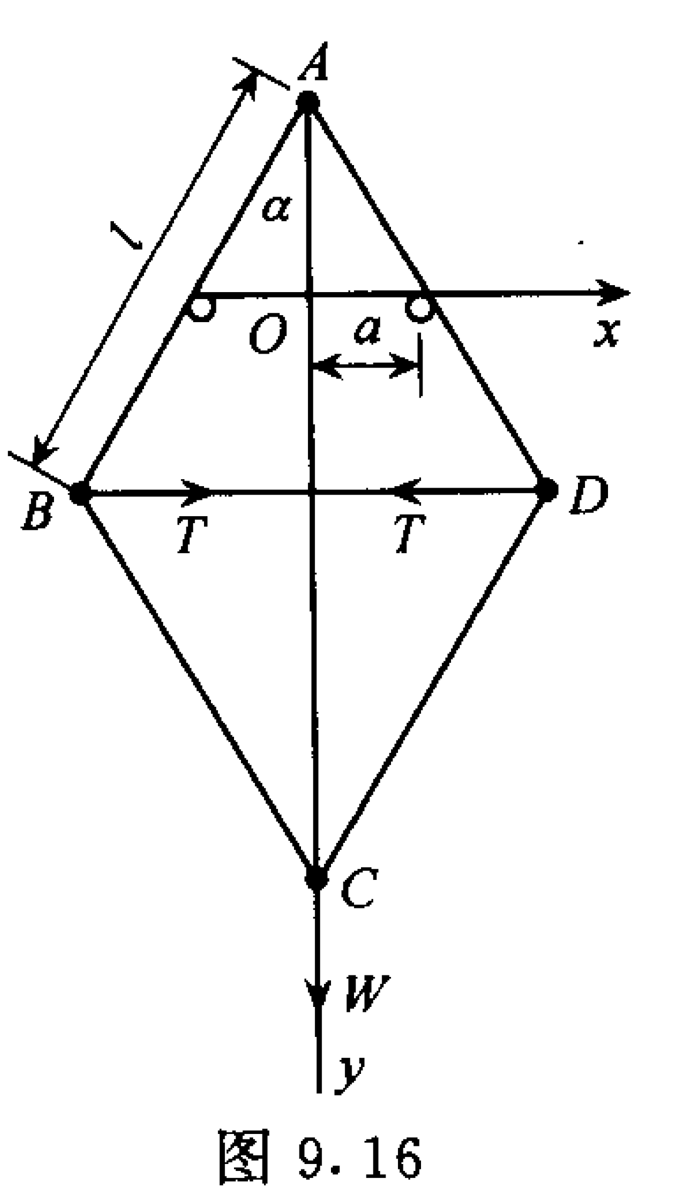


图 9.16

$$W\left(-2l\sin\alpha+\frac{a}{\sin^2\alpha}\right)\delta\alpha-2Tl\cos\alpha\delta\alpha=0$$

$$T=\frac{W}{2l\cos\alpha}(a\csc^2\alpha-2l\sin\alpha)$$

$$=W\tan\alpha\left(\frac{a}{2l}\csc^3\alpha-1\right)$$

9.1.22　线密度为 σ、长度为 l 的均质链条两端分别连接重量分别为 P 和 Q 的两个球，放在半径为 R 的光滑半圆柱面上，平衡时链条和两球处在与圆柱轴线垂直的铅直面上，试用虚功原理求平衡位置.

解　取 y 轴竖直向上，原点取在圆柱轴线上，如图 9.17 所示. 设链条对 O 点的张角为 2α,

$$\alpha=\frac{l}{2R}$$

图中 C 点是链条的质心位置.

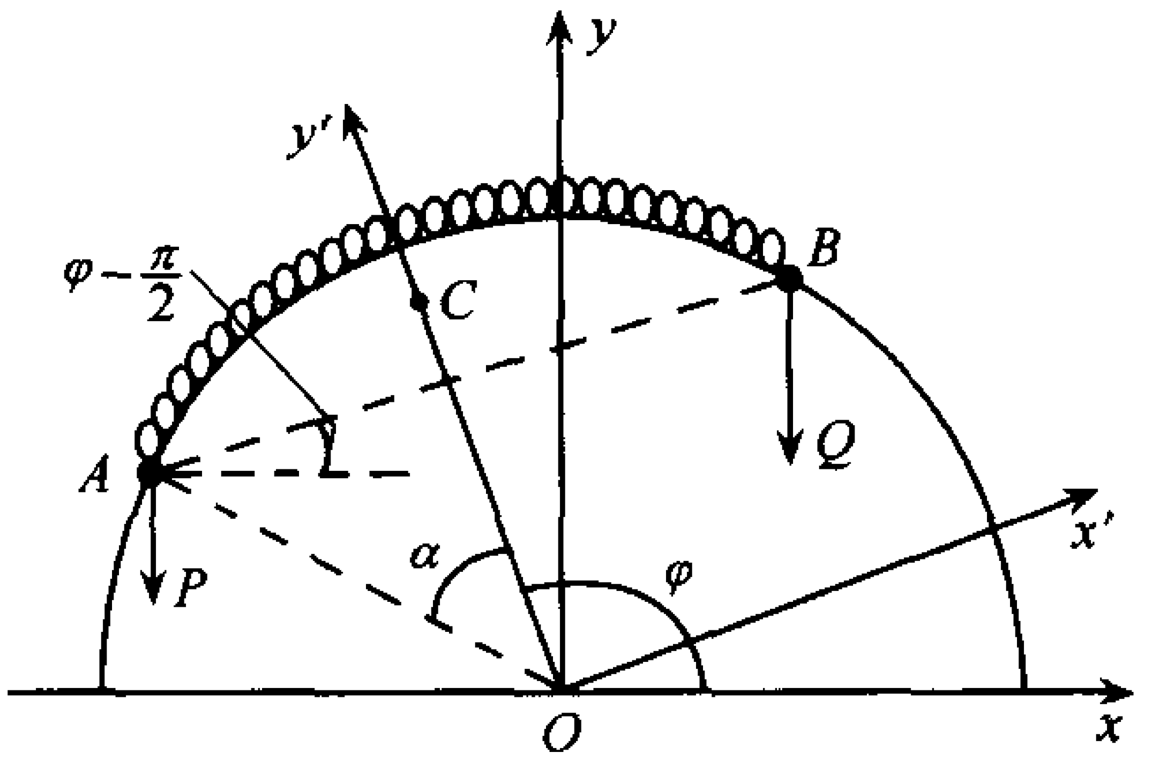


图 9.17

由虚功原理，

$$-P\delta y_A-Q\delta y_B-\sigma lg\delta y_C=0 \qquad (1)$$

$$y_A=R\sin(\pi-\alpha-\varphi)=R\sin(\alpha+\varphi)$$

$$=R(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)$$

$$\delta y_A=R(-\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi)\delta\varphi \qquad (2)$$

$$y_B=y_A+2R\sin\alpha\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=y_A-2R\sin\alpha\cos\varphi$$

$$\delta y_B=\delta y_A+2R\sin\alpha\sin\varphi\delta\varphi=R(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi)\delta\varphi \qquad (3)$$

为求 y_C，取坐标 $Ox'y'$，y' 轴通过链条的质心 C，由质心的定义

$$y_C'=\frac{1}{\sigma l}\int y'\sigma\mathrm{d}s=\frac{1}{l}\int y'\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}y'}\right)^2}\mathrm{d}y'$$

$$x'^2+y'^2=R^2, x'=\sqrt{R^2-y'^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}y'}=-\frac{y'}{\sqrt{R^2-y'^2}}$$

$$y_C'=\frac{2}{l}\int_{R\cos\alpha}^{R}y'\sqrt{1+\left(-\frac{y'}{\sqrt{R^2-y'^2}}\right)^2}\mathrm{d}y'$$

这里乘 2 是考虑到 y' 轴两边的链条是对 y' 轴对称的. 经计算可得

$$y_C'=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

$$y_C=y_C'\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=y_C'\sin\varphi=\frac{R\sin\partial}{\partial}\sin\varphi$$

$$\delta y_C=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi\delta\varphi \qquad (4)$$

将式(2)、(3)、(4)代入式(1)，并用 $l=2R\alpha$,

$$[-PR(-\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi)-QR(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi)$$

$$-2R\alpha\sigma g\frac{R\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi\Big]\delta\varphi=0$$

可得

$$\tan\varphi=\frac{(P+Q)\cos\alpha+2R\sigma g\sin\alpha}{(P-Q)\sin\alpha}$$

其中 $\alpha=\frac{l}{2R}$，φ 如图所示，是在链条所在铅直面内两球连线的垂线与 x 轴的夹角.

9.1.23　两球 A 和 B 分别重 P 和 Q，用长为 $2l$ 的轻杆连接后放在一光滑的、半径为 R 的球壳内，求平衡时杆与水平线的交角 α 和 A、B 处的约束力.

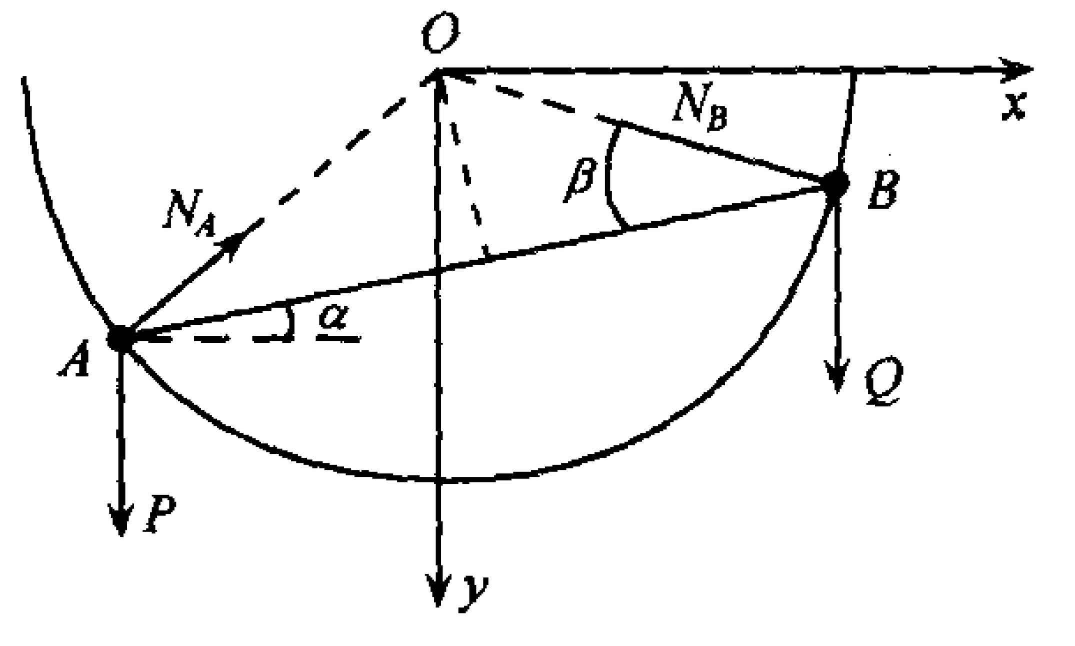


图 9.18

解　取图 9.18 所示的 xy 坐标，

$$y_A=R\sin\left(\alpha+\arccos\frac{l}{R}\right)$$

$$y_B=R\sin\left(\arccos\frac{l}{R}-\alpha\right)$$

$$\delta y_A=R\cos\left(\alpha+\arccos\frac{l}{R}\right)\delta\alpha$$

$$\delta y_B=-R\cos\left(\arccos\frac{l}{R}-\alpha\right)\delta\alpha$$

$$P\delta y_A+Q\delta y_B=0$$

$$\left[PR\cos\left(\alpha+\arccos\frac{l}{R}\right)-QR\cos\left(\alpha-\arccos\frac{l}{R}\right)\right]\delta\alpha=0$$

$$P\left[\cos\alpha\cos\left(\arccos\frac{l}{R}\right)-\sin\alpha\sin\left(\arccos\frac{l}{R}\right)\right]$$

$$-Q\left[\cos\alpha\cos\left(\arccos\frac{l}{R}\right)+\sin\alpha\sin\left(\arccos\frac{l}{R}\right)\right]=0$$

$$\sin\left(\arccos\frac{l}{R}\right)=\sqrt{1-\frac{l^2}{R^2}}=\frac{1}{R}\sqrt{R^2-l^2}$$

$$(P-Q)l\cos\alpha-(P+Q)\sin\alpha\cdot\sqrt{R^2-l^2}=0$$

$$\tan\alpha=\frac{(P-Q)l}{(P+Q)\sqrt{R^2-l^2}}$$

方法一：用矢量力学的办法求约束力 N_A 和 N_B.

由系统在 x、y 方向所受合力分别为零得

$$N_A\cos(\beta+\alpha)-N_B\cos(\beta-\alpha)=0\tag{1}$$

$$N_A\sin(\beta+\alpha)+N_B\sin(\beta-\alpha)=P+Q\tag{2}$$

其中 $\beta=\arccos\frac{l}{R}$.

式(1)× $\sin(\beta-\alpha)$＋式(2)×$\cos(\beta-\alpha)$，可得

$$N_A=\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin2\beta}(P+Q)$$

将上式代入式(1)，得

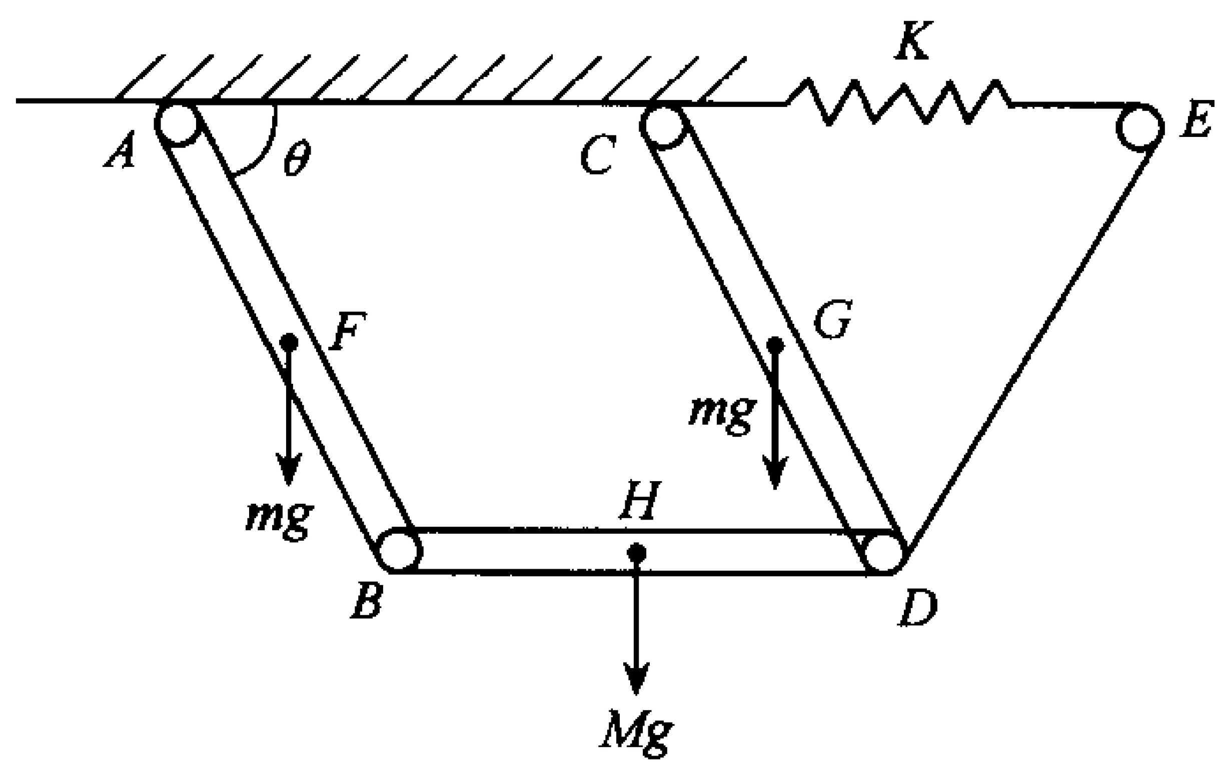


图 9.20

解　方法一:取竖直向下为 y 轴,A、C、E 的 y 坐标为零,

$$y_F = y_G = \frac{1}{2}l\sin\theta,\quad y_H = l\sin\theta$$

$$DE = 2l\sin\frac{1}{2}\theta$$

$$\delta y_F = \delta y_G = \frac{1}{2}l\cos\theta\delta\theta,\quad \delta y_H = l\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta DE = 2l\cos\frac{1}{2}\theta\cdot\frac{1}{2}\delta\theta = l\cos\frac{1}{2}\theta\delta\theta$$

$$\delta W = mg\delta y_F + mg\delta y_G + Mg\delta y_H - kDE\delta DE = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}mgl\cos\theta + \frac{1}{2}mgl\cos\theta + Mgl\cos\theta - 2kl^2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta\right)\delta\theta = 0$$

$$(m+M)g\cos\theta - kl\sin\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{(m+M)g}{kl}$$

$$\theta = \arctan\left[\frac{(m+M)g}{kl}\right]$$

方法二:

$$V = -mgy_F - mgy_G - Mgy_H + \frac{1}{2}k(DE)^2$$

$$= -mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta - mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta - Mgl\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\frac{1}{2}\theta\right)^2$$

$$= -(m+M)gl\sin\theta + 2kl^2\sin^2\frac{1}{2}\theta$$

在平衡位置,$\frac{dV}{d\theta}=0$ 给出平衡时 θ 满足的方程为

$$-(m+M)gl\cos\theta + 4kl^2\sin\frac{1}{2}\theta\cdot\cos\frac{1}{2}\theta\cdot\frac{1}{2} = 0$$

可得

$$\tan\theta = \frac{(m+M)g}{kl}$$

9.1.25　图 9.21 所示的是犁的后轮机构.直杆 AB 和曲杆 CO_2D 通过铰链 B 和 C 分别与连杆 BC 相连接,连杆与两杆的夹角分别为 φ_1 和 φ_2,当机构在图示位置时,BC 是水平的,O_1、A 两点的铅直距离为 h,O_2、D 两点的水平距离为 H,$O_1B=r_1$,$O_2C=r_2$,在 A 点有一水平力 F_A 作用,在 D 点有一铅直力 F_D 作用,此时系统处于平衡,求此两力的比值.

解　考虑在平衡位置附近有一虚位移,如图 9.22 所示,BC 杆与水平线的夹角为 ψ,自固定点 O_1、O_2 分别取图示的 x 轴(水平向左)和 y 轴(竖直向上).与主动力做虚功有关的坐标为 x_A 和 y_D,

$$x_A = -O_1A\cos(\varphi_1 - \psi)$$
$$y_D = -O_2D\sin\theta$$

$$\delta x_A = O_1A\sin(\varphi_1 - \psi)\delta(\varphi_1 - \psi)$$

$$\delta y_D = -O_2D\cos\theta\delta\theta$$

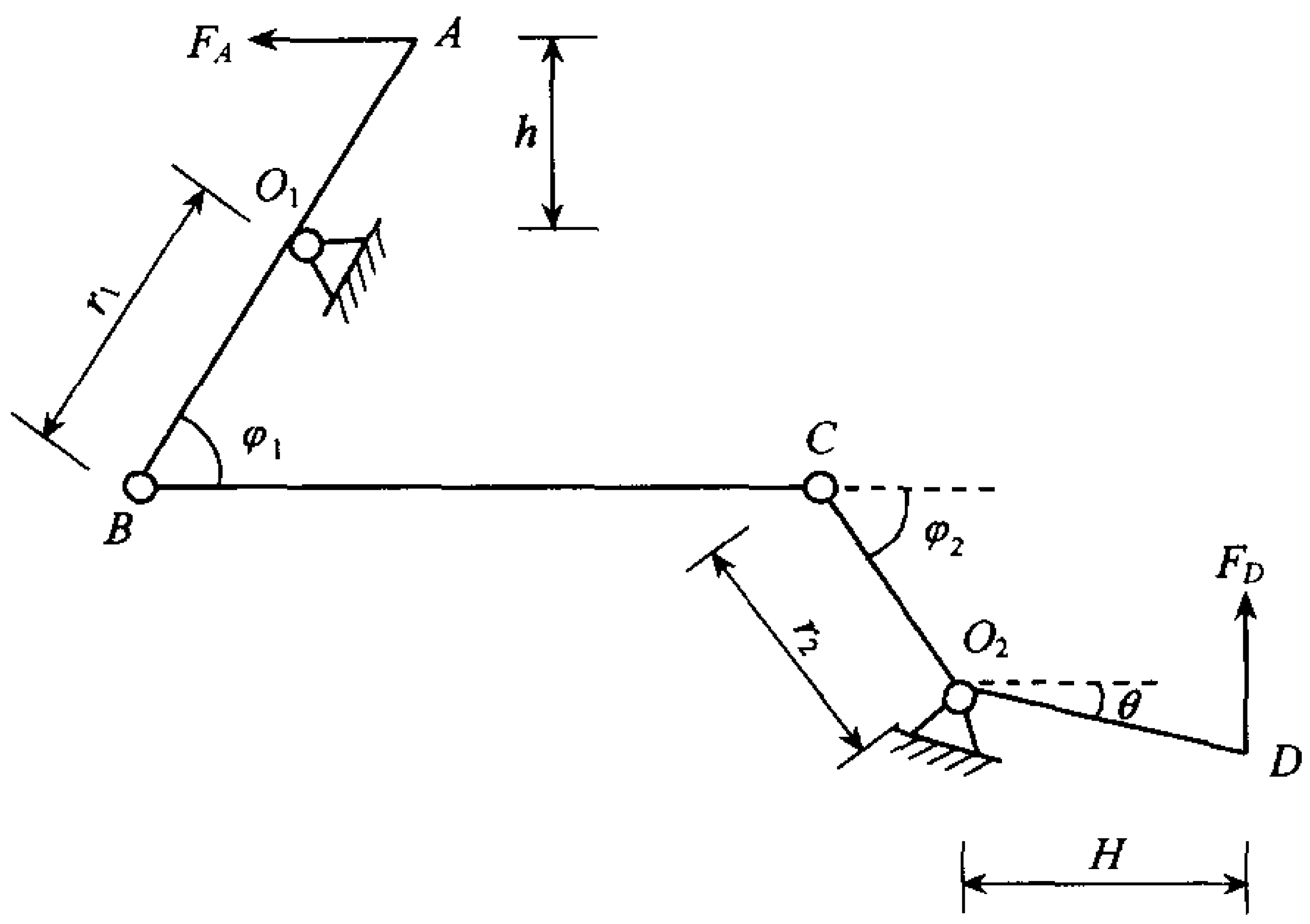


图 9.21

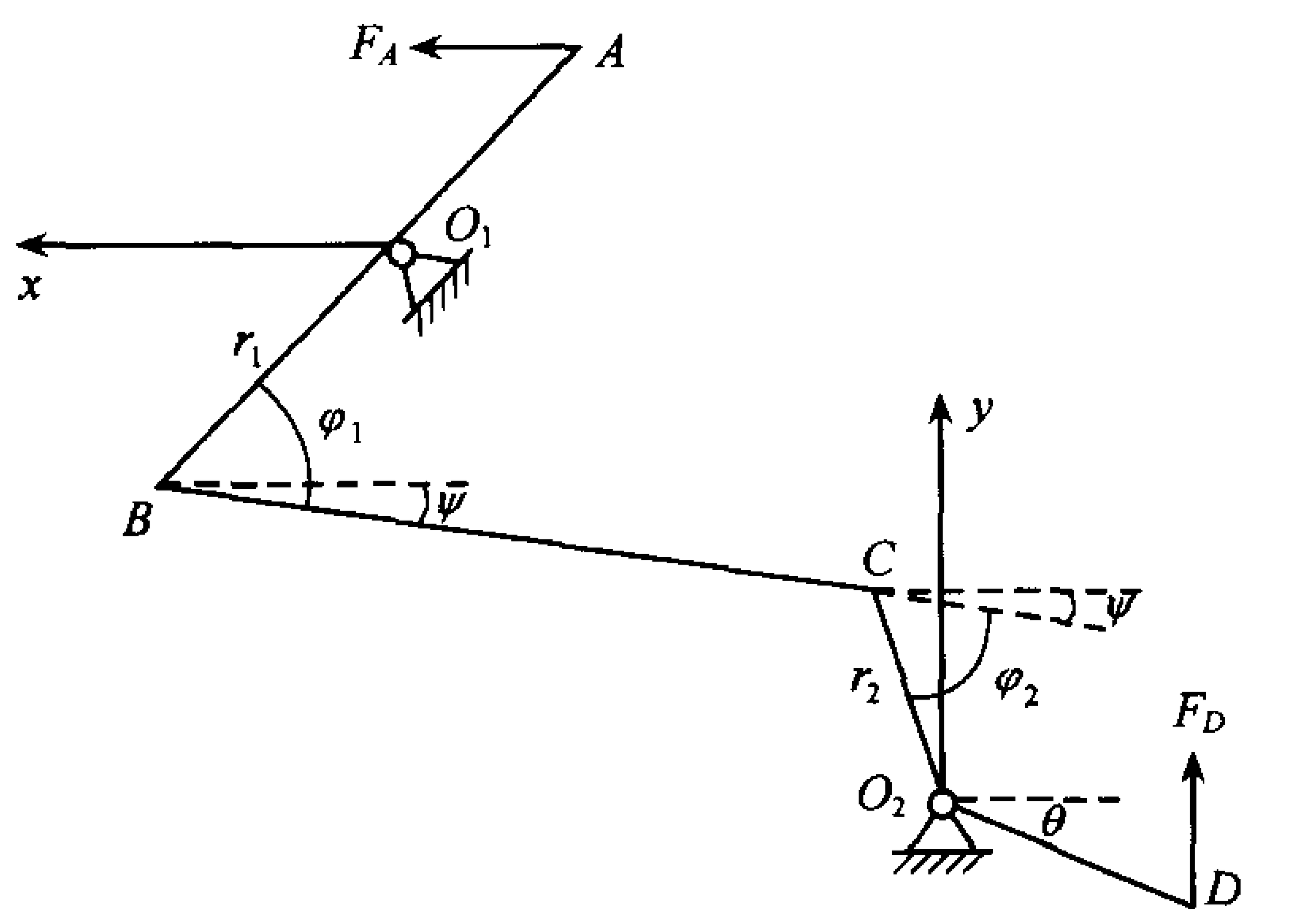


图 9.22

O_1、O_2 是固定点，两点的水平距离不变，

$$-r_1\cos(\varphi_1 - \psi) + BC\cos\psi + r_2\cos(\varphi_2 + \psi) = \text{常量}$$

曲杆的角度$\angle CO_2D$ 不变，

$$\theta + \pi - (\varphi_2 + \psi) = \text{常量}$$

对上述两个约束关系进行变分，可得虚位移间满足的关系

$$r_1\sin(\varphi_1 - \psi)\delta(\varphi_1 - \psi) - BC\sin\psi\delta\psi - r_2\sin(\varphi_2 + \psi)\delta(\varphi_2 + \psi) = 0 \tag{1}$$

$$\delta\theta - \delta(\varphi_2 + \psi) = 0 \tag{2}$$

在平衡位置，$\psi=0$，但 $\delta\psi\neq 0$，$\delta(\varphi_1-\psi)\neq\delta\varphi_1$，由式(1)，得到在平衡位置有

$$r_1\sin\varphi_1\delta(\varphi_1 - \psi) - r_2\sin\varphi_2\delta(\varphi_2 + \psi) = 0 \tag{3}$$

$$\delta x_A = O_1A\sin\varphi_1\delta(\varphi_1 - \psi) = h\delta(\varphi_1 - \psi)$$

$$\delta y_D = -O_2D\cos\theta\delta\theta = -H\delta\theta = -H\delta(\varphi_2 + \psi)$$

这里用了式(2).

在平衡位置,主动力做的虚功为零,

$$\delta W = F_A \delta x_A + F_D \delta y_D$$
$$= F_A h\delta(\varphi_1 - \psi) - F_D H\delta(\varphi_2 + \psi) = 0$$
$$\frac{F_D}{F_A} = \frac{h\delta(\varphi_1 - \psi)}{H\delta(\varphi_2 + \psi)} = \frac{hr_2\sin\varphi_2}{Hr_1\sin\varphi_1}$$

这里用了式(3).

9.1.26 图 9.23 所示为一拔桩装置,在木桩的上端 A 点上系一绳,将绳的另一端固定在 C 点,又在绳上一点 B 系另一绳,此绳另一端固定在 E 点,然后在绳的 D 点用力向下拉,这时绳的 BD 段是水平的,AB 段是铅垂的,CB 段与铅垂线的夹角为 α_1,DE 段与水平线的夹角为 α_2,向下拉力为 F,求 AB 绳作用在桩上的拉力 T.

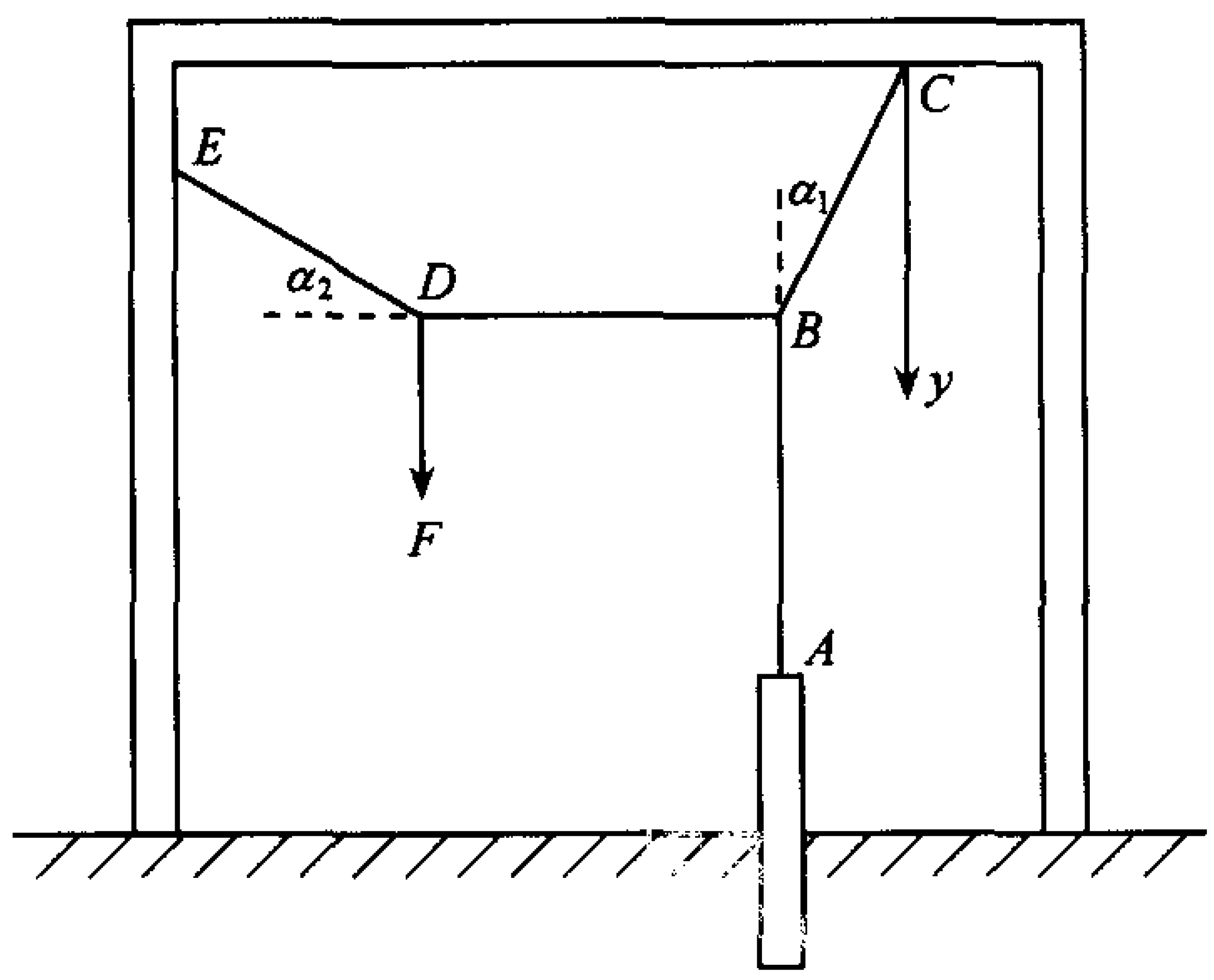


图 9.23

解 系统是 $EDBC$ 绳子,主动力为 F 和 T,T 作用于 B 点,向下.

图中竖直向下的 y 轴,取 C 为原点,设 BC 段绳长为 l_1,ED 段绳长为 l_2,

$$y_B = l_1\cos\alpha_1$$
$$y_D = l_2\sin\alpha_2 + 常量$$
$$\delta y_B = -l_1\sin\alpha_1\delta\alpha_1$$
$$\delta y_D = l_2\cos\alpha_2\delta\alpha_2$$

$\delta\alpha_1$、$\delta\alpha_2$ 间存在着一定的关系,可由 C、E 间水平距离不变获得.考虑一般情况,DB 段绳子与水平线的夹角为 ε,如图 9.24 所示,并设 DB 段绳长为 l_3,

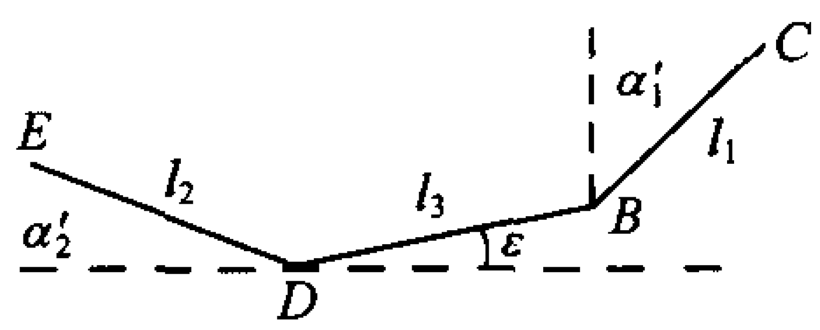


图 9.24

$$l_1\sin\alpha'_1 + l_3\cos\varepsilon + l_2\cos\alpha'_2 = 常量$$
$$l_1\cos\alpha'_1\delta\alpha'_1 - l_3\sin\varepsilon\delta\varepsilon - l_2\sin\alpha'_2\delta\alpha'_2 = 0$$

今考虑在平衡位置处虚位移间的关系.此时,

$$\varepsilon = 0,\quad \alpha'_1 = \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2$$
$$l_1\cos\alpha_1\delta\alpha_1 - l_2\sin\alpha_2\delta\alpha_2 = 0$$
$$\delta\alpha_1 = \frac{l_2\sin\alpha_2}{l_1\cos\alpha_1}\delta\alpha_2$$

$$\delta W = F\delta y_D + T\delta y_B$$
$$= Fl_2\cos\alpha_2\delta\alpha_2 - Tl_1\sin\alpha_1\delta\alpha_1$$
$$= Fl_2\cos\alpha_2 - Tl_1\sin\alpha_1\frac{l_2\sin\alpha_2}{l_1\cos\alpha_1}\delta\alpha_2 = 0$$
$$Fl_2\cos\alpha_2 - Tl_2\tan\alpha_1\sin\alpha_2 = 0$$
$$T = F\cot\alpha_1 \cdot \cot\alpha_2$$

说明:现在处于平衡时,DB 是水平的,只有一个自由度.若处于平衡时 DB 不是水平的,即图 9.24 中的 $\varepsilon \neq 0$,是否有两个自由度?否!仍只有一个自由度,因为还可以写 C、E

间的竖直距离不变的约束关系,从两个 $\delta\alpha_1$、$\delta\alpha_2$ 和 $\delta\varepsilon$ 间的关系中消去 $\delta\varepsilon$,仍然有 $\delta\alpha_1$、$\delta\alpha_2$ 间的一个关系,那么,在 $\varepsilon=0$ 处于平衡的情况,考虑这个约束关系,岂不变成零自由度?回答是仍是一个自由度,因为这个约束关系仍然是 C、E 间的水平距离不变得到的关系.

9.1.27 重 P_1 和 P_2 的两物体连接在不可伸长的轻绳的两端,分放在倾角为 α、β 的斜面上,绳子绕过两个定滑轮和一个动滑轮,动滑轮的轴上挂一个重 P 的物体,如图 9.25 所示.不计摩擦和滑轮质量,求平衡时 P_1、P_2 的值.

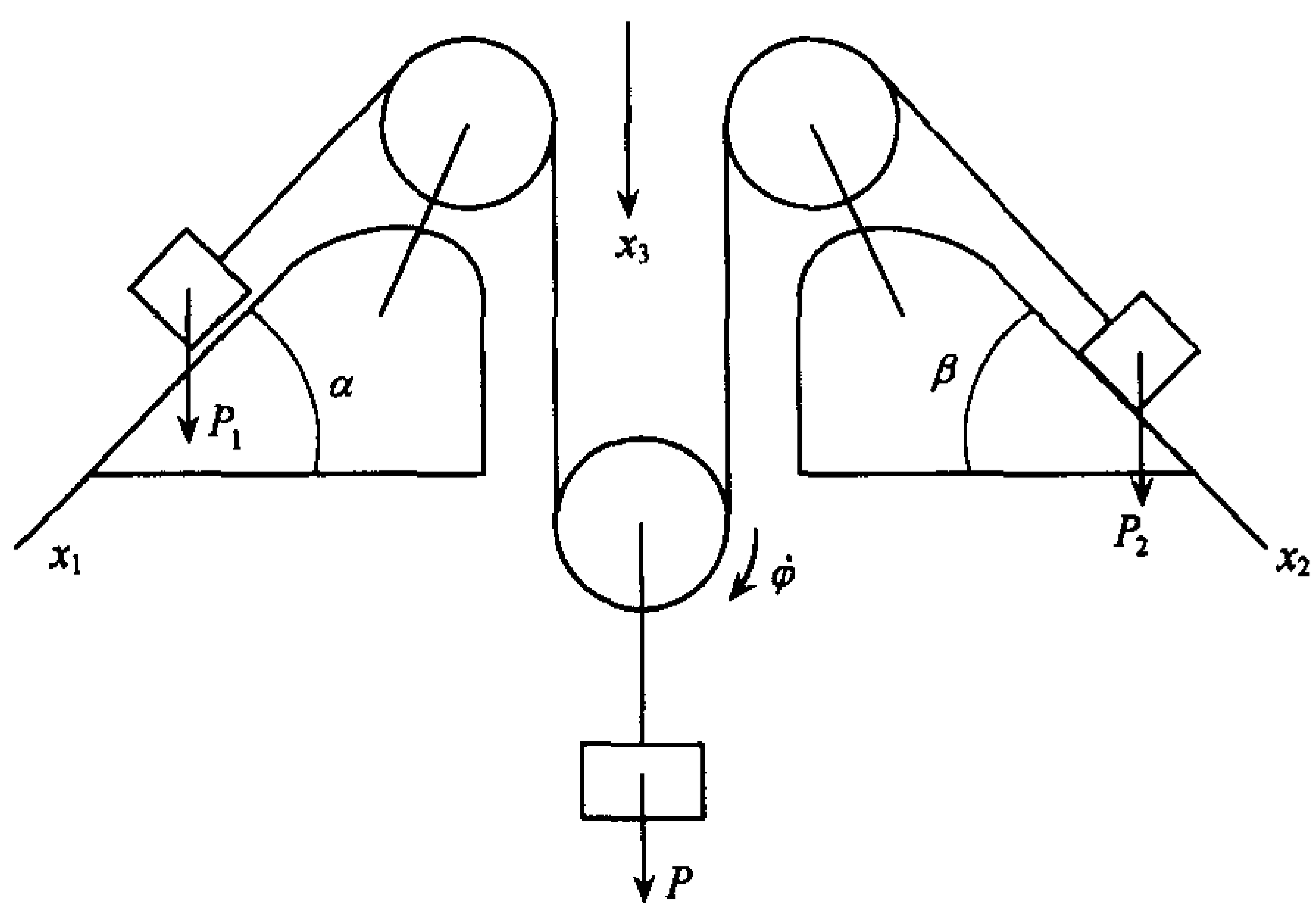


图 9.25

解　取图中 x_1、x_2、x_3 坐标,平衡时,

$$\delta W = P_1\sin\alpha\delta x_1 + P_2\sin\beta\delta x_2 + P\delta x_3 = 0$$

设动滑轮半径为 r,设绳子围绕动滑轮的轴的角速度为 $\dot{\varphi}$(顺时针方向为正),则

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_3 + r\dot{\varphi}, \qquad \dot{x}_2 = -\dot{x}_3 - r\dot{\varphi}$$

$$\delta x_1 = -\delta x_3 + r\delta\varphi, \qquad \delta x_2 = -\delta x_3 - r\delta\varphi$$

消去 $r\delta\varphi$,有

$$\delta x_1 + \delta x_2 = -2\delta x_3$$

三个虚位移满足一个关系,两个虚位移是独立的,取 δx_1、δx_2 为独立的虚位移,

$$\delta x_3 = -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2)$$

代入 $\delta W=0$ 的式子,

$$\delta W = \left(P_1\sin\alpha - \frac{1}{2}P\right)\delta x_1 + \left(P_2\sin\beta - \frac{1}{2}P\right)\delta x_2 = 0$$

$$Q_{x_1} = P_1\sin\alpha - \frac{1}{2}P = 0$$

$$Q_{x_2} = P_2\sin\beta - \frac{1}{2}P = 0$$

所以
$$P_1 = \frac{1}{2}P\csc\alpha, \qquad P_2 = \frac{1}{2}P\csc\beta$$

说明:系统处于平衡,系统的各部分是静止不动的,但用虚功原理,找虚位移满足的关

系时,可用运动学中的关系,设想存在着某种运动,这里写的速度、角速度关系并不要求绳子与动滑轮间无相对运动.

9.1.28 图 9.26 所示的装置中,鼓轮 Ⅰ 和 Ⅱ 上分别有力矩 M_1、M_2 作用,物体 A 重 P,放在斜面上,它与斜面间的摩擦因数为 μ,斜面倾角为 α,鼓轮的半径分别为 r_1 和 r_2,动滑轮 B 重 Q. 试用虚功原理求平衡时 M_1、M_2 需满足的关系. 忽略所有轴承处的摩擦.

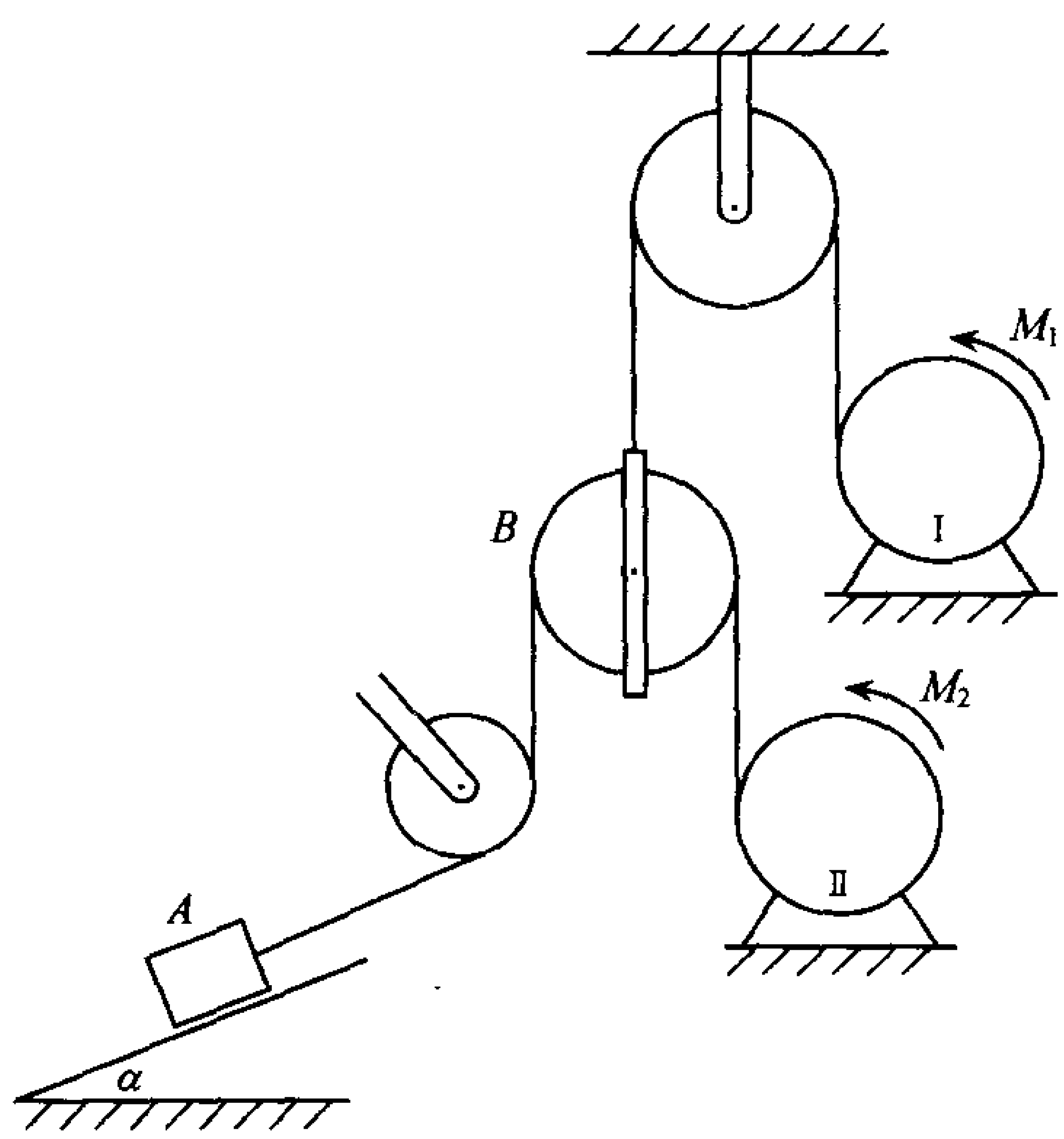


图 9.26

解 取 x 坐标沿斜面向下,y 轴竖直向下,零点均取固定点,φ_1、φ_2 分别表示鼓轮 Ⅰ、Ⅱ 的转角,逆时针转动方向为正.

$$y_B = -r_1\varphi_1 + \text{常量}$$

$$x_A = 2y_B - r_2\varphi_2 + \text{常量} = -2r_1\varphi_1 - r_2\varphi_2 + \text{常量}$$

$$\delta y_B = -r_1\delta\varphi_1$$

$$\delta x_A = -r_2\delta\varphi_2 - 2r_1\delta\varphi_1$$

若处于物体 A 有下滑趋势的临界平衡状态,

$$\delta W = (P\sin\alpha - \mu P\cos\alpha)\delta x_A + Q\delta y_B + M_1\delta\varphi_1 + M_2\delta\varphi_2 = 0$$

$$(P\sin\alpha - \mu P\cos\alpha)(-r_2\delta\varphi_2 - 2r_1\delta\varphi_1) + Q(-r_1\delta\varphi_1) + M_1\delta\varphi_1 + M_2\delta\varphi_2 = 0$$

$$Q_{\varphi_1} = -2r_1(P\sin\alpha - \mu P\cos\alpha) - Qr_1 + M_1 = 0$$

$$Q_{\varphi_2} = -r_2(P\sin\alpha - \mu P\cos\alpha) + M_2 = 0$$

得 $M_1 = Qr_1 + 2r_1(P\sin\alpha - \mu P\cos\alpha)$

$M_2 = r_2(P\sin\alpha - \mu P\cos\alpha)$

若处于物体 A 有上滑趋势的临界平衡状态,将上述结果中的 μ 改成 $-\mu$ 即可,相当于摩擦力反向,

$$M_1 = Qr_1 + 2r_1(P\sin\alpha + \mu P\cos\alpha)$$

$$M_2 = r_2(P\sin\alpha + \mu P\cos\alpha)$$

处于平衡，也可以在上述两种情况之间的非临界平衡状态. M_1、M_2 处于下列范围，系统均能处于平衡状态：

$$Qr_1 + 2Pr_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \leqslant M_1 \leqslant Qr_1 + 2Pr_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$Pr_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \leqslant M_2 \leqslant Pr_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

9.1.29　均质长方形薄板长为 l、宽为 b、质量为 m，宽度为 b 的两对边，一边靠在光滑的墙上，一边搁在固定的光滑的柱面上，如图 9.27 所示. 如果要使板在任意位置处于平衡，柱面应取何种形状，并求柱面和墙对板的约束力.

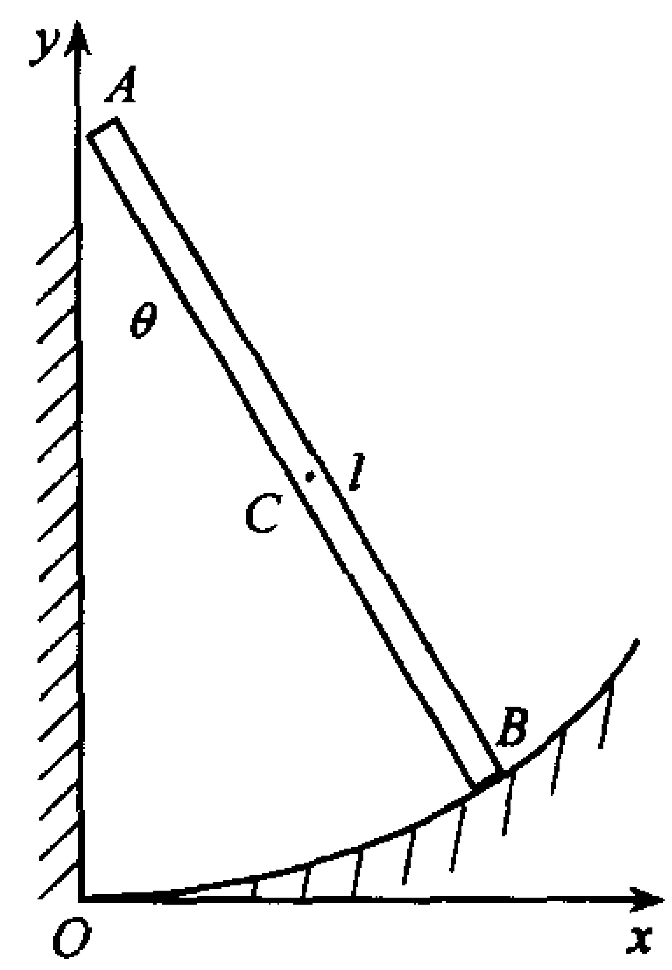


图 9.27

解　用 x、y 表示 B 端的坐标，用 θ 作为广义坐标，C 为质心，

$$y_c = y + \frac{1}{2}l\cos\theta$$

$$\delta y_C = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - \frac{1}{2}l\sin\theta\right)\delta\theta$$

平衡时，主动力的虚功为零，

$$\delta W = -mg\delta y_C = -mg\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - \frac{1}{2}l\sin\theta\right)\delta\theta = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - \frac{1}{2}l\sin\theta = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}l\cos\theta + C$$

由 $\theta=0$，$y=0$，定出 $C=\frac{1}{2}l$，

所以

$$y = -\frac{1}{2}l\cos\theta + \frac{1}{2}l$$

$$x = l\sin\theta$$

消去两式中的 θ 得

$$x^2 + (2y-l)^2 = l^2$$

或写作

$$y = \frac{1}{2}\left(l - \sqrt{l^2 - x^2}\right)$$

这就是要使板能在柱面上的任意位置处于平衡柱面必须满足的方程.

下面用虚功原理求 B 端受到柱面的约束力. 解除 B 端的约束，δx、δy 均是独立的，

$$y_C = y + \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = y + \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - x^2}$$

$$\delta y_C = \delta y - \frac{x}{2\sqrt{l^2 - x^2}}\delta x$$

$$\delta W = -mg\delta y_C + N_x\delta x + N_y\delta y = 0$$

$$-mg\left(\delta y - \frac{x}{2\sqrt{l^2 - x^2}}\delta x\right) + N_x\delta x + N_y\delta y = 0$$

$$N_x + \frac{mgx}{2\sqrt{l^2 - x^2}} = 0$$

$$N_y - mg = 0$$

所以
$$N_x = -\frac{mgx}{2\sqrt{l^2 - x^2}}, \qquad N_y = mg$$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{1}{2}mg\sqrt{\frac{4l^2 - 3x^2}{l^2 - x^2}}$$

用矢量力学的平衡方程,立即可得墙对板的约束力 R,

$$R + N_x = 0$$

$$R = -N_x = \frac{mgx}{2\sqrt{l^2 - x^2}}$$

9.1.30　半径为 R、鼓轮半径为 r 的匀质轮轴,重量为 Q,通过鼓轮上缠绕的绳子挂一重物 P,置于倾角为 α 的粗糙的斜面上,如图 9.28 所示,轮轴与斜面间的摩擦因数为 μ,求轮轴处于平衡的条件.

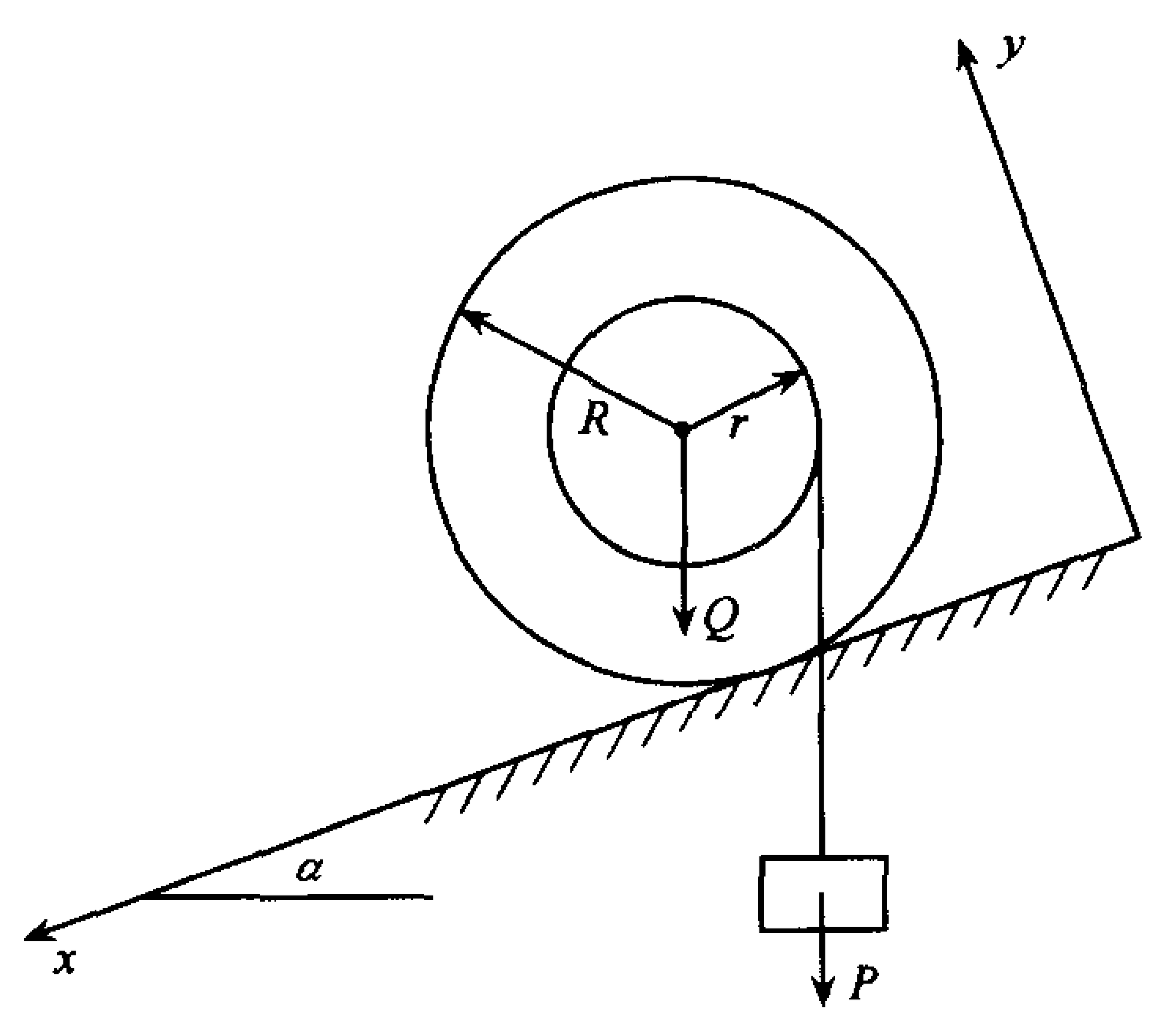


图 9.28

解　平衡要求轮轴无纯滑动,无纯滚动,也无有滑动的滚动.

先考虑无纯滑动的要求.假设斜面对轮轴的摩擦力为 f,沿 x 负向(即有下滑的趋势),

$$\delta W = Q\sin\alpha\delta x - Q\cos\alpha\delta y + P\sin\alpha\delta x - P\cos\alpha\delta y - f\delta x + N\delta y = 0$$

其中 N 是斜面对轮轴的支持力,也是轮轴对斜面的正压力,

$$(Q + P)\sin\alpha - f = 0$$

$$N - (Q + P)\cos\alpha = 0$$

解得
$$f = (Q + P)\sin\alpha, \qquad N = (Q + P)\cos\alpha$$

平衡时,摩擦力为静摩擦力,不能超过最大静摩擦力,即

$$f \leqslant \mu N$$

所以
$$\mu \geqslant \frac{f}{N} = \tan\alpha$$

这是对摩擦因数的要求，可以看出，纯滑动的趋势只能是如假设的那样下滑的趋势.

再考虑无纯滚动，斜面对轮轴的摩擦力和支持力均不做虚功，均为约束力.

设轮轴的质心为C，重物为B. 轮轴沿斜面下滚的转角为φ，C与B间的竖直距离为l，

$$x_B = x_C - r\cos\alpha + l\sin\alpha$$

$$y_B = y_C - r\sin\alpha - l\cos\alpha$$

$$l = -r\varphi + \text{常量}$$

由纯滚动条件，

$$\dot{x}_C - R\dot{\varphi} = 0$$

$$\delta x_C = R\delta\varphi, \qquad \delta\varphi = \frac{1}{R}\delta x_C$$

$$\delta l = -r\delta\varphi = -\frac{r}{R}\delta x_C$$

$$\delta x_B = \delta x_C + \sin\alpha\delta l = \left(1 - \frac{r\sin\alpha}{R}\right)\delta x_C$$

$$\delta y_B = \delta y_C - \cos\alpha\delta l = \frac{r\cos\alpha}{R}\delta x_C$$

这里用了$\delta y_C = 0$，

$$\begin{aligned}\delta W &= Q\sin\alpha\delta x_C - Q\cos\alpha\delta y_C + P\sin\alpha\delta x_B - P\cos\alpha\delta y_B \\ &= \left[Q\sin\alpha + P\sin\alpha\left(1 - \frac{r\sin\alpha}{R}\right) - P\cos\alpha\frac{r\cos\alpha}{R}\right]\delta x_C = 0\end{aligned}$$

$$Q\sin\alpha + P\sin\alpha - \frac{Pr}{R} = 0$$

$$P = \frac{R\sin\alpha}{r - R\sin\alpha}Q$$

因P、Q均大于零，且有限，从上式还可看出，要求分母必须大于零，即

$$r > R\sin\alpha$$

最后，再考虑轮轴无有滑动的滚动，此时系统有两个自由度，取δx_C与$\delta\varphi$为独立的虚位移，

$$\delta l = -r\delta\varphi$$

$$\delta x_B = \delta x_C + \sin\alpha\delta l = \delta x_C - r\sin\alpha\delta\varphi$$

$$\delta y_B = \delta y_C - \cos\alpha\delta l = r\cos\alpha\delta\varphi$$

$$\begin{aligned}\delta W = &\ Q\sin\alpha\delta x_C - \mu(P+Q)\cos\alpha\delta x_C + \mu(P+Q)\cos\alpha\cdot R\delta\varphi \\ &+ P\sin\alpha(\delta x_C - r\sin\alpha\delta\varphi) - P\cos\alpha\cdot r\cos\alpha\delta\varphi = 0\end{aligned}$$

$$Q\sin\alpha - \mu(P+Q)\cos\alpha + P\sin\alpha = 0$$

$$\mu(P+Q)R\cos\alpha - Pr = 0$$

由前式得　$\mu = \tan\alpha$.

将$\mu = \tan\alpha$代入后式得

$$P = \frac{R\sin\alpha}{r - R\sin\alpha}Q$$

μ 必大于零，由此可证明不可能有向上滑动的趋势，这里对 μ 和 P、Q 关系以及 r、R 大小关系的要求都已在考虑前两种情况的要求之内. 因此系统平衡的条件为

$$\mu \geqslant \tan\alpha, P = \frac{R\sin\alpha}{r - R\sin\alpha}Q \text{ 和 } r > R\sin\alpha$$

9.1.31　图 9.29 所示为一差动滑轮，需用多大的力 F 才能将重物 P 吊起来.

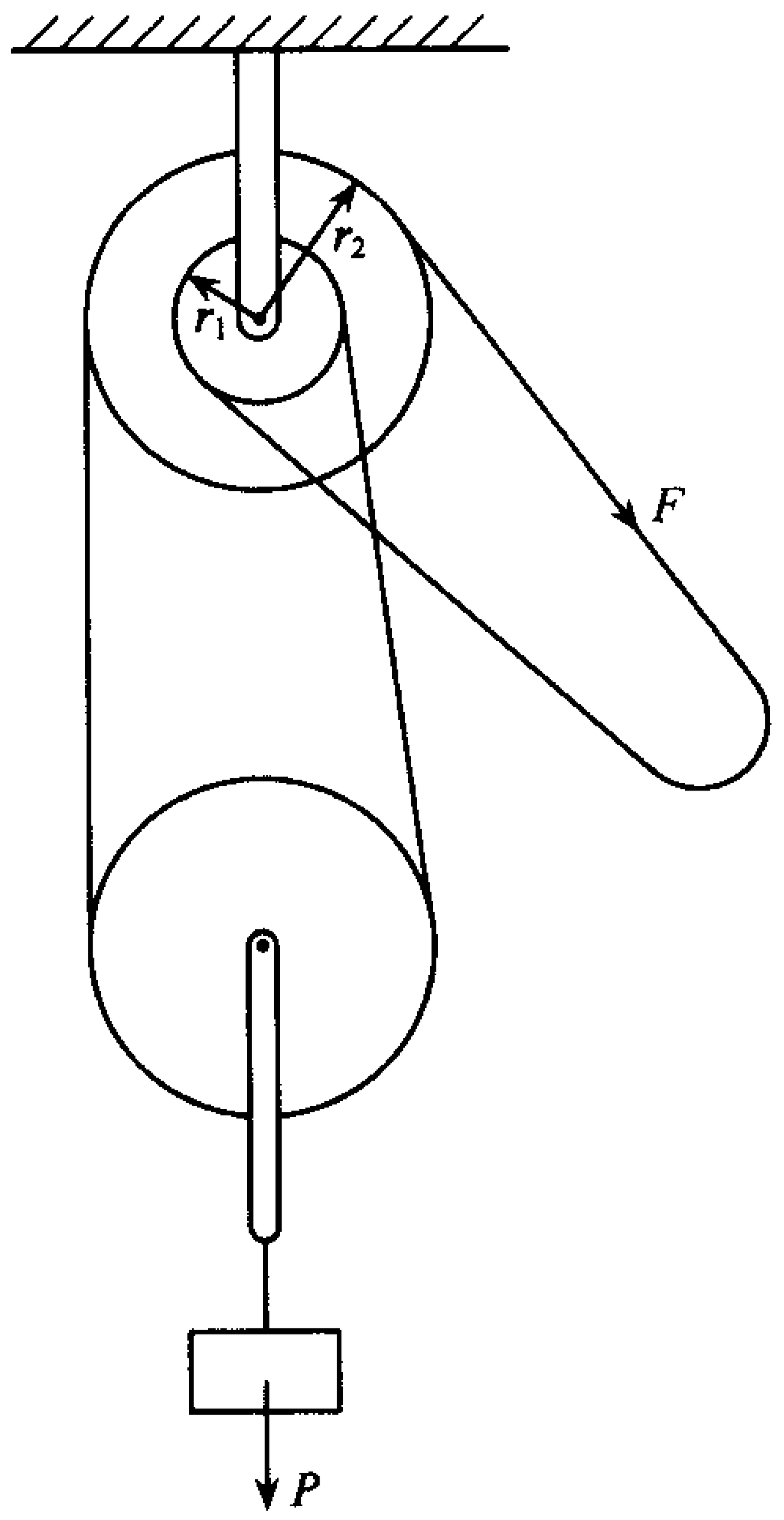


图 9.29

解　取 x 轴竖直向下，定滑轮顺时针转动的角度为 φ，设动滑轮半径为 r，顺时针转动的角度为 θ，重物的坐标为 x，则

$$\dot{x} - r\dot{\theta} = -r_2\dot{\varphi}$$

$$\dot{x} + r\dot{\theta} = r_1\dot{\varphi}$$

消去 $r\dot{\theta}$，可得

$$2\dot{x} = (r_1 - r_2)\dot{\varphi}$$

$$\delta x = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\delta\varphi$$

$$\delta W = Fr_2\delta\varphi + P\delta x$$

$$= \left[Fr_2 + \frac{1}{2}P(r_1 - r_2)\right]\delta\varphi = 0$$

所以

$$Fr_2 + \frac{1}{2}P(r_1 - r_2) = 0$$

$$F = \frac{r_2 - r_1}{2r_2}P$$

这个 F 是使重物处于平衡状态或匀速上升所需的力.

9.1.32　半径为 r 的均质半圆柱体 A，置于另一个半径为 R 的固定的半圆柱体 B 的顶端，如图 9.30 所示. 若 A 在 B 上做纯滚动，问 R 与 r 满足什么关系时，顶端这个平衡位置是稳定平衡位置.

解　稳定平衡位置处，其势能为极小值. 要写半圆柱的势能，得找出其质心位置.

取半圆柱的对称轴为 x 轴，零点取平面表面的中心，如图 9.31 所示，由对称性可知，质心位于 x 轴上. 设密度为 ρ，质量为 m，则

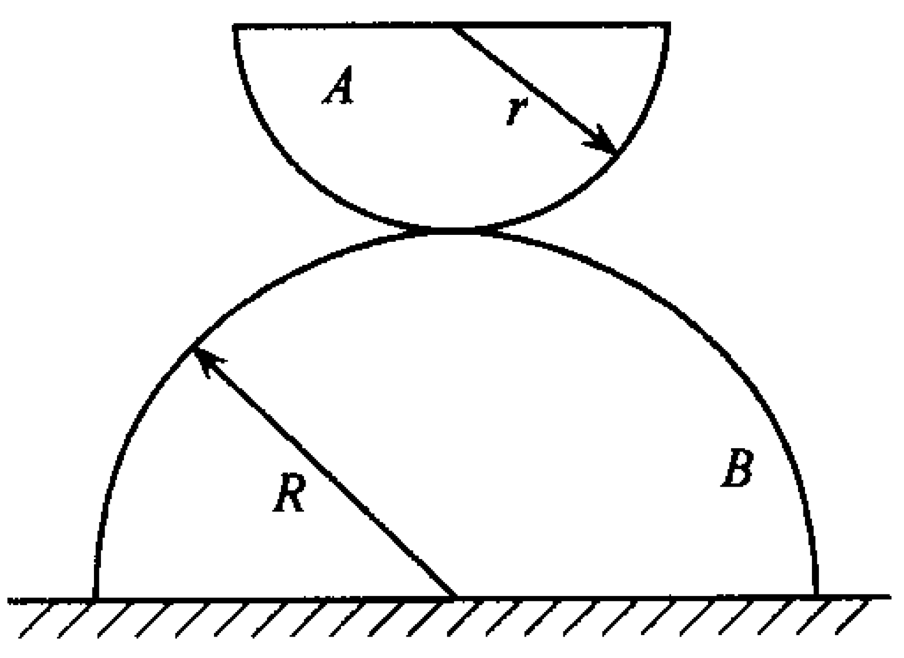


图 9.30

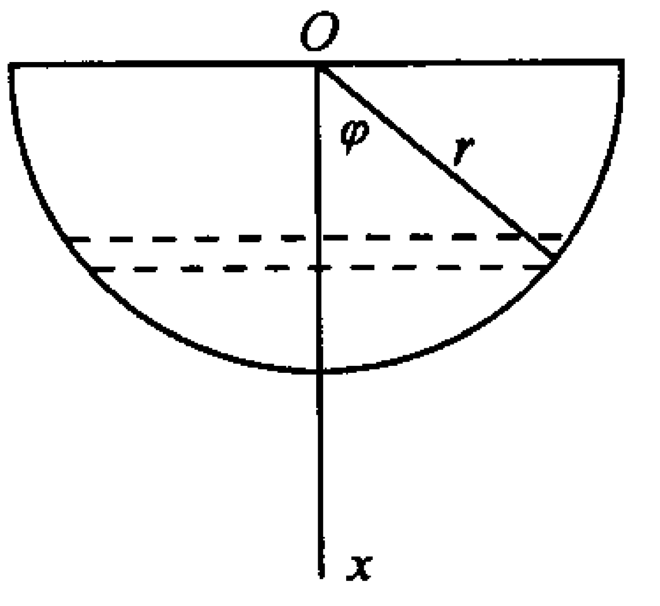


图 9.31

$$x_C = \frac{1}{m}\int x\mathrm{d}m$$

$$x = r\cos\varphi,\quad \mathrm{d}x = -r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

在 $x \sim x+\mathrm{d}x$ 处质元质量为

$$\mathrm{d}m = \rho\cdot 2r\sin\varphi\cdot h\mathrm{d}x = -2\rho h r^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

其中 h 是半圆柱的长度

$$m = \int\mathrm{d}m = \int_0^r \rho\cdot 2r\sin\varphi h\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-2\rho h r^2)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$x_C = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^0 r\cos\varphi(-2\rho h r^2)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-2\rho h r^2)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}$$

$$= \frac{r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}$$

经计算可得　$x_C = \frac{4}{3\pi}r$.

考虑 A 在 B 上纯滚动到图 9.32 所示的位置，OO' 转过 θ 角(顺时针转动)，A 围绕 O' 点转过 ψ 角(顺时针转动)，此时 A 的势能为

$$V = mg(R+r)\cos\theta - mgx_C\cos\psi$$

$$\approx mg(R+r)\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right) - mg\cdot\frac{4}{3\pi}r\left(1-\frac{1}{2}\psi\right)$$

$$= V_0 + \frac{1}{2}mg\left[\frac{4}{3\pi}r\psi^2 - (R+r)\theta^2\right]$$

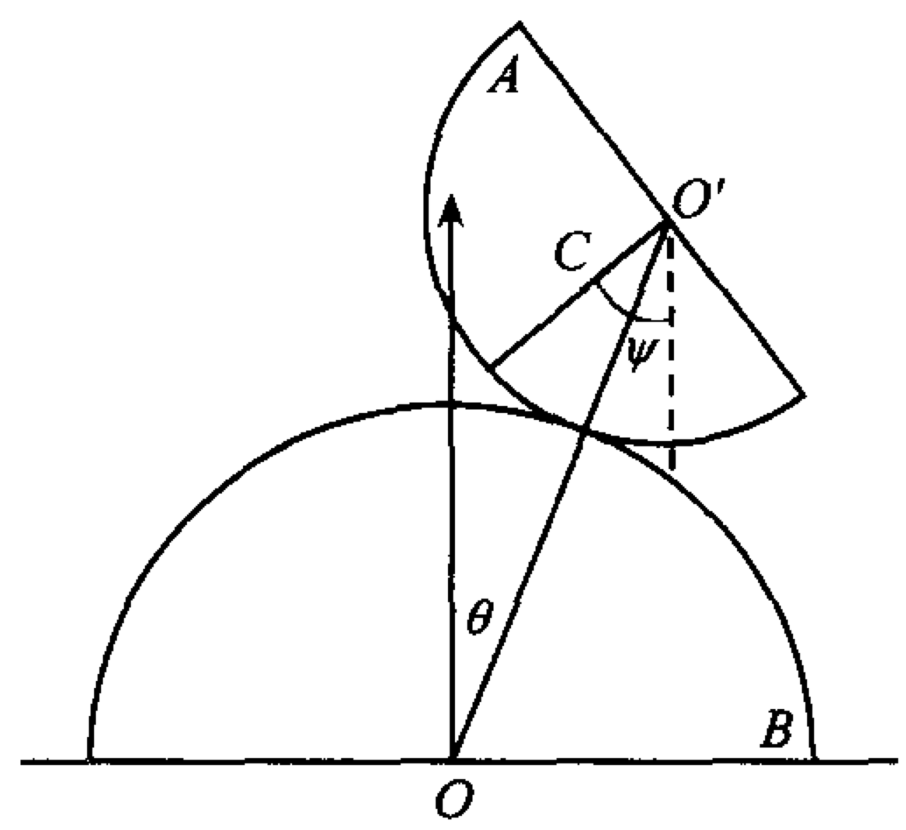


图 9.32

这里已用了 θ、φ 均为小量. 只保留到二级小量.

由纯滚动条件，

$$(R+r)\dot\theta - r\dot\psi = 0$$

$$\theta = \frac{r}{R+r}\psi$$

上式也可由纯滚动，两段弧相等，$R\theta = r(\psi-\theta)$ 得到.

$$V = V_0 + \frac{1}{2}mg\left[\frac{4}{3\pi}r - \frac{r^2}{R+r}\right]\psi^2$$

$\psi=0$ 为平衡位置，稳定平衡位置要求在 $\psi=0$，势能为极小值，即 $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\psi^2}\right|_{\psi=0} > 0$. 由此得

$$\frac{4}{3\pi}r - \frac{r^2}{R+r} > 0$$

$$R > \left(\frac{3\pi}{4}-1\right)r$$

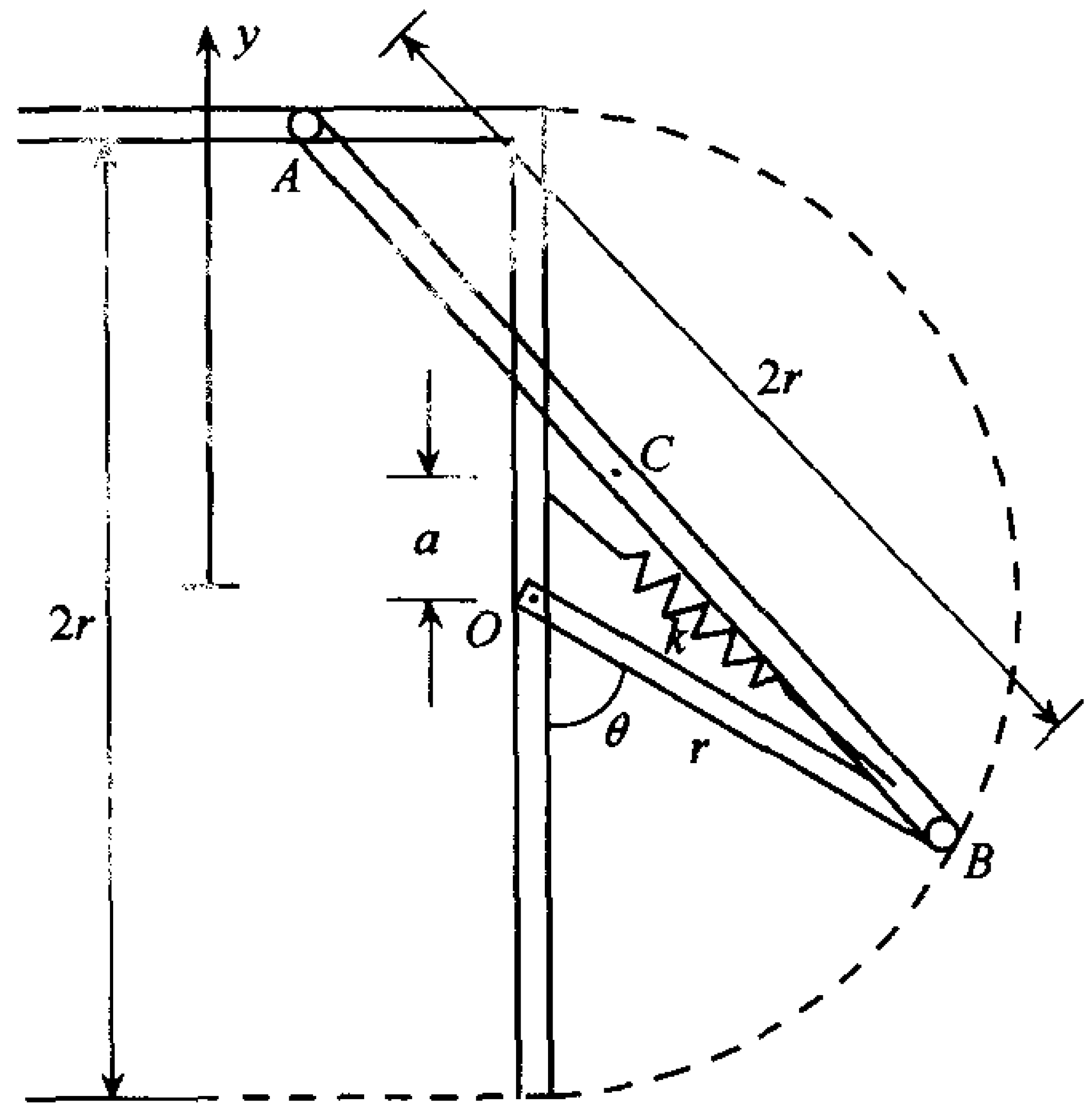


图 9.33

9.1.33 如图 9.33 所示,均质的汽车库大门 AB 质量为 m、长 $2r$、A 边可沿光滑水平滑槽运动,B 边两端各连一个弹簧,弹簧原长为 $r-a$,即当 $\theta=\pi$ 时,弹簧不受力的作用,B 边与曲柄 OB 用铰链连接,$OB=r$,其质量可忽略不计,OB 可绕固定点 O 转动. 为了保证大门转到铅直位置($\theta=0$)时平稳地关闭,弹簧的劲度系数 k 应多大?

解 方法一:大门要在 $\theta=0$ 处平稳地关闭,即要在 $\theta=0$ 附近处于随遇平衡,也即在 θ 很小时,$\frac{dV}{d\theta}=0$,因此必有

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=0$$

$$V=2\times\frac{1}{2}k\left[\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}-(r-a)\right]^2+mgy_C$$

$$y_B=-r\cos\theta$$

$$y_C=y_B+\frac{1}{2}(r-y_B)=\frac{1}{2}(r+y_B)=\frac{1}{2}r(1-\cos\theta)$$

$$V=k\left[\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}-(r-a)\right]^2+\frac{1}{2}mgr(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dV}{d\theta}=2k\left[\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}-(r-a)\right]\frac{1}{2}\frac{-2ra\sin\theta}{\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}}+\frac{1}{2}mgr\sin\theta$$

$$=-2kar\sin\theta\left(1-\frac{r-a}{\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}}\right)+\frac{1}{2}mgr\sin\theta$$

$\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时,均有$\frac{dV}{d\theta}=0$,均为平衡位置.

在 θ 很小时,$\sin\theta\approx\theta,\cos\theta\approx1$,

$$\frac{dV}{d\theta}\approx-2kar\theta\left(1-\frac{r-a}{r+a}\right)+\frac{1}{2}mgr\theta$$

$$=-4ka^2r\frac{\theta}{r+a}+\frac{1}{2}mgr\theta$$

要求在 θ 很小时,均为平衡位置,$\frac{dV}{d\theta}=0$,

$$-4ka^2r\frac{1}{r+a}+\frac{1}{2}mgr=0$$

$$k=\frac{mg(r+a)}{8a^2}$$

方法二:由$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=0$ 求 k.

前已求得

$$\frac{dV}{d\theta}=-2kra\sin\theta\left(1-\frac{r-a}{\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}}\right)+\frac{1}{2}mgr\sin\theta$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-2kra\cos\theta\left(1-\frac{r-a}{\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}}\right)$$

$$+2kra\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r-a}{\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}}\right)+\frac{1}{2}mgr\cos\theta$$

由$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0}=0$给出

$$-2kra\left(1-\frac{r-a}{r+a}\right)+\frac{1}{2}mgr=0$$

解出
$$k=\frac{mg(r+a)}{8a^2}$$

9.1.34　二铰拱受集中负载 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 作用，各部分尺寸如图 9.34 所示. 求铰链 B 处约束力的水平分量.

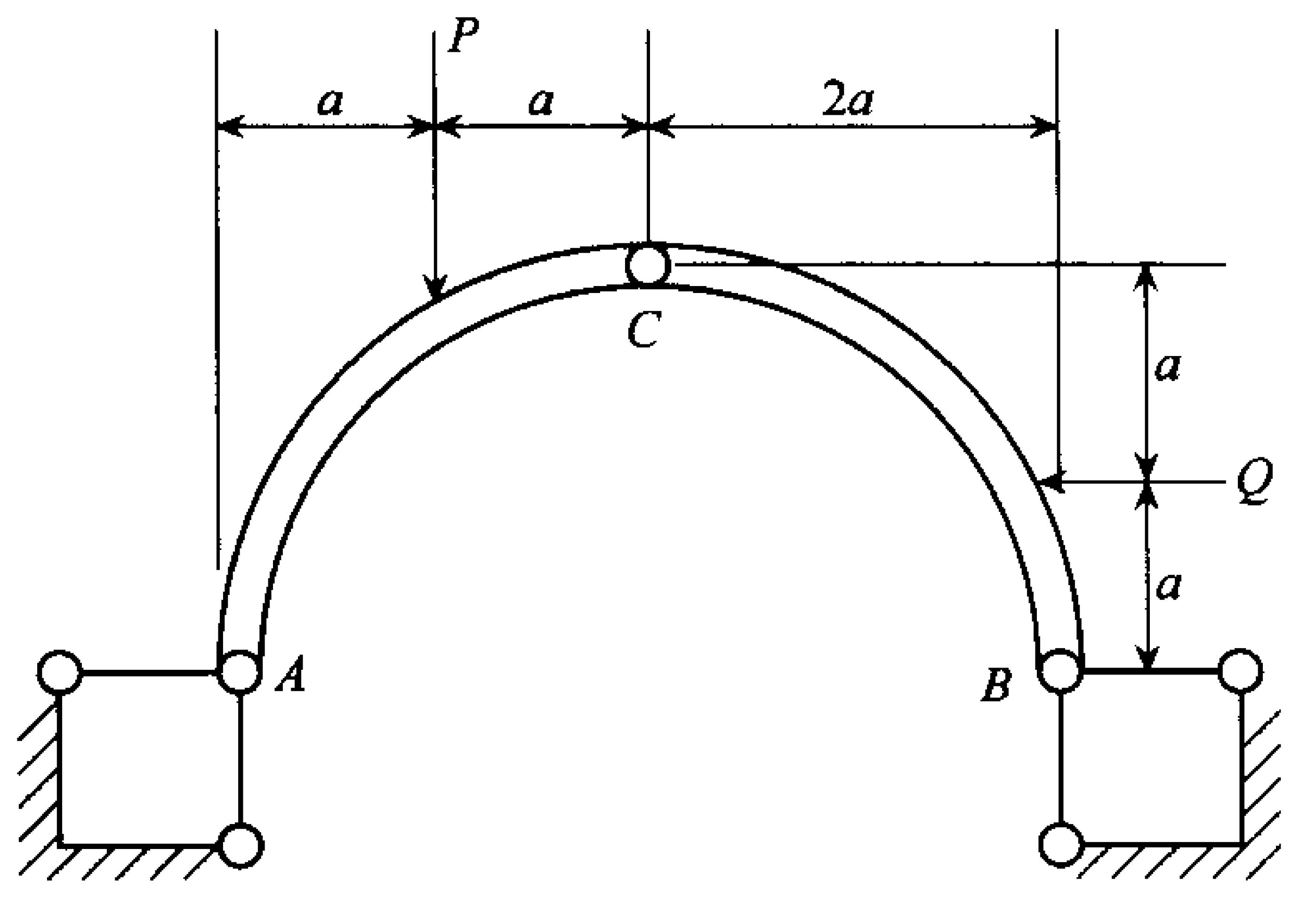


图 9.34

解　方法一：取图 9.35 所示的 x、y 坐标，平衡时，

$$\triangle ADG\cong\triangle CHE$$
$$\theta=\theta'=60°,\angle DAC=15°$$
$$AD=CE=2a$$
$$AC=2\sqrt{2}a$$

解除 B 处水平方向的约束，

$$y_D=2a\sin\theta$$
$$x_E=AC\cos(\theta-15°)+CE\sin\theta'$$
$$=2\sqrt{2}a\cos(\theta-15°)+2a\sin\theta'$$

注意：$x_E\neq 2a+2a\sin\theta'$，因为解除了 B 在水平方向的约束，应参照解图 9.36 写 x_E、y_D、x_B，

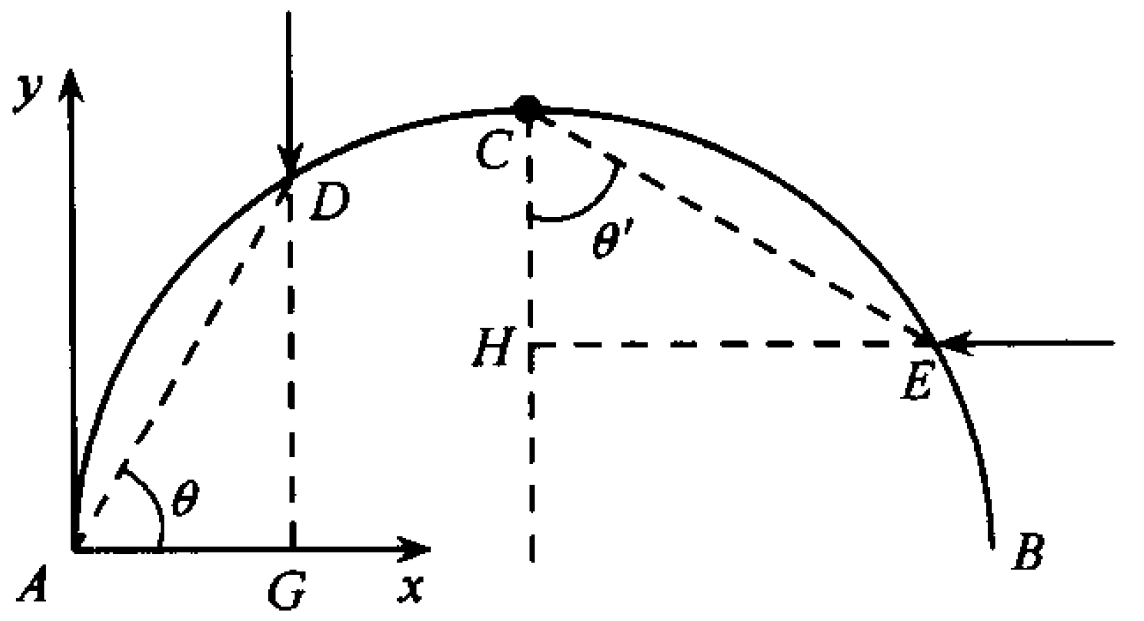


图 9.35

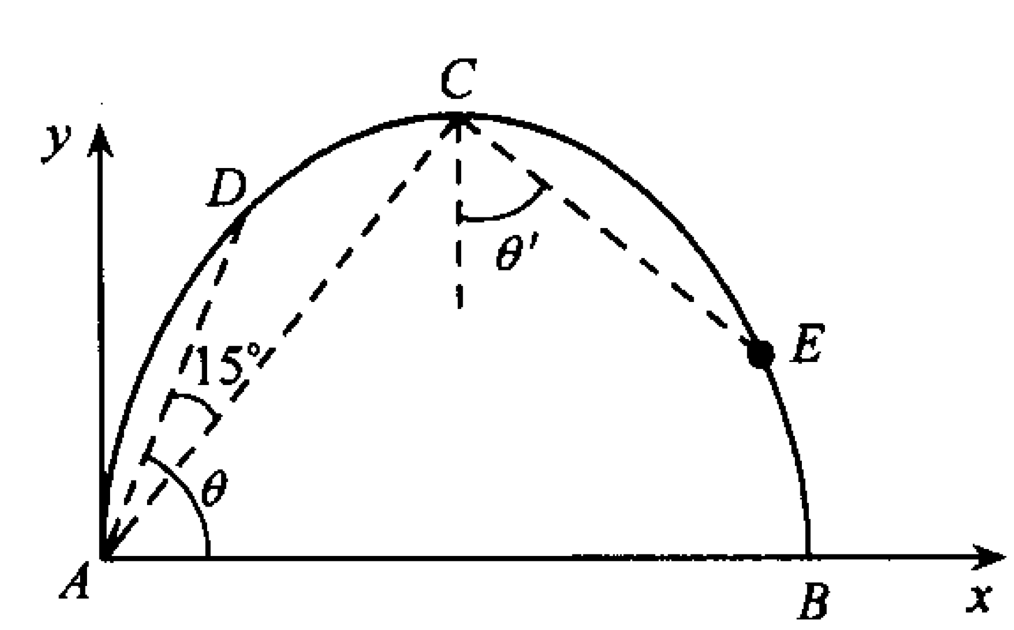


图 9.36

$$x_B = 2 \cdot AC\cos(\theta - 15°) = 4\sqrt{2}\,a\cos(\theta - 15°)$$

$$\delta y_D = 2a\cos\theta\delta\theta \tag{1}$$

$$\delta x_E = -2\sqrt{2}\,a\sin(\theta - 15°)\delta\theta + 2a\cos\theta'\delta\theta'$$

由$\overset{\frown}{ADC}$和$\overset{\frown}{CEB}$均为四分之一的圆周,从对称考虑,从几何上不难证明

$$\theta + \theta' = \text{常量}, \qquad \delta\theta' = -\delta\theta$$

$$\delta x_E = -2\sqrt{2}\,a\sin(\theta - 15°)\delta\theta - 2a\cos\theta'\delta\theta \tag{2}$$

$$\delta x_B = -4\sqrt{2}\,a\sin(\theta - 15°)\delta\theta \tag{3}$$

设铰链 B 处给予二铰拱的水平约束力为 X_B,

$$\delta W = -P\delta y_D - Q\delta x_E + X_B\delta x_B \tag{4}$$

将式(1)、(2)、(3)代入式(4),并考虑在平衡位置 $\theta=\theta'=60°$,$\delta W=0$,

$$-P \cdot 2a\cos60° - Q[-2\sqrt{2}\,a\sin45° - 2a\cos60°] + X_B(-4\sqrt{2}\sin45°) = 0$$

解得

$$X_B = \frac{1}{4}(3Q - P)$$

方法二:解除 B 处水平方向的约束.考虑在平衡位置处做虚运动,B 点的虚速度若沿 x 的负方向,则 C 点虚速度沿与 AC 垂直的向左上方方向,CB 段的虚运动的瞬心位于图 9.37 中的 O 点,在平衡位置,

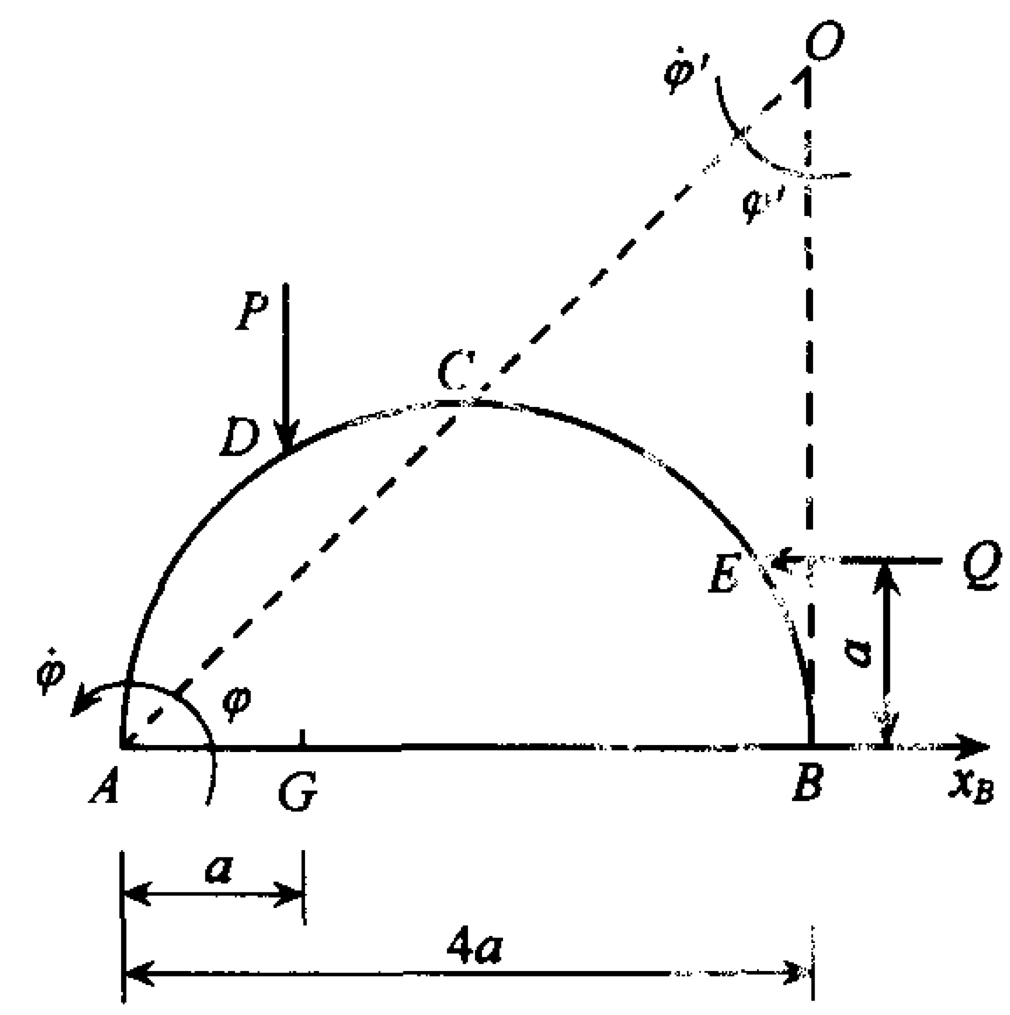


图 9.37

$$OB = AB = 4a$$

AC 段的虚运动是绕 A 点的转动,D 点在 $\boldsymbol{P}$ 的作用线方向的虚位移与 G 点的虚位移相同,在平衡位置时 A、C、O 在同一条直线上,虚位移后,AC 与 CO 不在同一条直线上,但仍有 $\varphi=\varphi'$,故 $\delta\varphi'=\delta\varphi$.

在平衡位置处

$$\varphi = \varphi' = 45°$$

$$\delta W = -Pa\delta\varphi + Q \cdot 3a\delta\varphi' - X_B \cdot 4a\delta\varphi'$$

$$= (-Pa + 3Qa - 4X_Ba)\delta\varphi = 0$$

$$-Pa + 3Qa - 4X_Ba = 0$$

$$X_B = \frac{1}{4}(3Q - P)$$

9.1.35　图 9.38 所示的平面桁架中各杆重量不计,求 AC 杆和 BC 杆的内力.

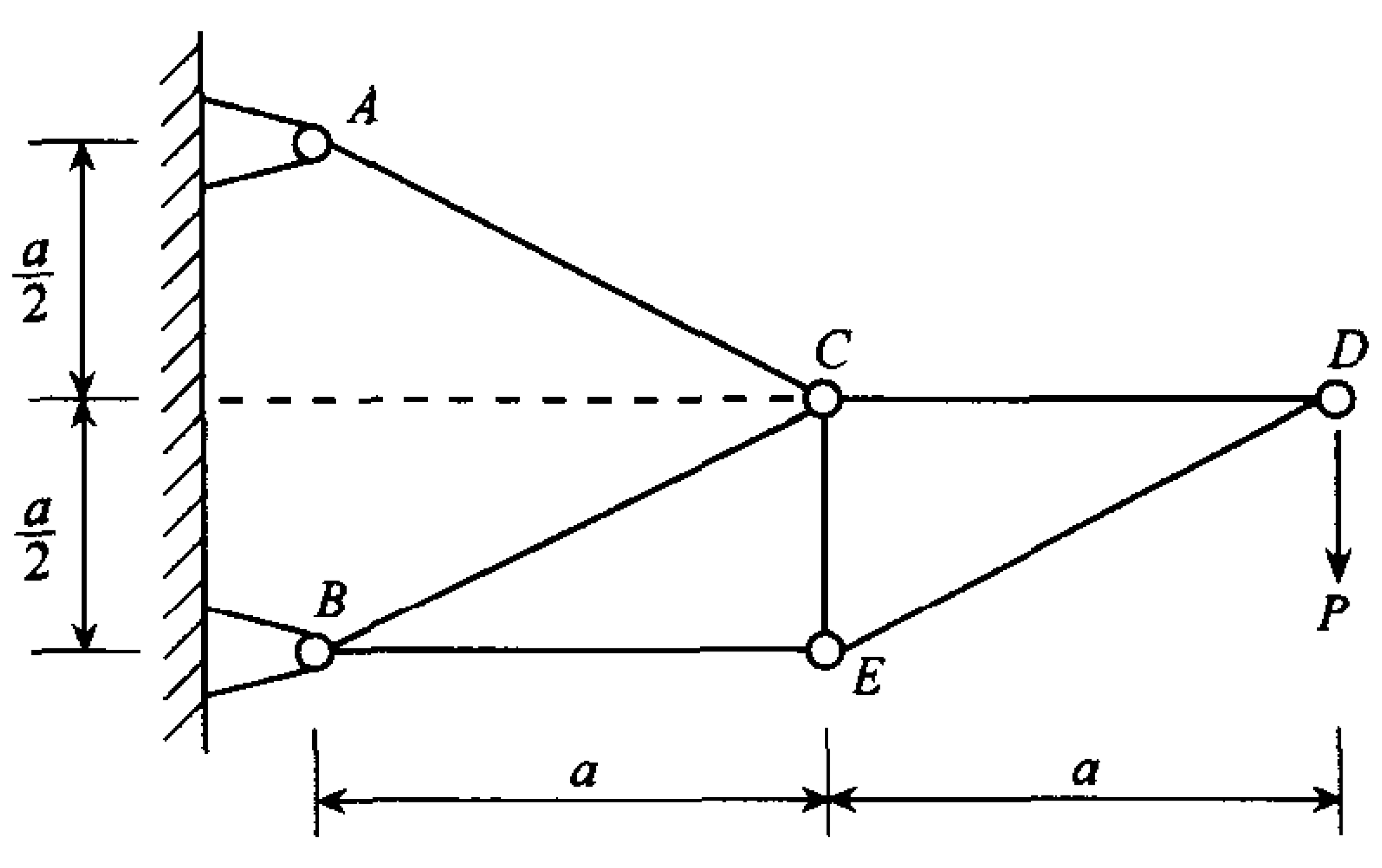


图 9.38

解　解除 A 处竖直方向的约束,取 y 轴竖直向下,B 为原点.设$\angle ABC=\varphi$,则

$$y_A = -2BC\cos\varphi = -\sqrt{5}\,a\cos\varphi$$

$$\delta y_A = \sqrt{5}\,a\sin\varphi\delta\varphi$$

A 做虚位移 δy_A 时,$BCDE$ 绕 B 点做 $\delta\varphi$

的虚位移. 设$\angle CDB=\angle DBE=\alpha$($\alpha$为常量).

$$\delta y_D=BD\delta\varphi\cdot\cos\alpha=2a\sec\alpha\cdot\delta\varphi\cos\alpha=2a\delta\varphi$$

平衡时
$$\sin\varphi=\frac{a}{BC}=\frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{5}a}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\delta W=P\delta y_D+Y_A\delta y_A$$
$$=P\cdot 2a\delta\varphi+Y_A\sqrt{5}a\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\delta\varphi=0$$
$$2aP+2Y_A=0$$
$$Y_A=-P$$

AB 杆是二力杆,在 A 端,AC 杆受外力必沿杆的方向,今沿 CA 的方向,可见 AC 杆的内力 N_{AC}为

$$N_{AC}=-Y_A\sec\varphi=P\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{a}{2}}\right)=\sqrt{5}P$$

为张力.

对整个桁架用平衡条件,

$$\sum_i Y_i=0$$
$$Y_A+Y_B+P=0$$

得
$$Y_B=0$$

考虑到 BC 杆、BE 杆均为二力杆,如 BC 杆的内力不为零,Y_B 也一定不为零,今 $Y_B=0$,可见 $N_{BC}=0$.

注意:在 B 处,桁架受到水平向右方向的力,在 A 处,桁架受到水平向左的力,其值为 $P\cot\varphi=2P$,故在 B 处,桁架受到水平向右,其值为 $2P$ 的力,BE 杆的内力为压力.

9.2　达朗贝尔原理、达朗贝尔——拉格朗日方程

9.2.1　用达朗贝尔原理解 6.3.10 题.

解　取图 9.39 所示的 xy 坐标,用 x_1 表示半球的球心位置,x_2、y_2 表示质点的位置,

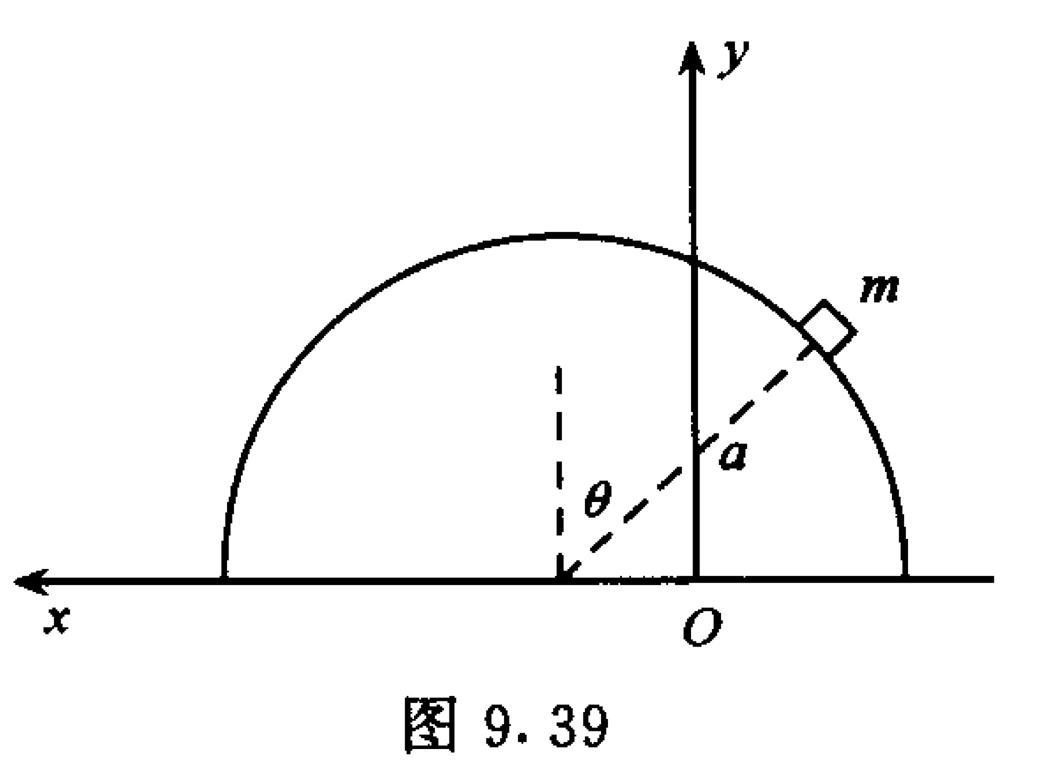


图 9.39

$$x_2=x_1-a\sin\theta$$
$$y_2=a\cos\theta$$
$$\dot{x}_2=\dot{x}_1-a\dot{\theta}\cos\theta,\qquad \dot{y}_2=-a\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\ddot{x}_2=\ddot{x}_1-a\ddot{\theta}\cos\theta+a\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{1}$$
$$\ddot{y}_2=-a\ddot{\theta}\sin\theta-a\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{2}$$
$$\delta x_2=\delta x_1-a\cos\theta\delta\theta \tag{3}$$

$$\delta y_2 = -a\sin\theta\delta\theta \tag{4}$$

由
$$\sum_{i=1}^{3n}(F_i - m_i\ddot{x}_i)\cdot\delta x_i = 0$$

得
$$-M\ddot{x}_1\delta x_1 - m\ddot{x}_2\delta x_2 + (-mg - m\ddot{y}_2)\delta y_2 = 0$$

将式(1)、(2)、(3)、(4)代入上式得

$$[-(M+m)\ddot{x}_1 + ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta]\delta x_1$$
$$+ [m\ddot{x}_1 a\cos\theta - ma^2\ddot{\theta} + mga\sin\theta]\delta\theta = 0$$

因为 δx_1、$\delta\theta$ 相互独立,它们的系数分别为零,

$$(M+m)\ddot{x}_1 - ma\ddot{\theta}\cos\theta + ma\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \tag{5}$$

$$m\ddot{x}_1\cos\theta - ma\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \tag{6}$$

从(5)、(6)两式中消去 $\ddot{x}_1$,经整理后可得

$$\frac{M + m\sin^2\theta}{m+M}a\ddot{\theta} + \frac{m}{m+M}a\dot{\theta}^2\sin\theta = g\sin\theta$$

用 $\ddot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}$,上式可改写为

$$\frac{M + m\sin^2\theta}{2(m+M)}a\mathrm{d}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{m+M}a\dot{\theta}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = g\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

左边是恰当微分,积分得

$$\frac{M + m\sin^2\theta}{2(m+M)}a\dot{\theta}^2 = -g\cos\theta + C$$

由初始条件:$\theta=\alpha$ 时,$\dot{\theta}=0$ 定出 $C=g\cos\alpha$.

将 C 的式子代入上式,解出 $\dot{\theta}$,得

$$\dot{\theta} = \left[\frac{2g}{a}\frac{m+M}{M+m\sin^2\theta}(\cos\alpha - \cos\theta)\right]^{1/2}$$

与 6.3.10 题解得的结果

$$\dot{\theta} = \left[\frac{2g}{a}\cdot\frac{\cos\alpha - \cos\theta}{1 - \dfrac{m}{m+M}\cos^2\theta}\right]^{1/2}$$

是相同的.

9.2.2 用达朗贝尔原理解 7.4.2 题.

解 取图 9.40 所示的 x、y 和 φ 坐标,图中画出了系统受到的主动力的情况.由

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

$$(Mg\sin\alpha - T - Ma)\delta x + \left(Tr - \frac{1}{2}Mr^2\beta\right)\delta\varphi$$
$$+ (mg - T - ma')\delta y = 0 \tag{1}$$

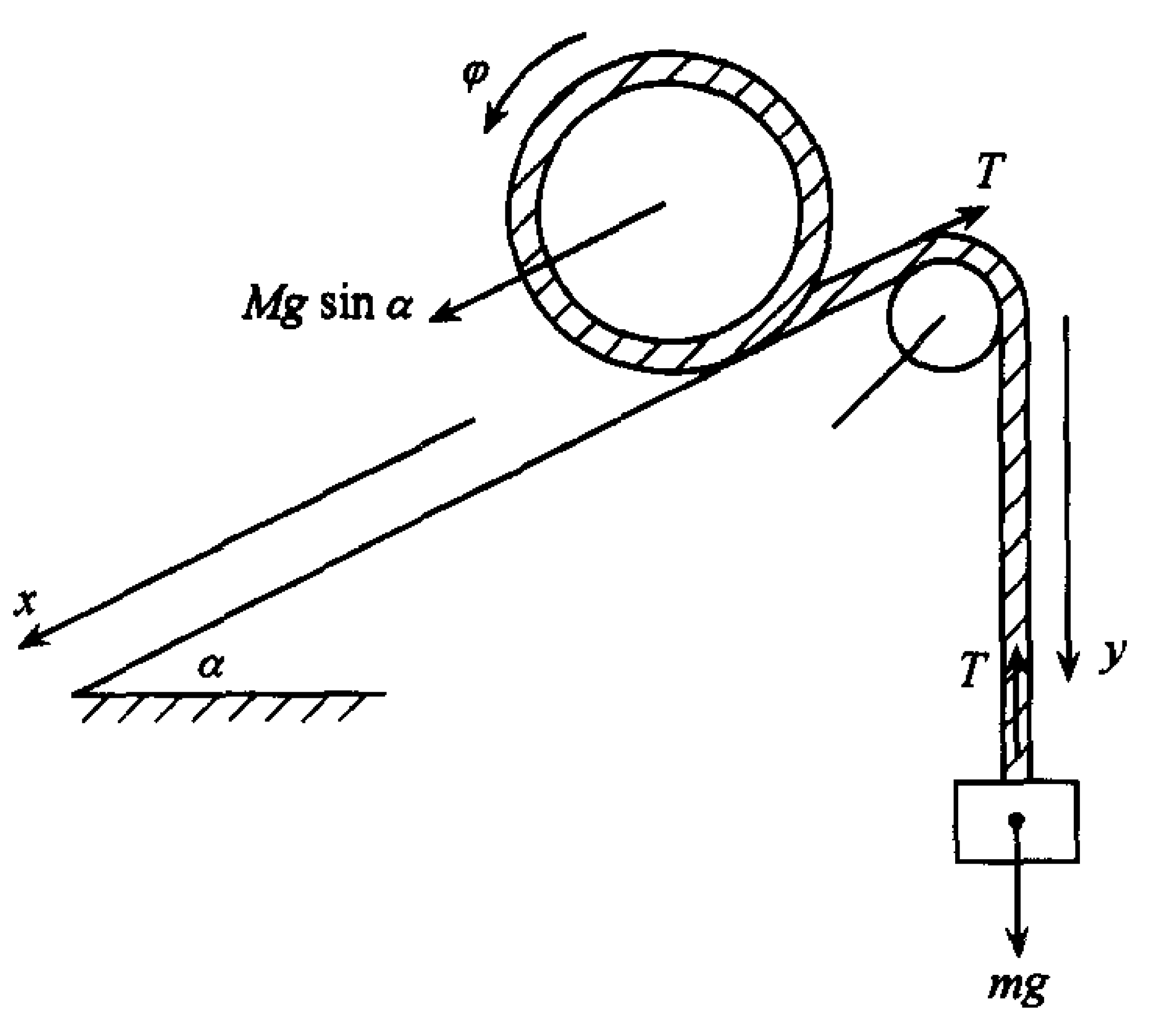


图 9.40

其中 a 是圆柱质心沿斜面向下的加速度,a'是

重物竖直向下的加速度.

x、y、φ 间有约束关系，考虑到绳子不可伸长，

$$x + y - r\varphi = 常量 \tag{2}$$

$$\delta x + \delta y - r\delta\varphi = 0$$

取 δx、$\delta\varphi$ 为独立的虚位移，

$$\delta y = r\delta\varphi - \delta x \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)可得

$$(Mg\sin\alpha - Ma - mg + m^a)\delta x + \left(-\frac{1}{2}Mr^2\beta + mgr - ma'r\right)\delta\varphi = 0$$

δx、$\delta\varphi$ 的系数分别为零，得

$$Ma - ma' = Mg\sin\alpha - mg \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2}Mr\beta - ma' = -mg \tag{5}$$

由式(2)对 t 求导两次，得

$$a + a' - r\beta = 0$$

$$r\beta = a + a' \tag{6}$$

用式(6)，式(5)可改写为

$$\frac{1}{2}Ma + \left(m + \frac{1}{2}M\right)a' = mg \tag{7}$$

由(4)、(7)两式解出

$$a' = \frac{3m - M\sin\alpha}{M + 3m}g$$

$$a = \frac{(M + 2m)\sin\alpha - m}{M + 3m}g$$

$$\beta = \frac{1}{r}(a + a') = \frac{2mg(1 + \sin\alpha)}{(M + 3m)r}$$

再对重物用牛顿第二定律或用达朗贝尔原理，可求绳子张力 T.

如果系统包括绳子，绳子张力不做虚功，可作为约束力处理. 可更容易地得到式(4)、(5).

9.2.3　用达朗贝尔原理解 7.4.40 题.

解　各杆的角速度的正向规定如图 9.41 所示. 此时，用 7.4.40 题的办法求得 BD 杆的质心 C 的加速度

$$\boldsymbol{a}_C = -a\left(1 + \frac{a}{2b}\right)\omega^2\boldsymbol{i}$$

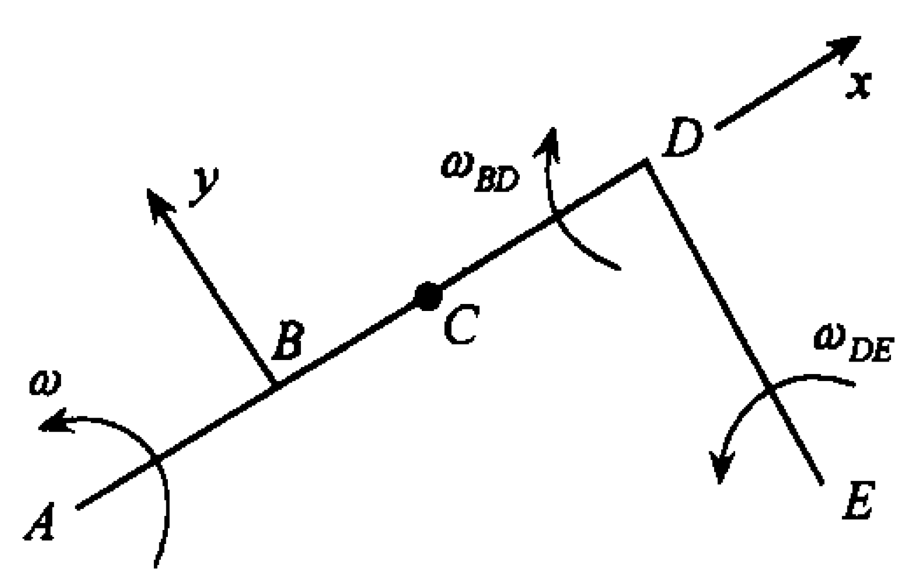


图 9.41

BD 杆的角加速度

$$\beta_{BD} = 0$$

DE 杆的角加速度

$$\beta_{DE} = \frac{a}{d}\left(1 + \frac{a}{b}\right)\omega^2$$

对 BD 杆用达朗贝尔原理，

$$\left[X_B + X_D + ma\left(1 + \frac{a}{2b}\right)\omega^2\right]\delta x + (Y_B + Y_D)\delta y + \left(Y_B \cdot \frac{b}{2} - Y_D \cdot \frac{d}{2}\right)\delta\theta = 0$$

其中 θ 是 BD 在质心平动参考系中绕 C 点的转角.

$$X_B + X_D + ma\left(1 + \frac{a}{2b}\right)\omega^2 = 0 \tag{1}$$

$$Y_B + Y_D = 0 \tag{2}$$

$$Y_B \cdot \frac{b}{2} - Y_D \cdot \frac{b}{2} = 0 \tag{3}$$

由式(2)、(3)可得

$$Y_B = Y_D = 0$$

对 DE 杆用达朗贝尔原理,

$$\left(X_D d - \frac{1}{3}md^2\beta_{DE}\right)\delta\psi = 0$$

这里的 X_D 是(1)式中的 X_D 的反作用力,ψ 是 DE 杆绕 E 点逆时针转动的角度.

$$X_D d - \frac{1}{3}md^2\beta_{DE} = 0$$

$$X_D = \frac{1}{3}md\beta_{DE} = \frac{1}{3}ma\left(1 + \frac{a}{b}\right)\omega^2 \tag{4}$$

由式(1)、(4)得

$$X_B = -\frac{1}{3}ma\left(4 + \frac{5a}{2b}\right)\omega^2$$

9.2.4 均匀细杆 AB 可绕通过其杆上的固定点 O 的水平轴自由转动,此水平轴又绕通过 O 点的竖直轴做恒定角速度为 ω 的转动,如 $OA=a$,$OB=b$,试用达朗贝尔原理求 AB 杆绕竖直轴做稳定转动时它与竖直轴所成的角 α.

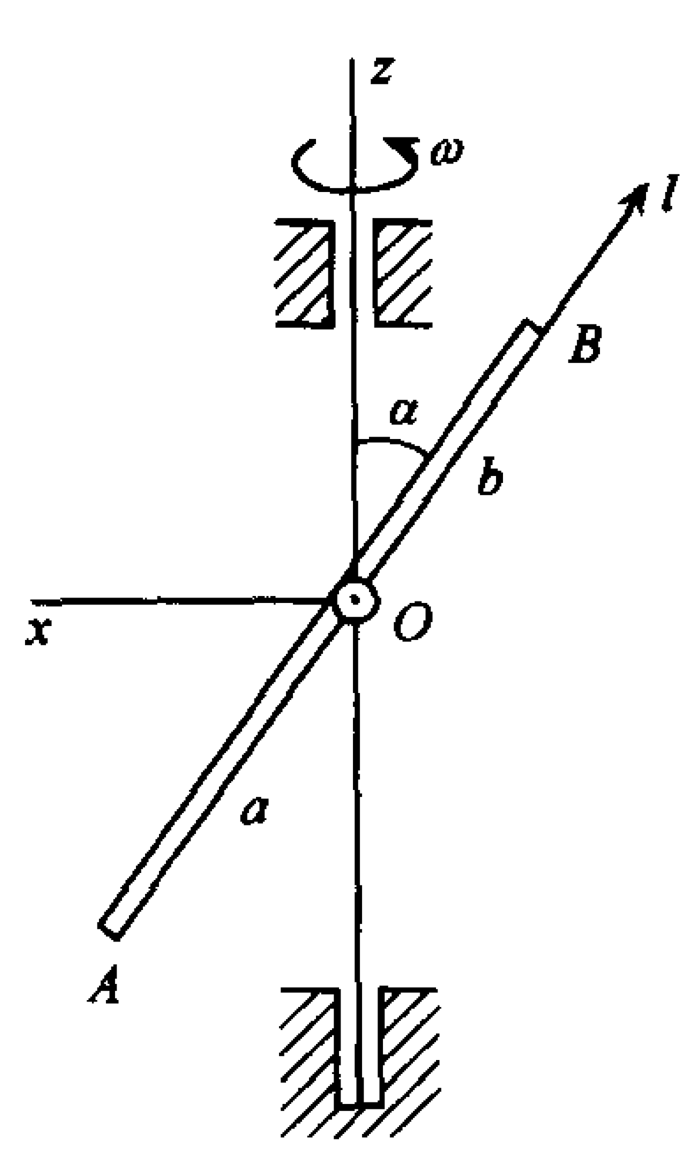


图 9.42

解 取 O 为 x、z 轴的原点,z 轴竖直向上,x 轴水平,并使 z 轴、x 轴和杆在同一竖直平面内,取此竖直平面为参考系,要在此参考系中,求杆的平衡位置,即求图 9.42 中的 α 角.

用 δW_1、δW_2 分别表示杆在 α 处做虚位移 $\delta\alpha$ 时重力和惯性离轴力对整个杆做的虚功.

设杆的线密度为 η,做上述虚位移时,重力对杆的 $l \sim l+\mathrm{d}l$ 段质元做的虚功为

$$\eta g dl \cdot \sin\alpha \cdot l\delta\alpha$$

$$\delta W_1 = \int_{-a}^{b} \eta g \sin\alpha \cdot l \mathrm{d}l \delta\alpha = \frac{1}{2}\eta g \sin\alpha (b^2 - a^2)\delta\alpha$$

做上述虚位移时,惯性离轴力对杆的 $l \sim l+\mathrm{d}l$ 段质元做的虚功为

$$\eta \mathrm{d}l \cdot l\sin\alpha \cdot \omega^2\cos\alpha \cdot l\delta\alpha$$

$$\delta W_2 = \int_{-a}^{b} \eta\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot l^2 \mathrm{d}l \delta\alpha = \frac{1}{3}\eta\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha (b^3 + a^3)$$

由在平衡位置　$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = 0$ 得

$$\frac{1}{2}\eta g\sin\alpha(b^2-a^2)+\frac{1}{3}\eta\omega^2\sin\alpha\cos\alpha(b^3+a^3)=0$$

可得

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}\eta g(a^2-b^2)}{\frac{1}{3}\eta\omega^2(a^3+b^3)}=\frac{3g(a-b)}{2\omega^2(a^2-ab+b^2)}$$

注意:计算重力对整个杆做的虚功,因为各质元受到的重力与质元的质量成正比,可以用作用于杆的质心的合重力做的虚功,而计算惯性离轴力对整个杆做的虚功,因为各质元受到的惯性离轴力并不与质元的质量成正比,不等于作用于杆的质心的合惯性力做的虚功,也不等于位于质心、质量等于杆的质量的质点所受的惯性离轴力做的虚功.

9.2.5　重量为 P 的均质圆柱沿与水平面夹角为 α 的轻悬臂梁做无滑动的滚动如图 9.4.3 所示.用达朗贝尔原理求悬臂梁在 O 点受到的约束力.

解　取图 9.44 所示的 x、y 和 φ、α 坐标,图 9.44(a)画出了悬臂梁所受的主动力、约束力和约束力矩,图 9.44(b)画出了圆柱受到的真实力和达朗贝尔惯性力,其中 f 是圆柱和悬臂梁相互作用的静摩擦力,N 是圆柱对梁的正压力及其反作用力.

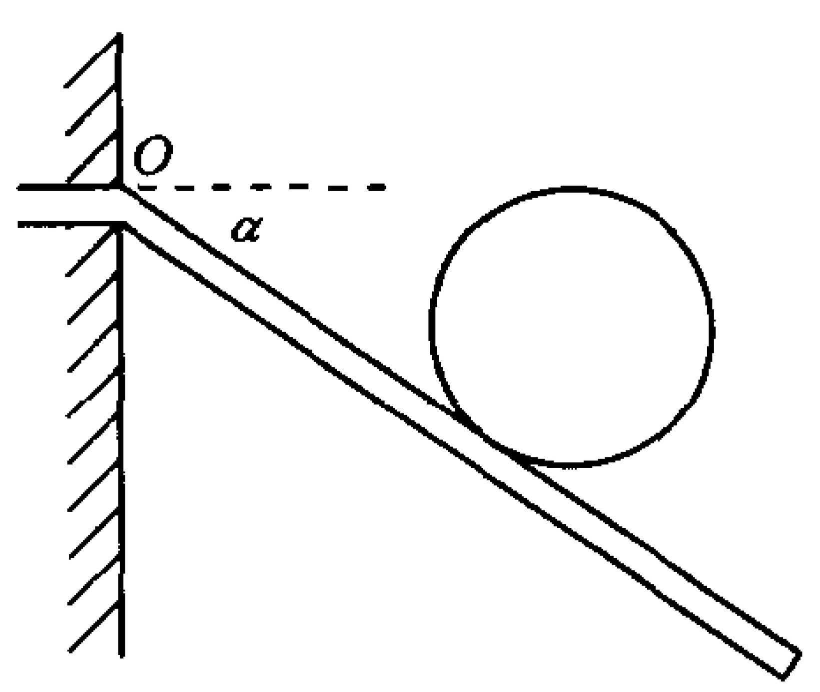


图 9.43

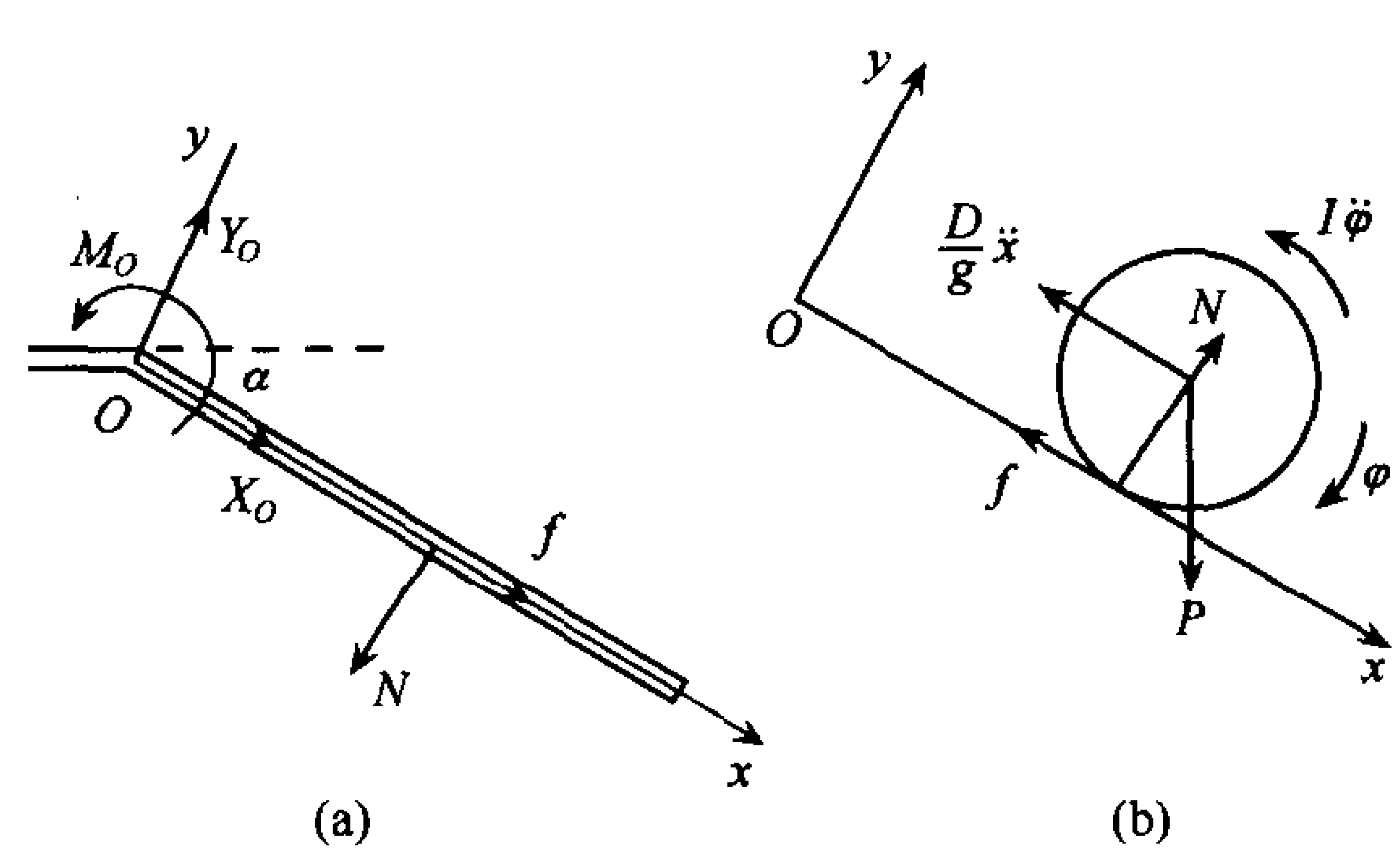


图 9.44

对悬臂用达朗贝尔原理,解除 O 点处的约束,X_O、Y_O 和 M_O 均视为主动力,x、y、α 为广义坐标.

$$\delta W=(X_O+f)\delta x+(Y_O-N)\delta y+(Nx-M_O)\delta\alpha=0$$

δx、δy、$\delta\alpha$ 均独立,得

$$X_0=-f,\quad Y_0=N,\quad M_0=N_x$$

对圆柱用达朗贝尔原理,因需求 f 和 N,暂不考虑纯滚动这个约束,也不考虑 y 方向对圆柱质心的约束,

$$\delta W=\left(P\sin\alpha-\frac{P}{g}\ddot{x}-f\right)\delta x+(N-P\cos\alpha)\delta y+\left(fr-\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi=0$$

其中用了圆柱对其对称轴的转动惯量 $I=\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2$,$r$ 是圆柱的半径.

δx、δy、$\delta\varphi$ 均独立,得

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P\sin\alpha - f \tag{1}$$

$$N = P\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\ddot{\varphi} = fr \tag{2}$$

再用纯滚动得到的约束关系，

$$\dot{x} - r\dot{\varphi} = 0, \qquad \ddot{x} = r\ddot{\varphi}$$

与式(1)、(2)联立可解出

$$f = \frac{1}{3}P\sin\alpha$$

所以 $$X_O = -\frac{1}{3}P\sin\alpha, \quad Y_O = P\cos\alpha$$

$$M_O = Px\cos\alpha$$

9.2.6 一个质量为 m 的质点通过一根无重量的不可伸长的绳子系在半径为 R、竖直放置的固定圆柱边缘，绳子紧缠在圆柱上，质点与圆柱相接触. 给质点一个沿径向方向的水平冲量，使质点获得一个初速度 v_0，质点被约束在与圆柱垂直的光滑水平面内运动. 用达朗贝尔原理求以后未缠在圆柱体上的绳子长度 l 与时间 t 的关系.

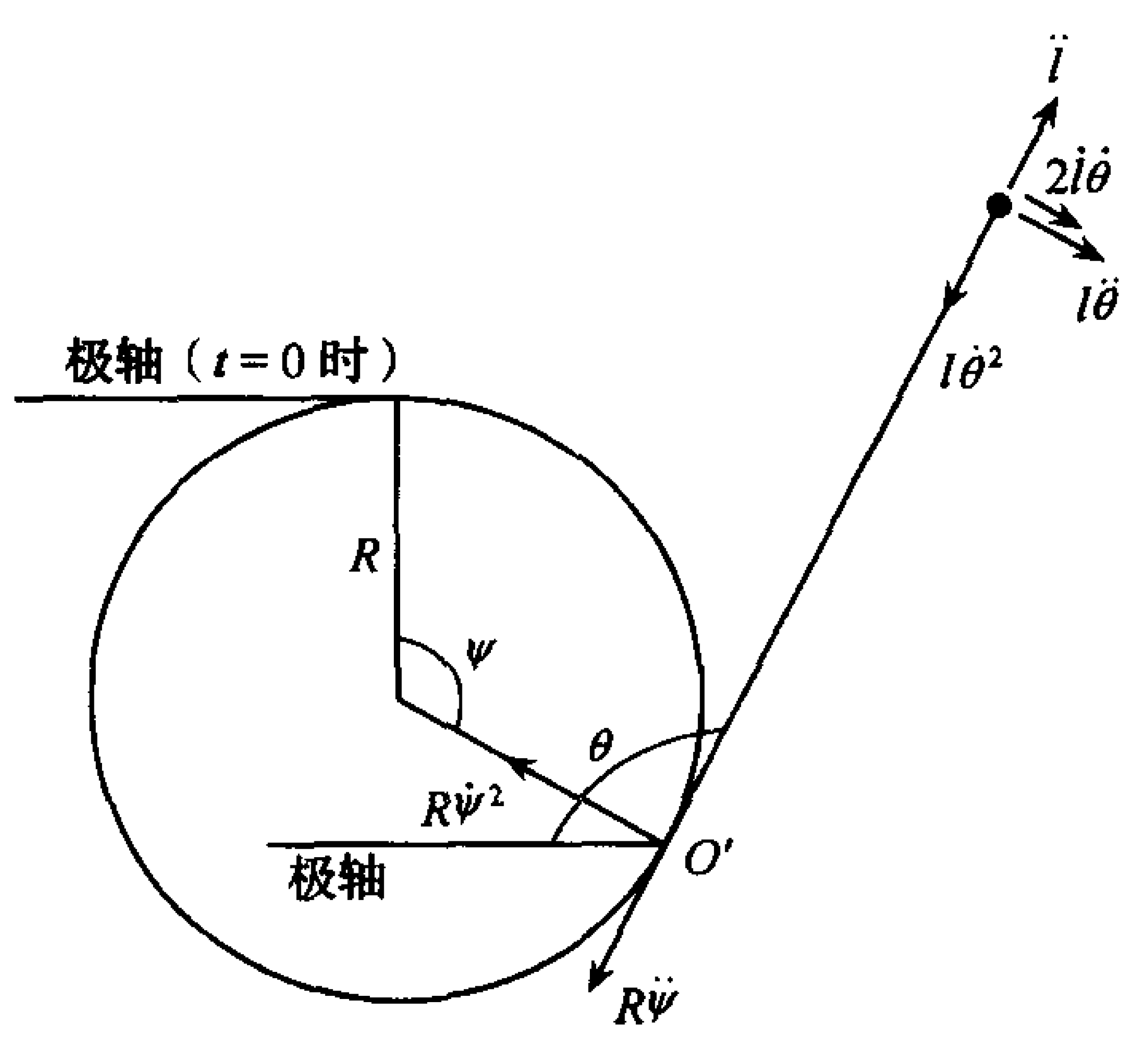


图 9.45

解 方法一：考虑以未缠在圆柱上的绳子为参考系，其原点在绳子的未缠部分与尚缠在圆柱上部分的分界点，质点与此原点的距离 l 是随时间变化的，有速度 $\dot{l}$ 和加速度 $\ddot{l}$. 这个参考系相对于静止的惯性参考系既有平动，又有转动，取坐标系的极轴总平行于 $t=0$ 时圆柱的切线方向，在图 9.45 中画出了在 $t(\neq 0)$时刻坐标系的极轴. 这个坐标系的运动是参考系的平动部分，图中还画出了质点的对静参考系的绝对加速度的各个组成部分，$\ddot{l}$ 是相对加速度(对(动)参考系的加速度) $R\ddot{\psi}$、$R\dot{\psi}^2$ 是与参考系的平动关联的牵连加速度，$l\ddot{\theta}$、$l\dot{\theta}^2$ 是与参考系的转动关联的牵连加速度，与质点所在位置有关，故画在质点处，而 $R\ddot{\psi}$、、$R\dot{\psi}^2$ 与质点所在位置无关，故画在坐标系的原点 O' 处. 由于参考系有转动，转动角速度为 $\dot{\theta}$，方向垂直纸面向下，质点对参考系有速度 $\dot{l}$，故有科里奥利加速度 $2\dot{l}\dot{\theta}$.

取极坐标系的 l、θ 为广义坐标，质点所受的主动力有绳子张力 T 和图中所画的与各加速度分量相应的达朗贝尔惯性力，分别为质量与加速度的乘积的负值，各力的正向规定与图中所画的各加速度方向相反.

$$\delta W = (mR\ddot{\psi} + ml\dot{\theta}^2 - m\ddot{l} - T)\delta l + (mR\dot{\psi}^2 - ml\ddot{\theta} - 2m\dot{l}\dot{\theta})l\delta\theta = 0$$

因为 δl、$\delta\theta$ 相互独立，可得

$$m(R\ddot{\psi}+l\dot{\theta}^2-\ddot{l})-T=0 \tag{1}$$

$$R\dot{\psi}^2-l\ddot{\theta}-2\dot{l}\,\dot{\theta}=0 \tag{2}$$

θ 角的两条边与 ψ 角的两条边分别垂直，

$$\theta=\psi \tag{3}$$

又有约束关系

$$l=R\psi \tag{4}$$

从式(3)、(4)得

$$R\ddot{\psi}=\ddot{l},\quad l\dot{\theta}^2=\frac{1}{R^2}l\dot{l}^2$$

$$R\dot{\psi}^2=\frac{1}{R}\dot{l}^2,\quad l\ddot{\theta}=\frac{1}{R}l\ddot{l},\quad 2\dot{l}\,\dot{\theta}=\frac{2}{R}\dot{l}^2$$

代入式(1)、(2)得

$$T=\frac{1}{R^2}l\dot{l}^2 \tag{5}$$

$$l\ddot{l}+\dot{l}^2=0 \tag{6}$$

用 $\ddot{l}=\frac{\mathrm{d}\dot{l}}{\mathrm{d}l}\dot{l}$，可将式(6)积分，得

$$l\dot{l}=C$$

因为 $t=0$ 时，$l=0$，$\dot{l}=\infty$，不能由此定出 C.

再用式(3)、(4)，

$$C=l\dot{l}=lR\dot{\psi}=lR\dot{\theta}=R(l\dot{\theta})_{t=0}=Rv_0$$

所以

$$l\dot{l}=Rv_0$$

$$\int_0^l l\mathrm{d}l=\int_0^t Rv_0\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}l^2=Rv_0t,\qquad l=\sqrt{2Rv_0t}$$

方法二：用静参考系，取静坐标系 Oxy，O 是 $t=0$ 时质点所在位置，x 轴沿切线方向，即图 9.45 中 $t=0$ 时的极轴，y 轴沿圆柱的半径方向，向外为正. t 时刻，质点的 x、y 坐标为

$$x=x_{O'}+l\cos\theta=-R\sin\psi+l\cos\theta$$

$$y=y_{O'}+l\sin\theta=-R+R\cos\psi+l\sin\theta$$

$$\dot{x}=-R\cos\psi\dot{\psi}+\dot{l}\cos\theta-l\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}=&-R\cos\psi\ddot{\psi}+R\cos\psi\dot{\psi}^2+\ddot{l}\cos\theta-\dot{l}\,\dot{\theta}\,l\sin\theta\\&-\dot{l}\,\dot{\theta}\sin\theta-l\cos\theta\dot{\theta}^2-l\sin\theta\ddot{\theta}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\dot{y}=-R\sin\psi\dot{\psi}+\dot{l}\sin\theta+l\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}=&-R\cos\psi\dot{\psi}^2-R\sin\psi\ddot{\psi}+\ddot{l}\sin\theta+\dot{l}\cos\theta\dot{\theta}\\&+\dot{l}\,\dot{\theta}\cos\theta+\dot{l}\,\dot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta\end{aligned} \tag{8}$$

$$\delta W = (-T\cos\theta - m\ddot{x})\delta x + (-T\sin\theta - m\ddot{y})\delta y = 0$$

$$m\ddot{x} = -T\cos\theta \tag{9}$$

$$m\ddot{y} = -T\sin\theta \tag{10}$$

式(9)×sinθ−式(10)×cosθ,得

$$\ddot{x}\sin\theta - \ddot{y}\cos\theta = 0 \tag{11}$$

将式(7)、(8)代入式(11),并用 $\psi=\theta$,化简后得

$$R\dot{\psi}^2 - l\ddot{\theta} - 2\dot{l}\,\dot{\theta} = 0$$

正是方法一中的式(2),以下与方法一的做法相同.

9.3 拉格朗日方程

9.3.1 一个质量为 m 的质点在平面上运动,不采用极坐标 r、φ,而用 r 和 $\sin\varphi$ 为广义坐标,写出此质点的动能.

解 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$

今用 r 和 $q=\sin\varphi$ 为广义坐标,

$$x = r\cos\varphi = r\sqrt{1-q^2}$$

$$y = r\sin\varphi = rq$$

$$\dot{x} = \dot{r}\sqrt{1-q^2} - \frac{rq\dot{q}}{\sqrt{1-q^2}}$$

$$\dot{y} = \dot{r}q + r\dot{q}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{r}\sqrt{1-q^2} - \frac{rq\dot{q}}{\sqrt{1-q^2}}\right)^2 + (\dot{r}q + r\dot{q})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2\dot{q}^2}{1-q^2}\right)$$

9.3.2 在一根拉紧的弹性绳上等距离(距离为 a)地连着小球,两端固定,平衡时,弹性绳是水平的(重力可忽略不计),小球仅限于垂直方向运动,位移很小,即图 9.46 中 y_1、y_2、…、y_5 均为小量,平衡时绳子张力为 τ,写出系统的势能.

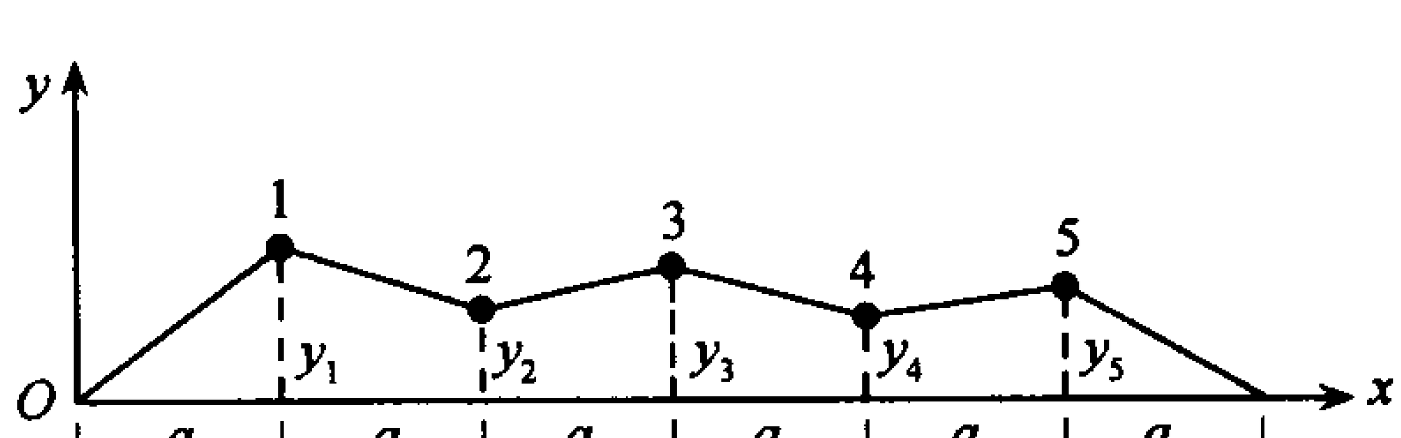


图 9.46

解 考虑球 1、球 2 沿 y 方向的受力 f_1、f_2,图 9.47(a)、(b)分别画出了球 1 和球 2 受两边绳子张力的情况,

$$f_1 = f_{10} + f_{12} = -T_{10}\sin\alpha - T_{12}\sin\beta$$

$$= -T_{10}\cos\alpha\tan\alpha - T_{12}\cos\beta\cdot\tan\beta$$

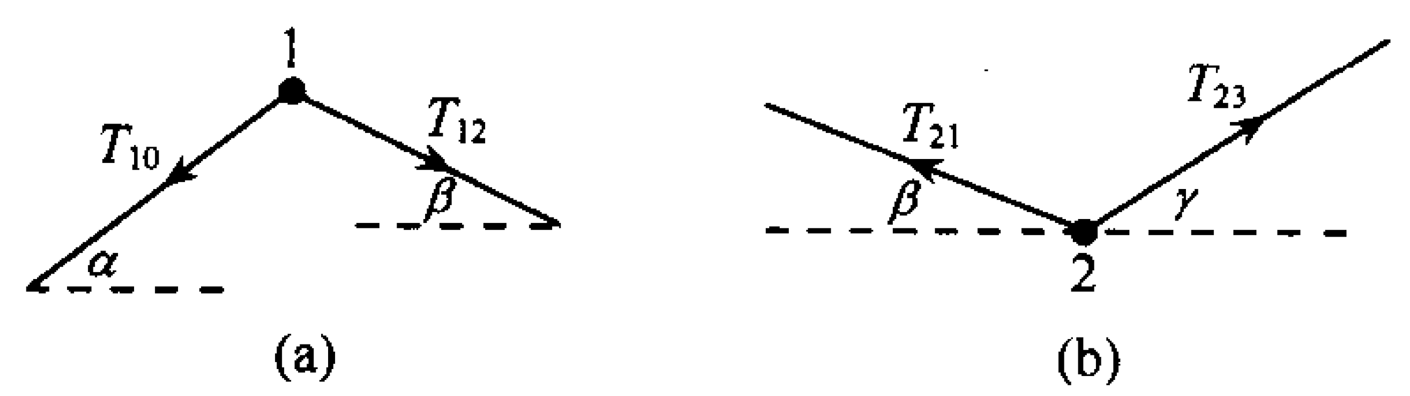


图 9.47

α,β 均为小量. 又因水平方向合力为零，

$$T_{10}\cos\alpha = T_{12}\cos\beta = \tau$$

所以

$$f_1 = -\tau\tan\alpha - \tau\tan\beta = -\tau\frac{y_1}{a} - \tau\frac{y_1 - y_2}{a}$$

同样可写出球 2 受到左边绳子在 y 方向的力为

$$f_{21} = \tau\frac{y_1 - y_2}{a} \quad 或 \quad -\tau\frac{y_2 - y_1}{a}$$

对于 f_{10} 可引入势能

$$V_{10} = \frac{\tau}{2a}y_1^2$$

$$f_{10} = -\frac{\partial V_{10}}{\partial y_1} = -\frac{\tau}{a}y_1$$

对于 f_{12} 和 f_{21} 可引入势能

$$V_{12} = \frac{\tau}{2a}(y_1 - y_2)^2$$

$$f_{12} = -\frac{\partial V_{12}}{\partial y_1} = -\frac{\tau}{a}(y_1 - y_2)$$

$$f_{21} = -\frac{\partial V_{12}}{\partial y_2} = \frac{\tau}{a}(y_1 - y_2)$$

照此办法可得系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= V_{10} + V_{12} + V_{23} + V_{34} + V_{45} + V_{56} \\ &= \frac{\tau}{2a}y_1^2 + \frac{\tau}{2a}(y_1 - y_2)^2 \\ &\quad + \frac{\tau}{2a}(y_2 - y_3)^2 + \frac{\tau}{2a}(y_3 - y_4)^2 + \frac{\tau}{2a}(y_4 - y_5)^2 + \frac{\tau}{2a}y_5^2 \\ &= \frac{\tau}{a}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_5^2 - y_1y_2 - y_2y_3 - y_3y_4 - y_4y_5). \end{aligned}$$

9.3.3　劲度系数分别为 $k_i(i=1,2,3,4)$ 的四根弹簧，原长分别为 l_{i0}，一端连在 P 点，另一端分别连在固定点 A、B、C、D. 取 x,y 坐标，其原点是四个弹簧系统的平衡位置，A、B、C、D 和 P 点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，(x_4,y_4) 和 (x,y)，平衡时，即 P 位于原点时，各弹簧的长度分别为 l_i，α_i、β_i 分别是 OA、OB、OC、OD 的方向余弦，即

$$\alpha_i = \frac{x_i}{l_i}, \quad \beta_i = \frac{y_i}{l_i}$$

P 点偏离原点很小，即 x、y 均为小量. 证明弹簧系统的势能的近似表达式为

$$V = \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{2}k_i(x^2 + y^2) - \frac{k_i l_{i0}}{2l_i}(\beta_i x - \alpha_i y)^2\right]$$

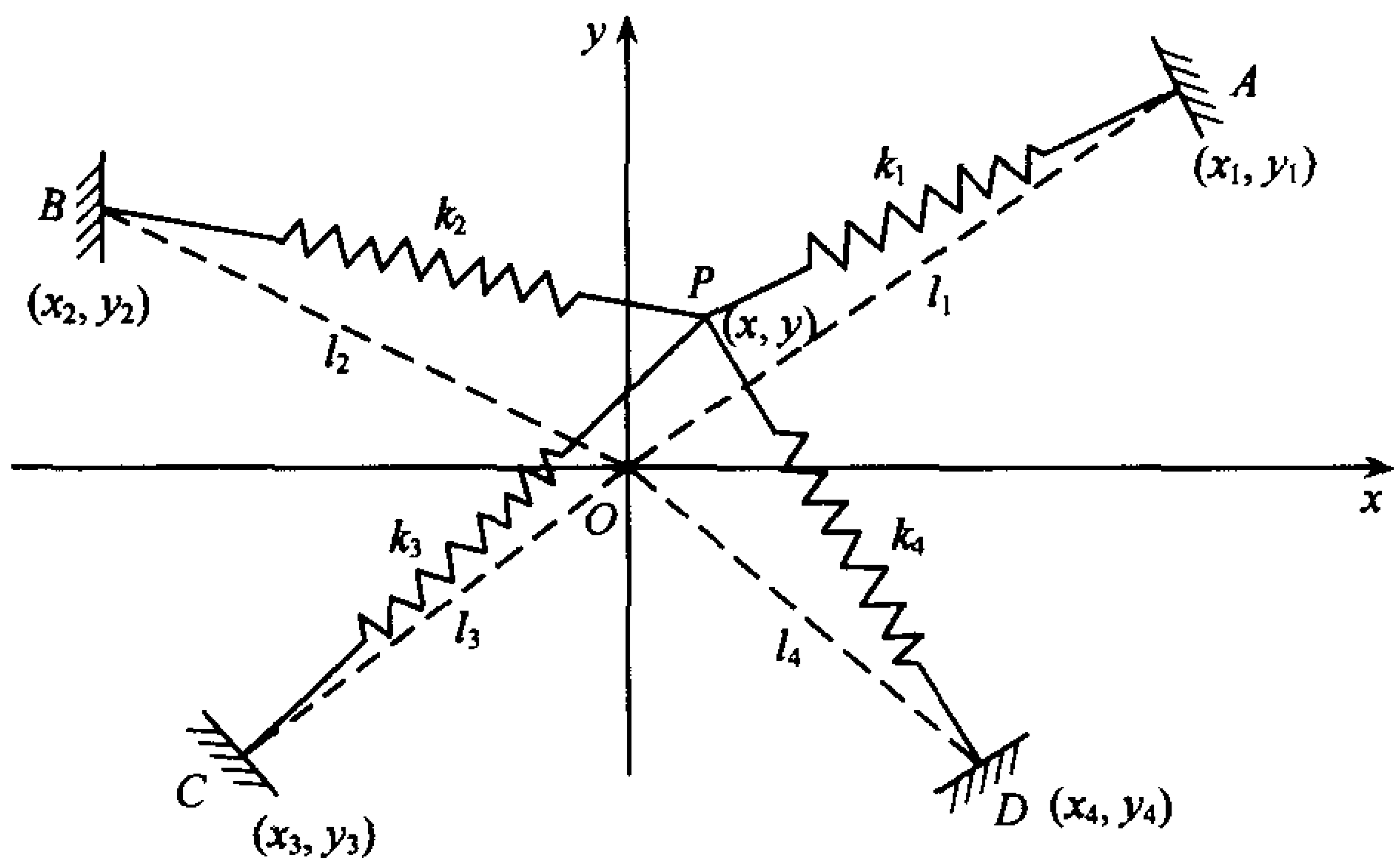


图 9.48

证明 $V=\sum_{i=1}^{4}V_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}k_i\left[\sqrt{(l_i\alpha_i-x)^2+(l_i\beta_i-y)^2}-l_{i0}\right]^2$

对
$$V_i = \frac{1}{2}k_i\left[\sqrt{(l_i\alpha_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2} - l_{i0}\right]^2$$

在(0,0)处作泰勒展开,保留到二级小量,且选择 $V_i(0,0)=0$,得

$$V_i(x,y)\approx \frac{\partial V_i}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}x + \frac{\partial V_i}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{(0,0)}x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\bigg|_{(0,0)}xy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\bigg|_{(0,0)}y_2\right]$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}= k_i\left[\sqrt{(l_i\alpha_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2} - l_{i0}\right]\frac{(-1)(l_i\alpha_i - x)}{\sqrt{(l_ix_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2}}$$

$$= k_i\left[-(l_i\alpha_i - x) + \frac{l_{i0}(l_i\alpha_i - x)}{\sqrt{(l_i\alpha_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2}}\right]$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = - k_i(l_i - l_{i0})\alpha_i$$

同样可得
$$\frac{\partial V_i}{\partial y}\bigg|_{(0,0)} = -k_i(l_i-l_{i0})\beta_i$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x\partial y} = k_il_{i0}(l_i\alpha_i - x)\cdot\frac{(-2)(l_i\beta_i - y)(-1)}{2[(l_i\alpha_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{k_il_{i0}(l_i\alpha - x)(l_i\beta_i - y)}{[(l_i\alpha_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\bigg|_{(0,0)} = \frac{k_il_{i0}}{l_i}\alpha_i\beta_i$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k_i\left\{1 - \frac{l_{i0}}{[(l_i\alpha_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2]^{1/2}} + \frac{l_{i0}(l_i\alpha_i - x)^2}{[(l_i\alpha_i - x)^2 + (l_i\beta_i - y)^2]^{3/2}}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = k_i\left(1 - \frac{l_{i0}}{l_i} + \frac{l_{i0}}{l_i}\alpha_i^2\right) = k_i\left(1 - \frac{l_{i0}}{l_i}\beta_i^2\right)$$

同样可得

$$\left.\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = k_i\left(1 - \frac{l_{i0}}{l_i}\alpha_i^2\right)$$

$$\begin{aligned} V_i &= -k_i(l_i - l_{i0})(\alpha_i x + \beta_i y) + \frac{1}{2}\left[k_i\left(1 - \frac{l_{i0}}{l_i}\beta_i^2\right)x^2 \right.\\ &\quad \left. + 2k_i\frac{l_{i0}}{l_i}\alpha_i\beta_i xy + k_i\left(1 - \frac{l_{i0}}{l_i}\alpha_i^2\right)y^2\right] \\ &= -k_i(l_i - l_{i0})(\alpha_i x + \beta_i y) + \frac{1}{2}k_i(x^2 + y^2) - \frac{k_i l_{i0}}{2l_i}(\beta_i x - \alpha_i y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= -\sum_{i=1}^{4} k_i(l_i - l_{i0})(\alpha_i x + \beta_i y) + \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{2}k_i(x^2 + y^2) - \frac{k_i l_{i0}}{2l_i}(\beta_i x - \alpha_i y)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{2}k_i(x^2 + y^2) - \frac{k_i l_{i0}}{l_i}(\beta_i x - \alpha_i y)^2\right] \end{aligned}$$

这里用了在(0,0)处是平衡位置.

$$\sum_{i=1}^{4} k_i(l_i - l_{i0})\alpha_i = 0, \ \sum_{i=1}^{4} k_i(l_i - l_{i0})\beta_i = 0$$

9.3.4　双摆中质量为 m_1 的质点与劲度系数分别为 k_1 和 k_2、原长分别为 l_{10}和 l_{20}的两弹簧相连,弹簧的另一端分别固定于 A 和 B,m_1、m_2 两质点和两弹簧处在同一竖直平面内运动,当 m_1 处于 O 点时,且 $\varphi=0$,双摆处于平衡位置,弹簧处于拉紧情况. 求两弹簧的势能及其在 θ 很小时的近似表达式.

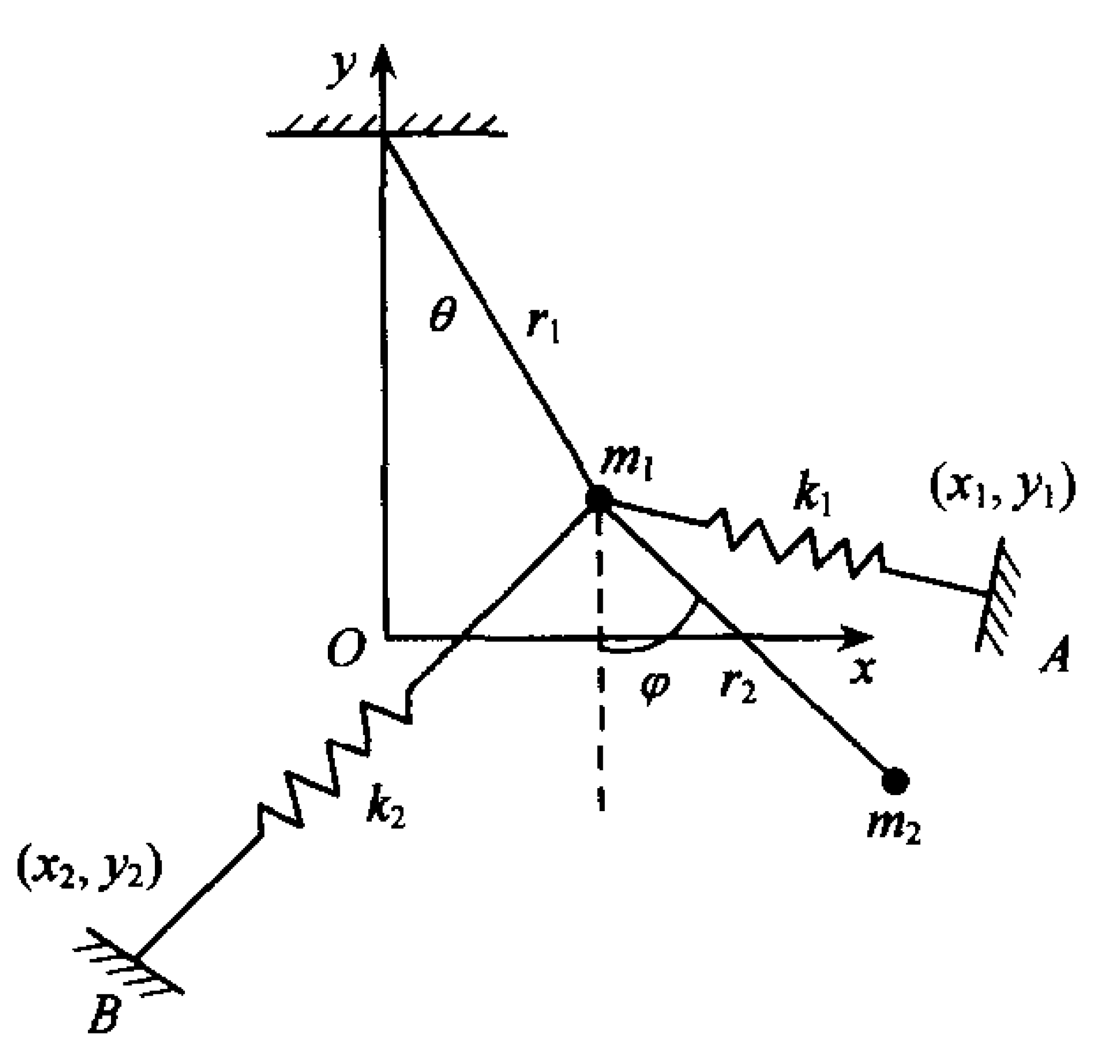


图 9.49

解　两弹簧的势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k_1\left[\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} - l_{10}\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}k_2\left[\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} - l_{20}\right]^2 \end{aligned}$$

$$x = r_1\sin\theta, \quad y = r_1(1 - \cos\theta)$$

$$V=\frac{1}{2}k_1\left[\sqrt{(x_1-r_1\sin\theta)^2+(y_1-r_1+r_1\cos\theta)^2}-l_{10}\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}k_2\left[\sqrt{(x_2-r_1\sin\theta)^2+(y_2-r_1+r_1\cos\theta)^2}-l_{20}\right]^2$$

当 θ 很小时，可用上题结果，但连在(0,0)点即 $\theta=0$ 处，有 $\frac{\partial V}{\partial x}=0$，而 $\frac{\partial V}{\partial y}\neq 0$（因为 V 中没包括重力势能），所以

$$V=\sum_{i=1}^{2}\left[-k_i(l_i-l_{i0})\beta_i y+\frac{1}{2}k_i(x^2+y^2)-\frac{k_i l_{i0}}{2l_i}(\beta_i x-\alpha_i y)^2\right]$$

这里
$$\alpha_i=\frac{x_i}{l_i},\qquad \beta_i=\frac{y_i}{l_i}$$
$$x=r_1\sin\theta\approx r_1\theta$$
$$y=r_1(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}r_1\theta^2$$
$$x^2+y^2\approx r_1^2\theta^2$$
$$(\beta_i x-\alpha_i y)^2\approx\left(\beta_i r_1\theta-\alpha_i\cdot\frac{1}{2}r_1\theta^2\right)^2\approx\beta_i r_1^2\theta^2=\frac{y_i^2}{l_i^2}r_1^2\theta^2$$

所以
$$V=\sum_{i=1}^{2}\left[-k_i\frac{l_i-l_{i0}}{2l_i}y_i r_1\theta^2+\frac{1}{2}k_i r_1^2\theta^2-\frac{k_i l_{i0}}{2l_i^3}y_i^2 r_1^2\theta^2\right]$$
$$=\left[\frac{1}{2}(k_1+k_2)r_1^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}k_i\left(\frac{l_i-l_{i0}}{l_i}y_i r_1+\frac{l_{i0}}{l_i^3}y_i^2 r_1^2\right)\right]\theta^2$$

9.3.5　9.2.6题的系统有几个自由度？是否保守系？选用适当的广义坐标，由拉格朗日方程得到运动微分方程.

解　9.2.6题所述系统只有一个自由度.用解9.2.6题的方法二，

$$\dot{x}=-R\cos\psi\dot{\psi}+\dot{l}\cos\theta-l\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y}=-R\sin\psi\dot{\psi}+\dot{l}\sin\theta+l\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\delta x=-R\cos\psi\delta\psi+\cos\theta\delta l-l\sin\theta\delta\theta$$
$$\delta y=-R\sin\psi\delta\psi+\sin\theta\delta l+l\cos\theta\delta\theta$$

δx、δy 不是相互独立的，或 $\delta\psi$、δl、$\delta\theta$ 不是都独立的，有下列两个约束关系：

$$l=R\psi,\qquad \psi=\theta$$
$$\delta l=R\delta\psi=R\delta\theta,\qquad \delta\psi=\delta\theta$$

今取 θ 为广义坐标，

$$\delta x=-R\cos\theta\delta\theta+R\cos\theta\delta\theta-l\sin\theta\delta\theta=-l\sin\theta\delta\theta$$
$$\delta y=-R\sin\theta\delta\theta+R\sin\theta\delta\theta+l\cos\theta\delta\theta=l\cos\theta\delta\theta$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}mR^2\theta^2\dot{\theta}^2$$

这里又用了 $l=R\psi$、$\psi=\theta$ 两个约束关系.

系统是否保守系，要看用什么参考系.对静参考系，$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，或者说有稳定约束，坐标

变换关系(x、y 与 θ 的变换关系)不显含时间,又不存在主动力(绳子张力是约束力),系统是保守系.可对于 9.2.6 题解中所用的对静参考系既有平动又有转动的参考系(方法一),若采用同样的广义坐标,仍可得到相同的运动微分方程,但拉格朗日函数不一样,受力情况不一样,做虚功的惯性力不是保守力,因比是非保守系.

用静参考系,已得

$$L=\frac{1}{2}mR^2\theta^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=mR^2\theta\dot{\theta}^2,\qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mR^2\theta^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=mR^2\theta^2\ddot{\theta}+2mR^2\theta\dot{\theta}^2$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得
$$\theta\ddot{\theta}+\dot{\theta}^2=0$$

如用 $l=R\psi=R\theta$,改用 l 作广义坐标,上式可改为

$$l\ddot{l}+\dot{l}^2=0$$

即解 9.2.6 题中的(6)式.

9.3.6 一个珠子套在一条光滑的锥形螺旋线上,在重力的作用下运动.用柱坐标,锥形螺旋线方程为

$$\rho=az,\qquad \varphi=-bz$$

a、b 为常量,z 轴竖直向上.证明:珠子的运动微分方程为

$$\ddot{z}(a^2+1+a^2b^2z^2)+a^2b^2z\dot{z}^2=-g$$

证明 设珠子质量为 m,

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)=\frac{1}{2}m(a^2+1+a^2b^2z^2)\dot{z}^2$$

$$V=mgz$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(a^2+1+a^2b^2z^2)\dot{z}^2-mgz$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=ma^2b^2z\dot{z}^2-mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m(a^2+1+a^2b^2z^2)\dot{z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right)=m(a^2+1+a^2b^2z^2)\ddot{z}+2ma^2b^2z\dot{z}^2$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

得
$$(a^2+1+a^2b^2z^2)\ddot{z}+a^2b^2z\dot{z}^2=-g$$

9.3.7 三个相互啮合的齿轮 G_1、G_2、G_3 通过三个扭转弹簧与三个圆盘 D_4、D_5、D_6 耦合,如图 9.50 所示.三个齿轮的半径分别为 r_1、r_2、r_3,围绕对称轴的转动惯量分别为 I_1、

I_2、I_3，三个圆盘绕其对称轴的转动惯量分别为 I_4、I_5、I_6，它们偏离平衡位置的转角分别为 θ_1、θ_2、…、θ_6，如图 9.50 所示. 三个扭转弹簧扭转单位角度时受到的扭力矩大小分别为 k_1、k_2、k_3，求此系统的拉格朗日函数.

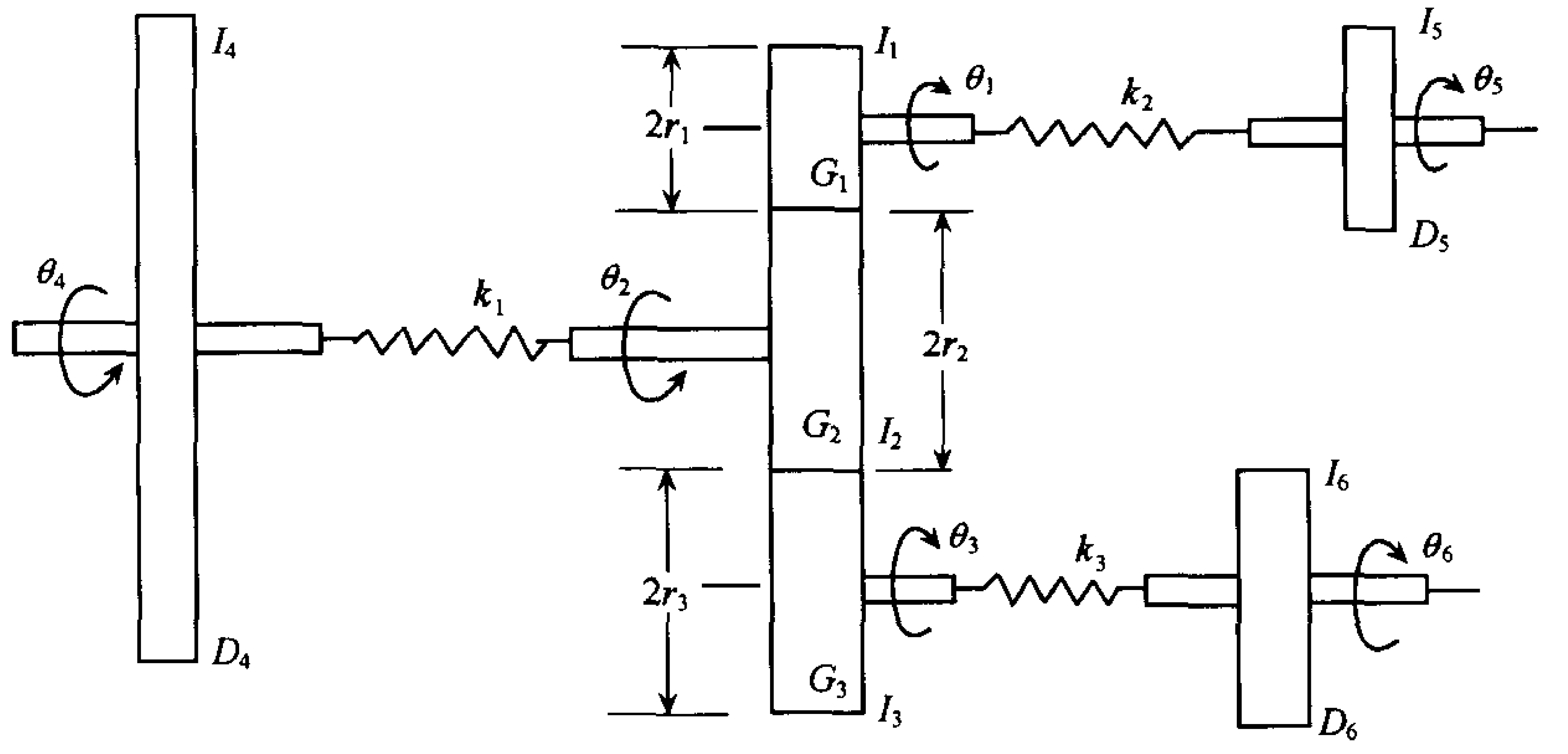


图 9.50

解　$T=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2+\frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4^2+\frac{1}{2}I_5\dot{\theta}_5^2+\frac{1}{2}I_6\dot{\theta}_6^2$

三个齿轮相互啮合，接触点无相对运动，

$$r_1\dot{\theta}_1=r_2\dot{\theta}_2,\qquad r_2\dot{\theta}_2=r_3\dot{\theta}_3$$

$$\dot{\theta}_1=\frac{r_2}{r_1}\dot{\theta}_2,\qquad \dot{\theta}_3=\frac{r_2}{r_3}\dot{\theta}_2$$

取平衡位置时，

$$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4=\theta_5=\theta_6=0$$

$$\theta_1=\frac{r_2}{r_1}\theta_2,\quad \theta_3=\frac{r_2}{r_3}\theta_2$$

$$T=\frac{1}{2}I_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}I_3\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4^2+\frac{1}{2}I_5\dot{\theta}_5^2+\frac{1}{2}I_6\dot{\theta}_6^2$$

$$=\frac{1}{2}r_2^2\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+\frac{I_3}{r_3^2}\right)\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4^2+\frac{1}{2}I_5\dot{\theta}_5^2+\frac{1}{2}I_6\dot{\theta}_6^2$$

$$V=\frac{1}{2}k_1(\theta_4-\theta_2)^2+\frac{1}{2}k_2(\theta_1-\theta_5)^2+\frac{1}{2}k_3(\theta_3-\theta_6)^2$$

$$=\frac{1}{2}k_1(\theta_4-\theta_2)^2+\frac{1}{2}k_2\left(\frac{r_2}{r_1}\theta_2-\theta_5\right)^2+\frac{1}{2}k_3\left(\frac{r_2}{r_3}\theta_2-\theta_6\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}k_1(\theta_4-\theta_2)^2+\frac{1}{2}k_2r_2^2\left(\frac{\theta_2}{r_1}-\frac{\theta_5}{r_2}\right)^2+\frac{1}{2}k_3r_2^2\left(\frac{\theta_2}{r_3}-\frac{\theta_6}{r_2}\right)^2$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}r_2^2\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+\frac{I_3}{r_3^2}\right)\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4^2+\frac{1}{2}I_5\dot{\theta}_5^2+\frac{1}{2}I_6\dot{\theta}_6^2$$

$$-\frac{1}{2}k_1(\theta_4-\theta_2)^2-\frac{1}{2}k_2r_2^2\left(\frac{\theta_2}{r_1}-\frac{\theta_5}{r_2}\right)^2-\frac{1}{2}k_3r_2^2\left(\frac{\theta_2}{r_3}-\frac{\theta_6}{r_2}\right)^2$$

9.3.8　如图 9.51，一个质量为 m、半径为 a 的均质薄圆盘的质心 C 固连一根不计质量的、长为 b 的细杆 AC，细杆垂直于盘面．此系统放在粗糙的、倾角为 α 的斜面上，杆的 A 端在斜面上的 O 点保持不动，圆盘沿半径为 $R=(a^2+b^2)^{1/2}$ 的圆周在平衡位置附近做小振动（纯滚动）．选 O 点为坐标系原点，ζ 轴垂直于斜面，η 轴沿斜面向上，固连于圆盘的动坐标系原点也在 O 点，AC 方向为 z 轴．求：

（1）系统的动能；

（2）系统的势能；

（3）证明欧拉角 φ 的运动方程如同一个角频率为 $\Omega=\left(\dfrac{4gR\sin\alpha}{a^2+6b^2}\right)^{1/2}$ 的单摆．

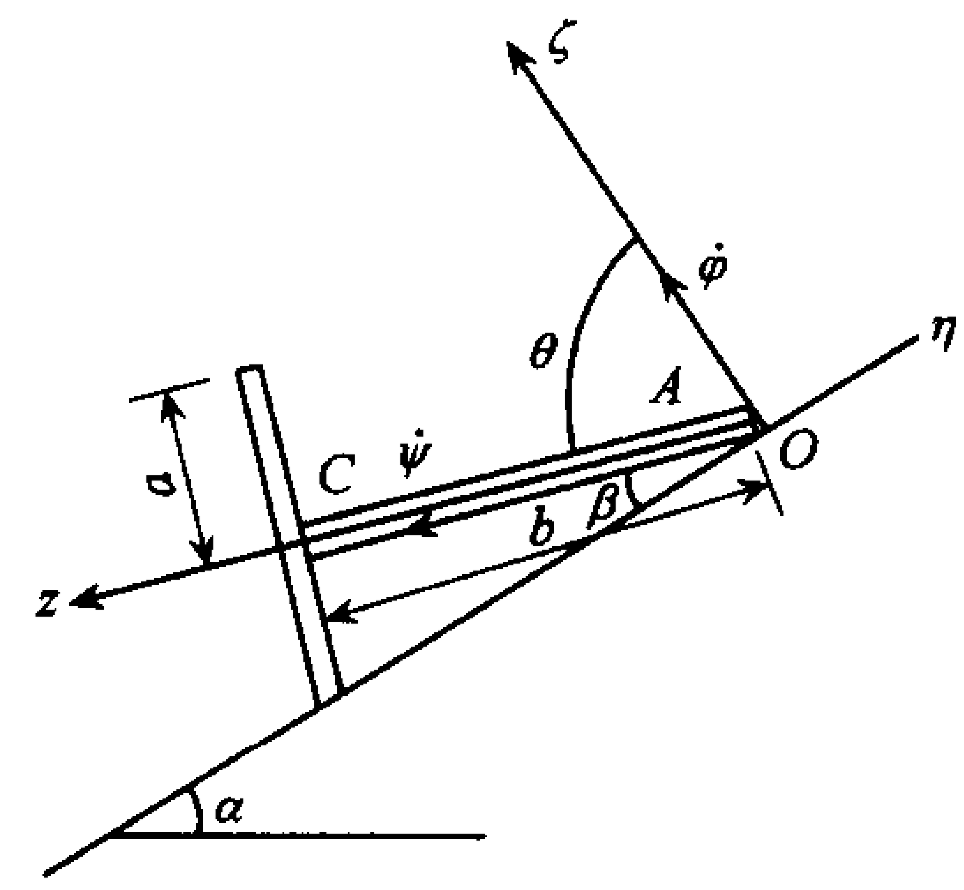


图 9.51

解　(1) $T=\dfrac{1}{2}(I_1\omega_x^2+I_2\omega_y^2+I_3\omega_z^2)$

$$I_1=I_2=\frac{1}{4}ma^2+mb^2$$

$$I_3=\frac{1}{2}ma^2$$

$$\omega_z=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta=\dot\psi+\dot\varphi\sin\beta$$

圆盘与斜面的接触点速度为零

$$b\sin\theta\dot\varphi+a\omega_z=0$$

$$b\cos\beta\dot\varphi+a(\dot\psi+\dot\varphi\sin\beta)=0$$

将 $\cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，　$\sin\beta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　代入上式，可得

$$\dot\psi=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\dot\varphi$$

$$w_z=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\dot\varphi+\dot\varphi\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{b^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}\dot\varphi$$

$$\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}=\omega_z\tan\beta=\frac{a}{b}\omega_z=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\dot\varphi$$

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}ma^2+mb^2\right)(\omega_x^2+\omega_y^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ma^2\omega_z^2\\&=\frac{1}{8}(ma^2+4mb^2)\cdot\frac{b^2}{a^2+b^2}\dot\varphi^2+\frac{1}{4}ma^2\cdot\frac{b^4}{a^2(a^2+b^2)}\dot\varphi^2\\&=\frac{1}{8}m\frac{(a^2+6b^2)b^2}{a^2+b^2}\dot\varphi^2\end{aligned}$$

(2)　$$V=mg\eta_C\sin\alpha+C$$

取平衡位置处为势能零点，由此定出 C 值．

$$\eta_C = -b\cos\varphi\cos\beta = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\varphi$$

$$V = -mg\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha\cos\varphi + C$$

平衡位置处,$\varphi=0$

$$0 = -mg\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + C$$

$$C = mg\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha$$

$$V = \frac{mgb^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha(1-\cos\varphi)$$

在平衡位置附近做小振动时,φ很小,

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$$

$$V = \frac{mgb^2\sin\alpha}{2\sqrt{a^2+b^2}}\varphi^2$$

(3)
$$L = T - V = \frac{m(a^2+6b^2)b^2}{8(a^2+b^2)}\dot{\varphi}^2 - \frac{mgb^2\sin\alpha}{2\sqrt{a^2+b^2}}\varphi^2$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{m(a^2+6b^2)b^2}{4(a^2+b^2)}\ddot{\varphi} + \frac{mgb^2\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}\varphi = 0$$

欧拉角 φ 满足的微分方程和单摆满足的微分方程一样. 角频率 Ω 为

$$\Omega = \left[\frac{mgb^2\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}\bigg/\frac{m(a^2+6b^2)b^2}{4(a^2+b^2)}\right]^{1/2}$$

$$= \left(\frac{4g\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{a^2+6b^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{4gR\sin\alpha}{a^2+6b^2}\right)^{1/2}$$

9.3.9　一个质量为 m 的质点受到势能为 $V(r)$(r 是球坐标)的力作用.

(1) 用一个绕 z 轴以角速度 ω 转动的球坐标系写出其拉格朗日函数;

(2) 证明上面写出的拉格朗日函数和用上述的转动参考系引入与速度有关的广义势(它来自惯性离轴力和科里奥利力)的拉格朗日函数是相同的.

解　(1) 参考系仍是静止的惯性参考系,但用的广义坐标是转动的球坐标系 r、θ 和 φ.

质点的绝对速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{\omega}\times r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$

所以
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + (r\dot{\varphi}\sin\theta + \omega r\sin\theta)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta + \omega r\sin\theta)^2]$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \omega^2 r^2\sin^2\theta + 2\omega r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r)$$

$$+ \frac{1}{2}m(\omega^2 r^2\sin^2\theta + 2\omega r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})$$

(2)采用绕 z 轴以角速度 ω 转动的参考系，采用球坐标 r、θ、φ 为广义坐标，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

$$V = V(r)$$

引入广义势 U，

$$U = -\frac{1}{2}m(\omega^2 r^2\sin^2\theta + 2\omega r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})$$

则 $L=T-V-U$，与用静参考系写出的拉格朗日函数相同. 或反过来讲，采用同样的广义坐标，不论用什么参考系，应有相同的拉格朗日函数，由此需引入上述广义势.

采用转动参考系，必须引入惯性力，它们是惯性离轴力和科里奥利力，因此需引入的广义势必来自这两个力. 下面来验证这一点.

先由广义势 U 求广义力.

$$Q_r = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right) = m\omega^2 r\sin^2\theta + 2m\omega r\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

$$Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\omega^2 r^2\sin\theta\cos\theta + 2mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\omega r^2\sin^2\theta)$$

$$= -2m\omega r\dot{r}\sin^2\theta - 2m\omega r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}$$

再由惯性离轴力和科里奥利力求广义力

$$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = m\omega^2 r\sin^2\theta\boldsymbol{e}_r + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = -2m\omega(\cos_\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\times(\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+ r\sin\theta\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$= 2m\omega r\sin^2\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r + 2m\omega r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+ (-2m\omega\dot{r}\sin\theta - 2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\varphi$$

惯性离轴力和科里奥利力的合力的三个分量为：

$$F_r = m\omega^2 r\sin^2\theta + 2m\omega r\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

$$F_\theta = m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta + 2m\omega r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}$$

$$F_\varphi = -2m\omega\dot{r}\sin\theta - 2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta$$

用球坐标，力和广义力的关系为

$$Q_r = F_r,\qquad Q_\theta = rF_r,\qquad Q_\varphi = r\sin\theta F_\varphi$$

与由广义势算出的广义力完全一致.

9.3.10 一个由 x、y、z 轴构成的直角坐标系,相对于惯性系以匀角速 ω 绕 z 轴转动. 一个质量为 m 的质点在势能 $V(x,y,z)$ 的力的作用下运动. 试用 x、y、z 为广义坐标,写出此质点的拉格朗日函数及拉格朗日方程,并证明这些方程与在惯性参考系中这个质点受到一个力 $-\nabla V$ 及另一个可用广义势 U 导出的力作用下的运动微分方程是一样的,写出这个广义势.

解 方法一:用惯性参考系,但用转动的 x、y、z 作为广义坐标,

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} + \omega\boldsymbol{k} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

$$= (\dot{x} - \omega y)\boldsymbol{i} + (\dot{y} + \omega x)\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2]$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x,y,z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\omega y, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = m\omega^2 x + m\omega\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x \quad \frac{\partial L}{\partial y} = m\omega^2 y - m\omega\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$,得

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

用上述绕 z 轴以角速度 ω 转动的 x、y、z 坐标系作为参考系,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad V = V(x,y,z)$$

用同样的广义坐标,把惯性力用广义势来处理,可有同样的拉格朗日函数.

$$L = T - V - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x,y,z) - U$$

与上面写出的 L 比较,可得

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - m\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$$

显然,用此广义势可得广义力

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right) = m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y}$$

$$Q_y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{y}}\right) = m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x}$$

$$Q_z = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{z}}\right) = 0$$

这些广义力正是惯性离轴力和科里奥利力引起的，

$$\begin{aligned} & -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \\ & = m\omega^2 x\boldsymbol{i} + m\omega^2 y\boldsymbol{j} + 2m\omega\dot{y}\,\boldsymbol{i} - 2m\omega\dot{x}\,\boldsymbol{j} \\ & = (m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y})\boldsymbol{i} + (m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x})\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

可见，引入的广义势正是用来处理惯性离轴力和科里奥利力这两个惯性力的.

方法二：广义势 U 的表达式可以写成不同的表达式. 只要满足下列三式即可：

$$-\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right) = m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{y}}\right) = m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{z}}\right) = 0$$

把 U 写成 $U=U_1+U_2$，其中 $U_1=-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$；它是惯性离轴力势能. 则 U_2 应满足

$$-\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\omega\dot{y}$$

$$-\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \dot{y}}\right) = -2m\omega\dot{x}$$

$$-\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \dot{z}}\right) = 0$$

$2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$ 可与 $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 相比拟，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是矢势. 可以证明，$q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=q\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$的广义势为　　$U=-q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$

今 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$，也可写成 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的形式，$\boldsymbol{A}=-\omega\dot{y}\boldsymbol{i}$，$\bar{\boldsymbol{A}}=\omega x\bar{\boldsymbol{j}}$ 或 $\bar{\boldsymbol{A}}=\frac{1}{2}\omega(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$，都可得到 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\omega\boldsymbol{k}$. 第三个 $\boldsymbol{A}$ 是第一、第二个 $\boldsymbol{A}$ 各取一半相加而得，由此可见还可以写出无穷个 $\boldsymbol{A}$ 的表达式，例如第一个的 $\frac{1}{n}$ 与第二个的 $\frac{n-1}{n}$ 之和.

$$U_2 = -2m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

可写成　$U_2=2m\omega y\dot{x}$，　$U_2=-2m\omega x\dot{y}$，$U_2=m\omega(\dot{x}y-x\dot{y})$等，

因而 $U=U_1+U_2$ 可写成不同的表达式. 方法一写出的 U 是这里 U_2 的第三个写法.

9.3.11　质量为 m、荷电为 q 的粒子在柱坐标中有轴对称的电场 $\boldsymbol{E}=\frac{E_0}{r}\boldsymbol{e}_r$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{k}$，$E_0$、$B_0$ 均为常量. 求此粒子的拉格朗日函数和运动微分方程.

解　方法一：引入电磁场的标势 ϕ 和矢势 $\boldsymbol{A}$，今电场、磁场都不随时间而变，故有

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi,\qquad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

用柱坐标，

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{k}$$

可取
$$\phi=-E_0\ln r,\quad \boldsymbol{A}=\frac{1}{2}rB_0\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$U=q\phi-q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}=-qE_0\ln r-q(\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\dot{z}\,\boldsymbol{k})\cdot\frac{1}{2}rB_0\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$=-qE_0\ln r-\frac{1}{2}qB_0r^2\dot{\varphi}$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

$$L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+qE_0\ln r+\frac{1}{2}qB_0r^2\dot{\varphi}$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0,\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

可得运动微分方程为

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2-\frac{qE_0}{r}-qB_0r\dot{\varphi}=0$$

$$mr^2\ddot{\varphi}+2mr\dot{r}\,\dot{\varphi}+qB_0r\dot{r}=0$$

$$m\ddot{z}=0$$

方法二：先用直角坐标的旋度表达式求 $\boldsymbol{A}$，再变换为柱坐标的表达式，

$$\boldsymbol{A}=-B_0y\boldsymbol{i}=-B_0r\sin\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{e}_r-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$U=q\phi-q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}=-qE_0\ln r+qB_0r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+qE_0\ln r-qB_0r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

以下略，可得与方法一相同的运动微分方程.

9.3.12 当电磁场的矢势和标势受到规范变换：

$\boldsymbol{A}$ 换为
$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\Lambda$$

ϕ 换为
$$\phi'=\phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

时，它们所描述的电磁场不变，可是拉格朗日函数显然要改变.证明：用新的拉格朗日函数仍然给出与原来相同的运动微分方程.

证明 只要证明规范变换后的广义势得到的广义力仍和变换前的一样，就证明了可得相同的运动微分方程.

$$U=q\phi'-q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}'$$

$$=q\phi-q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}-q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}-q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\Lambda$$

要证明附加项

$$U^*=-q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}-q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\Lambda=-q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}-q\left(\dot{x}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial\Lambda}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)$$

对广义力没有贡献，

$$\frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}} = -q\frac{\partial \Lambda}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}}\right) = -q\left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y \partial x}\dot{y} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z \partial x}\dot{z}\right]$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = -q\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial t} - q\left(\dot{x}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \dot{y}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} + \dot{z}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial z}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial U^*}{\partial x} = 0$$

同样可证：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial U^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial U^*}{\partial z} = 0$$

即由附加项 U^* 得到的广义力 $Q_x^* = Q_y^* = Q_z^* = 0$.

上题两种方法给出了两个 $\boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}rB_0\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{A}' = -B_0 r\sin\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{e}_r - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi).$$

可以找到 Λ，使 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda$，这个 Λ 为

$$\Lambda = -\frac{1}{2}B_0 r^2\sin\varphi\cos\varphi$$

9.3.13 一个长度为 b、摆锤质量为 m 的单摆悬于原长为 a、劲度系数为 k 的弹簧上，悬点限于在竖直方向运动. 摆锤处于黏性介质中，受到的阻力其大小与摆锤的速率成正比，比例系数为 γ. 用摆的悬点在系统的平衡位置下的距离 y 和摆与铅垂线的夹角 θ 为广义坐标，写出耗散函数和运动微分方程.

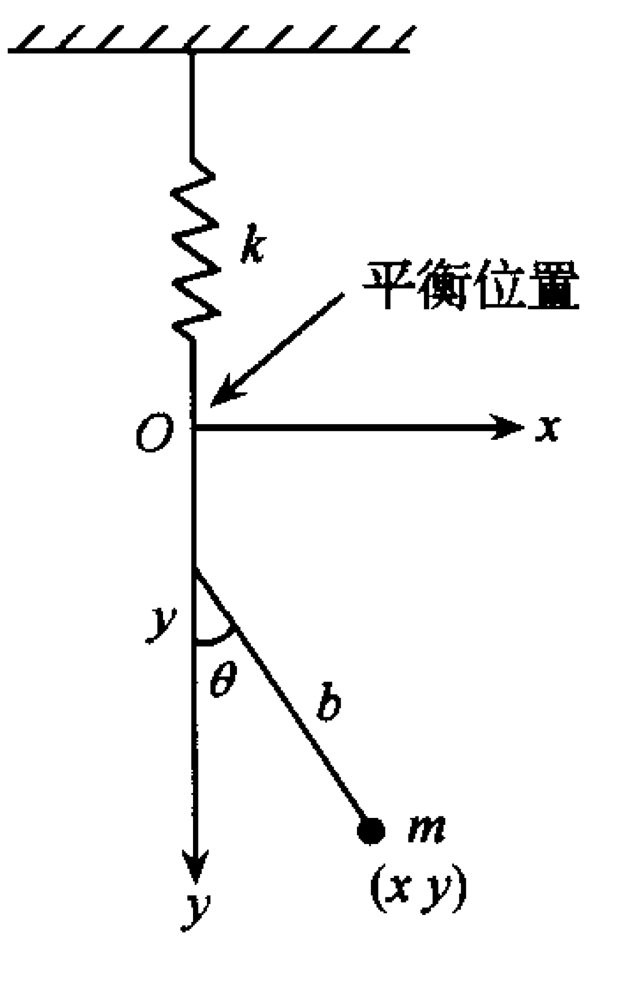


图 9.52

解 方法一：取平衡位置为坐标系原点. x 轴沿水平方向，y 轴竖直向下，如图 9.52 所示.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m[(b\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{y} - b\dot{\theta}\sin\theta)^2]$$

$$= \frac{1}{2}m(b^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2b\dot{y}\,\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$V = \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{mg}{k} + y\right)^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2\right] - mg[y - b(1 - \cos\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}ky^2 + mgb(1 - \cos\theta)$$

这里取平衡位置 $y=0, \theta=0$ 为势能的零点，但这不是必须的，

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + b^2\dot{\theta}^2 - 2b\dot{y}\,\dot{\theta}\sin\theta) - \frac{1}{2}ky^2 - mgb(1 - \cos\theta)$$

摆锤的速度

$$\boldsymbol{v}=b\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{i}+(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

阻力

$$\boldsymbol{f}=-\gamma\boldsymbol{v}=-\gamma b\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{i}-\gamma(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

$$f_x=-\gamma b\dot{\theta}\cos\theta$$

$$f_y=-\gamma(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)$$

耗散函数

$$R=\frac{1}{2}\gamma[(b\dot{\theta}\cos\theta)^2+(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)^2]=\frac{1}{2}\gamma(\dot{y}^2+b^2\dot{\theta}^2-2b\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta)$$

方法二：

$$Q_y=f_x\frac{\partial X}{\partial y}+f_Y\frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$X=b\sin\theta,\quad Y=y+b\cos\theta$$

$$Q_y=-\gamma b\dot{\theta}\cos\theta\cdot 0-\gamma(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)\cdot 1$$

$$=-\gamma(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$Q_\theta=f_X\frac{\partial X}{\partial\theta}+f_Y\frac{\partial Y}{\partial\theta}$$

$$=-\gamma b\dot{\theta}\cos\theta\cdot b\cos\theta-\gamma(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)(-b\sin\theta)$$

$$=\gamma b\dot{y}\sin\theta-\gamma b^2\dot{\theta}$$

$$\mathrm{d}R=\frac{\partial R}{\partial\dot{y}}\mathrm{d}\dot{y}+\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\mathrm{d}\dot{\theta}=-Q_y\mathrm{d}\dot{y}-Q_\theta\mathrm{d}\dot{\theta}$$

$$=\gamma(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)\mathrm{d}\dot{y}-(\gamma b\dot{y}\sin\theta-\gamma b^2\dot{\theta})\mathrm{d}\dot{\theta}$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\gamma\dot{y}^2+\frac{1}{2}\gamma b^2\dot{\theta}^2-\gamma b\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

$$R=\frac{1}{2}\gamma(\dot{y}^2+b^2\dot{\theta}^2-2b\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial R}{\partial\dot{y}}\quad\text{或 } Q_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\quad\text{或 } Q_\theta$$

得

$$m\ddot{y}-mb\ddot{\theta}\sin\theta-mb\dot{\theta}^2\cos\theta+ky=-\gamma\dot{y}+\gamma b\dot{\theta}\sin\theta$$

$$mb\ddot{\theta}-m\ddot{y}\sin\theta+mg\sin\theta=\gamma\dot{y}\sin\theta-\gamma b\dot{\theta}$$

9.3.14　求 9.1.9 题所述系统的耗散函数，并由此求 Q_y、Q_{y_3}.

解

$$R=-\int(-\alpha_1\dot{y}_1\mathrm{d}\dot{y}_1-\alpha_2\dot{y}_2\mathrm{d}\dot{y}_2)=\frac{1}{2}(\alpha_1\dot{y}_1^2+\alpha_2\dot{y}_2^2)$$

$$y_1=y+y_3,\quad \dot{y}_1=\dot{y}+\dot{y}_3,\quad \dot{y}_2=\dot{y}-\dot{y}_3$$

$$R=\frac{1}{2}\alpha_1(\dot{y}+\dot{y}_3)^2+\frac{1}{2}\alpha_2(\dot{y}-\dot{y}_3)^2$$

$$Q_y = -\frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = -\alpha_1(\dot{y}+\dot{y}_3) - \alpha_2(\dot{y}-\dot{y}_3)$$

$$Q_{y_3} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{y}_3} = -\alpha_1(\dot{y}+\dot{y}_3) + \alpha_2(\dot{y}-\dot{y}_3)$$

9.3.15 求 9.1.12 题所述系统的耗散函数 $R(\dot{x}_1,\dot{q}_1,\dot{q}_2)$，并由此求 Q_{x_1}、Q_{q_1}，Q_{q_2}.

解

$$R = -\int(Q_{x_1}\mathrm{d}\dot{x}_1 + Q_{x_2}\mathrm{d}\dot{x}_2 + Q_{x_3}\mathrm{d}\dot{x}_3)$$

$$= \int\{[\alpha_1\dot{x}_1 - \alpha_4(\dot{x}_2-\dot{x}_1)]\mathrm{d}\dot{x}_1 + [\alpha_2\dot{x}_2 + \alpha_4(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - \alpha_5(\dot{x}_3-\dot{x}_2)]\mathrm{d}\dot{x}_2 + [\alpha_2\dot{x}_3 + \alpha_5(\dot{x}_3-\dot{x}_2)]\mathrm{d}\dot{x}_3\}$$

$$= \int(\alpha_1+\alpha_4)\dot{x}_1\mathrm{d}\dot{x}_1 + \int(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\dot{x}_2\mathrm{d}\dot{x}_2 + \int(\alpha_3+\alpha_5)\dot{x}_3\mathrm{d}\dot{x}_3 + \int[-\alpha_4\dot{x}_2\mathrm{d}\dot{x}_1 - (\alpha_4\dot{x}_1+\alpha_5\dot{x}_3)\mathrm{d}\dot{x}_2 - \alpha_5\dot{x}_2\mathrm{d}\dot{x}_3]$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_4)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_5)\dot{x}_3^2 - \alpha_4\dot{x}_1\dot{x}_2 - \alpha_5\dot{x}_2\dot{x}_3$$

因为

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{q}_1,\quad \dot{x}_3 = \dot{x}_1 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

所以

$$R(\dot{x}_1,\dot{q}_1,\dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_4)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)(\dot{x}_1+\dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_5)(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 - \alpha_4\dot{x}_1(\dot{x}_1+\dot{q}_1) - \alpha_5(\dot{x}_1+\dot{q}_1)(\dot{x}_1+\dot{q}_1+\dot{q}_2)$$

$$Q_{x_1} = -\frac{\partial R(\dot{x}_1,\dot{q}_1,\dot{q}_2)}{\partial \dot{x}_1},\quad Q_{q_1} = -\frac{\partial R(\dot{x}_1,\dot{q}_1,\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_1}$$

$$Q_{q_2} = -\frac{\partial R(\dot{x}_1,\dot{q}_1,\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2}$$

计算略.

9.3.16 求 9.1.19 题所述系统的耗散函数.

解 为了不与耗散函数 R 相混淆，将圆环的半径改为 r.

$$R = -\iint(F_{x'}\mathrm{d}\dot{x}' + F_{y'}\mathrm{d}\dot{y}')$$

两个积分符号，一个是对恰当微分的积分，另一个是因为系统是连续分布的，阻力也是连续分布于各质元的，对受到阻力的所有区域积分.

今系统是半径为 r 的圆环，9.1.19 题图 9.14 中处于 $\alpha\sim\alpha+\mathrm{d}\alpha$ 的环元所受的摩擦力为

$$-f\frac{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{i} + [\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{j}}{\{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2 + [\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}r\mathrm{d}\alpha$$

$$\dot{x}' = \dot{x} - r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)$$

$$\dot{y}' = \dot{y} + r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)$$

$$R=\int_0^{2\pi}\left(\int f\frac{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]\mathrm{d}[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]}{\{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)^2]\}^{1/2}}\right.$$

$$\left.+f\frac{[\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]\mathrm{d}[\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]}{\{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}\right)r\mathrm{d}\alpha$$

$$=rf\int_0^{2\pi}\int\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}\{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}}{\{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}\mathrm{d}\alpha$$

$$=rf\int_0^{2\pi}\{[\dot{x}-r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+r\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}\mathrm{d}\alpha$$

由
$$Q_x=-\frac{\partial R(\dot{x},\dot{y},\dot{\varphi})}{\partial\dot{x}},\quad Q_y=-\frac{\partial R(\dot{x},\dot{y},\dot{\varphi})}{\partial y},\quad Q_\varphi=-\frac{\partial R(\dot{x},\dot{y},\dot{\varphi})}{\partial\dot{\varphi}}$$

可得 9.1.19 题的结果.

9.3.17 上题的圆环改为半径为 r 的圆盘,f 改为相接触的单位面积所受的摩擦力的大小,证明耗散函数为

$$R=f\int_0^r\int_0^{2\pi}\{[\dot{x}-r'\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+r'\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\alpha$$

证明 在 $r'\sim r'+\mathrm{d}r'$,$\alpha\sim\alpha+\mathrm{d}\alpha$ 的面元受到的摩擦力为

$$-f\frac{[\dot{x}-r'\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{i}+[\dot{y}+r'\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]\boldsymbol{j}}{\{[\dot{x}-r'\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{y}+r'\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)]^2\}^{1/2}}r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\alpha$$

类似上题做法,可得要证明的式子.

9.3.18 假定图 9.53 中的减震器引入的力与相对速度的立方成正比,比例系数为 b,各对接触平面间的阻力是正比于相对速度的黏性阻力,比例系数为 α_1、α_2、α_3. 求系统的耗散函数.

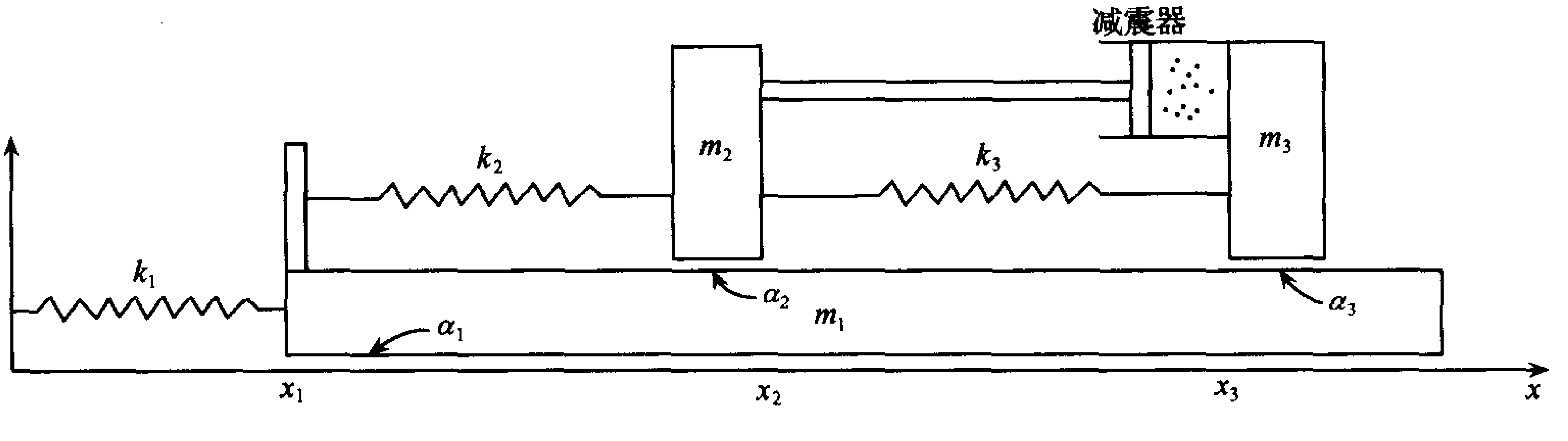


图 9.53

解 设 f_1、f_2、f_3 分别为 m_1、m_2、m_3 受到的阻力,

$$f_1=-\alpha_1\dot{x}_1-\alpha_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)-\alpha_3(\dot{x}_1-\dot{x}_3)$$

$$f_2=-\alpha_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-b(\dot{x}_2-\dot{x}_3)^3$$

$$f_3=-\alpha_3(\dot{x}_3-\dot{x}_1)-b(\dot{x}_3-\dot{x}_2)^3$$

$$\mathrm{d}R=-f_1\mathrm{d}\dot{x}_1-f_2\mathrm{d}\dot{x}_2-f_3\mathrm{d}\dot{x}_3$$

$$=[\alpha_1\dot{x}_1+\alpha_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+\alpha_3(\dot{x}_1-\dot{x}_3)]\mathrm{d}\dot{x}_1$$

$$
\begin{aligned}
&+ [\alpha_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^3]\mathrm{d}\dot{x}_2 \\
&+ [\alpha_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + b(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^3]\mathrm{d}\dot{x}_3 \\
= &\alpha_1\dot{x}_1\mathrm{d}\dot{x}_1 + \alpha_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\mathrm{d}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)\mathrm{d}(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) \\
&+ b(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^3\mathrm{d}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)
\end{aligned}
$$

$$
R = \frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{4}b(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^4
$$

9.3.19　如图 9.54，一个质量为 M、半径为 R 的圆盘在一个光滑的水平面上滑动，另有一个质量为 m、半径为 r 的圆盘，将其中心钉在前一圆盘上离中心距离 b 处，它可在前一圆盘上围绕该点无摩擦地转动. 选取适当的广义坐标，写出该系统的拉格朗日函数，给出一切可以直接写出的运动积分.

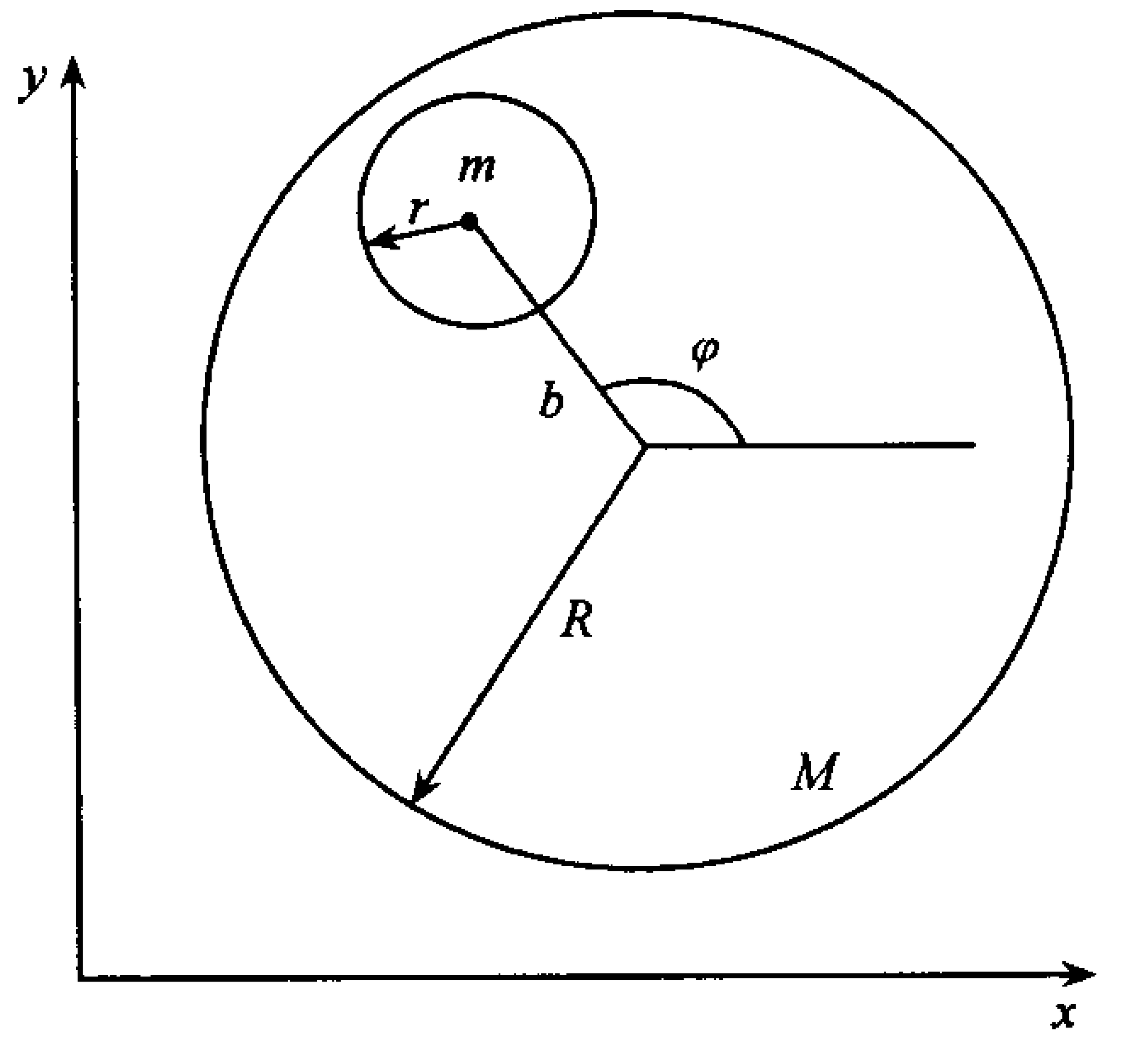


图 9.54

解　取 x、y、φ、θ 为广义坐标，x、y 是大圆盘中心的坐标，取 x 轴使 $t=0$ 时两圆盘中心的连线方向为 x 轴正向，φ、θ 分别表示大小两圆盘在各自质心平动参考系中的转角，$t=0$ 时，$\varphi=\theta=0$，逆时针方向为正方向.

$$
\begin{aligned}
T = &\frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} - b\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 \\
&+ (\dot{y} + b\dot{\varphi}\cos\varphi)^2] + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\
= &\frac{1}{2}(m + M)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}(MR^2 + 2mb^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2 \\
&+ mb(-\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi).
\end{aligned}
$$

$$V = 0$$

$$L = T - V = T$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta} = \text{常量},\quad \dot{\theta} = \text{常量}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m + M)\dot{x} - mb\dot{\varphi}\sin\varphi = \text{常量}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0,\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=(m+M)\dot{y}+mb\dot{\varphi}\cos\varphi=\text{常量}$$

因为　$\frac{\partial L}{\partial t}=0,\quad V=0,U=0$

所以　$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=T=\text{常量}$

9.3.20 一个均匀的实心圆柱体，半径为 R，质量为 M，放在一个水平面上. 另一个相同的圆柱体放在它上面，和它的最高母线相切. 两圆柱体从静止状态开始做无滑动滚动. 写出该系统的拉格朗日函数，说明存在哪些运动积分，并证明，只要两圆柱保持接触，则有

$$\dot{\theta}^2=\frac{12g(1-\cos\theta)}{R(17+4\cos\theta-4\cos^2\theta)}$$

其中 θ 是两轴所决定的平面和通过一个轴的铅垂面间的夹角.

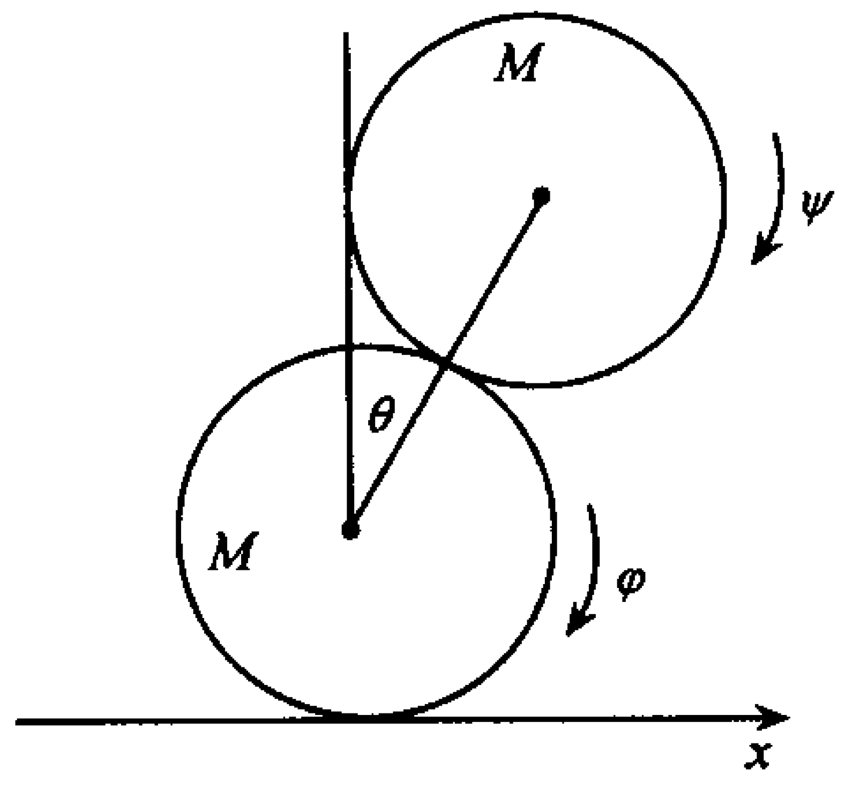


图 9.55

解　图 9.55 中，φ,ψ 分别是两个圆柱在各自的质心平动参考系中的转角，

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}M[(\dot{x}+2R\dot{\theta}\cos\theta)^2+(2R\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}^2$$

两个圆柱均做纯滚动，

$$\dot{x}-R\dot{\varphi}=0$$

$$2R\dot{\theta}-R\dot{\psi}=R\dot{\varphi}$$

可得　$\dot{x}=R\dot{\varphi},\quad \dot{\psi}=2\dot{\theta}-\dot{\varphi}$

选用 φ、θ 为广义坐标，用上述两个约束关系，动能可改写为

$$T=\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}^2+3MR^2\dot{\theta}^2+2MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta-MR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$V=-Mg\cdot 2R(1-\cos\theta)$$

$$L=T-V=\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}^2+3MR^2\dot{\theta}^2+MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}(2\cos\theta-1)+2MgR(1-\cos\theta)$$

因为 $\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0,\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=$常量，并用初始条件：$t=0$ 时，$\dot{\theta}=0,\dot{\varphi}=0$，可得

$$3MR^2\dot{\varphi}+MR^2\dot{\theta}(2\cos\theta-1)=0$$

因为　$\frac{\partial L}{\partial t}=0,\quad \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=\text{常量}$

所以　$\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}^2+3MR^2\dot{\theta}^2+MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}(2\cos\theta-1)-2MgR(1-\cos\theta)=0$

这里用了初始条件：$t=0$ 时，$\dot{\varphi}=\dot{\theta}=0,\theta=0$，因而等号右边的常量为零.

从两个运动积分的式子解出 $\dot{\theta}^2$ 得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1-\cos\theta)}{R(17+4\cos\theta-4\cos^2\theta)}$$

9.3.21 一根质量为 M、长为 $2a$ 的均质棒 OA 装在固定点的光滑枢轴上，另有一个质量为 m 的珠子 P 用一根自然长度为 a、劲度系数为 k 的轻弹簧连于 O 点，并套在棒上，可沿棒做无摩擦滑动. 设 θ 是 OA 与铅垂线间的夹角，φ 是包含 OA 的铅垂面与固定铅垂面间的夹角，r 为 OP 间的距离. 用 r、θ、φ 为广义坐标，写出系统的拉格朗日函数，并给出两个运动常数.

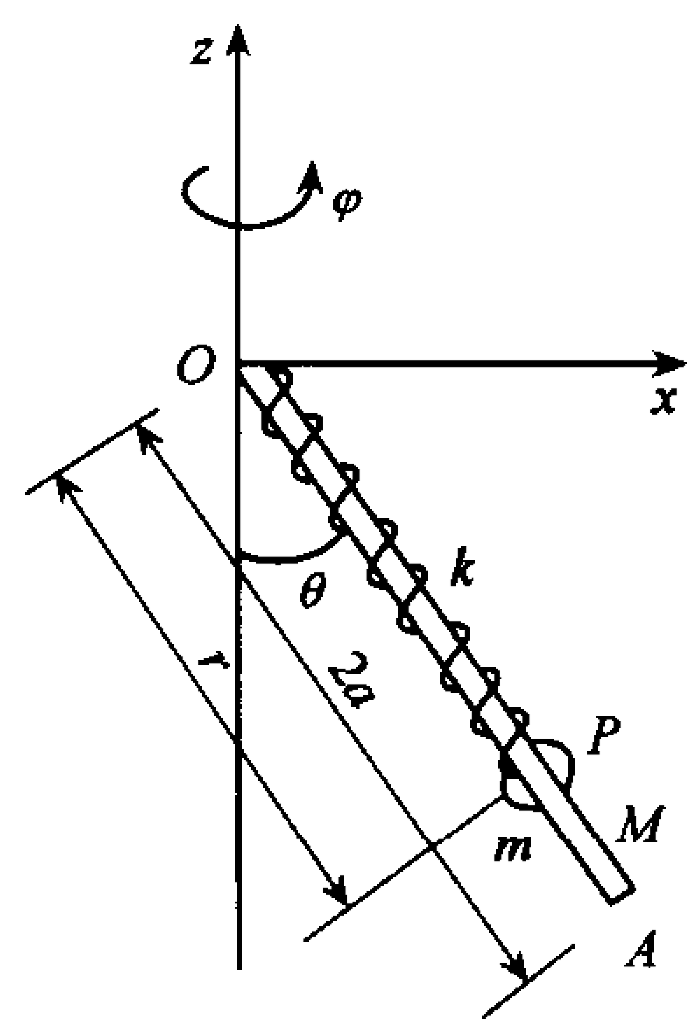


图 9.56

解 取 z 轴竖直向上，x 轴水平，随棒绕 z 轴转动，x 轴、z 轴和棒始终在同一竖直平面内，如图 9.56 所示.

棒关于 O 点的轴转动惯量和惯量积分别为

$$I_{xx} = \frac{1}{3}M(2a\cos\theta)^2 = \frac{4}{3}Ma^2\cos^2\theta$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3}M(2a)^2 = \frac{4}{3}Ma^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{3}M(2a\sin\theta)^2 = \frac{4}{3}Ma^2\sin^2\theta$$

$$I_{xy} = I_{yz} = 0, \quad I_{xz} \neq 0$$

但此题因为 $\omega_x=0$，可以不必计算 I_{xz}.

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{yz}\omega_y\omega_z) + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

令
$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\dot{\theta}, \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

所以
$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(mr^2 + \frac{4}{3}Ma^2\right)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

$$V = -Mga\cos\theta - mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-a)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(mr^2 + \frac{4}{3}Ma^2\right)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + (Ma + mr)g\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-a)^2$$

因为 $\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$，所以 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=$常量，即

$$\left(mr^2 + \frac{4}{3}Ma^2\right)\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{常量}$$

因为 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，所以 $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L=$常量，即

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(mr^2 + \frac{4}{3}Ma^2\right)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

$$-(Ma+mr)g\cos\theta+\frac{1}{2}k(r-a)^2=\text{常量}$$

9.3.22　一个质量为 m 的粒子在一光滑平面上运动，它受到平面上一固定点 P 的吸引力，力的大小与离 P 点的距离的平方成反比，比例系数为 k. 用极坐标写出该粒子的拉格朗日函数和运动微分方程，并给出两个运动积分.

解　取 P 点为极坐标系原点，

$$\boldsymbol{F}=-\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}$$

取无穷远处的势能为零，

$$V(r)=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r}^{\infty}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r}^{\infty}\left(-\frac{k}{r^2}\right)\mathrm{d}r=-\frac{k}{r}$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{k}{r}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial r}=0$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=0$，给出粒子的运动微分方程为

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)+\frac{k}{r^2}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\varphi})=0$$

可直接写出两个运动积分.

$$mr^2\dot{\varphi}=\text{常量}$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{k}{r}=\text{常量}$$

9.3.23　质量为 m_1、m_2 的两粒子之间的作用力为有心力，势能为 $V(r)$，$\boldsymbol{r}$ 为相对位矢.

(1) 在质心平动参考系中写出此系统的拉格朗日函数，并由此证明能量和角动量守恒；证明运动总在一个平面内，满足开普勒第二定律($\boldsymbol{r}$ 在相等的时间内扫过相等的面积)；

(2) 若势能 $V=\dfrac{1}{2}kr^2$(k 是一个正的常数)，且已知总能量 E 和角动量 J，求出运动过程中 r 的最大值和最小值满足的表达式.

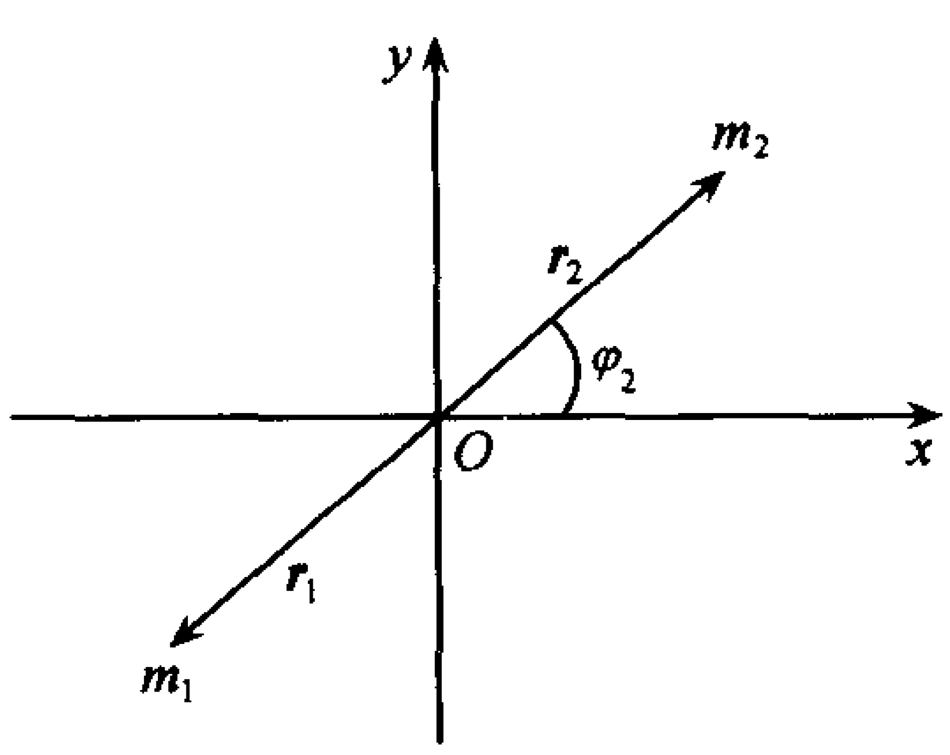


图 9.57

解　由于作用力总沿着两质点的连线，质点的运动将以开始时的相对速度与连线构成的平面内运动. 在质心平动参考系中取平面极坐标，原点位于质心，$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 是两质点对质心的位矢. 由质心的定义，

$$\frac{m_2^2}{2\mu}(\dot{r}_2^2+r_2^2\dot{\varphi}_2^2)+V\left(\frac{m_2}{\mu}r_2\right)=E$$

得

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}_2^2)+V(r)=E$$

代入前已得到的 $r^2\dot{\varphi}_2=\dfrac{J}{\mu}$ 及 $V(r)=\dfrac{1}{2}kr^2$,

$$\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+\frac{J^2}{\mu^2r^2}\right)+\frac{1}{2}kr^2=E$$

当 r 处于最大值或最小值位置时,$\dot{r}=0$. 故 $r_{\max}$、$r_{\min}$满足的方程为

$$\frac{J^2}{2\mu r^2}+\frac{1}{2}kr^2=E$$

或

$$kr^4-2Er^2+\frac{J^2}{\mu}=0$$

$$r_{\max}=\sqrt{\frac{1}{k}\left(E+\sqrt{E^2-\frac{k}{\mu}J^2}\right)}$$

$$r_{\min}=\sqrt{\frac{1}{k}\left(E-\sqrt{E^2-\frac{k}{\mu}J^2}\right)}$$

9.3.24 给定一个一维运动的拉格朗日函数

$$L=\mathrm{e}^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2\right)$$

其中 γ、m、k 均是正值常量. 写出拉格朗日方程,说明有无可直接写出的运动常数,并描述这一运动.

若采用广义坐标 s,它与原广义坐标 q 的变换关系为 $s=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma t}q$,重新写出拉格朗日函数、拉格朗日方程,回答有无可直接写出的运动常数,并说明两个解之间的关系.

解

$$L=\mathrm{e}^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\mathrm{e}^{\gamma t}m\dot{q}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=\gamma\mathrm{e}^{\gamma t}m\dot{q}+\mathrm{e}^{\gamma t}m\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}=-k\mathrm{e}^{\gamma t}q$$

$$m\mathrm{e}^{\gamma t}\ddot{q}+m\gamma\mathrm{e}^{\gamma t}\dot{q}+k\mathrm{e}^{\gamma t}q=0$$

$$m\ddot{q}+m\gamma\dot{q}+kq=0$$

因 $\dfrac{\partial L}{\partial q}\neq0$,$\dfrac{\partial L}{\partial t}\neq0$,无直接可写出的运动常数.

从运动微分方程可看出,它是一个常系数线性齐次的常微分方程,相应的特征方程为

$$mr^2+m\gamma r+k=0$$

$$r=\frac{-mr\pm\sqrt{m^2\gamma^2-4mk}}{2m}$$

当$\dfrac{\gamma}{2}<\sqrt{\dfrac{k}{m}}$时，质点作弱阻尼振动；

当$\dfrac{\gamma}{2}>\sqrt{\dfrac{k}{m}}$时，质点作过阻尼振动；

当$\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$时，质点的运动为临界阻尼情形.

若采用广义坐标 s，$s=e^{\frac{1}{2}\gamma t}q$，则

$$q=e^{-\frac{1}{2}\gamma t}s,\ \dot{q}=e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\dot{s}-\frac{1}{2}\gamma e^{-\frac{1}{2}\gamma t}s,$$

$$L=e^{\gamma t}\left[\frac{1}{2}m\left(e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\dot{s}-\frac{1}{2}\gamma e^{-\frac{1}{2}\gamma t}s\right)^2-\frac{k}{2}(e^{-\frac{1}{2}\gamma t}s)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{s}-\frac{1}{2}\gamma s\right)^2-\frac{1}{2}ks^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}=m(\dot{s}-\frac{1}{2}\gamma s),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right)=m\left(\ddot{s}-\frac{1}{2}\gamma\dot{s}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s}=-\frac{1}{2}\gamma m(\dot{s}-\frac{1}{2}\gamma s)-ks=-\frac{1}{2}\gamma m\dot{s}-\left(k-\frac{1}{4}m\gamma^2\right)s$$

$$m(\ddot{s}-\frac{1}{2}\gamma\dot{s})+\frac{1}{2}\gamma m\dot{s}+\left(k-\frac{1}{4}m\gamma^2\right)s=0$$

$$\ddot{s}+\left(\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4}\right)s=0 \tag{1}$$

因$\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$，可直接写出一个运动积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\dot{s}-L=\text{常量}$$

即

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4}\right)s^2=\text{常量}$$

由式(1)的运动微分方程可见，如$\dfrac{k}{m}>\dfrac{\gamma^2}{4}$，即$\dfrac{\gamma}{2}<\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，用坐标 s，质点作简谐振动，用坐标 q，质点作弱阻尼振动.

如$\dfrac{k}{m}<\dfrac{\gamma^2}{4}$，即$\dfrac{\gamma}{2}>\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，不论用坐标 s 还是用坐标 q，质点的运动都是过阻尼振动.

如$\dfrac{k}{m}=\dfrac{\gamma^2}{4}$，即$\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，不论用坐标 s 还是用坐标 q，质点的运动都是临界阻尼情形.

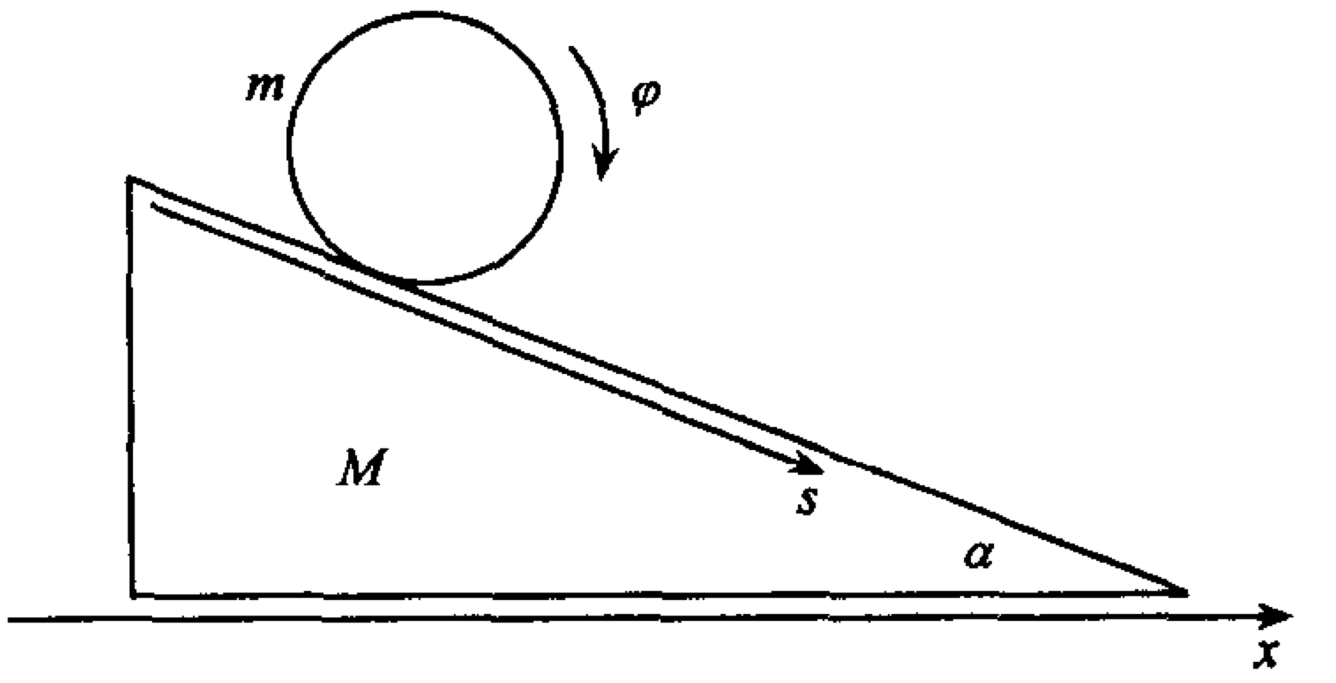


图 9.58

9.3.25　一个质量为 m、半径为 a 的均质圆环在一个质量为 M、倾角为 α、置于光滑水平面上的斜面上作无滑动滚动，运动是平面的. 选择表示斜面对某固定参考点的水平

距离 x 和表示圆环从斜面上某参考点沿斜面滚下的距离 s 为广义坐标，找出四个运动常数.

解　取图 9.58 所示的 x、s 为广义坐标.

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}+\dot{s}\cos\alpha)^2+(\dot{s}\sin\alpha)^2]+\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2$$

圆环作纯滚动，

$$\dot{s}-a\dot{\varphi}=0$$

$$T=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\dot{s}^2+m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha$$

$$V=-mgs\sin\alpha$$

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\dot{s}^2+m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha+mgs\sin\alpha$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\text{常量}$$

即

$$(M+m)\dot{x}+m\dot{s}\cos\alpha=\text{常量}\tag{1}$$

因为 $\frac{\partial L}{\partial t}=0, V=0, T=T_2$，即动能为广义速度的二次齐次函数，

所以

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=T+V=\text{常量}$$

即

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\dot{s}^2+m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha-mgs\sin\alpha=\text{常量}\tag{2}$$

由拉格朗日方程可写出系统的运动微分方程为

$$(M+m)\ddot{x}+m\ddot{s}\cos\alpha=0$$

$$\ddot{x}\cos\alpha+2\ddot{s}-g\sin\alpha=0$$

两式消去 $\ddot{x}$，解出 $\ddot{s}$，得

$$\ddot{s}=\frac{(M+m)g\sin\alpha}{2(M+m)-m\cos^2\alpha}$$

积分上式得

$$\dot{s}=\frac{(M+m)gt\sin\alpha}{2(M+m)-m\cos^2\alpha}+\text{常量}\tag{3}$$

由式(1)、(3)，可得第四个运动常数

$$\dot{x}=-\frac{mgt\sin\alpha\cos\alpha}{2(M+m)-m\cos^2\alpha}+\text{常量}\tag{4}$$

式(1)、(2)、(3)、(4)都是第一运动积分，对式(1)、(3)、(4)均能积分得到第二运动积分.

9.3.26　证明带电粒子在稳定电磁场中的能量积分是 $T+q\phi$，其中 q 是带电粒子所带的电荷量，ϕ 是电磁场的标势，T 是带电粒子的动能，

证明　$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

在稳定电磁场中，带电粒子的广义势为

$$U = q\phi - q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} = q\phi - q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z})$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为电磁场的矢势，

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z})$$

因为 $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$， $\sum\limits_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = $ 常量

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L\\ &= (m\dot{x} + qA_x)\dot{x} + (m\dot{y} + qA_y)\dot{y} + (m\dot{z} + qA_z)\dot{z}\\ &\quad - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\phi - q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z})\\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\phi = T + q\phi\end{aligned}$$

所以能量积分(更准确地说是广义能量积分)为

$$T + q\phi = 常量$$

9.3.27 长 l、质量为 M 的均质棒在竖直的 xz 平面内运动，其一端 A 限制在直线 $z = x\tan\alpha$ 上运动(α 为直线对水平的 x 轴的倾角)，用图 7.59 所示的广义坐标 s 和 θ，导出运动微分方程，并确定作平动时的 θ 值.

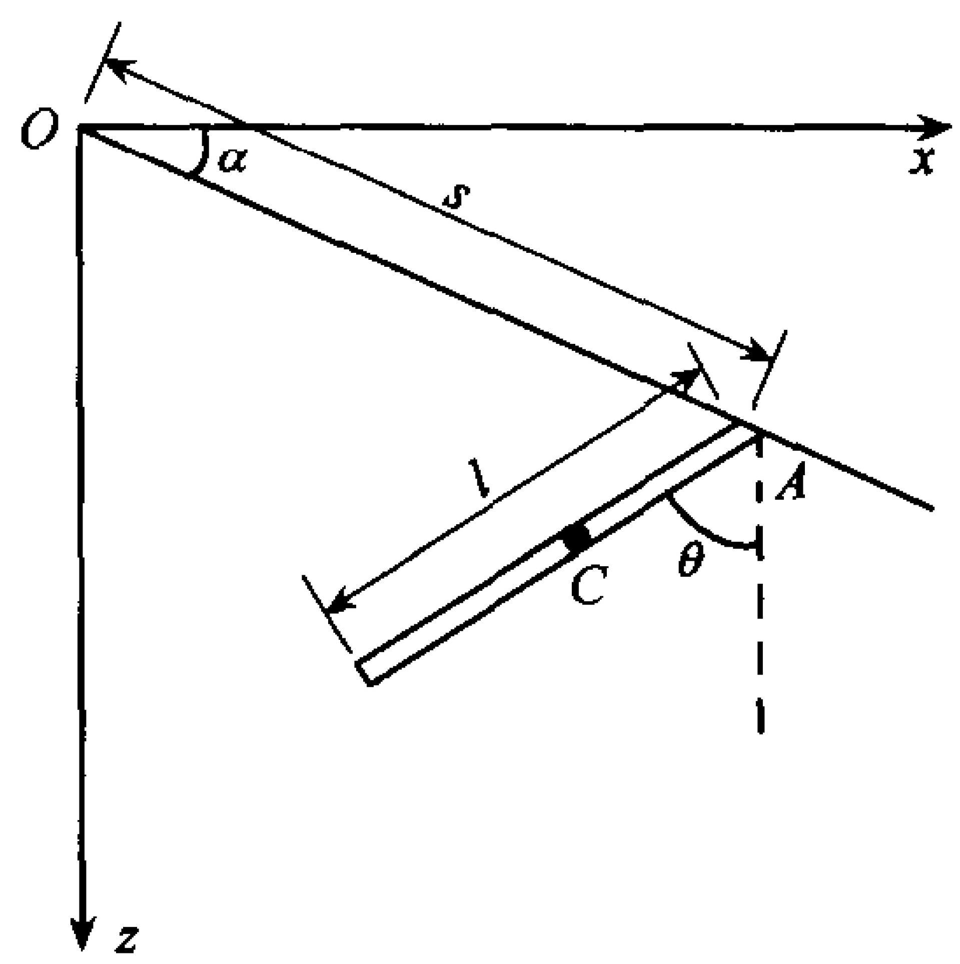


图 9.59

解 图 9.59 中 C 为棒的质心.

$$x_C = s\cos\alpha - \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$z_C = s\sin\alpha + \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\dot{x}_C = \dot{s}\cos\alpha - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{z}_C = \dot{s}\sin\alpha - \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}Ml^2\dot{\theta}^2\\ &= \frac{1}{2}M\left[\dot{s}^2 + \frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2 - l\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta - \alpha)\right]\end{aligned}$$

$$V = -Mgz_C = -Mg\left(s\sin\alpha + \frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

$$L = \frac{1}{2}M\left[\dot{s}^2 + \frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2 - l\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta - \alpha)\right] + Mg\left(s\sin\alpha + \frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} - \frac{1}{2}Ml\dot{\theta}\cos(\theta - \alpha)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right)=M\ddot{s}-\frac{1}{2}Ml\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha)+\frac{1}{2}Ml\dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s}=Mg\sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}-\frac{1}{2}Ml\dot{s}\cos(\theta-\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta}-\frac{1}{2}Ml\ddot{s}\cos(\theta-\alpha)+\frac{1}{2}Ml\dot{s}\,\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{1}{2}Ml\dot{s}\,\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha)-\frac{1}{2}Mgl\sin\theta$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

$$M\ddot{s}-\frac{1}{2}Ml\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha)+\frac{1}{2}Ml\dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha)-Mg\sin\alpha=0$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta}-\frac{1}{2}Ml\ddot{s}\cos(\theta-\alpha)+\frac{1}{2}Mgl\sin\theta=0$$

纯平动时,$\dot{\theta}=0$,$\ddot{\theta}=0$,代入上述两式,得

$$\ddot{s}-g\sin\alpha=0$$

$$\ddot{s}\cos(\theta-\alpha)-g\sin\theta=0$$

用前式消去后式中的 $\ddot{s}$,得

$$\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)-\sin\theta=0$$

$$\sin\alpha(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)-\sin\theta=0$$

$$\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta-\sin\theta(1-\sin^2\alpha)=0$$

$$\sin\alpha\cos\theta-\sin\theta\cos\alpha=0$$

$$\sin(\alpha-\theta)=0$$

所以

$$\theta=\alpha\ \text{或}\ \pi+\alpha$$

9.3.28 (1)质量为 m 的均质杆两端的速度分别为$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$,证明其动能为

$$T=\frac{1}{6}m(v_A^2+\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}_B+v_B^2)$$

(2)一根质量为 m、长度为 a 的均质杆,其一端限于沿一光滑的竖直轴运动,另一端在光滑的水平面上滑动,设 θ 是杆与竖直向下的轴间的夹角,φ 是杆所在竖直平面的角位移,如 $t=0$ 时,$\theta=\frac{\pi}{6}$,$\dot{\theta}=0$,$\dot{\varphi}=\Omega$,证明在以后的运动中,只要杆保持与水平面接触,有下列关系:

$$\dot{\theta}^2=\frac{1}{16}\Omega^2(4-\csc^2\theta)+\frac{3g}{2\Omega}(\sqrt{3}-2\cos\theta)$$

证明 (1)用柯尼希定理写杆的动能.

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_B)$$

设杆长为 l,绕过质心垂直于杆的轴转动的转动惯量为

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

杆的角速度的大小为

$$\omega = \frac{|\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B|}{l}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B) \cdot \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}ml^2 \frac{(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)}{l} \cdot \frac{(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)}{l} \\ &= \frac{1}{8}m(v_A^2 + 2\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_B + v_B^2) + \frac{1}{24}m(v_A^2 - 2\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_B + v_B^2) \\ &= \frac{1}{6}m(v_A^2 + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_B + v_B^2) \end{aligned}$$

(2) 取图 9.60 的 xyz 坐标,用上面证明的式子计算杆的动能,

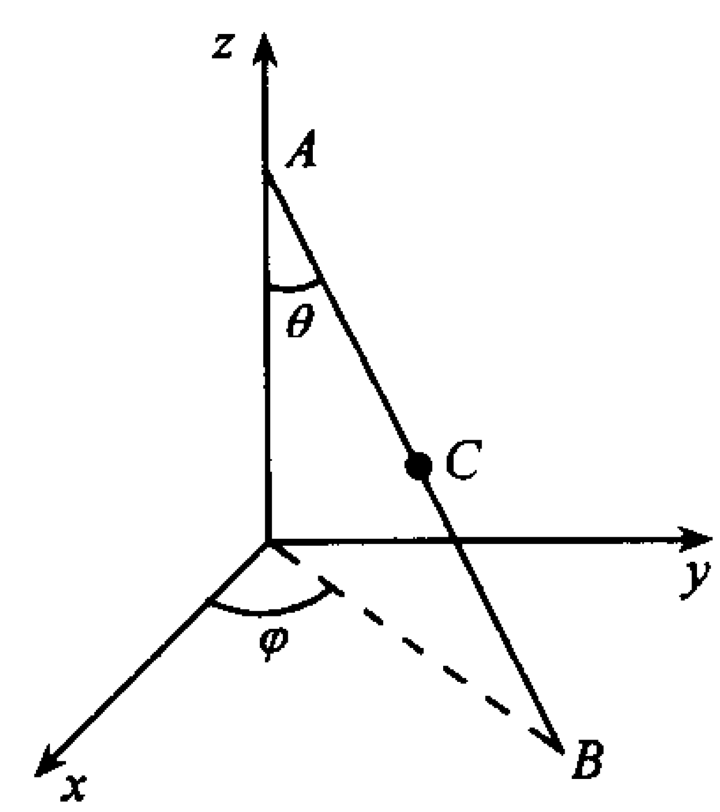


图 9.60

$$\boldsymbol{v}_A = \dot{z}_A\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v}_B = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$z_A = a\cos\theta, \quad r = a\sin\theta$$

$$\dot{r} = a\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{z}_A = -a\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\boldsymbol{v}_A = -a\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_B = a\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_r + a\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_B = 0$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{6}m(v_A^2 + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_B + v_B^2) \\ &= \frac{1}{6}m[(-a\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (a\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (a\dot{\varphi}\sin\theta)^2] \\ &= \frac{1}{6}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \end{aligned}$$

$$V = mgz_C = \frac{1}{2}mga\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{6}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - \frac{1}{2}mga\cos\theta$$

因为$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$,$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=$常量,用初始条件:$t=0$ 时,$\theta=\frac{\pi}{6}$,$\dot{\varphi}=\Omega$,得

$$\frac{1}{3}ma^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \frac{1}{3}ma^2\Omega\sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{12}ma^2\Omega$$

$$\dot{\varphi}\sin^2\theta = \frac{1}{4}\Omega \tag{1}$$

因为$\frac{\partial L}{\partial t}=0$,$U=0$,$T=T_2$($T$ 是广义速度的二次齐次函数),用初始条件:$t=0$ 时,$\theta=\frac{\pi}{6}$,$\dot{\theta}=0$,$\dot{\varphi}=\Omega$,写 $T+U=$常量为

$$\frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ma^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}mga\cos\theta$$

$$= \frac{1}{6}ma^2\Omega^2\sin^2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}mga\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{24}ma^2\Omega^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}mga$$

$$4a\dot{\theta}^2 + 4a\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 12g\cos\theta = a\Omega^2 + 6\sqrt{3}g \tag{2}$$

从(1)、(2)两式可解出 $\dot{\theta}^2$ 为

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{16}\Omega^2(4 - \csc^2\theta) + \frac{3g}{2a}(\sqrt{3} - 2\cos\theta)$$

9.3.29 一个质量为 m 的质点,在重力的作用下自静止竖直下落时,受到一个可用耗散函数 $R=\frac{1}{2}\gamma v^2$ 的阻力作用,证明质点的最大速度为$\frac{mg}{\gamma}$

证明 取 x 轴竖直向下,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad V = -mgx$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx,$$

$$R = \frac{1}{2}\gamma\dot{x}^2, \quad Q = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = -\gamma\dot{x}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q$$

$$m\ddot{x} - mg = -\gamma\dot{x}$$

达到最大速度时,$\ddot{x}=0$,代入上式得

$$\dot{x}_{\max} = \frac{mg}{\gamma}$$

9.3.30 自然长度为 l_0、劲度系数为 k 的无质量弹簧一端固定,另一端和一个质量为 m 的质点相连,在重力作用下,限在一个竖直平面内运动. 用 φ 和 $\lambda=\frac{r-r_0}{r_0}$(其中 r_0 是处于平衡状态时弹簧的长度)为广义坐标.

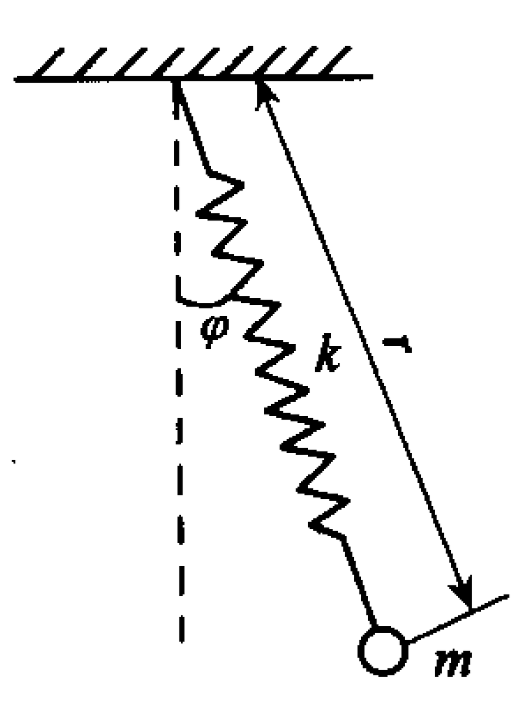


图 9.61

(1) 写出拉格朗日函数;

(2) 用 $\omega_s^2=\frac{k}{m}$、$\omega_p^2=\frac{g}{r_0}$写出拉格朗日方程;

(3) 当 λ 和 φ 很小,初始条件:$t=0$ 时,$\varphi=0$,$\lambda=A$,$\dot{\varphi}=\omega_p B$,$\dot{\lambda}=0$,其中 A、B 是常量,求运动的最低级近似解;

(4) 讨论运动的高一级近似,在什么条件下,λ 的运动将发生共振? 这在物理上能实现吗?

解 (1) $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

$$\lambda = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad r = r_0\lambda + r_0, \quad \dot{r} = r_0\dot{\lambda}$$

$$T=\frac{1}{2}mr_0^2[\dot{\lambda}^2+(\lambda+1)^2\dot{\varphi}^2]$$

$$V=-mgr\cos\varphi+mgr_0+\frac{1}{2}k(r-l_0)^2-\frac{1}{2}k(r_0-l_0)^2$$

$$=-mg(r_0\lambda+r_0)\cos\varphi+mgr_0+\frac{1}{2}k(r_0\lambda+r_0-l_0)^2-\frac{1}{2}k(r_0-l_0)^2$$

$$=-mg(r_0\lambda+r_0)\cos\varphi+mgr_0+\frac{1}{2}kr_0^2\lambda^2+kr_0(r_0-l_0)\lambda$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}mr_0^2[\dot{\lambda}^2+(\lambda+1)^2\dot{\varphi}^2]+mg(r_0\lambda+r_0)\cos\varphi$$

$$-mgr_0-\frac{1}{2}kr_0^2\lambda^2-kr_0(r_0-l_0)\lambda$$

$$=\frac{1}{2}mr_0^2[\dot{\lambda}^2+(\lambda+1)^2\dot{\varphi}^2]+mg(r_0\lambda+r_0)\cos\varphi-mgr_0-\frac{1}{2}kr_0^2\lambda^2-mgr_0\lambda$$

这里用了平衡条件：

$$k(r_0-l_0)=mg$$

(2) 由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0$及$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$得

$$mr_0^2\ddot{\lambda}+mr_0^2(\lambda+1)\dot{\varphi}^2+kr_0^2\lambda+mgr_0(1-\cos\varphi)=0$$

$$mr_0^2(\lambda+1)^2\ddot{\varphi}+2mr_0^2(\lambda+1)\dot{\lambda}\dot{\varphi}+mgr_0(\lambda+1)\sin\varphi=0$$

用$\omega_s^2=\frac{k}{m},\omega_p^2=\frac{g}{r_0}$，上述方程可写为

$$\ddot{\lambda}-(\lambda+1)\dot{\varphi}^2+\omega_s^2\lambda+\omega_p^2(1-\cos\varphi)=0$$

$$(\lambda+1)\ddot{\varphi}+2\dot{\lambda}\dot{\varphi}+\omega_p^2\sin\varphi=0$$

(3) 当λ、φ都很小，λ、φ、$\dot{\lambda}$、$\dot{\varphi}$、$\ddot{\lambda}$、$\ddot{\varphi}$均为一级小量时，取最低级近似，只保留一级小量，运动微分方程简化为

$$\ddot{\lambda}+\omega_s^2\lambda=0$$

$$\ddot{\varphi}+\omega_p^2\varphi=0$$

在给定的初始条件：$t=0$时，$\lambda=A$，$\dot{\lambda}=0$，$\varphi=0$，$\dot{\varphi}=\omega_pB$，可解出

$$\lambda=A\cos\omega_st$$

$$\varphi=B\sin\omega_pt$$

(4) 求高一级近似解，保留二级小量，运动微分方程为

$$\ddot{\lambda}+\omega_s^2\lambda=\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}\omega_p^2\varphi^2$$

$$(\lambda+1)\ddot{\varphi}+2\dot{\lambda}\dot{\varphi}+\omega_p^2\varphi=0$$

讨论λ的运动，将φ的最低级近似解代入

$$\ddot{\lambda}+\omega_s^2\lambda=B^2\omega_p^2\cos^2\omega_pt-\frac{1}{2}\omega_p^2B^2\sin^2\omega_pt$$

用 $\cos^2\omega_p t=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega_p t)$，$\sin^2\omega_p t=\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega_p t)$，上式可改写为

$$\ddot{\lambda}+\omega_s^2\lambda=\frac{1}{4}B^2\omega_p^2(1+3\cos 2\omega_p t)$$

这是一个受迫的振动方程. 当强迫力的角频率等于振动系统的固有频率即 $2\omega_p=\omega_s$ 时，λ 的运动会发生共振.

在物理上是不可能出现共振的，解上述微分方程，解中将包含一项与时间成正比的项，随着时间的推移趋于无穷大，故这种项被称为长期项，趋于无穷，机械能不守恒，而此系统在保守力场中运动，应遵从机械能守恒，因此在物理上不可能出现共振现象. 小的"强迫力"的存在并不改变运动是周期运动这一特性，但其周期不再是 $\frac{2\pi}{\omega_s}$，而有一个小的偏离. 考虑到 $\omega=\omega_s+\delta$(δ 为小量)，长期项可以不出现.

9.3.31　两个质量均为 m 的质点各用一根劲度系数为 k、原长为 l 的弹簧连到质量为 M、长度为 L 的均质细杆的中点，并限在细杆上做两根弹簧的长度保持相等的运动，细杆可以以任意方式自由运动，此系统是空间的孤立系统，列出运动微分方程并求解之(到作积分为止). 定性地描述系统的运动.

解　取静参考系，用两个坐标系，一个静止的直角坐标系 $Oxyz$，一个质心平动坐标系 $O'x'y'z'$，O' 是系统的质心，用 O' 点的坐标 x、y、z 和一个质点在动坐标系中的球坐标 r、θ、φ 作为广义坐标，如图 9.62 所示.

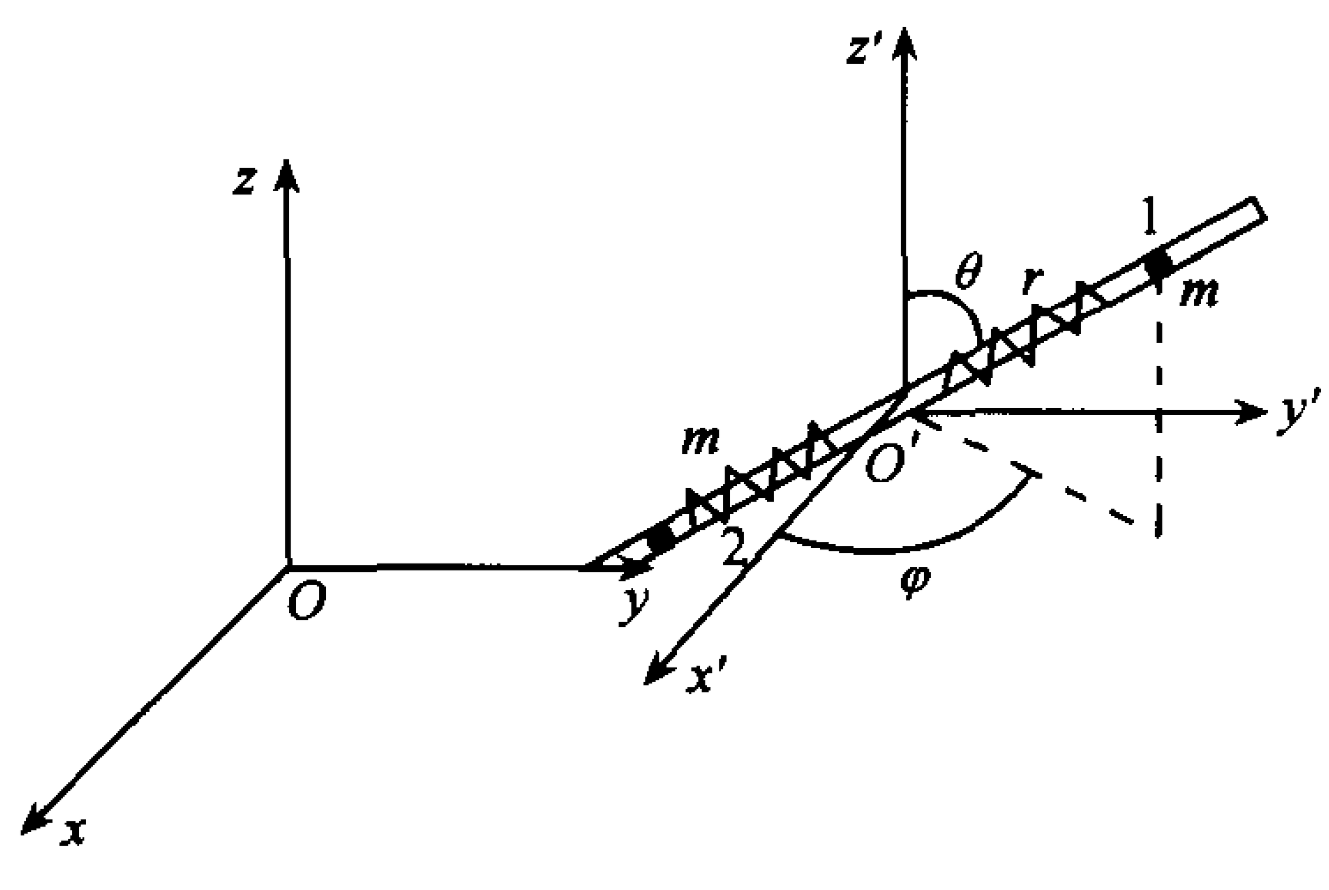


图 9.62

计算细杆在质心平动参考系中的动能时选三个惯量主轴，其单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别与质点 1 所在位置的 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 平行，关于 O' 的三个主转动惯量为

$$I_1=0, I_2=I_3=\frac{1}{12}ML^2$$

细杆的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{e}_1-\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_2+\dot{\theta}\boldsymbol{e}_3$$

细杆的转动动能，即细杆在其质心平动参考系中的动能为

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2=\frac{1}{24}ML^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2 \cdot \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{24}ML^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\dot{r}^2 + (mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

系统的势能为

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2}k(r - l)^2 = k(r - l)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\dot{r}^2 + (mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - k(r - l)^2$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$，可得运动微分方程或其运动积分为

$$(M + 2m)\dot{x} = \text{常量}\, C_1,\qquad \dot{x} = \frac{C_1}{M + 2m}$$

$$(M + 2m)\dot{y} = \text{常量}\, C_2,\qquad \dot{y} = \frac{C_2}{M + 2m}$$

$$(M + 2m)\dot{z} = \text{常量}\, C_3,\qquad \dot{z} = \frac{C_3}{M + 2m}$$

$$2(mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{常数}\, C_4$$

$$\dot{\varphi} = \frac{C_4}{2(mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)\sin^2\theta} \tag{1}$$

$$m\ddot{r} - mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + k(r - l) = 0 \tag{2}$$

$$(mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - (mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{3}$$

因为$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, V = 0, T = T_2$（动能是广义速度的二次齐次函数），所以

$$T + V = \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\dot{r}^2 + (mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + k(r - l)^2 = \text{常数}\, C_5$$

因为 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$均为常量，所以

$$m\dot{r}^2 + (mr^2 + \frac{1}{24}ML^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = \text{常量}\, C_6$$

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta = \frac{1}{mr^2 + \frac{1}{24}ML^2}(C_6 - m\dot{r}^2) \tag{4}$$

将式(4)代入式(2)，并用 $\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}\dot{r}$，可得

$$\frac{1}{2}m\mathrm{d}\dot{r}^2-\frac{1}{2}m\frac{C_6-m\dot{r}^2}{mr^2+\frac{1}{24}ML^2}\mathrm{d}r^2=-k(r-l)\mathrm{d}r$$

可以找到积分因子 $mr^2+\frac{1}{24}ML^2$，作上式积分，

$$\frac{1}{2}m\left(mr^2+\frac{1}{24}ML^2\right)\mathrm{d}\dot{r}^2-\frac{1}{2}m(C_6-m\dot{r}^2)\mathrm{d}r^2$$

$$=-k(r-l)\left(mr^2-\frac{1}{24}ML^2\right)\mathrm{d}r$$

等号左边是 $\frac{1}{2}m\left(mr^2+\frac{1}{24}ML^2\right)\dot{r}^2-\frac{1}{2}mc_6r^2$ 的全微分，因原则上可从上式得到 $\dot{r}$ 与 r 的函数关系，进而积出 $r=r(t)$.

将 $r=r(t)$ 代入式(1)，积分可得 $\varphi=\varphi(t)$，再将 $r=r(t)$ 和 $\varphi=\varphi(t)$ 代入式(4)，可积出 $\theta=\theta(t)$.

关于系统的运动作定性描述，可以确定的讲，质心做匀速直线运动，两质点沿杆相对于中点 O' 做对称的运动，系统对 O' 点的角动量是守恒的.

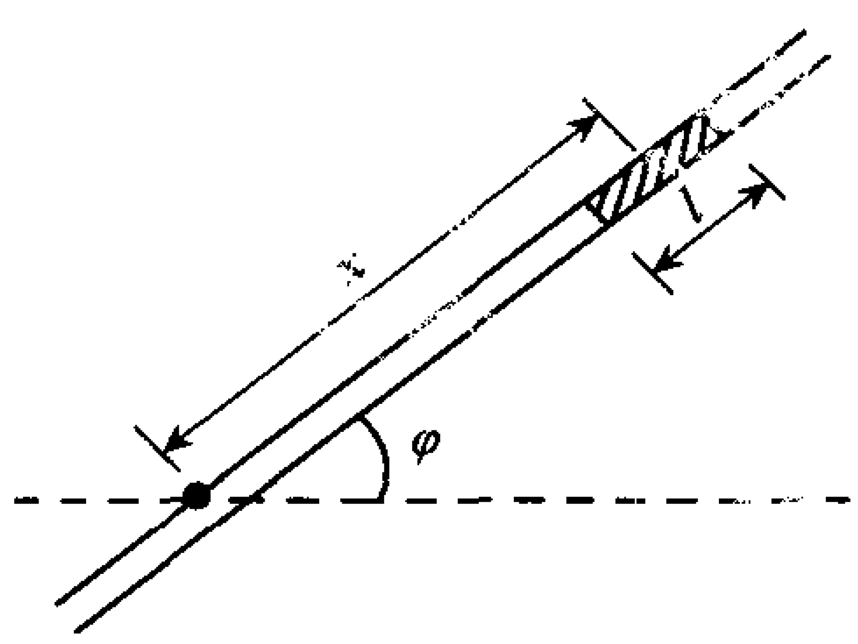


图 9.63

9.3.32 将一根很长的、可忽略质量的细管安上轴，可以无摩擦地绕轴在水平面内转动，一根长为 l、质量为 M 的细杆无摩擦地在管内滑动(见图 9.63)，写出系统的拉格朗日方程；开始杆的中心位于转轴，细管以角速度 ω_0 旋转，证明杆在这个位置是不稳定的. 将它稍微扰动一下，描述以后的运动，问经过很长时间之后，杆的径向速度和角速度各为多少(假定细管非常长，杆仍在管中)？

解 取图 9.63 中的 x 和 φ 为广义坐标，

$$T=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+x^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}Ml^2\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\left(x^2+\frac{1}{12}Ml^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$V=0$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\left(x^2+\frac{1}{12}Ml^2\right)\dot{\varphi}^2$$

拉格朗日方程为

$$\ddot{x}-x\dot{\varphi}^2=0 \tag{1}$$

$$M\left(x^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\varphi}=C(\text{常量}) \tag{2}$$

由初始条件：$t=0$ 时，$x=0,\dot{x}=0,\varphi=0,\dot{\varphi}=\omega_0$，定出 $C=\frac{1}{12}Ml^2\omega_0$，代入式(2)，得

所以

$$\dot{\varphi}=\frac{l^2\omega_0}{12x^2+l^2} \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)，

$$\ddot{x}=\frac{l^4\omega_0^2 x}{12x^2+l^2} \tag{4}$$

用 $\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}$，上式可改写为

$$\mathrm{d}\dot{x}^2=\frac{2l^4\omega_0^2 x\mathrm{d}x}{(12x^2+l^2)^2}=\frac{l^4\omega_0^2\mathrm{d}x^2}{(12x^2+l^2)^2}$$

两边积分，用初始条件：$x=0$ 时，$\dot{x}=0$，得

$$\dot{x}^2=l^2\omega_0^2\frac{x^2}{12x^2+l^2} \tag{5}$$

由式(1)可见，位于 $x\neq0$ 处，原静止的杆，因 $\ddot{x}\neq0$，将获得 $\dot{x}$；$x<0$时，$\ddot{x}<0$，则 $\dot{x}<0$. 反之，$x>0$ 时，$\ddot{x}>0$，则 $\dot{x}>0$. 都将向远离平衡位置的方向运动. 如在 $x=0$ 处，给于一个微小的速度 $\dot{x}$，则 x 将不等于零，有上述远离平衡位置的运动，说明 $x=0$ 是一个不稳定平衡位置.

在 $x=0$ 的静止状态，给予一个微扰，可用式(3)、(5)，很长时间以后，不论 $x\to\infty$还是 $x\to-\infty$，$\dot{\varphi}\to0$，$|\dot{x}|\to\frac{l\omega_0}{\sqrt{12}}=\frac{l\omega_0}{2\sqrt{3}}$，结论都是经过很长时间，杆的径向速度趋于$\frac{l\omega_0}{2\sqrt{3}}$，角速度趋于 0.

9.3.33　一质量为 M 的木块和一个半径为 a 的无质量的竖直的圆周轨道刚性相连，一起置于光滑的水平桌面上，如图 9.64 所示，一个质量为 m 的质点沿圆周轨道做无摩擦的运动.

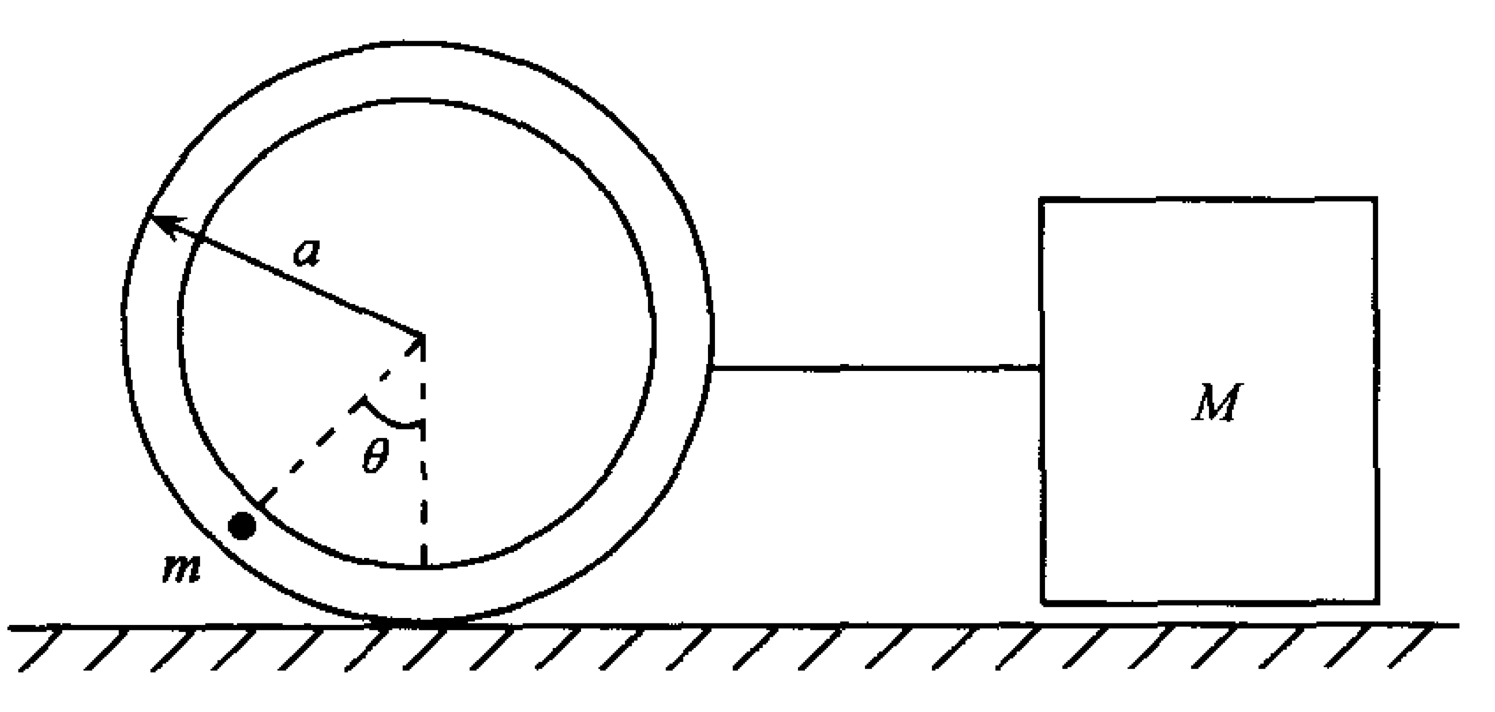


图 9.64

(1) 以 θ 为一个坐标，写出拉格朗日函数；

(2) 找出运动微分方程；

(3) 在小角度极限下，求 $\theta(t)$.

解　在质点运动的竖直平面内，沿水平方向取 x 轴，向左为 x 轴正向. 以圆周轨道的中心的 x 坐标与图中的 θ 为广义坐标.

(1)
$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2+(a\dot{\theta}\sin\theta)^2]$$

$$=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2+2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$V=-mga\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\theta) + mga\cos\theta$$

(2)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ma\,\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ma\,\ddot{\theta}\cos\theta - ma\,\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\,\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ma^2\ddot{\theta} + ma\ddot{x}\cos\theta - ma\dot{x}\,\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ma\dot{x}\,\dot{\theta}\sin\theta - mga\sin\theta$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$得运动微分方程为

$$(M+m)\ddot{x} + ma\,\ddot{\theta}\cos\theta - ma\,\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$a\,\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

(3) 质点在$\theta=0$附近的运动，θ、$\dot{\theta}$、$\ddot{\theta}$均为小量，$\cos\theta\approx1$，$\sin\theta\approx\theta$.

运动微分方程可简化为

$$(M+m)\ddot{x} + ma\,\ddot{\theta} = 0$$

$$a\,\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0$$

消去$\ddot{x}$，可得

$$\frac{Ma}{M+m}\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

其解为

$$\theta = A\cos(\omega t + \alpha)$$

其中A、α由初始条件确定，

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ma}}$$

9.3.34 质量为M、半径为R的两个相同的均质圆盘用三根相同的扭杆支承，如图9.65所示. 扭杆的恢复力矩为$\tau=-k\theta$(k为适用于此l和θ的扭转常数)，圆盘可围绕扭杆的竖直轴自由转动，θ_1、θ_2分别表示两盘偏离平衡位置的角位移，忽略扭杆的转动惯量. 初始条件为$\theta_1(0)=0$，$\theta_2(0)=0$，$\dot{\theta}_1(0)=0$，$\dot{\theta}_2(0)=\Omega$(常量). 要使圆盘1得到系统的全部动能需要多长时间？可以保留隐函数形式.

解 设I为每个圆盘绕转轴的转动惯量，系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}k(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}k(\theta_1 - \theta_2)^2$$

由拉格朗日方程得

$$I\ddot{\theta}_1 + 2k\theta_1 - k\theta_2 = 0 \tag{1}$$

$$I\ddot{\theta}_2 + 2k\theta_2 - k\theta_1 = 0 \tag{2}$$

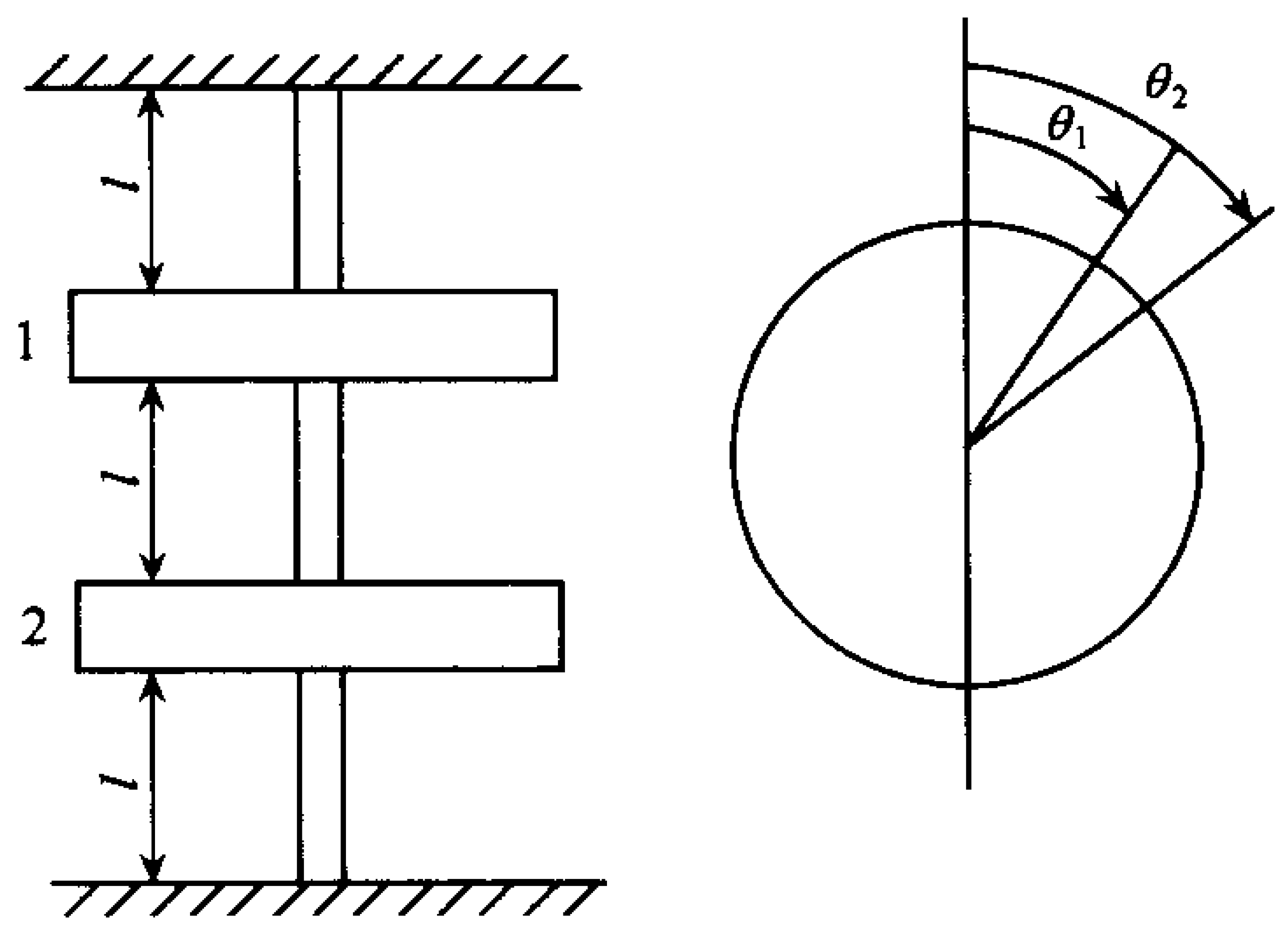


图 9.65

式(1)＋式(2)和式(1)－式(2)得

$$I(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + k(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

$$I(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + 3k(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

解分别为

$$\theta_1 + \theta_2 = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \alpha\right)$$

$$\theta_1 - \theta_2 = B\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}t + \beta\right)$$

初始条件为 $t=0$ 时，$\theta_1+\theta_2=0, \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2=\Omega, \theta_1-\theta_2=0, \dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2=-\Omega$，定出

$$A = \Omega\sqrt{\frac{I}{k}}, \qquad \alpha = 0$$

$$B = -\Omega\sqrt{\frac{I}{3k}}, \qquad \beta = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \Omega\sqrt{\frac{I}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t\right)$$

$$\theta_1 - \theta_2 = -\Omega\sqrt{\frac{I}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}t\right)$$

从上述两式解出

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\Omega\left[\sqrt{\frac{I}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t\right) + \sqrt{\frac{I}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}t\right)\right]$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2}\Omega\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}t\right)\right]$$

当 $\dot{\theta}_2=0$ 时，圆盘 1 的动能是系统的全部动能，此时刻 t 满足的关系为

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}\,t\right) = -\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}\,t\right)$$

其中 $I=\frac{1}{2}MR^2$.

要指出的是系统的机械能是守恒的,系统的动能不守恒,满足上述关系的 t 时刻,圆盘 1 具有系统的全部动能,既不是系统的最大动能,也不是圆盘 1 的最大动能.

9.3.35 长 $2L$、质量 M 的均匀细杆用一根长 l、质量不计不可伸长的绳子拴在固定的钉子上. 如图 9.66 所示. 在杆的自由端加一水平的恒力 F,写出这个系统的拉格朗日函数和运动微分方程;$t=0$ 时,系统从下垂位置的静止状态开始运动,求在非常短的时间内(所有角度都很小)绳子和杆与竖直方向的夹角.

解 因开始时绳子和杆在竖直位置处于静止状态,$\boldsymbol{F}$ 是水平的,系统将在此竖直平面内运动,取图 9.67 的 xy 坐标,并用绳、杆与竖直线的夹角 θ、φ 为广义坐标,杆的质心的坐标为($l\sin\theta+L\sin\varphi, l\cos\theta+L\cos\varphi$),质心速度为($l\dot{\theta}\cos\theta+L\dot{\varphi}\cos\varphi, -l\dot{\theta}\sin\theta-L\dot{\varphi}\sin\varphi$),$\boldsymbol{F}$ 的作用点的坐标为($l\sin\theta+2L\sin\varphi, l\cos\theta+2L\cos\varphi$)

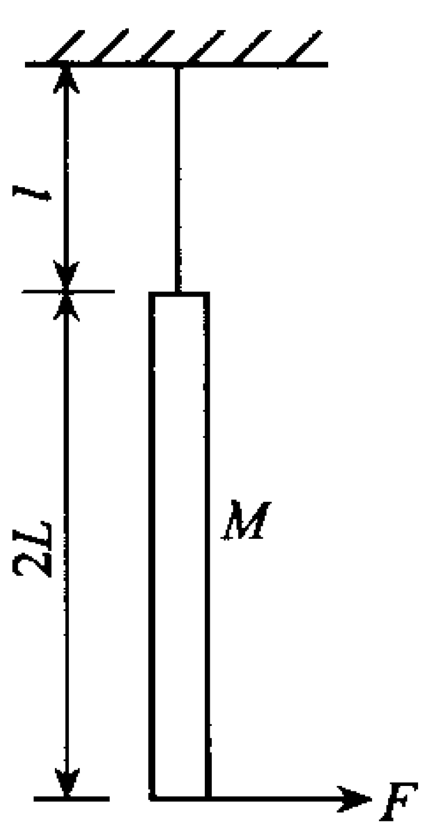


图 9.66

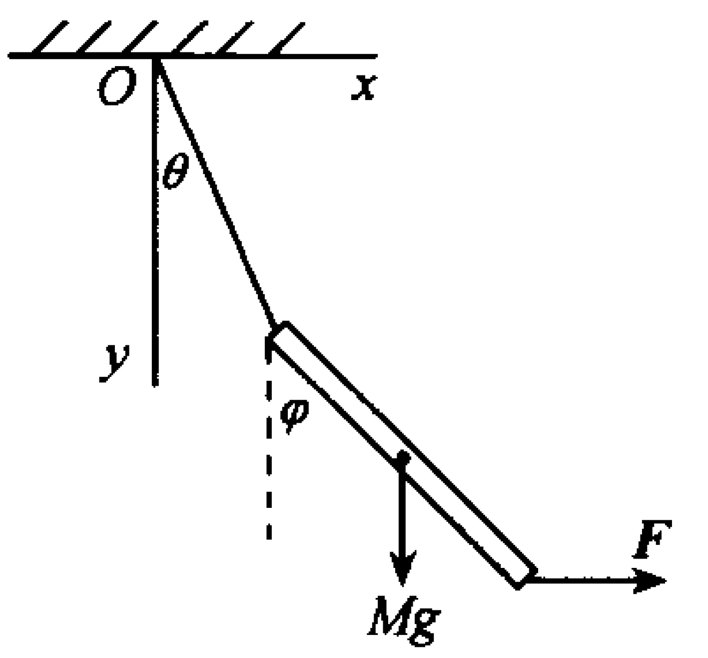


图 9.67

$$T=\frac{1}{2}M[(l\dot{\theta}\cos\theta+L\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+(-l\dot{\theta}\sin\theta-L\dot{\varphi}\sin\varphi)^2]$$
$$+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}M(2L)^2\dot{\varphi}^2$$
$$=\frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2+\frac{2}{3}ML^2\dot{\varphi}^2+MlL\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)$$
$$V=-Mg(l\cos\theta+L\cos\varphi)-F(l\cos\theta+2L\cos\varphi)$$
$$L=T-V=\frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2+\frac{2}{3}ML^2\dot{\varphi}^2+MlL\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)$$
$$+Mg(l\cos\theta+L\cos\varphi)+F(l\sin\theta+2L\sin\varphi)$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得运动微分方程为

$$Ml\ddot{\theta}+ML\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)+ML\dot{\varphi}^2\sin(\theta-\varphi)+Mg\sin\theta-F\cos\theta=0$$
$$\frac{4}{3}ML\ddot{\varphi}+Ml\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)-Ml\dot{\theta}^2\sin(\theta-\varphi)+Mg\sin\varphi-2F\cos\varphi=0$$

仅考虑在 $t=0$ 以后非常短的时间内的运动,在此期间,θ、φ、$\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$、$\ddot{\theta}$、$\ddot{\varphi}$ 均为一级小量,略去二级及二级以上小量,运动微分方程可简化为

$$Ml\ddot{\theta}+ML\ddot{\varphi}+Mg\theta-F=0$$

$$\frac{4}{3}ML\ddot{\varphi} + Ml\ddot{\theta} + Mg\varphi - 2F = 0$$

显然，$\theta=\dfrac{F}{Mg}$，$\varphi=\dfrac{2F}{Mg}$为非齐次微分方程的特解.

下面求齐次微分方程

$$Ml\ddot{\theta} + ML\ddot{\varphi} + Mg\theta = 0$$

$$\frac{4}{3}ML\ddot{\varphi} + Ml\ddot{\theta} + Mg\varphi = 0$$

的通解. 令

$$\theta = u_1 e^{i\omega t}, \quad \varphi = u_2 e^{i\omega t}$$

代入齐次微分方程得

$$\begin{cases}(-l\omega^2 + g)u_1 - L\omega^2 u_2 = 0 \\ -l\omega^2 u_1 + \left(-\dfrac{4}{3}L\omega^2 + g\right)u_2 = 0\end{cases} \tag{1}$$

u_1、u_2 要得非零解，必须系数行列式等于零，

$$\begin{vmatrix} -l\omega^2 + g & -L\omega^2 \\ -l\omega^2 & -\dfrac{4}{3}L\omega^2 + g \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2lL}\left(3l + 4L \pm \sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2}\right)g$$

其中 ω_1^2 取“+”号，ω_2^2 取“−”号.

将 ω_1^2 代入方程组式(1)，解得

$$u_1^{(1)} = 1, \quad u_2^{(1)} = -\frac{1}{6L}(3l - 4L + \sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2})$$

将 ω_2^2 代入方程组式(1)，解得

$$u_1^{(2)} = 1, u_2^{(2)} = -\frac{1}{6L}(3l - 4L - \sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2})$$

非齐次微分方程的通解可写为

$$\theta = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \frac{F}{Mg}$$

$$\begin{aligned}\varphi = &-A_1\frac{1}{6L}(3l - 4L + \sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2})\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ &- A_2\frac{1}{6L}(3l - 4L - \sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2})\cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \frac{2F}{Mg}\end{aligned}$$

由初始条件：$t=0$ 时，$\theta=0$，$\varphi=0$，$\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}=0$ 定出

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$A_1 = (8L + 3l - \sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2})F/2Mg\sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2}$$

$$A_2 = -(8L + 3l + \sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2})F/2Mg\sqrt{9l^2 + 12lL + 16L^2}$$

9.3.36　考虑一个双星系统.

(1) 用两颗星的笛卡儿坐标写出系统的拉格朗日函数；

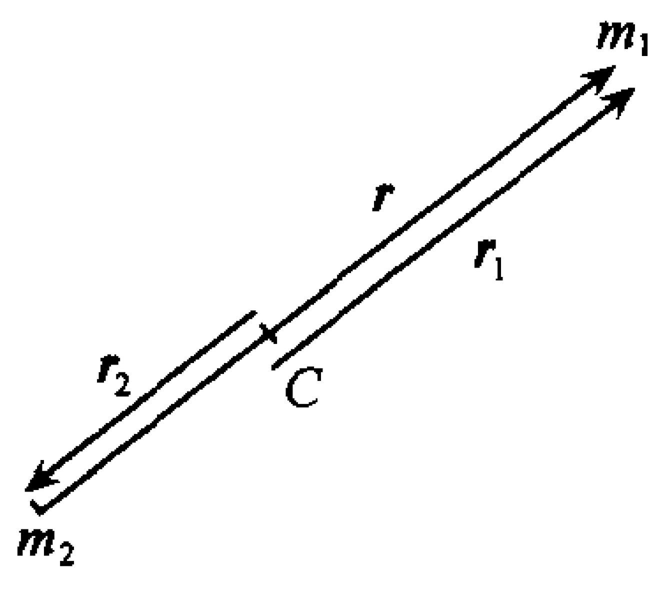


图 9.68

(2) 证明其势能是坐标的(−1)次齐次函数，即

$$V(\alpha\boldsymbol{r}_1,\alpha\boldsymbol{r}_2)=\alpha^{-1}V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$$

其中 α 是任意实数；

(3) 作一个变换，它保持由拉格朗日函数得到的运动微分方程不变，由此找出联系转动周期和它的轨道有关尺寸的开普勒第三定律.

解　(1) 设两星的质量分别为 m_1、m_2，在静止的笛卡儿坐标中的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)$$

$$V=-\frac{Gm_1m_2}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}}$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)$$
$$+\frac{Gm_1m_2}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}}$$

(2)
$$V(\alpha\boldsymbol{r}_1,\alpha\boldsymbol{r}_2)=\frac{Gm_1m_2}{[(\alpha x_2-\alpha x_1)^2+(\alpha y_2-\alpha y_1)^2+(\alpha z_2-\alpha z_1)^2]^{1/2}}$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left\{-\frac{Gm_1m_2}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}}\right\}$$
$$=\frac{1}{\alpha}V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$$

(3) 取双星系统的质心平动参考系，$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 分别表示两星对质心的位矢.

由质心的定义，

$$m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2=0$$

设 m_1 星对 m_2 星的位矢为 $\boldsymbol{r}$，则

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-(-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

$$T=\frac{1}{2}m_1|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2+\frac{1}{2}m_2|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2$$
$$=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2|\dot{\boldsymbol{r}}|^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{-m_1}{m_1+m_2}\right)^2|\dot{\boldsymbol{r}}|^2$$
$$=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2$$

$$V=-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2+\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left[\frac{1}{2}m_1|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 + \frac{Gm_1(m_1+m_2)}{r}\right]$$

作一个变换，新的拉格朗日函数与原拉格朗日函数仅差一个常数因子，写出的运动微分方程不受影响. 新的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 + \frac{Gm_1(m_1+m_2)}{r}$$

得到的运动微分方程相当于一个质量为 m_1 的星在质量为 (m_1+m_2) 的不动的星的引力作用下的运动. 由开普勒第三定律，双星的转动周期 T 与其椭圆轨道的长半轴 a 有下列关系：

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$$

9.3.37　质量为 M、长为 l 的两均质细杆由光滑的铰链和一根线连接起来，置于光滑的地面上，处于静止状态，杆与水平地面的夹角为 30°，如图 9.69 所示. 铰链的质量可以不计，$t=0$ 时，线被切断. 求：

(1) 铰链击中地面时的速度；

(2) 铰链击中地面时的时间(写出积分式子即可，不必求积).

解　(1) 由对称考虑，铰链必竖直下落，考虑一根杆为系统，取图 9.70 中的 x、y 坐标. 杆的质心的 x、y 坐标为

$$x_C = \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad y_C = \frac{l}{2}\sin\theta.$$

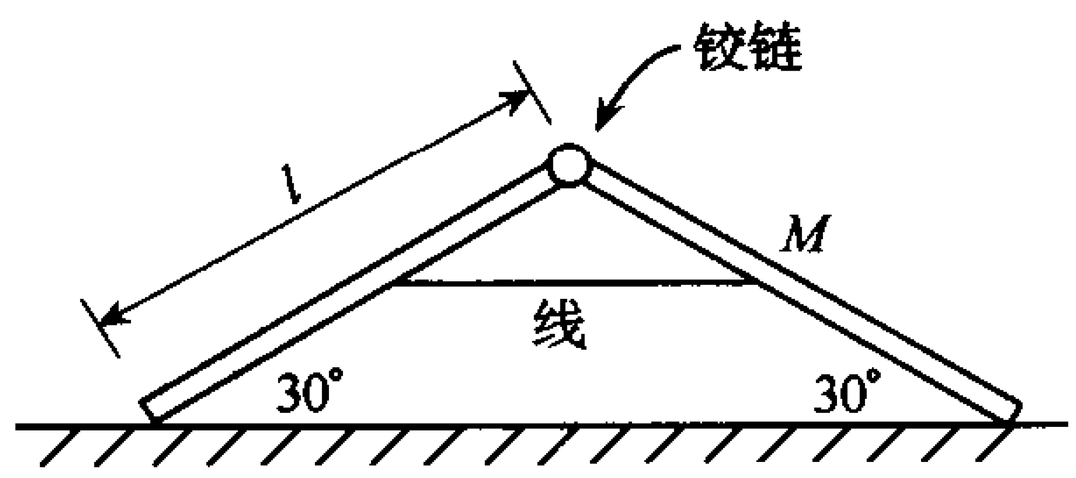


图 9.69

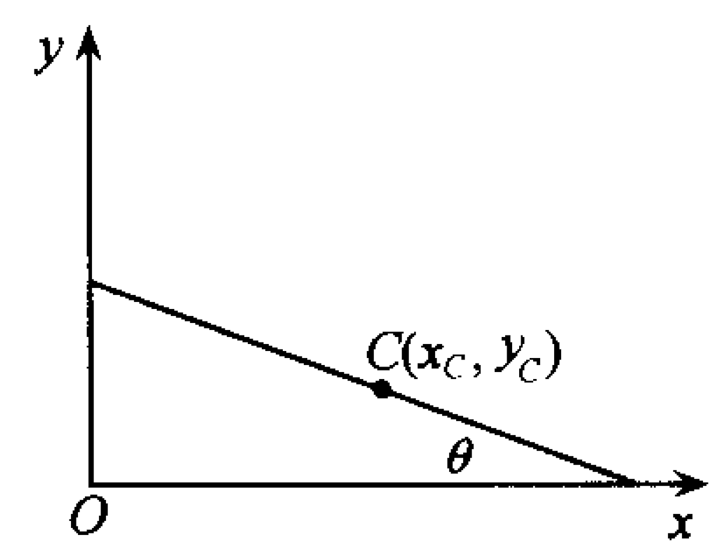


图 9.70

取 θ 为广义坐标，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgy_C = \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

因为
$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = 常量$$

即
$$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = \frac{1}{4}mgl$$

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{l}\left(\frac{1}{2} - \sin\theta\right)}$$

铰链的 y 坐标为

$$y = l\sin\theta$$

$$\dot{y} = l\,\dot{\theta}\cos\theta$$

击中地面时,$\theta=0$,铰链的速度为

$$\boldsymbol{v} = \dot{y}\,\boldsymbol{j} = (l\,\dot{\theta}\cos\theta)\big|_{\theta=0}\boldsymbol{j}$$

$$= -\,l\sqrt{\frac{3g}{l}\left(\frac{1}{2}-\sin0^\circ\right)}\cos0^\circ\boldsymbol{j} = -\sqrt{\frac{3}{2}gl}\,\boldsymbol{j}$$

(2)
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{3g}{l}\left(\frac{1}{2}-\sin\theta\right)}$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)}}\mathrm{d}\theta$$

$t=0$ 时,$\theta=30^\circ$,击中地面时,$\theta=0^\circ$,

$$t = -\int_{30^\circ}^{0^\circ}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)}} = \sqrt{\frac{2l}{3g}}\int_0^{30^\circ}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2\sin\theta}}$$

9.3.38　球面摆由质量为 m 的质点,用一根长为 l 的不可伸长的轻绳悬挂在一个固定点构成,该质点被限制在球面上运动.

(1) 若使绳与铅直方向的夹角 θ_0 不变,质点做此圆周运动的角速度多大?

(2) 在(1)问所述的圆轨道上的质点受一垂直于其速度的冲量,结果在其轨道达最高点时绳与铅直方向成 θ_1 角,写出当质点在最低点时绳与铅直方向的夹角 θ_2 所满足的方程(不必解);

(3) 就在 θ_0 附近振动的振幅很小的情况,求振动的角频率.

解　(1) 设此圆周运动的角速度为 ω,取绕竖直轴以 ω 的角速度转动的参考系,则质点在 $\theta=\theta_0$ 处,处于平衡状态,用虚功原理,

$$V = -\,mgl\cos\theta - \frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2\theta$$

在 $\theta=\theta_0$ 处,$\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=0$,即

$$mgl\sin\theta_0 - ml^2\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}$$

(2) 取静参考系,用球坐标 θ、φ 为广义坐标

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$$

因为
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\,\dot{\varphi}\sin^2\theta = ml^2\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}\sin^2\theta_0 \tag{1}$$

这里考虑到冲量不影响在此位置($\theta=\theta_0$)的$\dot{\varphi}$($\dot{\varphi}$为(1)问中解出的 ω).

因为$\frac{\partial L}{\partial t}=0$,且 T 是广义速度的二次齐次函数,

$$T+V=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1^2\sin^2\theta_1-mgl\cos\theta_1 \qquad (2)$$

质点达最高点和最低点时用式(1),在最低点时用式(2),考虑到$\dot{\theta}_2=0$,

$$\dot{\varphi}_1\sin^2\theta_1=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}\sin^2\theta_0$$

$$\dot{\varphi}_2\sin^2\theta_2=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}\sin^2\theta_0$$

$$\frac{1}{2}l\dot{\varphi}_2^2\sin^2\theta_2-g\cos\theta_2=\frac{1}{2}(\dot{\varphi}_1^2\sin^2\theta_1-g\cos\theta_1)$$

从上述三式,消去$\dot{\varphi}_1$、$\dot{\varphi}_2$,可得 θ_2 满足的方程为

$$\frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\left(\frac{1}{\sin^2\theta_2}-\frac{1}{\sin^2\theta_1}\right)=2(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$$

(3) $L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$ 得

$$l\ddot{\theta}-l\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+g\sin\theta=0$$

由$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$,得$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=$常量,

$$\dot{\varphi}\sin^2\theta=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}\sin^2\theta_0$$

用上式消去前式中的$\dot{\varphi}$,得

$$\ddot{\theta}-\frac{g}{l\cos\theta_0}\frac{\sin^4\theta_0}{\sin^3\theta}\cos\theta+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \qquad (1)$$

把 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 在 θ_0 作泰勒展开,只保留一级小量,令 $\Delta\theta=\theta-\theta_0$,

$$\sin\theta\approx\sin\theta_0+\cos\theta_0\cdot\Delta\theta$$

$$\cos\theta\approx\cos\theta_0-\sin\theta_0\Delta\theta$$

$$\sin^{-3}\theta\approx(\sin\theta_0+\cos\theta_0\Delta\theta)^{-3}$$

$$=\sin^{-3}\theta_0(1+\mathrm{ctg}\theta_0\Delta\theta)^{-3}\approx\sin^{-3}\theta_0(l-3\mathrm{ctg}\theta_0)$$

代入式(1),注意

$$\ddot{\theta}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\theta_0+\Delta\theta)=\frac{\mathrm{d}^2(\Delta\theta)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(\Delta\theta)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g(1+3\cos^2\theta_0)}{l\cos\theta_0}\Delta\theta=0$$

质点在 $\theta=\theta_0$ 附近关于 θ 的小振幅振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{g(1+3\cos^2\theta_0)}{l\cos\theta_0}}$$

9.3.39　一弹簧摆由质量为 m 的质点经原长为 l、劲度系数为 k 的无质量弹簧系于固定点组成，如图 9.71 所示. 假定系统限制在一个竖直平面内运动，导出运动微分方程，并在对平衡位置的角位移和径向位移都很小的近似下解运动微分方程.

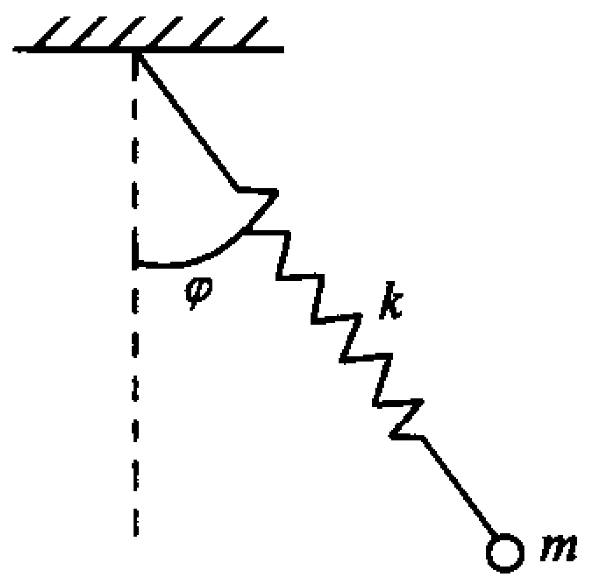


图 9.71

解

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$V=\frac{1}{2}k(r-l)^2-mgr\cos\varphi$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{1}{2}k(r-l)^2+mgr\cos\varphi$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得运动微分方程

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2+k(r-l)-mg\cos\varphi=0$$

$$r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}+g\sin\varphi=0$$

在平衡位置，$\dot{r}=0$，$\ddot{r}=0$，$\dot{\varphi}=0$，$\ddot{\varphi}=0$. 设平衡位置 $r=r_0$，$\varphi=\varphi_0$，

$$k(r_0-l)-mg\cos\varphi_0=0$$

$$g\sin\varphi_0=0$$

得

$$\varphi_0=0,\quad r_0=l+\frac{mg}{k}$$

在对平衡位置的角位移和径向位移都很小时，令 $r'=r-r_0$，运动微分方程可简化为

$$m\ddot{r}'+kr'=0$$

$$r_0\ddot{\varphi}+g\varphi=0$$

解为

$$r'=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right)\text{或}\ r=l+\frac{mg}{k}+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right)$$

$$\varphi=B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r_0}}t+\beta\right)$$

其中 $r_0=l+\frac{mg}{k}$，A、B、α、β 为积分常数，由初始条件定.

9.3.40　粒子受到力心的引力作用，力的大小反比于它到力心的距离的三次方，导出运动微分方程，并解方程求轨道，讨论轨道的性质是如何依赖于系统的参数的.

解

$$\boldsymbol{F}=-\frac{k}{r^3}\boldsymbol{e}_r$$

$$V(r)=-\frac{k}{2r^2}$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{k}{2r^2}$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得运动微分方程为

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2+\frac{k}{r^3}=0 \tag{1}$$

$$mr^2\dot{\varphi}=b(\text{常量})$$

消去$\dot{\varphi}$,可得

$$m\ddot{r}=\frac{b^2-km}{mr^3}$$

令 $u=\dfrac{1}{r}$,则

$$\dot{\varphi}=\frac{b}{m}r^{-2}=\frac{b}{m}u^2$$

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}=-\frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$\ddot{r}=-\frac{b}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}\cdot\dot{\varphi}=-\frac{b^2}{m^2}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}$$

将 $\ddot{r}$ 代入式(1),得

$$-\frac{b^2}{m}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=\frac{b^2-km}{m}u^3$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\frac{b^2-km}{b^2}u=0$$

若 $b^2>km$,

$$u=\frac{1}{r_0}\cos\left[\frac{1}{b}\sqrt{b^2-km}(\varphi-\varphi_0)\right]$$

$$r=r_0\sec\left[\frac{1}{b}\sqrt{b^2-km}(\varphi-\varphi_0)\right]$$

若 $b^2<km$,

$$u=\frac{1}{r_0}\cosh\left[\frac{1}{b}\sqrt{km-b^2}(\varphi-\varphi_0)\right]$$

$$r=r_0\operatorname{sech}\left[\frac{1}{b}\sqrt{km-b^2}(\varphi-\varphi_0)\right]$$

两个轨道方程中的(r_0、φ_0)都表示轨道上的一点.

9.3.41 一个质量为 m 的粒子在有心力

$$F(r)=-\frac{k}{r^2}+\frac{k'}{r^3}\quad(k>0)$$

作用下做平面运动.

(1) 写出系统的拉格朗日函数;

(2) 导出运动微分方程,并证明轨道角动量 J 是一个运动常数;

(3) 若 $J^2>-mk'$,求轨道方程.

解 (1)

$$F(r)=-\frac{k}{r^2}+\frac{k'}{r^3}$$

$$V(r)=-\int_\infty^r F(r)\mathrm{d}r=\int_r^\infty F(r)\mathrm{d}r=-\frac{k}{r}+\frac{k'}{2r^2}$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{k}{r}-\frac{k'}{2r^2}$$

(2) 由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$得运动微分方程为

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2+\frac{k}{r^2}-\frac{k'}{r^3}=0 \tag{1}$$

$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=0 \tag{2}$$

式(2)也可写成

$$\frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})=0$$

∴
$$J=mr^2\dot{\varphi}=\text{常量}$$

(3) 令$u=\frac{1}{r}$,$r=u^{-1}$,

$$\dot{r}=-u^{-2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}=-u^{-2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{J}{mr^2}=-\frac{J}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$\ddot{r}=-\frac{J}{m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}\dot{\varphi}=-\frac{J^2}{m^2}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}$$

式(1)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\left(1+\frac{mk'}{J^2}\right)u=\frac{mk}{J^2} \tag{3}$$

因$J^2>-mk'$,$1+\frac{mk'}{J^2}>0$.式(3)的解为

$$u=\frac{mk}{J^2+mk'}+A\cos\left(\sqrt{1+\frac{mk'}{J^2}}\varphi+\alpha\right)$$

可选择适当的基轴,使$\alpha=0$,轨道方程为

$$u=\frac{mk}{J^2+mk'}+A\cos\left(\sqrt{1+\frac{mk'}{J^2}}\varphi\right)$$

$$r=\frac{1}{\frac{mk}{J^2+mk'}+A\cos\left(\sqrt{1+\frac{mk'}{J^2}}\varphi\right)}$$

9.3.42 一个质量为m的珠子在一个半径为a的旋转圆环上无摩擦地滑动,圆环绕通过竖直的直径作恒定角速度ω的转动,如图9.72所示:

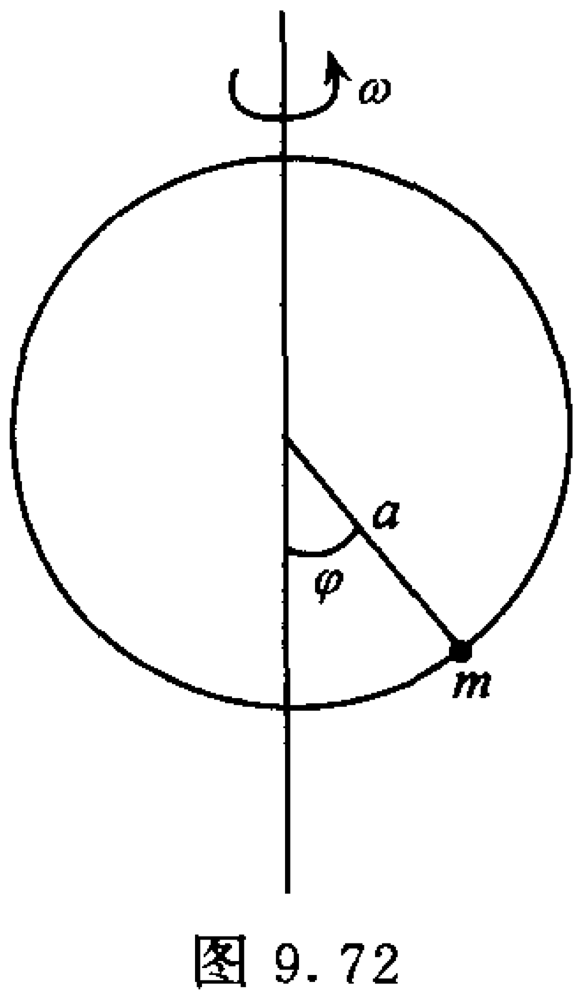


图 9.72

(1) 写出系统的拉格朗日函数,并找出所有的运动积分;

(2) 确定$\omega<\omega_0$和$\omega>\omega_0$$\left(\omega_0=\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$时珠子的平衡位置;

(3) 这些平衡位置,哪些是稳定的?哪些是不稳定的?

(4) 计算围绕稳定平衡点的小振幅振动的角频率.

解 (1) 选用圆环参考系,主动力除重力外,还有惯性离轴力.在这里,科里奥利力不做虚功,作约束力处理.

$$\begin{aligned}\delta W&=-mg\sin\varphi\cdot a\delta\varphi+m\omega^2a\sin\varphi\cos\varphi\cdot a\delta\varphi\\&=m(\omega^2a^2\sin\varphi\cos\varphi-ga\sin\varphi)\delta\varphi\end{aligned}$$

所以

$$Q = m(\omega^2 a^2 \sin\varphi\cos\varphi - ga\sin\varphi)$$

$$V = -\int Q\mathrm{d}\varphi = -\int m(\omega^2 a^2 \sin\varphi\cos\varphi - ga\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\varphi - mga\cos\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\varphi + mga\cos\varphi$$

因为$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-L=$常量，即

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\sin^2\varphi - mga\cos\varphi = \text{常量}$$

这个运动积分是能量积分.

(2) 在平衡位置，$Q=0$，

$$m(\omega^2 a^2\sin\varphi\cos\varphi - ga\sin\varphi) = 0$$

$$\sin\varphi(\omega^2 a\cos\varphi - g) = 0$$

当 $\omega<\sqrt{\frac{g}{a}}$ 时，$\frac{g}{a\omega^2}>1$，$\omega^2 a\cos\varphi-g\neq0$，平衡位置处，

$$\sin\varphi = 0$$

$\varphi=0,\pi$ 为平衡位置.

当 $\omega>\sqrt{\frac{g}{a}}$ 时，$\frac{g}{a\omega^2}<1$，平衡位置处，

$$\sin\varphi = 0 \text{ 或 } \omega^2 a\cos\varphi - g = 0$$

$\varphi=0,\pi$ 和 $\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$ 为平衡位置.

(3) 由平衡位置处$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}$或$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\varphi}$的正负号判断平衡位置处平衡的稳定性，大于零时是稳定平衡位置，小于零则为不稳定平衡位置，

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\varphi} = -m[\omega^2 a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - ga\cos\varphi]$$

$\omega<\sqrt{\frac{g}{a}}$时，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = -m(\omega^2 a^2 - ga) > 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -m(\omega^2 a^2 + ga) < 0$$

故 $\varphi=0$ 为稳定平衡位置，$\varphi=\pi$ 为不稳定平衡位置.

$\omega>\sqrt{\frac{g}{a}}$时，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=0}<0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi}<0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\arccos\frac{g}{\omega^2 a}}=-m\left(\frac{g^2}{\omega^2}-\omega^2a^2\right)>0$$

故 $\varphi=0$ 和 π 均为不稳定平衡位置,$\varphi=\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$ 为稳定平衡位置.

(4) 由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$ 或由能量积分对 t 求导均可得

$$a\ddot{\varphi}-a\omega^2\sin\varphi\cos\varphi+g\sin\varphi=0$$

当 $\omega<\sqrt{\frac{g}{a}}$时,$\varphi=0$ 为稳定平衡位置,在此点附近做小振动

$$\sin\varphi\approx\varphi,\quad \cos\varphi\approx 1$$

$$a\ddot{\varphi}+(g-a\omega^2)\varphi=0$$

小振动的角频率为

$$\Omega=\sqrt{\frac{g-a\omega^2}{a}}$$

当 $\omega>\sqrt{\frac{g}{a}}$时,$\varphi=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$ 为稳定平衡位置.

在平衡位置处,将 $\sin\varphi$、$\cos\varphi$ 作泰勒展开,

$$\sin\varphi\approx\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\Delta\varphi$$

$$\cos\varphi\approx\cos\varphi_0-\sin\varphi_0\Delta\varphi$$

其中

$$\varphi_0=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right),\Delta\varphi=\varphi-\varphi_0$$

运动微分方程可近似为

$$a\frac{\mathrm{d}^2\Delta\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\left[g\cos\varphi_0-\frac{g}{\cos\varphi_0}(2\cos^2\varphi_0-1)\right]\Delta\varphi=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\left(\omega^2-\frac{g^2}{a^2\omega^2}\right)\Delta\varphi=0$$

小振动的角频率为

$$\Omega=\sqrt{\omega^2-\frac{g^2}{a^2\omega^2}}$$

9.3.43 质量为 m_1 和 m_2 的两质点被一长 l 并穿过一光滑水平面上的光滑小孔的不可伸长的轻绳连接,m_1 在水平面上运动,m_2 在铅垂线上运动.

(1) 要使 m_2 在平面下 d 处保持不动,必须给 m_1 以什么样的初速度;

(2) 如果 m_2 在铅直方向稍微偏离上述平衡位置,将产生小振动,用拉格朗日方程求振动周期.

解 (1)必须使 m_1 获得一个垂直于绳的初速度 v_0,使做此匀速率的半径为 $l-d$ 的圆

周运动所需的向心力等于作用于 m_2 的重力，

$$\frac{m_1 v_0^2}{l-d} = m_2 g$$

所以

$$v_0 = \sqrt{\frac{m_2 g(l-d)}{m_1}}$$

(2) 选 m_1 对小孔(作为坐标系原点)的极坐标 r、φ 为广义坐标，

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2 g(l-r)$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$ 得

$$(m_1+m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \tag{1}$$

由 $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$ 常量

$$m_1 r^2\dot{\varphi} = m_1(l-d)v_0 = m_1\sqrt{\frac{m_2 g}{m_1}}(l-d)^{3/2} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，

$$(m_1+m_2)\ddot{r} - \frac{m_2 g(l-d)^3}{r^3} + m_2 g = 0 \tag{3}$$

平衡位置

$$r = r_0 = l-d$$

令

$$x = r - r_0 = r - (l-d)$$

m_2 在平衡位置附近做小振动，m_1 在 $r=r_0$ 附近的径向运动也做小振动，

$$\left[\frac{(l-d)}{r}\right]^3 = \left(\frac{l-d}{l-d+x}\right)^3 = \left(1+\frac{x}{l-d}\right)^{-3} \approx 1 - \frac{3x}{l-d}$$

用此近似，式(3)近似为

$$(m_1+m_2)\ddot{x} + \frac{3m_2 g}{l-d}x = 0$$

小振动的角频率 ω 和周期 T 分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{3m_2 g}{(m_1+m_2)(l-d)}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1+m_2)(l-d)}{3m_2 g}}$$

9.3.44 一个质量为 M、半径为 R 的均质圆球沿一质量为 m、倾角为 α 的三角块向下做纯滚动，三角块在光滑的水平面上自由运动，如图 9.73 所示.

(1) 求系统的拉格朗日函数，写出拉格朗日方程；

(2) 设开始系统处于静止，球心在水平面上 H 处，求系统的运动.

解 (1) 取图 9.74 所示的坐标，用 x 表示三角块的坐标，θ 表示球的转角，考虑到球

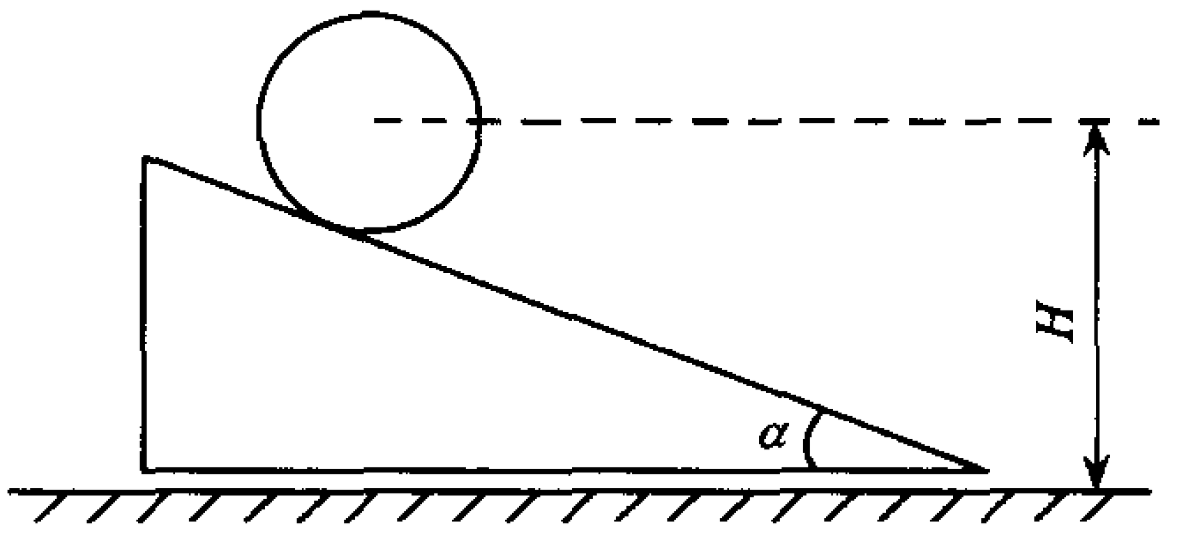


图 9.73

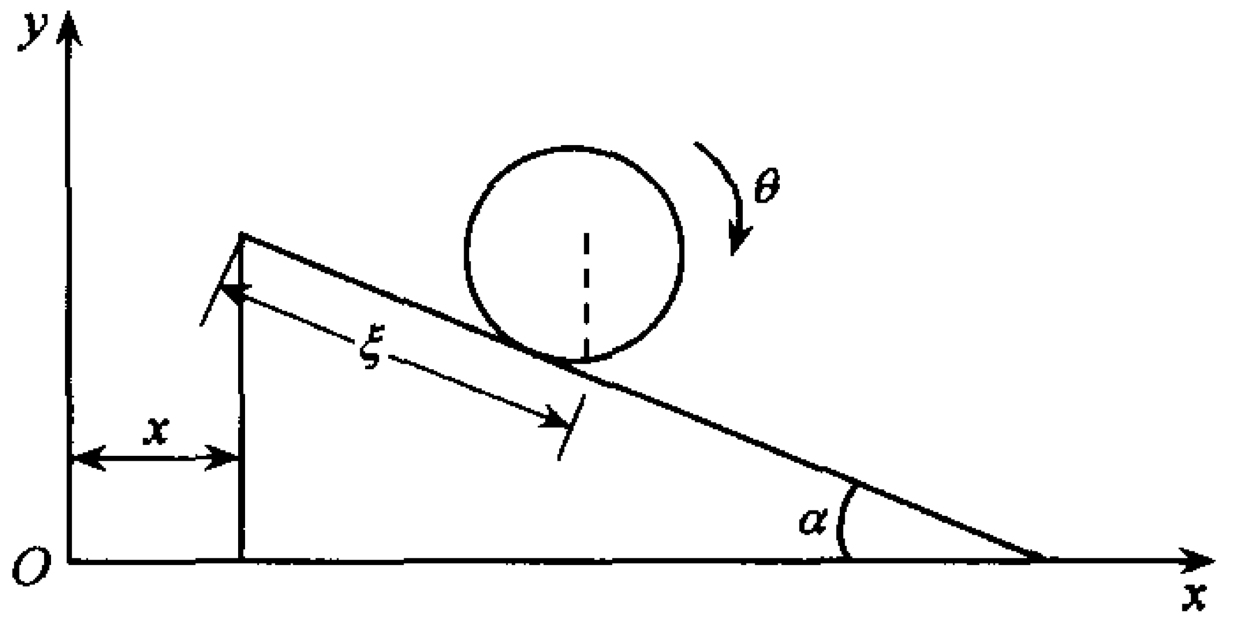


图 9.74

在三角块上做纯滚动，球心的 x、y 坐标为

$$[x+(\xi_0+R\theta)\cos\alpha, H-R\theta\sin\alpha]$$

其中 ζ_0 是 $\theta=0$ 时，球心的 ζ 坐标，$\theta=0$ 时，球心的 y 坐标为 H.

球心的速度用 x、y 分量表示为

$$(\dot{x}+R\dot{\theta}\cos\alpha,\ -R\dot{\theta}\sin\alpha)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M[(\dot{x}+R\dot{\theta}\cos\alpha)^2+(-R\dot{\theta}\sin\alpha)^2]$$

$$+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}^2-Mg(H-R\theta\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2+\frac{7}{10}MR^2\dot{\theta}^2+MR\dot{x}\dot{\theta}\cos\alpha-Mg(H-R\theta\sin\alpha)$$

拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 为

$$(m+M)\ddot{x}+MR\ddot{\theta}\cos\alpha=0$$

$$\frac{7}{5}R\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\alpha-g\sin\alpha=0$$

(2) 从上述两个运动微分方程可解出

$$\ddot{\theta}=\frac{5(m+M)g\sin\alpha}{[7(m+M)-5M\cos^2\alpha]R}$$

用初始条件：$t=0$ 时，$\theta=0$，$\dot{\theta}=0$，积分得

$$\theta=\frac{5(m+M)g\sin\alpha}{2[7(m+M)-5M\cos^2\alpha]R}t^2$$

积分第一个运动微分方程，用初始条件：$t=0$ 时，$x=0$，$\theta=0$，$\dot{x}=0$，$\dot{\theta}=0$，得

$$(m+M)x+MR\theta\cos\alpha=0$$

所以

$$x=-\frac{MR\cos\alpha}{m+M}\theta=-\frac{5Mg\sin\alpha\cos\alpha}{2[7(m+M)-5M\cos^2\alpha]}t^2$$

9.3.45　质量为 m 的质点被约束在一半径为 r、质量为 M 的均质圆环内表面无摩擦运动，环在竖直的 xy 平面内沿水平的 x 轴做纯滚动，如图 9.75 所示. $t=0$ 时，环是静止的，质点在环的顶部，具有沿 x 轴方向的速度 v_0，求当质点运动到环的底部时相对于固定的 x 轴的速度 v，并给出当 $\frac{m}{M}\to 0$ 及 $\frac{M}{m}\to 0$ 时的结果.

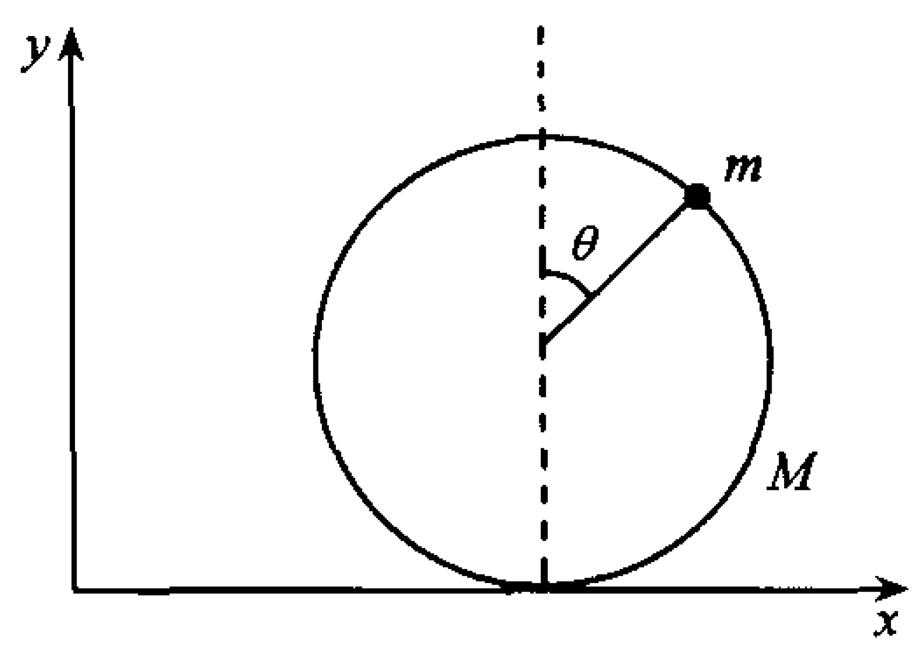


图 9.75

解　圆环的质心坐标为 (x,r)，质点的坐标为 $(x+r\sin\theta, r+r\cos\theta)$，质点的速度为

$$(\dot{x}+r\dot{\theta}\cos\theta,\ -r\dot{\theta}\sin\theta)$$

系统的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+r^2\dot{\theta}^2+2r\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}Mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2\\&=\frac{1}{2}(m+2M)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\end{aligned}$$

系统的势能为

$$V=mg(r+r\cos\theta)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m+2M)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta-mgr(1+\cos\theta)$$

因为 $\frac{\partial L}{\partial x}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=$常量，即

$$(m+2M)\dot{x}+mr\dot{\theta}\cos\theta=mv_0 \tag{1}$$

这里用了初始条件；$t=0$ 时，　　$\dot{x}=0$，　$\theta=0$，　$r\dot{\theta}=v_0$

因为 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，$T$ 是 $\dot{x}$、$\dot{\theta}$ 的二次齐次函数，

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=T+V=常量$$

$$\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+mgr(1+\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_0^2+2mgr \tag{2}$$

质点到达圆环底部时，$\theta=\pi$，代入式(1)、(2)两式，得到此时 $\dot{x}$、$\dot{\theta}$ 满足的方程：

$$(m+2M)\dot{x}-mr\dot{\theta}=mv_0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}(m+2M)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-mr\dot{x}\dot{\theta}=\frac{1}{2}mv_0^2+2mgr \tag{4}$$

用式(3)消去式(4)中的 $r\dot{\theta}$，得

$$M(m+2M)\dot{x}^2-2mMv_0\dot{x}-2m^2gr=0$$

$$\dot{x}=\frac{mMv_0 \pm m\sqrt{M^2v_0^2+2M(m+2M)gr}}{M(m+2M)}$$

因为从 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$,质点对圆环的作用力的 x 分量始终大于零,故到达底部时,必有 $\dot{x}>0$,舍去 $\dot{x}<0$ 的解,

$$\dot{x}=\frac{mMv_0 + m\sqrt{M^2v_0^2+2M(m+2M)gr}}{M(m+2M)}$$

$$r\dot{\theta}=\frac{1}{m}(m+2M)\dot{x}-v_0$$

到达底部时,质点相对于 x 轴的速度为

$$v=\dot{x}-r\dot{\theta}=\dot{x}-\left[\frac{1}{m}(m+2M)\dot{x}-v_0\right]$$

$$=v_0-\frac{2M}{m}\dot{x}=\frac{1}{m+2M}\left[Mv_0-2\sqrt{M^2v_0^2+2M(m+2M)gr}\right]$$

当 $\frac{m}{M}\to 0$ 时, $v\to -\sqrt{v_0^2+4gr}$

当 $\frac{M}{m}\to 0$ 时, $V\to v_0$

9.3.46 一质点在光滑的旋转抛物面 $r^2=az$ 内侧滑动,证明受到的约束力的大小为

$$\text{常量}\cdot\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)^{-3/2}$$

说明约束力的方向.

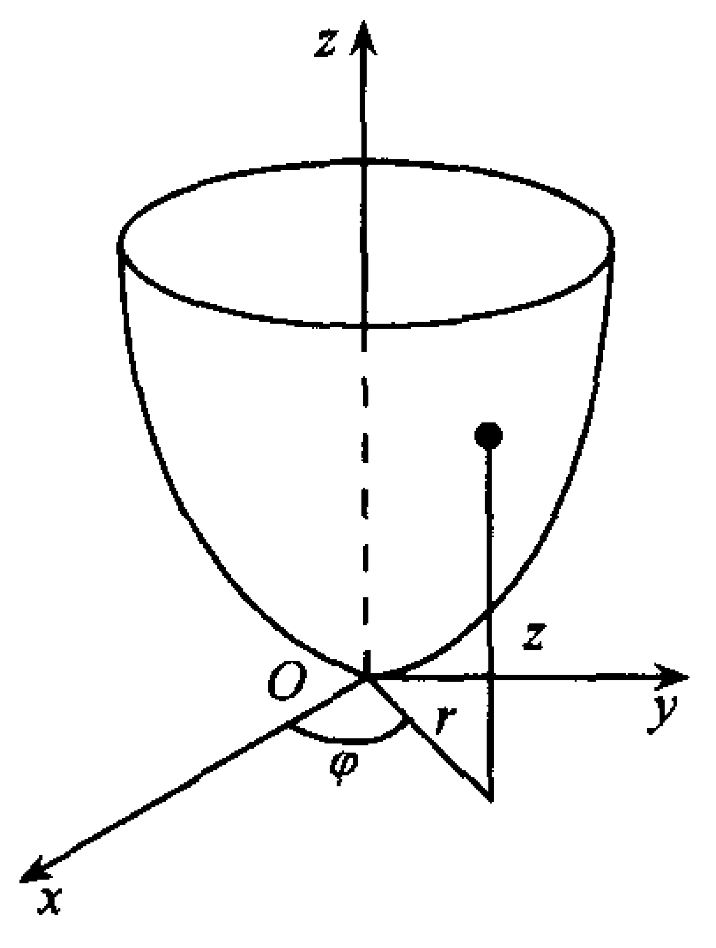


图 9.76

证明 取柱坐标 r、φ、z,如图 9.76 所示,

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

(假设质点的质量为 m).

约束方程为

$$f(r,\varphi,z)=r^2-az=0 \quad (1)$$

用带有未定乘子的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

这里 $Q_i=0$,可得

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=2\lambda r \quad (2)$$

$$r^2\dot{\varphi}=c(\text{常量}) \quad (3)$$

$$m\ddot{z}=-mg-\lambda a \quad (4)$$

由式(1), $z=\frac{1}{a}r^2,\quad \dot{z}=\frac{2}{a}r\dot{r},\quad \ddot{z}=\frac{2r}{a}\ddot{r}+\frac{2}{a}\dot{r}^2$

由式(4)、(2)、上式和式(3),

$$-a\lambda=m(\ddot{z}+g)=m\left(\frac{2r}{a}\ddot{r}+\frac{2}{a}\dot{r}^2+g\right)=\frac{2r}{a}(mr\dot{\varphi}^2+2\lambda r)+\frac{2m}{a}\dot{r}^2+mg$$

$$-\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)\lambda=\frac{2m}{a^2}\dot{r}^2+\frac{2m}{a^2}r^2\dot{\varphi}^2+\frac{mg}{a}=\frac{2m}{a^2}\dot{r}^2+\frac{2m}{a^2}\frac{c^2}{r^2}+\frac{mg}{a} \quad (5)$$

由机械能守恒,并用式(1)、(3),

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{c^2}{r^2}+\frac{4r^2}{a^2}\dot{r}^2\right)+mg\frac{r^2}{a}=E$$

$$\dot{r}^2=\frac{\frac{2E}{m}-2g\frac{r^2}{a}-\frac{c^2}{r^2}}{1+\frac{4r^2}{a^2}} \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)得

$$-\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)\lambda=\frac{1}{1+\frac{4r^2}{a^2}}\cdot\frac{2m}{a^2}\left(\frac{2E}{m}+\frac{4c^2}{a^2}+\frac{ga}{2}\right) \tag{7}$$

$$\lambda=\text{常量}\cdot\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)^{-2}$$

约束力 $\boldsymbol{F}=2\lambda r\boldsymbol{e}_r-a\lambda\boldsymbol{k}$

$$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{(2\lambda r)^2+(-a\lambda)^2}=\lambda(a^2+4r^2)^{1/2}$$

$$=\text{常量}\cdot\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)^{-2}\cdot(a^2+4r^2)^{1/2}=\text{常量}\cdot\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)^{-3/2}$$

注意:$\lambda<0$(可从式(7)作此结论).

约束力 $\boldsymbol{F}$ 与竖直向上方向的夹角的正切为

$$\tan\alpha=\frac{-F_r}{F_z}=\frac{-2\lambda r}{-a\lambda}=\frac{2r}{a}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$是 rz 平面内抛物线 $z=\frac{1}{a}r^2$ 的切线的斜率. 可见,约束力沿旋转抛物面的法线方向,指向抛物面的旋转对称轴.

9.3.47　一个肥皂泡的半径 r 按 $r=at+b$(其中 a、b 为常量)的规律随时间变化,一个质量为 m 的质点保持在表面上运动. $t=0$ 时,给质点一个沿切向的速度 v,不考虑重力的作用,求质点的运动规律及表面对质点的作用力(限用带未定乘子的拉格朗日方程).

解　取球坐标,且使质点在 $t=0$ 时位于 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, $v=b\dot{\varphi}_0$.

$$L=T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\quad \frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+mr\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=mr^2\ddot{\theta}+2m\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta,\qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

约束方程:

$$r=at+b,\quad \dot{r}=a,\quad \delta r=0$$

带未定乘子的拉格朗日方程为

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mr\dot{\varphi}^2\sin^2\theta=\lambda \tag{1}$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{2}$$

$$mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = mb^2\sin^2\frac{\pi}{2}\cdot\frac{v}{b}$$

即

$$r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = bv \tag{3}$$

假设任何时刻 $\theta=\frac{\pi}{2}$($t=0$ 时,$\theta=\frac{\pi}{2}$),代入式(2)

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$r^2\dot{\theta} = \text{常量} = b^2\cdot 0 = 0$$

这里用了 $t=0$ 时,$r=b$,$\dot{\theta}=0$,

$$\dot{\theta} = 0$$

可见在任何时刻确有 $\theta=\frac{\pi}{2}$,且 $\dot{\theta}=0$,$\ddot{\theta}=0$.

将 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 代入式(3),

$$r^2\dot{\varphi} = bv \tag{4}$$

$$\int_0^{\varphi}\mathrm{d}\varphi = \int\frac{bv}{r^2}\mathrm{d}t = \int_0^t\frac{bv}{(at+b)^2}\mathrm{d}t$$

$$\varphi = -\frac{bv}{a(at+b)}\Bigg|_0^t = \frac{v}{a} - \frac{bv}{a(at+b)} = \frac{v}{a}\left(1-\frac{b}{r}\right)$$

质点的运动规律总结如下:

$$r = at + b,\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \varphi = \frac{v}{a}\left(1-\frac{b}{r}\right)$$

将式(4)代入式(1),注意 $\ddot{r}=0$,$\theta=\frac{\pi}{2}$,$\dot{\theta}=0$,即得约束力

$$\lambda = -mr\left(\frac{bv}{r^2}\right)^2 = -\frac{mb^2v^2}{r^3}$$

负值说明约束力为拉力.

9.3.48　一个质量为 m 的质点被约束沿一弯成半径为 a 的水平圆形金属丝上运动,摩擦因数为 μ,开始速率为 v_0,若不计重力的作用,求质点的角位置与时间的关系,以及金属丝对质点的作用力.

解

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$r = a,\qquad \delta r = 0$$

或

$$f = r - a = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial r} = 1,\quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial q_i}$,　令 $Q_r = 0$,

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2=\lambda \tag{1}$$

$$mr^2\ddot{\varphi}+2mr\dot{r}\dot{\varphi}=-\mu|\lambda|r \tag{2}$$

$$r=a \tag{3}$$

其中 $Q_\varphi=-\mu|\lambda|r$ 来自摩擦力.

由式(3)、式(1)、(2)简化为

$$-ma\dot{\varphi}^2=\lambda$$

$$ma\ddot{\varphi}=-\mu|\lambda|=\mu\lambda$$

(由前式可见,$\lambda<0$)

消去 λ 得

$$\ddot{\varphi}=-\mu\dot{\varphi}^2$$

用 $\ddot{\varphi}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$,可将上式积分,并用初始条件:$t=0$ 时,$\varphi=0$,$\dot{\varphi}=\dfrac{v_0}{a}$,

$$-\int_{\frac{v_0}{a}}^{\dot{\varphi}}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}}=\int_0^\varphi\mu\mathrm{d}\varphi$$

$$-\ln\dot{\varphi}+\ln\frac{v_0}{a}=\mu\varphi$$

$$\dot{\varphi}=\frac{v_0}{a}\mathrm{e}^{-\mu\varphi}$$

$$\int_0^\varphi\mathrm{e}^{\mu\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int_0^t\frac{v_0}{a}\mathrm{d}t$$

$$\varphi=\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu v_0}{a}t\right)$$

金属丝对质点的作用力为

$$\boldsymbol{F}=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$F_r=\lambda=-ma\dot{\varphi}^2=\frac{mav_0^2}{(a+\mu v_0t)^2}$$

$$F_\varphi=-\mu|\lambda|=\mu F_r$$

9.3.49　一根光滑的金属丝弯成一螺旋线,其方程为 $z=a\varphi$,$\rho=b$,a、b 为常量,ρ、φ、z 为柱坐标,原点为引力中心,引力大小与距离成正比,比例系数为 k,有一质量为 m 的珠子在金属丝上做无摩擦滑动.求金属丝对珠子的作用力的 ρ、φ、z 分量(不考虑重力的作用).

解

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

$$\rho=b,\quad \delta\rho=0$$

$$z=a\varphi,\quad \delta z-a\delta\varphi=0$$

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{k}$$

$$Q_\rho=-k\rho,\quad Q_z=-kz$$

带未定乘子的拉格朗日方程为

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=-k\rho+\lambda \tag{1}$$

$$m(\rho^2\ddot{\varphi}+2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi})=-a\mu \tag{2}$$

$$m\ddot{z}=-kz+\mu \tag{3}$$

$$\rho=b \tag{4}$$

$$z=a\varphi \tag{5}$$

用式(4)、(5),式(1)、(2)可简化为

$$-m\frac{b}{a^2}\dot{z}^2=-kb+\lambda \tag{6}$$

$$m\frac{b^2}{a}\ddot{z}=-a\mu \tag{7}$$

由式(3)、(7)消去 μ,可得

$$m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{z}+kz=0$$

$$z=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{8}$$

其中　$\omega=a\sqrt{\dfrac{k}{m(a^2+b^2)}}$,$A$、$\alpha$ 由初始条件确定,

$$F_\rho=\lambda=kb-\frac{mb}{a^2}\dot{z}^2$$

$$F_\varphi=-\frac{a}{b}\mu=-\frac{a}{b}\left(-m\frac{b^2}{a^2}\ddot{z}\right)=\frac{mb}{a}\ddot{z}$$

$$F_z=\mu=m\ddot{z}+kz$$

将式(8)代入,即可得 F_ρ、F_φ、F_z 与 t 的关系.

9.3.50　一个质量为 m 的质点在一个光滑的抛物面[其方程为 $x^2+y^2=a(a-z)$,其中 a 是常量,z 轴竖直向上]的顶端从静止开始下滑,选柱坐标 ρ、φ、z 为广义坐标,写出含未定乘子的拉格朗日方程,并求出约束力,在何处质点离开抛物面?

解

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

$$f=\rho^2-a(a-z)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}=2\rho,\quad \frac{\partial f}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=a$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial q_i}$,含未定乘子的拉格朗日方程为

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=2\lambda\rho \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\rho^2\dot{\varphi})=0 \tag{2}$$

$$m\ddot{z}=-mg+a\lambda \tag{3}$$

$$\rho^2=a(a-z) \tag{4}$$

积分式(2),用初始条件:$t=0$ 时,$\rho=0$,得

$$\dot{\varphi}=0$$

式(1)简化为

$$m\ddot{\rho} = 2\lambda\rho \tag{5}$$

由式(4)

$$z = a - \frac{1}{a}\rho^2, \quad \dot{z} = -\frac{2\rho}{a}\dot{\rho}$$

$$\ddot{z} = -\frac{2\rho}{a}\ddot{\rho} - \frac{2}{a}\dot{\rho}^2 \tag{6}$$

用式(6),式(3)可改写为

$$\frac{2m}{a}\rho\ddot{\rho} + \frac{2m}{a}\dot{\rho}^2 - mg = -a\lambda \tag{7}$$

式(5)、(7)消去 λ,可得

$$\left(\frac{2}{a}\rho^2 + \frac{a}{2}\right)\ddot{\rho} + \frac{2}{a}\rho\dot{\rho}^2 - g\rho = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}\rho^2 + \frac{a}{2}\right)\mathrm{d}\dot{\rho}^2 + \frac{2}{a}\rho\dot{\rho}^2\mathrm{d}\rho - g\rho\mathrm{d}\rho = 0$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}\rho^2 + \frac{a}{2}\right)\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}g\rho^2\right] = 0$$

用初始条件:$t=0$ 时,$\rho=0$,$\dot{\rho}=0$,可得

$$\left(\frac{2}{a}\rho^2 + \frac{a}{2}\right)\dot{\rho}^2 = g\rho^2$$

$$\dot{\rho} = \sqrt{2ag}\,\frac{\rho}{\sqrt{4\rho^2 + a^2}} \tag{8}$$

对上式求导,可得

$$\ddot{\rho} = \frac{2a^3 g\rho}{(4\rho^2 + a^2)^2}$$

$$F_\rho = 2\lambda\rho = m\ddot{\rho} = \frac{2ma^3 g\rho}{(4\rho^2 + a^2)^2}$$

$$F_\varphi = 0,$$

$$F_z = a\lambda = a\frac{F_\rho}{2\rho} = \frac{ma^4 g}{(4\rho^2 + a^2)^2}$$

质点对抛物面的正压力 N 是约束力的反作用力,

$$N = \sqrt{F_\rho^2 + F_z^2 + F_\varphi^2} = \frac{ma^3 g}{(4\rho^2 + a^2)^{3/2}} > 0$$

不会出现 $N=0$ 处,故质点不会离开抛物面. 对式(8)积分可得 $\rho=\rho(t)$,因而也可得 F_ρ、F_z 与 t 的关系.

9.3.51 一个质量为 m、半径为 a 的均质圆柱体 A 在一个固定的、半径为 b 的圆柱体 B 的顶部处于静止的状态,两圆柱体的轴平行且水平,让圆柱体 A 稍偏离其平衡位置做无滑动滚动下圆柱体 B. 用带未定乘子的拉格朗日方程求约束力,并找出两圆柱体分离的位置.

解 取极坐标 r、θ 表示圆柱 A 的轴线位置,原点在固定圆柱 B 的轴线上,图 9.77 中 φ 表示圆柱 A 的转角,用 r、θ、φ 为广义坐标,

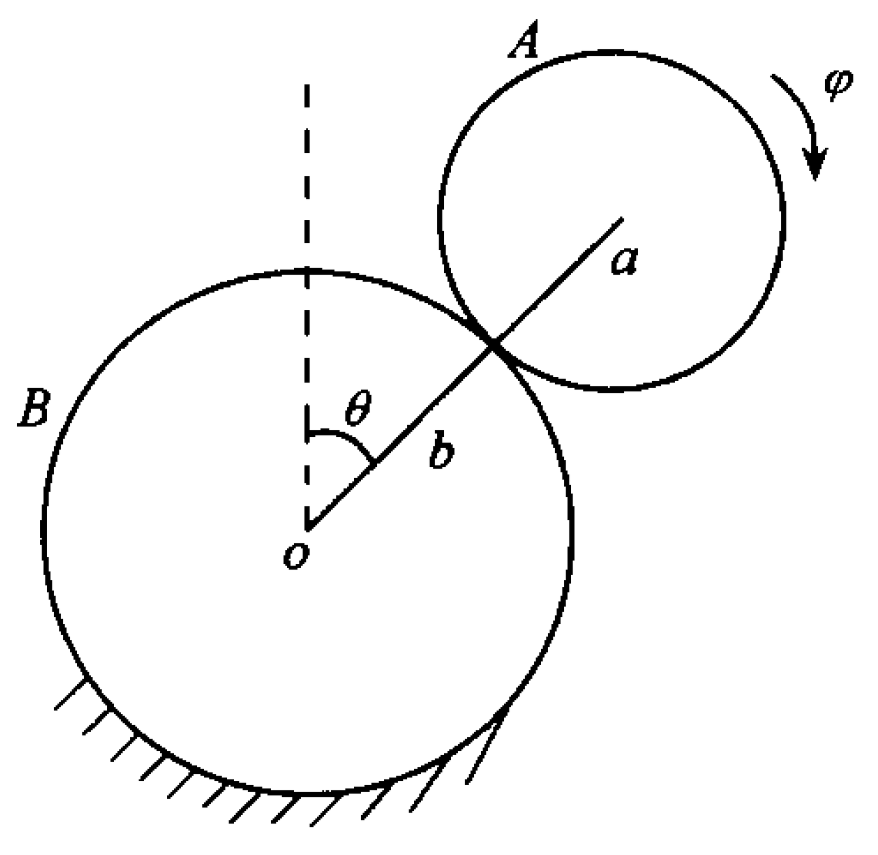


图 9.77

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2$$

$$V=mgr\cos\theta$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{4}ma^2\dot{\varphi}^2-mgr\cos\theta$$

约束方程

$$f_1=r-(a+b)=0$$

$$f_2=(a+b)\theta-a\varphi=0$$

后一关系来自纯滚动条件：

$$(a+b)\dot{\theta}-a\dot{\varphi}=0$$

选取 φ 的零点，$\theta=0$ 时，$\varphi=0$，积分即得.

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial q_i}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial q_i}$ 及 $Q_i=0$，可得

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)+mg\cos\theta=\lambda \tag{1}$$

$$m(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta})-mgr\sin\theta=(a+b)\mu \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}ma^2\ddot{\varphi}=-a\mu \tag{3}$$

$$r=a+b \tag{4}$$

$$(a+b)\theta-a\varphi=0 \tag{5}$$

用式(4)、(5)，式(1)、(2)、(3)可简化为

$$-m(a+b)\dot{\theta}^2+mg\cos\theta=\lambda \tag{6}$$

$$m(a+b)\ddot{\theta}-mg\sin\theta=\mu \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}m(a+b)\ddot{\theta}=-\mu \tag{8}$$

由式(7)、(8)消去 μ，得

$$\frac{3}{2}(a+b)\ddot{\theta}=g\sin\theta$$

$$\frac{2}{3}(a+b)\dot{\theta}\,\mathrm{d}\dot{\theta}=g\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

积分上式，用初始条件 $\theta=0$ 时，$\dot{\theta}=0$，

$$\frac{3}{4}(a+b)\dot{\theta}^2=g(1-\cos\theta)$$

$$\dot{\theta}^2=\frac{4g}{3(a+b)}(1-\cos\theta) \tag{9}$$

$$F_r=\lambda=mg\cos\theta-m(a+b)\dot{\theta}^2=\frac{1}{3}mg(7\cos\theta-4)$$

式(9)两边对 t 求导，

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=\frac{4g}{3(a+b)}\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3(a+b)}\sin\theta$$

$$F_\theta = \mu = m(a+b)\ddot{\theta} - mg\text{sim}\theta = -\frac{1}{3}mg\sin\theta$$

对式(9)积分可得 $\theta=\theta(t)$，从而也可得到 F_r、F_θ 与 t 的关系.

两圆柱体分离时，$F_r=0$，

$$7\cos\theta - 4 = 0$$

可见，在 $\theta=\arccos\left(\frac{4}{7}\right)$ 处两圆柱体分离.

9.3.52　一个质量为 m、半径为 a 的均质圆盘，受到约束，保持盘面铅直地在一完全粗糙的水平面上滚动，受到一个力 $\boldsymbol{f}$ 作用，作用线通过盘心，$\boldsymbol{f}=f_1\boldsymbol{i}+f_2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别是水平面上的 x、y 轴的单位矢量，z 轴垂直于水平面. 取固连于圆盘的坐标系 x'、y'、z'，原点位于盘心 C，$x'y'$轴在盘面上，z'轴垂直于盘面，取 z'、z 轴的夹角为 θ，φ是 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'$（$\boldsymbol{k}'$是 z' 轴的单位矢量）间的夹角，ψ 是 $\boldsymbol{i}'$和 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'$的夹角，$\theta$、$\varphi$、$\psi$ 是欧拉角，选质心 C 的 x、y 坐标和 φ、ψ 为广义坐标，写出盘面的运动微分方程.

解

$$L=T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\psi}^2$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{8}ma^2(\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}^2)$$

圆盘做纯滚动，盘面与水平面接触点的速度为零，

$$\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{\psi}\boldsymbol{k}'\times(-a\boldsymbol{k})=0$$

图 9.78 中 xy 平面是水平面，z 轴垂直纸面向上，φ是 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'$间的夹角，如图中所示，

$$\boldsymbol{k}'=\sin\varphi\,\boldsymbol{i}-\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

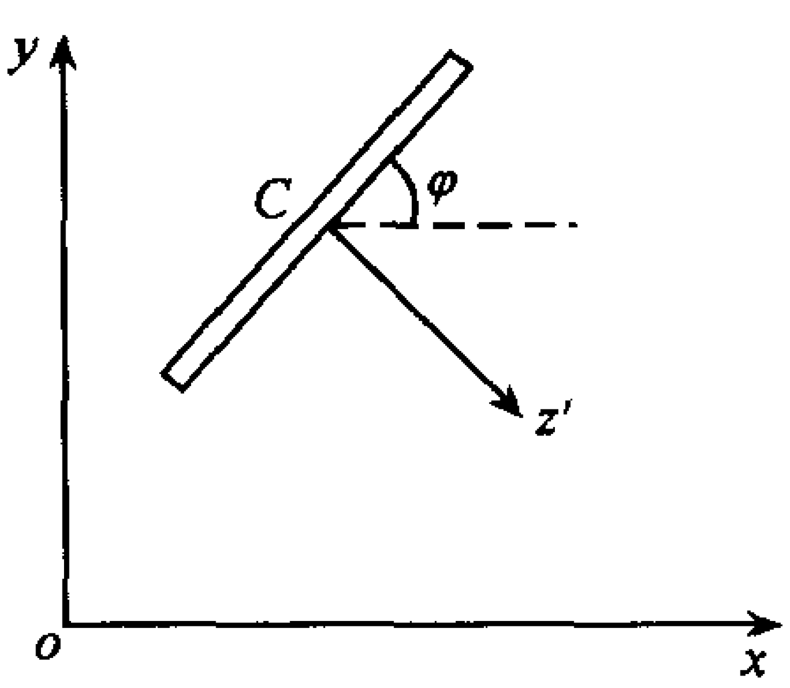


图 9.78

所以

$$\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{\psi}(\sin\varphi\,\boldsymbol{i}-\cos\varphi\boldsymbol{j})\times(-a\boldsymbol{k})=0$$

$$\dot{x}+a\dot{\psi}\cos\varphi=0$$

$$\dot{y}+a\dot{\psi}\sin\varphi=0$$

$$\delta x+a\cos\varphi\psi=0$$

$$\delta y+a\sin\varphi\delta\psi=0$$

$$Q_x=f_1,\quad Q_y=f_2,\quad Q_\varphi=Q_\psi=0$$

由带未定乘子的拉格朗日方程得运动微分方程为

$$m\ddot{x}=f_1+\lambda_1$$

$$m\ddot{y}=f_2+\lambda_2$$

$$\frac{1}{4}ma^2\ddot{\varphi}=0$$

$$\frac{1}{2}ma^2\ddot{\psi}=\lambda_1a\cos\varphi+\lambda_2a\sin\varphi$$

加上两个约束方程

$$\dot{x}+a\dot{\psi}\cos\varphi=0$$
$$\dot{y}+a\dot{\psi}\sin\varphi=0$$

9.3.53　一个质量为 m 的质点,受到一个力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$ 作用以及一个非完整约束 $\dot{x}-t\dot{y}=a$,其中 a 为常量,求运动微分方程.

解
$$L=T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$
$$Q_x=F_x,Q_y=F_y,Q_z=F_z$$
$$\dot{x}-t\dot{y}=a$$
$$\mathrm{d}x-t\mathrm{d}y=a\mathrm{d}t$$
$$\delta x-t\delta y=0$$

运动微分方程为

$$m\ddot{x}=F_x+\lambda \tag{1}$$
$$m\ddot{y}=F_y-\lambda t \tag{2}$$
$$m\ddot{z}=F_z \tag{3}$$
$$\dot{x}-t\dot{y}=a \tag{4}$$

由前两式消去 λ,可得

$$mt\ddot{x}+m\ddot{y}=F_xt+F_y \tag{5}$$

运动微分方程可用式(5)、(3)和(4).

9.4　冲击运动　机电模拟

9.4.1　用拉格朗日方程解 7.4.33 题.

解　用 y_A、y_B 分别表示 A 杆、B 杆质心的 y 坐标,$\dot{\varphi}_A$、$\dot{\varphi}_B$ 分别是 A 杆、B 杆绕质心的角速度,正方向规定如图 9.79 所示.

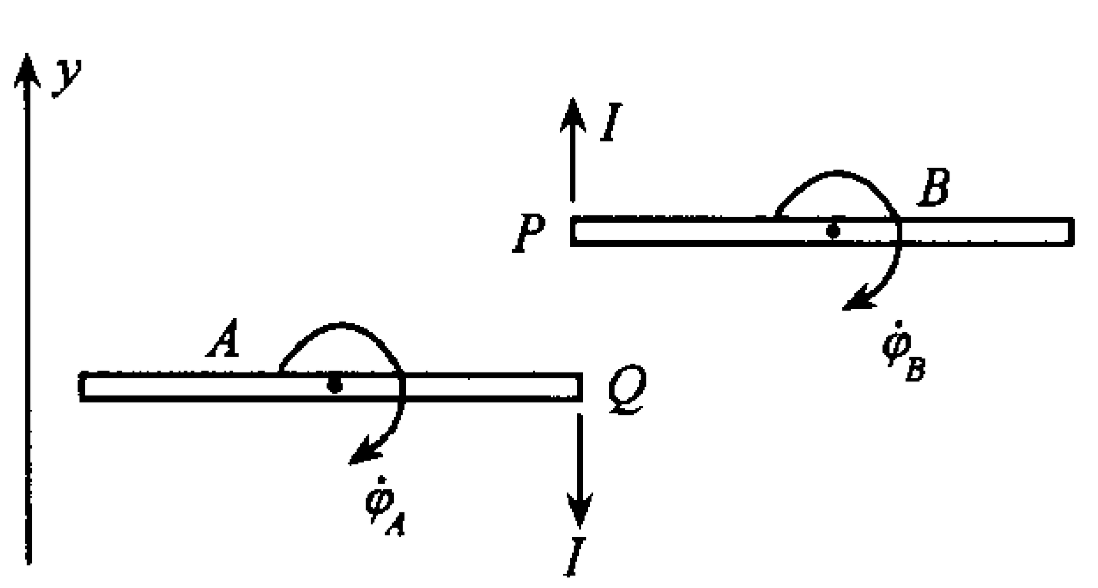


图 9.79

A 杆和 B 杆的拉格朗日函数分别为

$$L_A=\frac{1}{2}\dot{y}_A^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\dot{\varphi}_A^2=\frac{1}{2}\dot{y}_A^2+\frac{1}{24}\dot{\varphi}_A^2,$$
$$L_B=\frac{1}{2}\times2\dot{y}_B^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\times2\dot{\varphi}_B^2$$
$$=\dot{y}_B^2+\frac{1}{12}\dot{\varphi}_B^2$$
$$p_{y_A}=\frac{\partial L_A}{\partial\dot{y}_A}=\dot{y}_A,\quad p_{\varphi_A}=\frac{\partial L_A}{\partial\dot{\varphi}_A}=\frac{1}{12}\dot{\varphi}_A$$
$$p_{y_B}=\frac{\partial L_B}{\partial\dot{y}_B}=2\dot{y}_B,\quad p_{\varphi_B}=\frac{\partial L_B}{\partial\dot{\varphi}_B}=\frac{1}{6}\dot{\varphi}_B$$

碰撞期间,两杆受到的冲量 I 如图 9.79 所示,

$$y_P=y_B+\frac{1}{2}\varphi_B,\quad y_Q=y_A-\frac{1}{2}\varphi_A$$

$$K_{y_B} = I\frac{\partial y_P}{\partial y_B} = I,\quad K_{\varphi_B} = I\frac{\partial y_P}{\partial \varphi_B} = \frac{1}{2}I$$

$$K_{y_A} = -I\frac{\partial y_Q}{\partial y_A} = -I,\quad K_{\varphi_A} = -I\frac{\partial y_Q}{\partial \varphi_A} = \frac{1}{2}I$$

由冲击运动的拉格朗日方程

$$\Delta p_i = K_i$$

$$2\dot{y}_B - 0 = I,\quad \frac{1}{6}\dot{\varphi}_B - 0 = \frac{1}{2}I$$

$$\dot{y}_A - 10 = -I,\quad \frac{1}{12}\dot{\varphi}_A - 0 = \frac{1}{2}I$$

由于作弹性碰撞，机械能守恒，碰撞前后势能没变化，故动能相等.

$$\frac{1}{2}\dot{y}_A^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\dot{\varphi}_A^2 + \frac{1}{2}\times 2\dot{y}_B^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\times 2\dot{\varphi}_B^2 = \frac{1}{2}\times 10^2$$

从上述五个式子可以解出 I、$\dot{y}_A$、$\dot{\varphi}_A$、$\dot{y}_B$、$\dot{\varphi}_B$，得

$$\dot{y}_A = \frac{20}{3}\text{ms}^{-1},\quad \dot{\varphi}_A = 20\text{rads}^{-1}$$

$$\dot{y}_B = \frac{5}{3}\text{ms}^{-1},\quad \dot{\varphi}_B = 10\text{rads}^{-1}$$

9.4.2　用拉格朗日方程解 7.4.34 题.

解　先考虑球与台阶的碰撞过程，取球心的坐标 x、y 和绕球心的转角 φ(顺时针方向为正)为广义坐标，如图 9.80 所示，图中还画出了在碰撞过程中球受到台阶的冲量 I_x、I_y.

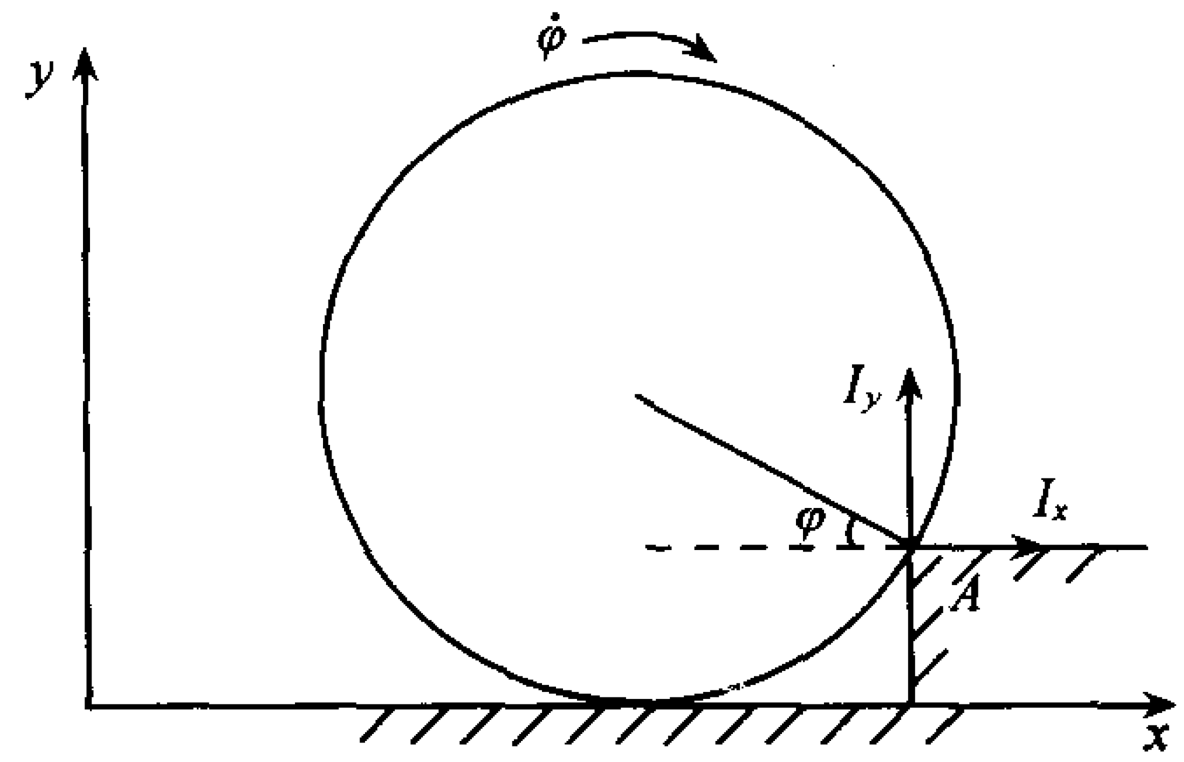


图 9.80

设球的质量为 m，

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2\dot{\varphi}^2 - mgy$$

受到冲力的球上 A 点的 x、y 坐标为

$$x_A = x + a\cos\varphi$$

$$y_A = y - a\sin\varphi$$

$$\delta x_A = \delta x - a\sin\varphi\delta\varphi$$

$$\delta y_A = \delta y - a\cos\varphi\delta\varphi$$

$$K_x\delta x + K_y\delta y + K_\varphi\delta\varphi = I_x\delta x_A + I_y\delta y_A$$

$$= I_x\delta x + I_y\delta y - a(I_x\sin\varphi + I_y\cos\varphi)\delta\varphi$$

所以

$$K_x = I_x,\quad K_y = I_y$$
$$K_\varphi = -a(I_x\sin\varphi + I_y\cos\varphi)$$
$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{5}ma^2\dot{\varphi}$$

碰撞前　$p_{x0} = mv$，　$p_{y0} = 0$，　$p_{\varphi 0} = \frac{2}{5}mav$，这里用了纯滚动条件：

$$v - a\dot{\varphi}_0 = 0,\quad \dot{\varphi}_0 = \frac{v}{a}$$

由 $\Delta p_i = K_i$，

$$m\dot{x} - mv = I_x \tag{1}$$
$$m\dot{y} - 0 = I_y \tag{2}$$
$$\frac{2}{5}ma^2\dot{\varphi} - \frac{2}{5}mav = -a(I_x\sin\varphi + I_y\cos\varphi) \tag{3}$$

碰撞期间位置变化可以忽略，$\Delta q_i = 0$，所以

$$\sin\varphi = \frac{a-h}{a} \tag{4}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{1}{a}\sqrt{2ah - h^2} \tag{5}$$

再考虑做完全非弹性碰撞，碰撞后球上 A 点速度为零，

$$\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + (-\dot{\varphi})\boldsymbol{k} \times (a\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - a\sin\varphi\,\boldsymbol{j}) = 0$$

由此可得

$$\dot{x} = a\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{6}$$
$$\dot{y} = a\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{7}$$

从上述七个式子可解出碰撞后的$\dot{\varphi}$为

$$\dot{\varphi} = \frac{7a - 5h}{7a^2}v$$

再考虑碰撞后跃上台阶的过程，这是个定轴转动，拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}ma^2 + ma^2\right)\dot{\varphi}^2 - mga\sin\varphi$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

可得

$$\frac{7}{5}a\ddot{\varphi} = -g\cos\varphi$$

$$\frac{7}{5}a\,\dot{\varphi}\,\mathrm{d}\,\dot{\varphi}=-\,g\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

做上述积分时，积分下限分别为 $\varphi=\arcsin\left(\frac{a-h}{a}\right)$，$\dot{\varphi}=\frac{7a-5h}{7a^2}v$，积分上限是刚能跃上台阶的要求：$\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$\dot{\varphi}=0$，

$$\frac{7}{10}a\dot{\varphi}^2\Bigg|_{\dot{\varphi}=\frac{7a-5h}{7a^2}v}^{\dot{\varphi}=0}=-\,g\sin\varphi\Bigg|_{\varphi=\arcsin\left(\frac{a-h}{a}\right)}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

可得

$$\frac{7a-5h}{7a^2}v=\sqrt{\frac{10gh}{7a^2}}$$

$$v=\frac{a}{7a-5h}\sqrt{70gh}$$

可见，当 $v>\frac{a}{7a-5h}\sqrt{70gh}$时，球能跃上台阶.

9.4.3　一个由质量为 m 和 M 的两个质点用一根不计质量、长 a 的棒构成的哑铃开始处于静止状态，突然在棒上距 Mb 处受到一个垂直于棒的冲量 I，求作用后哑铃的运动状态.

解　系统的质心位于棒上离 M 的距离$\frac{ma}{m+M}$处，绕通过质心垂直于棒的轴转动的转动惯量为

$$M\left(\frac{ma}{m+M}\right)^2+m\left(\frac{Ma}{m+M}\right)^2=\frac{mM}{m+M}a^2$$

取质心的坐标 x、y 和棒与 y 轴的夹角 φ 为广义坐标，y 轴沿静止时棒的方向，x 轴沿冲量方向，如图 9.81 所示，C 为质心，P 是冲量作用点，

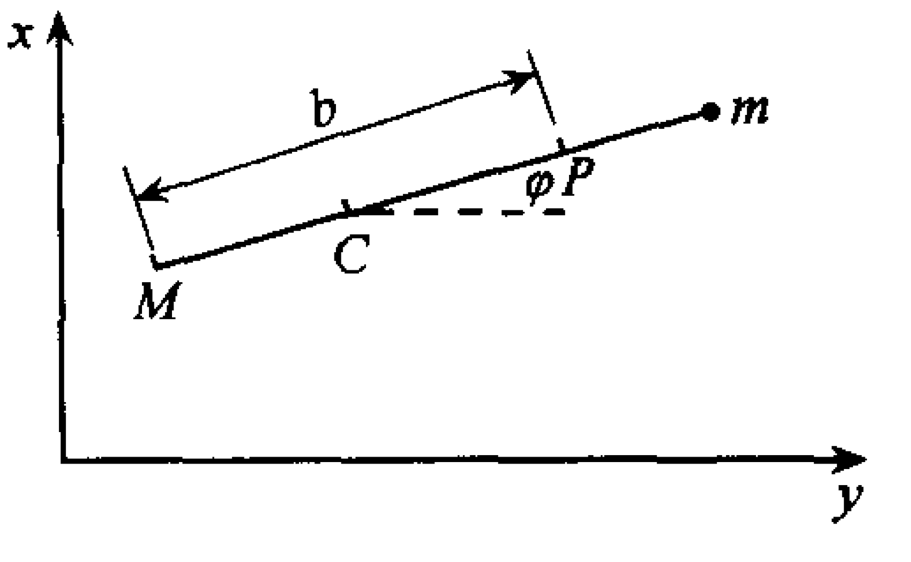


图 9.81

$$L=T=\frac{1}{2}(m+M)(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{mM}{m+M}a^2\dot{\varphi}^2$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=(m+M)\dot{x}$$

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=(m+M)\dot{y}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{mM}{m+M}a^2\dot{\varphi}$$

$$x_P=x+\left(b-\frac{ma}{m+M}\right)\sin\varphi$$

$$\delta x_P=\delta x+\left(b-\frac{ma}{m+M}\right)\cos\varphi\delta\varphi$$

$$I\delta x_p=I\delta x+I\left(b-\frac{ma}{m+M}\right)\cos\varphi\delta\varphi$$

$$K_x = I, \quad K_y = 0$$

$$K_\varphi = I\left(b - \frac{ma}{m+M}\right)\cos\varphi\bigg|_{\varphi=0} = I\left(b - \frac{ma}{m+M}\right)$$

由 $\Delta p_i = K_i$，

$$\Delta p_x = (m+M)\dot{x} = I$$

$$\Delta P_y = (m+M)\dot{y} = 0$$

$$\Delta p_\varphi = \frac{mM}{m+M}a^2\dot{\varphi} = \left(b - \frac{ma}{m+M}\right)I$$

得

$$\dot{x} = \frac{I}{m+M}, \quad \dot{y} = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(m+M)b - ma}{mMa^2}I$$

9.4.4　质量为 m_1 与 m_2 的两粒子被一劲度系数为 k 的轻弹簧连接，静止在光滑的水平面上.

(1) 突然沿从 m_1 到 m_2 的方向给予 m_1 一个冲量 I，问 m_2 在碰撞后第一次到达静止之前运行多远；

(2) 是否可能给 m_1 一冲量使系统由静止变成无振动的转动？

解　(1) 沿从 m_1 到 m_2 的方向取 x_1 轴和 x_2 轴，原点分别取在两粒子的平衡位置，

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2$$

$$k_1 = I, \quad k_2 = 0$$

$$\Delta p_1 = m_1\dot{x}_1 = I, \quad \dot{x}_1 = \frac{I}{m_1}$$

$$\Delta p_2 = m_2\dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0$$

因为

$$\Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_2 = 0$$

所以

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

这是冲量作用后系统的运动状态，是以后运动的初始条件，即 $t=0$ 时，$x_1 = x_2 = 0$，$\dot{x}_1 = \frac{I}{m_1}$. $\dot{x}_2 = 0$.

以后的运动微分方程由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ 得

$$m_1\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_2) = 0 \tag{2}$$

式(1)+式(2)得

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$$

积分上式，用初始条件，可得

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = I$$

$$m_1x_1 + m_2x_2 = It \tag{3}$$

式(2)×m_1－式(1)×m_2，可得

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)+k(x_2-x_1)=0$$

$$x_2 - x_1 = A\sin(\omega t+\alpha)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$$

由初始条件：$t=0$ 时，$x_1=0$，$x_2=0$，$\dot{x}_1=\dfrac{I}{m_1}$，$\dot{x}_2=0$，定出

$$\alpha = 0,\quad A = -\frac{I}{m_1\omega}$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{I}{m_1\omega}\sin\omega t \tag{4}$$

式(3)＋式(4)×m_1，可得

$$x_2 = \frac{It}{m_1+m_2} - \frac{I}{(m_1+m_2)\omega}\sin\omega t$$

$$\dot{x}_2 = \frac{I}{m_1+m_2} - \frac{I}{m_1+m_2}\cos\omega t$$

碰撞后 m_2 瞬时静止时有 $\dot{x}_2=0$，即

$$\cos\omega t = 1$$

除 $t=0$ 外，第一次静止时刻为

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$$

m_2 在 $t=0-t=t_1$ 期间运行的距离为

$$x_2(t_1) = \frac{2\pi I}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$$

(2)不可能，因为要给 m_1 一冲量使系统由静止变成无振动的转动，必须所给的冲量与弹簧垂直.若冲量为 I，m_1 获得的速度为$\dfrac{I}{m_1}$，m_2 的速度仍为零.假定此后 m_1 围绕 m_2 作无振动的转动，取 m_2 平动参考系，作为两体问题，m_1 的质量改用折合质量，做此转动需要向心力为

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{I}{m_1}\right)^2\Bigg/ l$$

其中 l 是弹簧的自然长度，可弹簧仍处于原长状态，对 m_1 无作用力，不能提供所需的向心力，因此给 m_1 一冲量使系统由静止变成无振动的转动是不可能的.

9.4.5　两根长度为 a、质量为 m 的棒 AB 和 BC，在 B 点无摩擦地连接，放在光滑的

水平桌面上,开始两棒(即点 A、B、C)共线,在 A 点施以与 ABC 线垂直的冲量 I,求冲击后的瞬时两棒的运动状态.

解 选 x 轴沿 $t=0$ 时 CBA 的方向,y 轴沿 $\boldsymbol{I}$ 的作用线方向.取 B 点的坐标 x、y 及 AB 棒、BC 棒分别与 x 轴的夹角 θ_1、θ_2 为广义坐标,如图 9.82 所示.

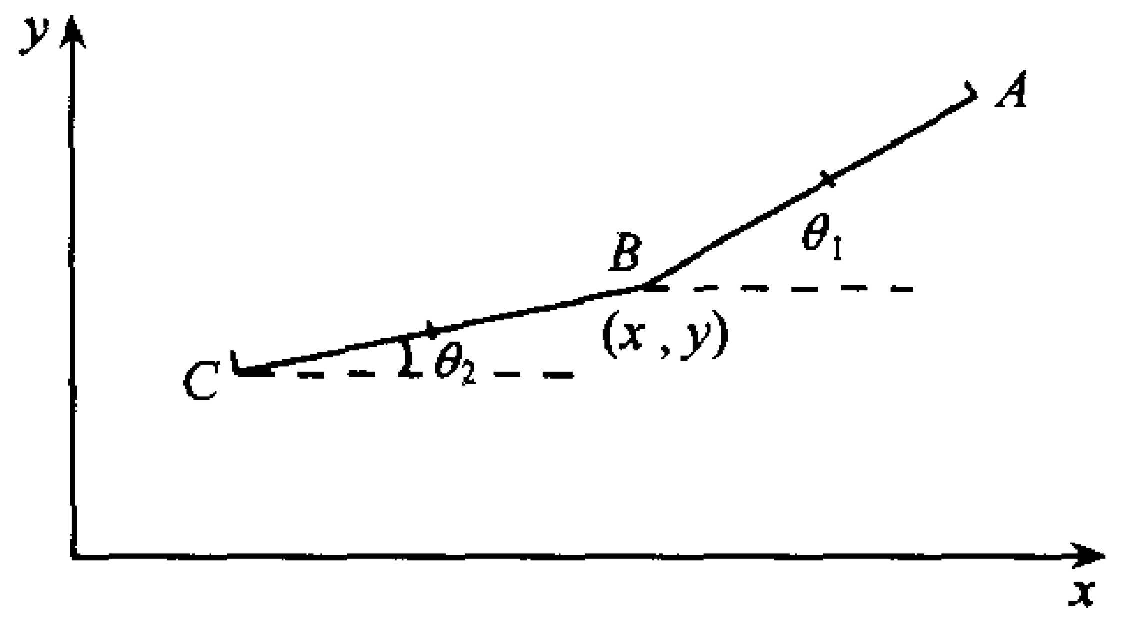


图 9.82

AB 棒质心的坐标为

$$x_1 = x + \frac{a}{2}\cos\theta_1$$

$$y_1 = y + \frac{a}{2}\sin\theta_1$$

BC 棒质心的坐标为

$$x_2 = x - \frac{a}{2}\cos\theta_2, \quad y_2 = y - \frac{a}{2}\sin\theta_2$$

两棒的质心速度分别为

$$\dot{x}_1 = \dot{x} - \frac{a}{2}\dot{\theta}_1\sin\theta_1, \quad \dot{y}_1 = \dot{y} + \frac{a}{2}\dot{\theta}_1\cos\theta_1$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + \frac{a}{2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2, \quad \dot{y}_2 = \dot{y} - \frac{a}{2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

系统的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L = T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}ma^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}ma^2\dot{\theta}_2^2 \\ &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{6}ma^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}ma\dot{x}(-\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}ma\dot{y}(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 - \dot{\theta}_2\cos\theta_2) \end{aligned}$$

冲量 I 做的“虚功”为

$$I\delta y_A = I\delta(y + a\sin\theta_1) = I(\delta y + a\cos\theta_1\delta\theta_1)$$

冲量 I 的广义冲量为

$$K_x = 0, \quad K_y = I$$

$$K_{\theta_1} = aI\cos\theta_1|_{\theta_1=0} = aI, \quad K_{\theta_2} = 0$$

由冲击运动的拉格朗日方程

$$\Delta\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) = K_i$$

可得

$$2m\dot{x}+\frac{1}{2}ma(-\dot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_2\sin\theta_2)|_{\theta_1=\theta_2=0}=0$$

$$2m\dot{y}+\frac{1}{2}ma(\dot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_2\cos\theta_2)|_{\theta_1=\theta_2=0}=I$$

$$\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_1-\frac{1}{2}ma\dot{x}\sin\theta_1|_{\theta_1=0}+\frac{1}{2}ma\dot{y}\cos\theta_1|_{\theta_1=0}=aI$$

$$\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_2+\frac{1}{2}ma\dot{x}\sin\theta_2|_{\theta_2=0}-\frac{1}{2}ma\dot{y}\cos\theta_2|_{\theta_2=0}=0$$

即

$$2m\dot{x}=0$$

$$2m\dot{y}+\frac{1}{2}ma(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)=I$$

$$\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_1+\frac{1}{2}ma\dot{y}=aI$$

$$\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_2-\frac{1}{2}ma\dot{y}=0$$

解得

$$\dot{x}=0,\quad \dot{y}=-\frac{I}{m}$$

$$\dot{\theta}_1=\frac{9I}{2ma},\quad \dot{\theta}_2=-\frac{3I}{2ma}$$

AB 棒的质心速度为

$$\dot{x}_1=\dot{x}-\frac{a}{2}\dot{\theta}_1\sin\theta_1\Big|_{\theta_1=0}=0$$

$$\dot{y}_1=\dot{y}+\frac{a}{2}\dot{\theta}_1\cos\theta_1\Big|_{\theta_1=0}=\frac{5I}{4m}$$

BC 棒的质心速度为

$$\dot{x}_2=\dot{x}+\frac{a}{2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2\Big|_{\theta_2=0}=0$$

$$\dot{y}_2=\dot{y}-\frac{a}{2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2\Big|_{\theta_2=0}=-\frac{I}{4m}$$

AB 棒、BC 棒的角速度分别为上述的 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$.

9.4.6　质量均为 m、长度均为 $2a$ 的两根均质棒 PQ、QR 在 Q 点光滑铰连，开始置于光滑的桌面上成一直线，在 PQ 的 P 端作用一冲量 $\boldsymbol{I}$，其方向沿垂直于 PQ 的水平方向. 求两棒在作用后各自质心的初速度和初角速度.

解　此题与上题基本相同，只是棒长改为 $2a$，用上题的图，x_1、y_1 表示 PQ 棒的质心坐标，x_2、y_2 表示 QR 棒的质心坐标. 可用上题结果，因结果中 $\dot{x}_1$、$\dot{y}_1$、$\dot{x}_2$、$\dot{y}_2$、$\dot{\theta}_1$、$\dot{\theta}_2$ 均与棒长无关，故结果与上题完全相同.

由于在 x 方向未受冲量，对两棒系统或对两棒分别为系统，均是这种情况，用矢量力

学，x 方向动量守恒，且为完整约束，可减少自由度，即仅有三个自由度.

9.4.7 一个质量为 m、半径为 a 的均质圆环可围绕边缘上一点 O 自由转动，开始处于静止状态，突然在边缘上另一点 P 作用一个冲量 I，其方向垂直于圆环所在平面. 证明：由此冲量产生的角速度大小不会超过 $\dfrac{3I}{\sqrt{2}\,ma}$，并求产生这么大的角速度 OP 的距离.

解 取固定坐标系 $Oxyz$，在冲量作用时，x 轴通过 O 点的直径，$\boldsymbol{I}$ 沿 z 轴方向，如图 9.83 所示，图中用⊙表示 $\boldsymbol{I}$ 的方向垂直纸面向上.

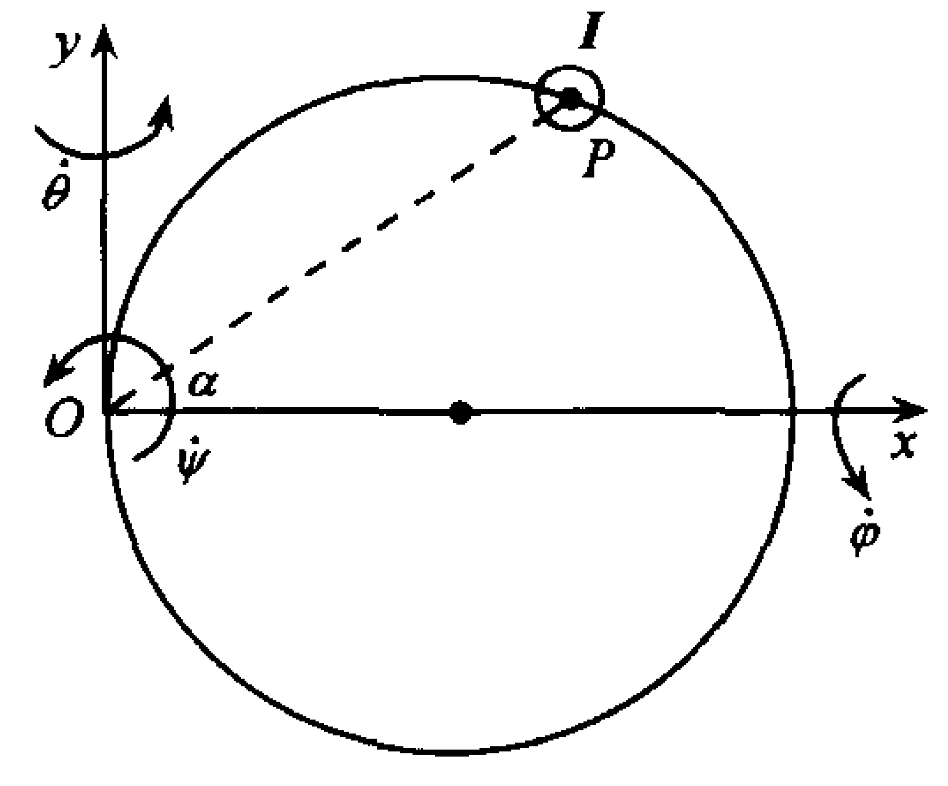


图 9.83

设冲量作用，使圆环获得的角速度表成

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\boldsymbol{k}$$

用 φ、θ、ψ 为广义坐标，绕 x、y、z 轴的转动惯量分别为

$$I_1 = \frac{1}{2}ma^2, I_2 = \frac{1}{2}ma^2 + ma^2 = \frac{3}{2}ma^2$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2ma^2$$

$$L = T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\varphi}^2 + I_2\dot{\theta}^2 + I_3\dot{\psi}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\psi}^2\right)$$

冲量作用期间，位形未变，势能没有变化，写冲击期间的拉格朗日方程，拉格朗日函数中可以不写势能，

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = 2ma^2\dot{\psi}$$

在图示位置，即冲量作用时的位置，

$$\delta z_P = 2a\cos\alpha\sin\alpha\delta\varphi - 2a\cos\alpha\cdot\cos\alpha\delta\theta$$

冲量做的“虚功”为

$$I\delta z_P = 2aI\cos\alpha\sin\alpha\delta\varphi - 2aI\cos^2\alpha\delta\theta$$

广义冲量为

$$K_\varphi = 2aI\cos\alpha\sin\alpha$$

$$K_\theta = -2aI\cos^2\alpha$$

$$K_\psi = 0$$

由冲击运动的拉格朗日方程 $\Delta p_i = K_i$ 得

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi} = 2aI\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\frac{3}{2}ma^2\dot{\theta} = -2aI\cos^2\alpha$$

$$2ma^2\dot{\psi} = 0$$

所以

$$\dot{\varphi} = \frac{4I\cos\alpha\sin\alpha}{ma}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{4I\cos^2\alpha}{3ma}$$

$$\dot{\psi} = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{4I\cos\alpha\sin\alpha}{ma}\boldsymbol{i} - \frac{4I\cos^2\alpha}{3ma}\boldsymbol{j}$$

$$\omega^2 = \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 = \frac{16I^2}{9m^2a^2}(9\cos^2\alpha - 8\cos^4\alpha)$$

ω 取极值的条件是$\frac{d\omega^2}{d\alpha}=0$,得

$$\sin\alpha\cos\alpha(18 - 32\cos^2\alpha) = 0$$

α 可取$-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$,在此范围内,$\alpha=0,\pm\arccos\left(\frac{3}{4}\right),\frac{\pi}{2}$,$\omega$ 为极值,分别代入 ω^2 的式子,可知,当

$$\alpha = \pm\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

时,

$$\omega^2 = \omega_{\max}^2 = \frac{9I^2}{2m^2a^2}$$

$$\omega_{\max} = \frac{3I}{\sqrt{2}\,ma}$$

此时
$$OP = 2a\cos\left[\pm\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{3}{2}a$$

9.4.8 由长度为 $2l$、质量为 m 的四根杆用光滑铰链连接成的构件 $ABCD$,开始成正方形静置于光滑的水平面上,取图 9.84 所示的坐标,质心位于坐标原点,AB、CD 与 x 轴平行,AD、BC 与 y 轴平行,今在 A 点沿 AD 方向作用一冲量 I,求作用后构件的运动状态.

解　用构件质心 M 的 x、y 坐标、BC 杆与 x 轴的夹角 θ_1、AB 杆与 x 轴的夹角 θ_2 作广义坐标,E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、AD 四杆的质心,如图 9.85 所示.

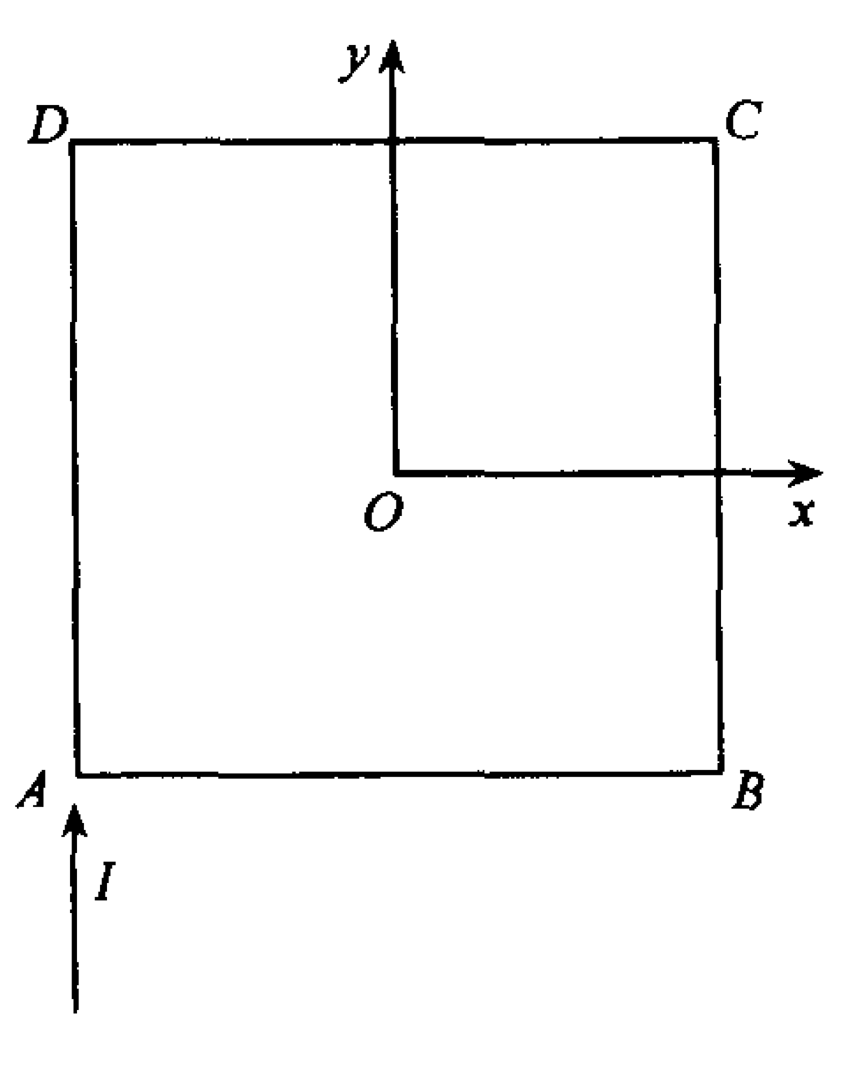


图 9.84

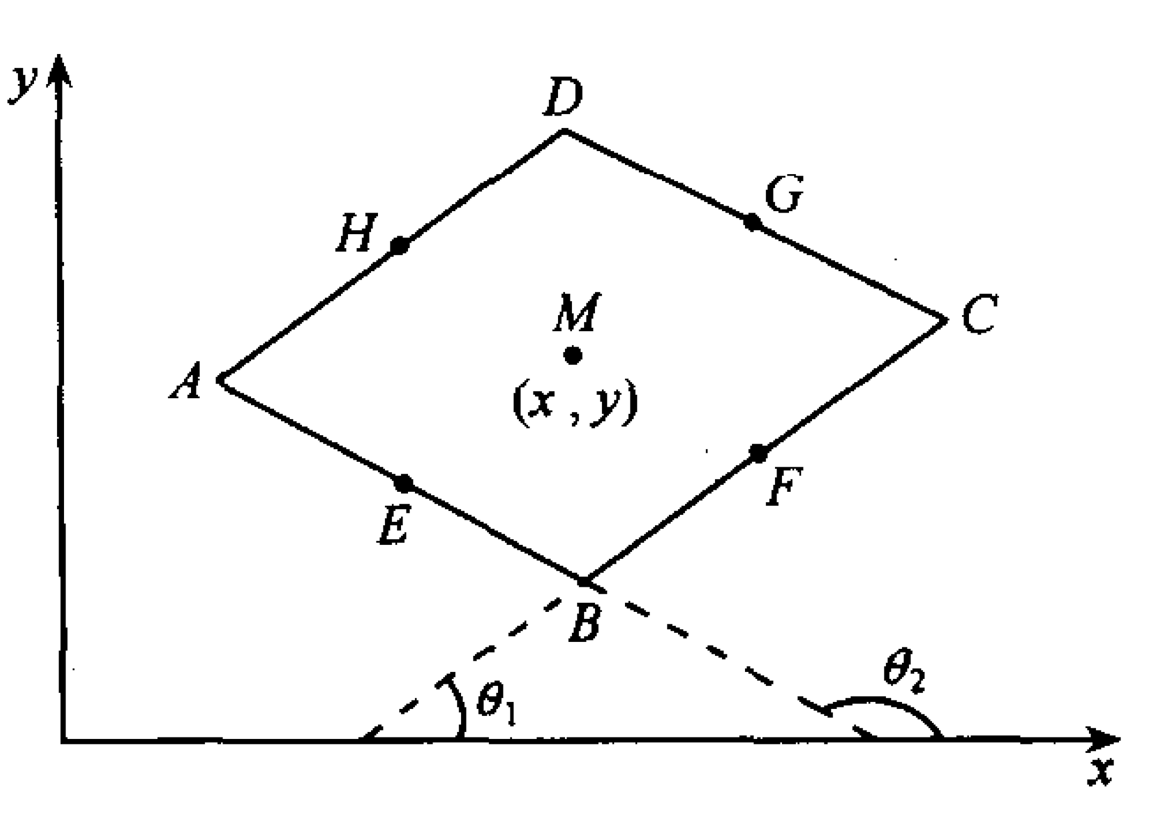


图 9.85

$$\boldsymbol{r}_E = (x - l\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (y - l\sin\theta_1)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_F = (x - l\cos\theta_2)\boldsymbol{i} + (y - l\sin\theta_2)\boldsymbol{j}$$

$$r_G=(x+l\cos\theta_1)\boldsymbol{i}+(y+l\sin\theta_1)\boldsymbol{j}$$

$$r_H=(x+l\cos\theta_2)\boldsymbol{i}+(y+l\sin\theta_2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_E=(\dot{x}+l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)\boldsymbol{i}+(\dot{y}-l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_F=(\dot{x}+l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\boldsymbol{i}+(\dot{y}-l\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_G=(\dot{x}-l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)\boldsymbol{i}+(\dot{y}+l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_H=(\dot{x}-l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\boldsymbol{i}+(\dot{y}+l\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\boldsymbol{j}$$

四根杆的动能分别为

$$T_{AB}=\frac{1}{2}mv_E^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}_1^2+2l\dot{x}\dot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{y}^2-2l\dot{y}\dot{\theta}_1\cos\theta_1)+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$T_{BC}=\frac{1}{2}mv_F^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+l^2\dot{\theta}_2^2+2l\dot{x}\dot{\theta}_2\sin\theta_2-2l\dot{y}\dot{\theta}_2\cos\theta_2)+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

$$T_{CD}=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+l^2\dot{\theta}_1^2-2l\dot{x}\dot{\theta}_1\sin\theta_1+2l\dot{y}\dot{\theta}_1\cos\theta_1)+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$T_{AD}=\frac{1}{2}mv_H^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+l^2\dot{\theta}_2^2-2l\dot{x}\dot{\theta}_2\sin\theta_2+2l\dot{y}\dot{\theta}_2\cos\theta_2)+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

$$L=T=T_{AB}+T_{BC}+T_{CD}+T_{AD}=2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{4}{3}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=4m\dot{x},\qquad p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=4m\dot{y}$$

$$p_{\theta_1}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}=\frac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1,\qquad p_{\theta_2}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}=\frac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2$$

$$y_A=y_E+l\sin\theta_2=y-l\sin\theta_1+l\sin\theta_2$$

$$K_x=I\frac{\partial y_A}{\partial x}=0$$

$$K_y=I\frac{\partial y_A}{\partial y}=I$$

$$K_{\theta_1}=I\frac{\partial y_A}{\partial\theta_1}\bigg|_{\theta_1=\frac{\pi}{2}}=-Il\cos\theta_1\bigg|_{\theta_1=\frac{\pi}{2}}=0$$

$$K_{\theta_2}=I\frac{\partial y_A}{\partial\theta_2}\bigg|_{\theta_2=\pi}=Il\cos\theta_2\bigg|_{\theta_2=\pi}=-Il$$

由冲击运动的拉格朗日方程 $\Delta p_i=K_i$，

$$\Delta p_x=4m\dot{x}=0$$

$$\Delta p_y = 4m\dot{y} = I$$

$$\Delta p_{\theta_1} = \frac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1 = 0$$

$$\Delta p_{\theta_2} = \frac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2 = -Il$$

所以

$$\dot{x} = 0,\quad \dot{y} = \frac{I}{4m},\quad \dot{\theta}_1 = 0,\quad \dot{\theta}_2 = -\frac{3I}{8ml}$$

9.4.9 分别用基尔霍夫定律和拉格朗日方程得到图 9.86 所示电路的电路方程.

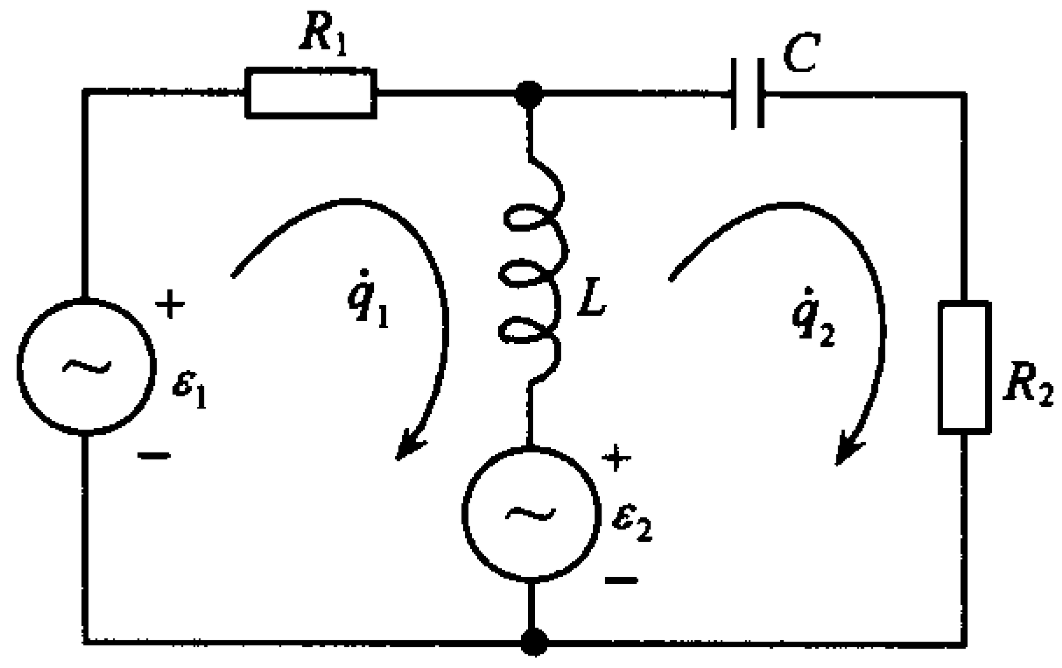


图 9.86

解 用基尔霍夫定律,

$$L(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + R_1\dot{q}_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$L(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) + \frac{1}{C}q_2 + R_2\dot{q}_2 = \varepsilon_2$$

用拉格朗日方程,

$$T = \frac{1}{2}L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2,\quad V = \frac{1}{2C}q_2^2$$

$$\tilde{L} = T - V = \frac{1}{2}L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{2C}q_2^2$$

这里拉格朗日函数改用 $\tilde{L}$,以免与自感 L 发生混淆,下面瑞利耗散函数改用 $\tilde{R}$,以免与电阻 R 发生混淆,

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}R_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2$$

$$Q_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\quad Q_2 = \varepsilon_2$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial\tilde{R}}{\partial\dot{q}_i}$$

得

$$L(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - R_1\dot{q}_1$$

$$-L(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + \frac{1}{C}q_2 = \varepsilon_2 - R_2\dot{q}_2$$

与基尔霍夫定律得到的电路方程是一样的.

9.4.10 用拉格朗日方程得到图 9.87 所示电路的电路方程.

提示:电流源可作为一个约束 $\dot{q} = i$ 来处理.

解 用基尔霍夫定律,

$$\frac{1}{C}q_1 + R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}) + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0$$

$$R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + R_3\dot{q}_2 = -\varepsilon$$

$$\dot{q} = i$$

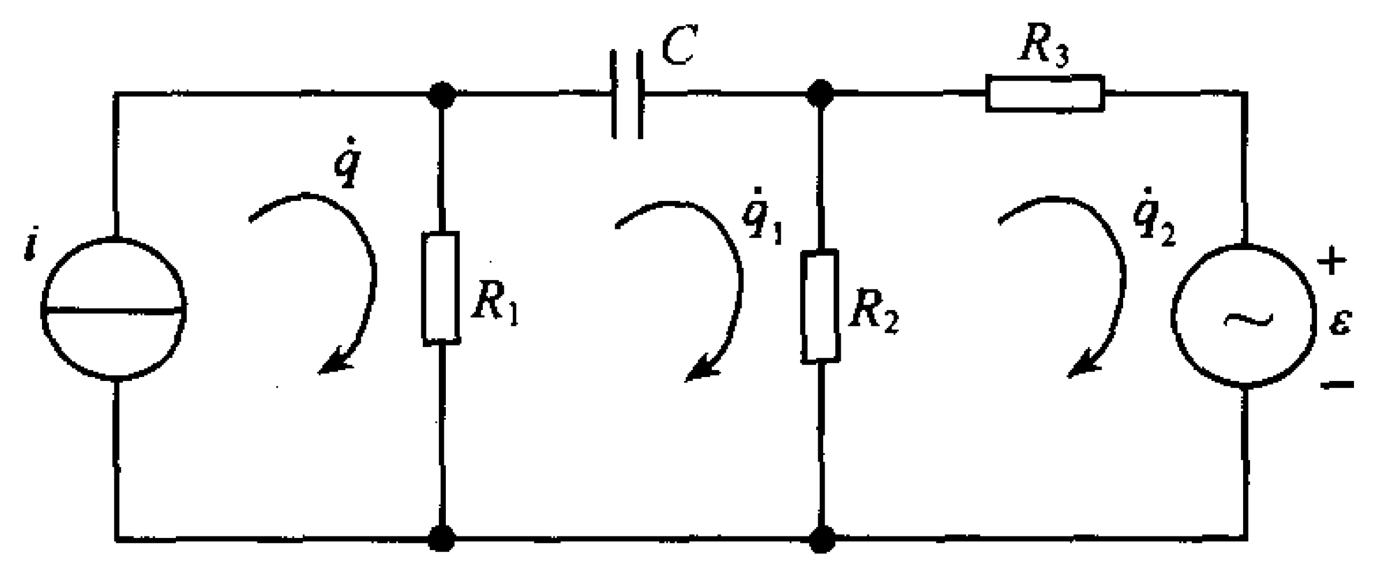


图 9.87

用拉格朗日方程，

$$T = 0, \quad V = \frac{1}{2C}q_1^2$$

$$\widetilde{L} = -V = -\frac{1}{2C}q_1^2$$

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = -\varepsilon$$

$$\widetilde{R} = \frac{1}{2}R_1(\dot{q}_1 - \dot{q})^2 + \frac{1}{2}R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2}R_3\dot{q}_2^2$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial\dot{q}_i}$$

得

$$\frac{1}{C}q_1 = -R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}) + R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$$

$$0 = -R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - R_3\dot{q}_2 - \varepsilon$$

约束方程：

$$\dot{q} = i$$

9.4.11　用拉格朗日方程写出图 9.88 所示电路的电路方程.

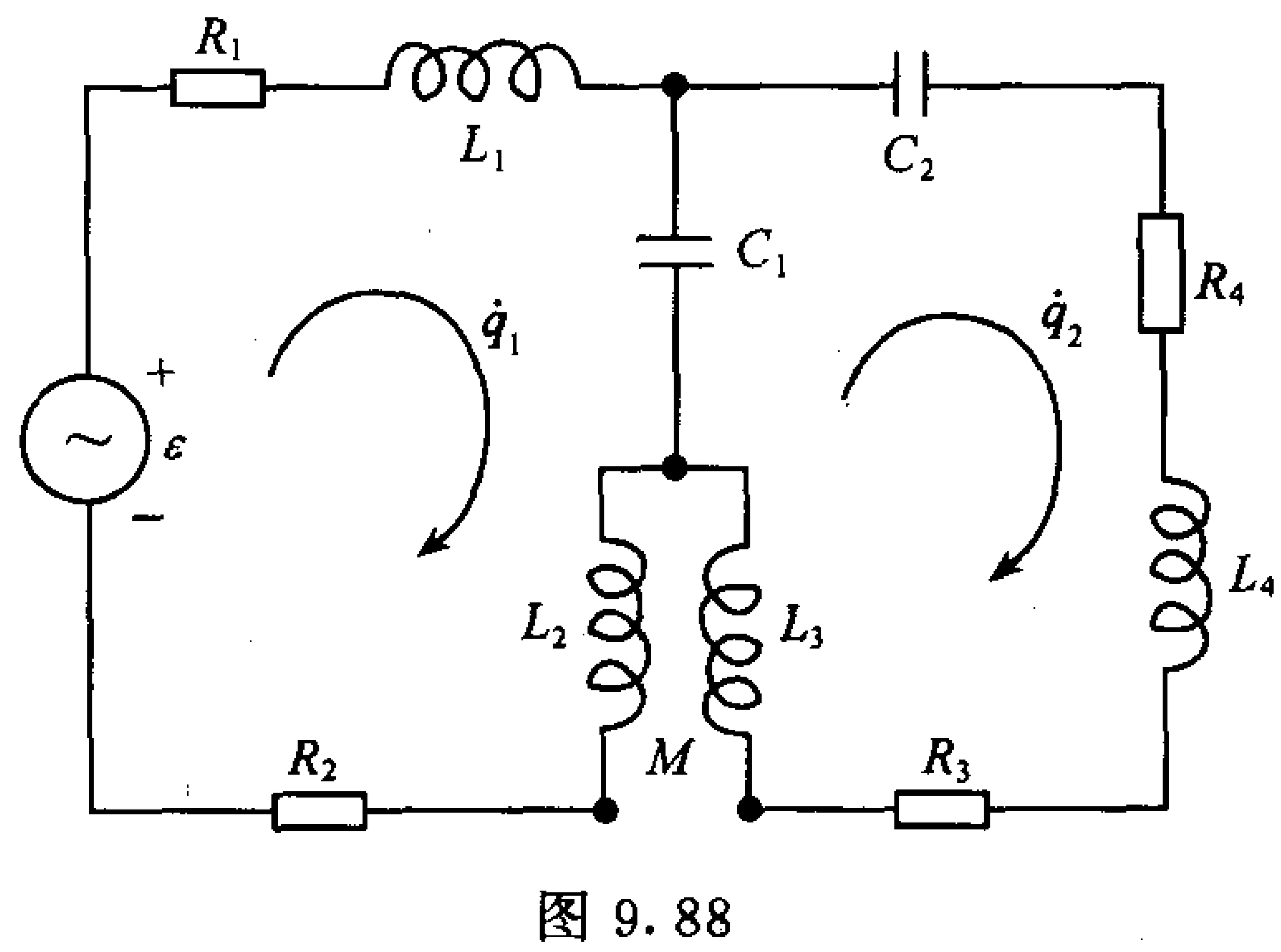


图 9.88

解　用基尔霍夫定律，

$$R_1\dot{q}_1 + L_1\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1}(q_1 - q_2) + L_2\ddot{q}_1 + R_2\dot{q}_1 + M\ddot{q}_2 = \varepsilon$$

$$L_3\ddot{q}_2 + L_4\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1}(q_2 - q_1) + \frac{1}{C_2}q_2 + (R_3 + R_4)\dot{q}_2 = 0$$

用拉格朗日方程

$$T = \frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_3\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}L_4\dot{q}_2^2 + M\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$V = \frac{1}{2C_1}(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2C_2}q_2^2$$

$$\tilde{L} = T - V = \frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_3\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}L_4\dot{q}_2^2 + M\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{1}{2C_1}(q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2C_2}q_2^2$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}R_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}R_2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}R_3\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}R_4\dot{q}_2^2$$

$$Q_1 = \varepsilon, \quad Q_2 = 0$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial\tilde{R}}{\partial\dot{q}_i}$$

可得

$$L_1\ddot{q}_1 + L_2\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + \frac{1}{C_1}(q_1 - q_2) = \varepsilon - (R_1 + R_2)\dot{q}_1$$

$$(L_3 + L_4)\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1}(q_2 - q_1) + \frac{1}{C_2}q_2 = -(R_3 + R_4)\dot{q}_2$$

9.4.12　用拉格朗日方程写出图 9.89 电路(各线圈有互感 M_{12}、M_{23}、M_{13},图中难于表明)的电路方程.

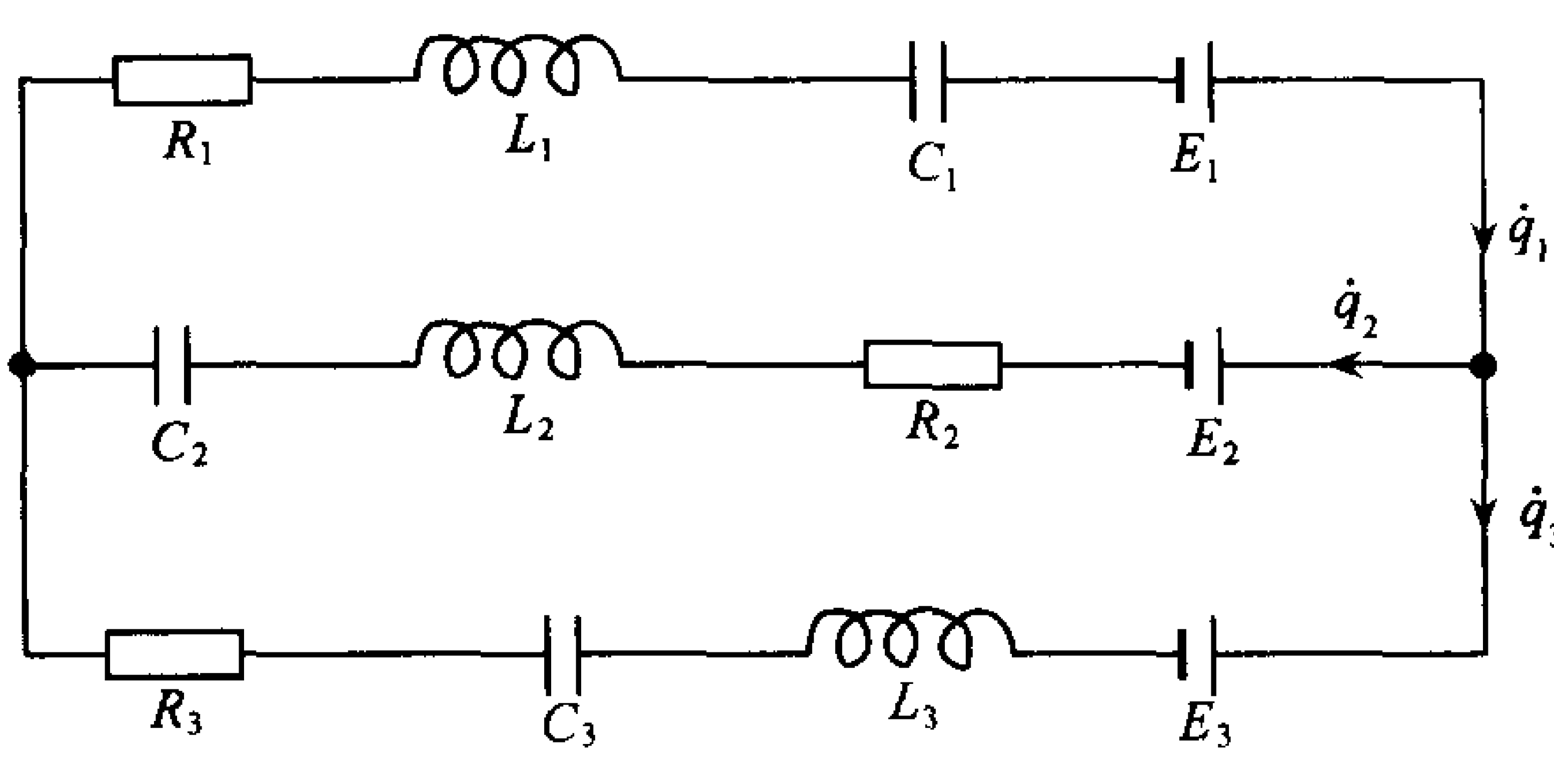


图 9.89

解　电路包含两个回路,只有两个自由度,有约束关系:$\dot{q}_1=\dot{q}_2+\dot{q}_3$ 或 $q_1=q_2+q_3$. 取 q_1、q_2 为广义坐标,

$$T = \frac{1}{2}(L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + L_3\dot{q}_3^2 + 2M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2M_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2M_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3)$$

$$= \frac{1}{2}[L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + L_3(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + 2M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2M_{23}\dot{q}_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + 2M_{13}\dot{q}_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)]$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{C_3}\right] - E_1q_1 + E_2q_2 + E_3(q_1 - q_2)$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}[R_1\dot{q}_1^2 + R_2\dot{q}_2^2 + R_3(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2]$$

$$Q_1 = -\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\dot{q}_1} = -R_1\dot{q}_1 - R_3(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = -(R_1 + R_3)\dot{q}_1 + R_3\dot{q}_2$$

$$Q_2=-\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial\dot{q}_2}=-R_2\dot{q}_2+R_3(\dot{q}_1-\dot{q}_2)=R_3\dot{q}_1-(R_2+R_3)\dot{q}_2$$

这里用引入势能的办法处理直流电源，当然也可以像前几题那样用广义力处理. 对于交流电源，也可引入显含时间的势能来处理，

$$\widetilde{L}=T-V=\frac{1}{2}[L_1\dot{q}_1^2+L_2\dot{q}_2^2+L_3(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+2M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+2M_{23}\dot{q}_2(\dot{q}_1-\dot{q}_2)$$

$$+2M_{13}\dot{q}_1(\dot{q}_1-\dot{q}_2)]-\frac{1}{2}\left[\frac{q_1^2}{C_1}+\frac{q_2^2}{C_2}+\frac{(q_1-q_2)^2}{C_3}\right]+E_1q_1-E_2q_2-E_3(q_1-q_2)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_i}=Q_i$$

得

$$(L_1+L_3+2M_{13})\ddot{q}_1+(M_{12}+M_{23}-L_3-M_{13})\ddot{q}_2$$

$$+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)q_1-\frac{1}{C_3}q_2-E_1+E_3=-(R_1+R_3)\dot{q}_1+R_3\dot{q}_2$$

$$(L_2+L_3-2M_{23})\ddot{q}_2+(M_{12}-L_3+M_{23}-M_{13})\ddot{q}_1$$

$$+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)q_2-\frac{1}{C_3}q_1+E_2-E_3=R_3\dot{q}_1-(R_2+R_3)\dot{q}_2$$

9.4.13　图 9.90 所示的电路中包含两个相同的二极管，假定 $E_3=A|\dot{q}_3^{b-1}|\dot{q}_3$，其中 A、b 是常量，$E_2=E_0\sin\omega t$，各线圈有互感 M_{12}、M_{13}、M_{23}. 用拉格朗日方程写出电路方程.

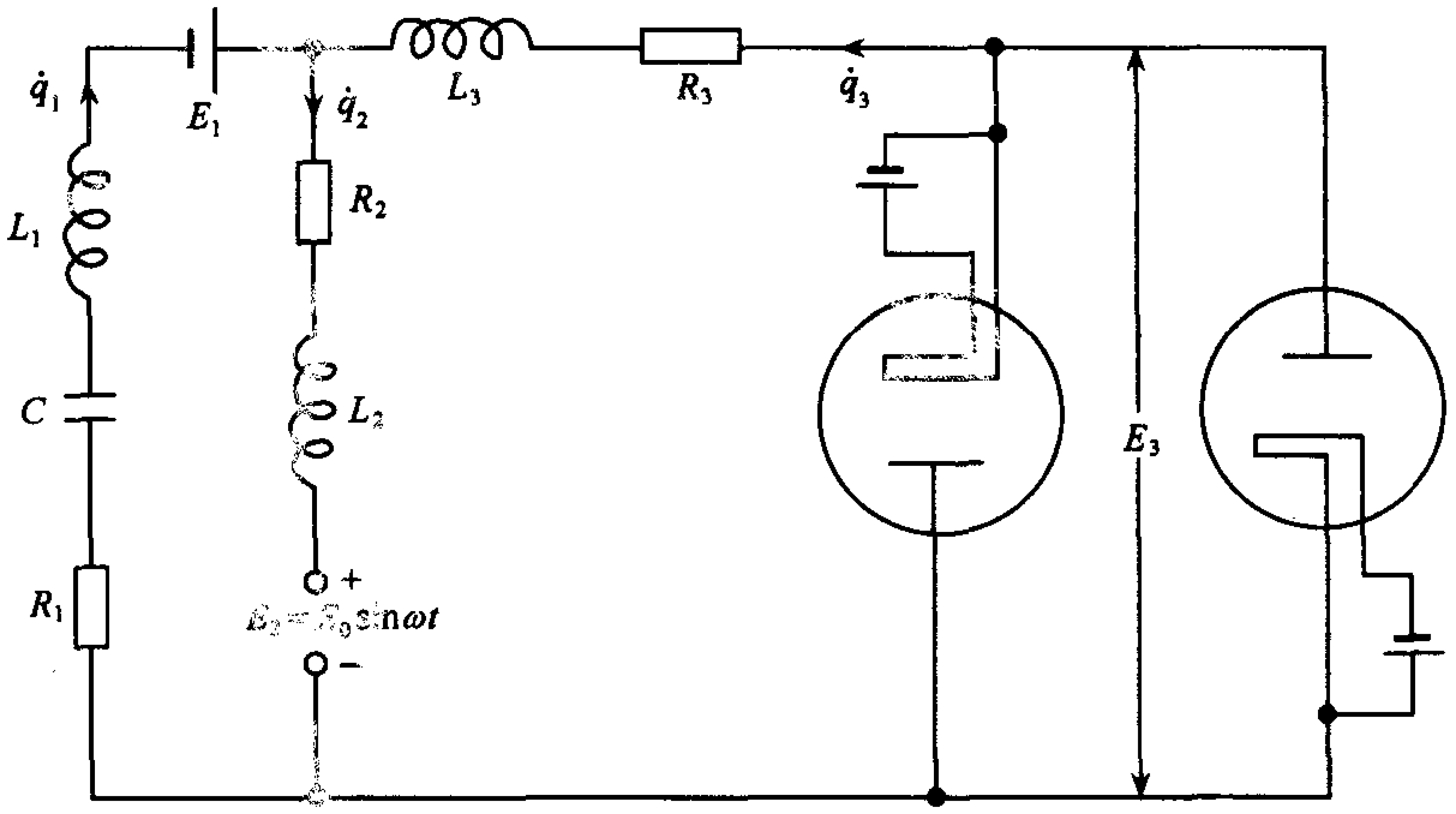


图 9.90

解　只有两个自由度，用 q_1、q_2 为广义坐标，$\dot{q}_3=\dot{q}_2-\dot{q}_1$，

$$T=\frac{1}{2}[L_1\dot{q}_1^2+L_2\dot{q}_2^2+L_3(\dot{q}_2-\dot{q}_1)^2+2M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$+2M_{13}\dot{q}_1(\dot{q}_2-\dot{q}_1)+2M_{23}\dot{q}_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1)]$$

$$V=\frac{q_1^2}{2C}-E_1q_1+E_0q_2\sin\omega t$$

$$\widetilde{L}=T-V=\frac{1}{2}[L_1\dot{q}_1^2+L_2\dot{q}_2^2+L_3(\dot{q}_2-\dot{q}_1)^2+2M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$+ 2M_{13}q_1(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + 2M_{23}\dot{q}_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)] - \frac{q_1^2}{2C} + E_1q_1 - Eq_2\sin\omega t$$

$$\begin{aligned}\delta W =& - R_1\dot{q}_1\delta q_1 - R_2\dot{q}_2\delta q_2 - R_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)(\delta q_2 - \delta q_1)\\ &+ A|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^{b-1}|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)(\delta q_2 - \delta q_1)\\ =& [- R_1\dot{q}_1 + R_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - A|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^{b-1}|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)]\delta q_1\\ &+ [- R_2\dot{q}_2 - R_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + A|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)|^{b-1}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)]\delta q_2\end{aligned}$$

$$Q_1 = - R_1\dot{q}_1 + R_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - A|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^{b-1}|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$$

$$Q_2 = - R_2\dot{q}_2 - R_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + A|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^{b-1}|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

得

$$\begin{aligned}&(L_1 + L_3 - 2M_{13})\ddot{q}_1 + (M_{12} - L_3 + M_{13} - M_{23})\ddot{q}_2 + \frac{q_1}{C} - E_1\\ &= - R_1\dot{q}_1 + R_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - A|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^{b-1}|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)\\ &(L_2 + L_3 + 2M_{23})\ddot{q}_2 + (M_{12} - L_3 + M_{13} - M_{23})\ddot{q}_2 + E_0\sin\omega t\\ &= - R_2\dot{q}_2 - R_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + A|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^{b-1}|(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)\end{aligned}$$

9.4.14　图 9.91 所示的系统中电容器 C 的上极板悬在劲度系数为 k 的线圈弹簧的下端(弹簧上端固定)，质量为 m，上极板在重力、弹簧力和极板间的电场力作用下在竖直方向运动，下极板是固定的，电容器的电容 $C=\dfrac{A}{s-x}$，其中 A 是与极板面积及所用的单位有关的常数，s 是电容器未充电情况下上极板处于平衡位置两极板的间距. 用拉格朗日方程给出运动微分方程.

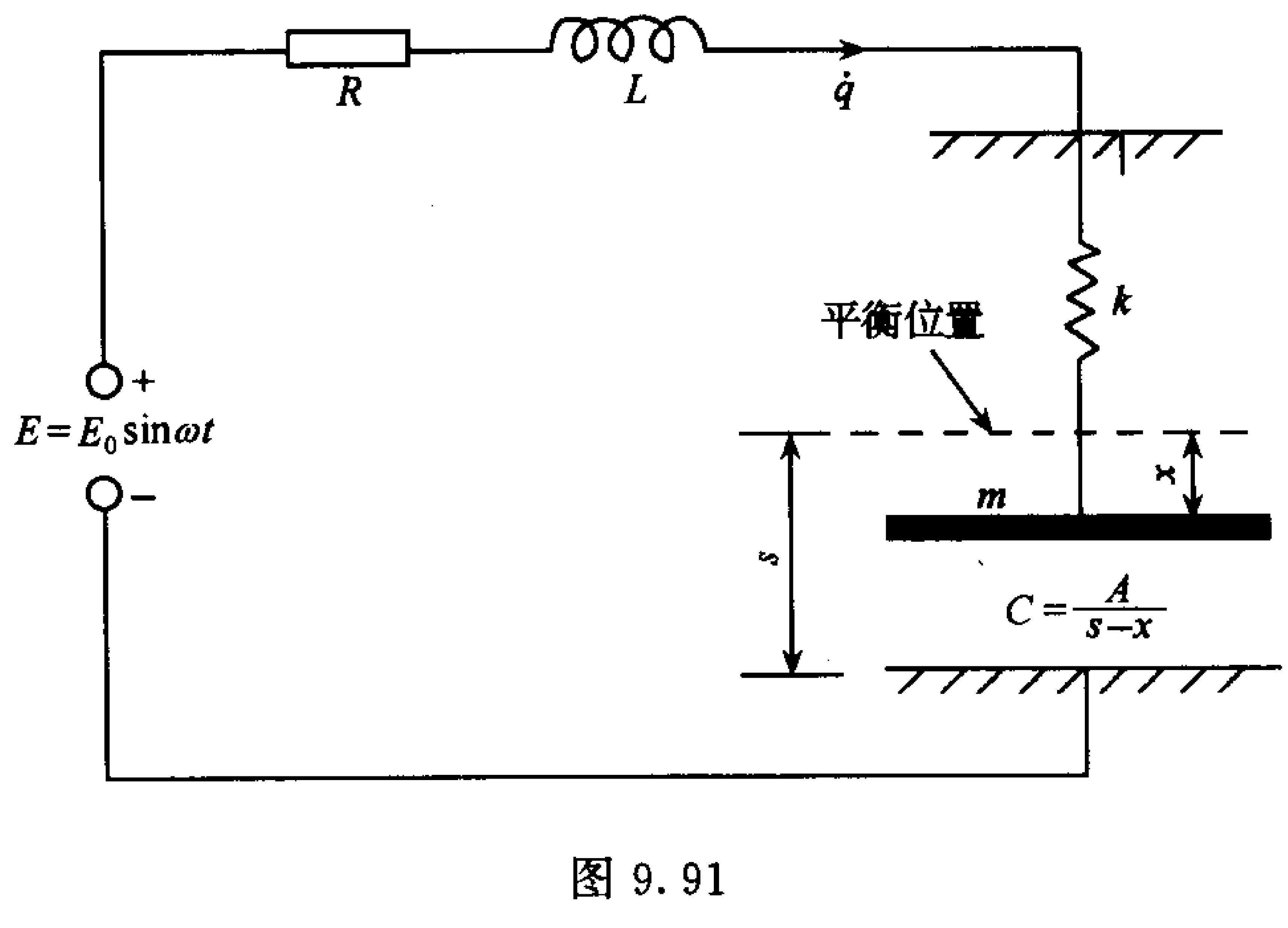


图 9.91

解　系统有两个自由度，取 q 和 x 为广义坐标.

$$T = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}kx^2 - qE_0\sin\omega t$$

$$=\frac{s-x}{2A}q^2+\frac{1}{2}kx^2-qE_0\sin\omega t$$

注意:$x=0$ 时作用于上极板的弹簧力与重力相抵消,因此$\frac{1}{2}kx^2$ 已是弹簧力和重力的合力的势能,

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}L\dot{q}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{s-x}{2A}q^2-\frac{1}{2}kx^2+qE_0\sin\omega t$$

$$Q_q=-R\dot{q},\quad Q_x=0$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_i}=Q_i$$

得
$$L\ddot{q}+\frac{s-x}{A}q-E_0\sin\omega t=-R\dot{q}$$

$$m\ddot{x}+kx-\frac{1}{2A}q^2=0$$

说明一下两式中各项的物理意义:$L\ddot{q}$ 是电感两端的电压,$\frac{s-x}{A}q$ 是电容器两极板间的电压,$R\dot{q}$ 为电阻两端的电压,$\frac{1}{2A}q^2$ 是电容器两极板间的吸引力.

9.4.15　图 9.92 中可变电容器的两极板可沿竖直直线 ab 运动,无转动,极板受弹簧力、重力和两极板间电场力的作用,l_{10}、l_{20}是极板不带电时两极板处于平衡时两弹簧的长度,s、A 均为常量,m_1、m_2 是两极板的质量.求系统的拉格朗日函数及运动微分方程.

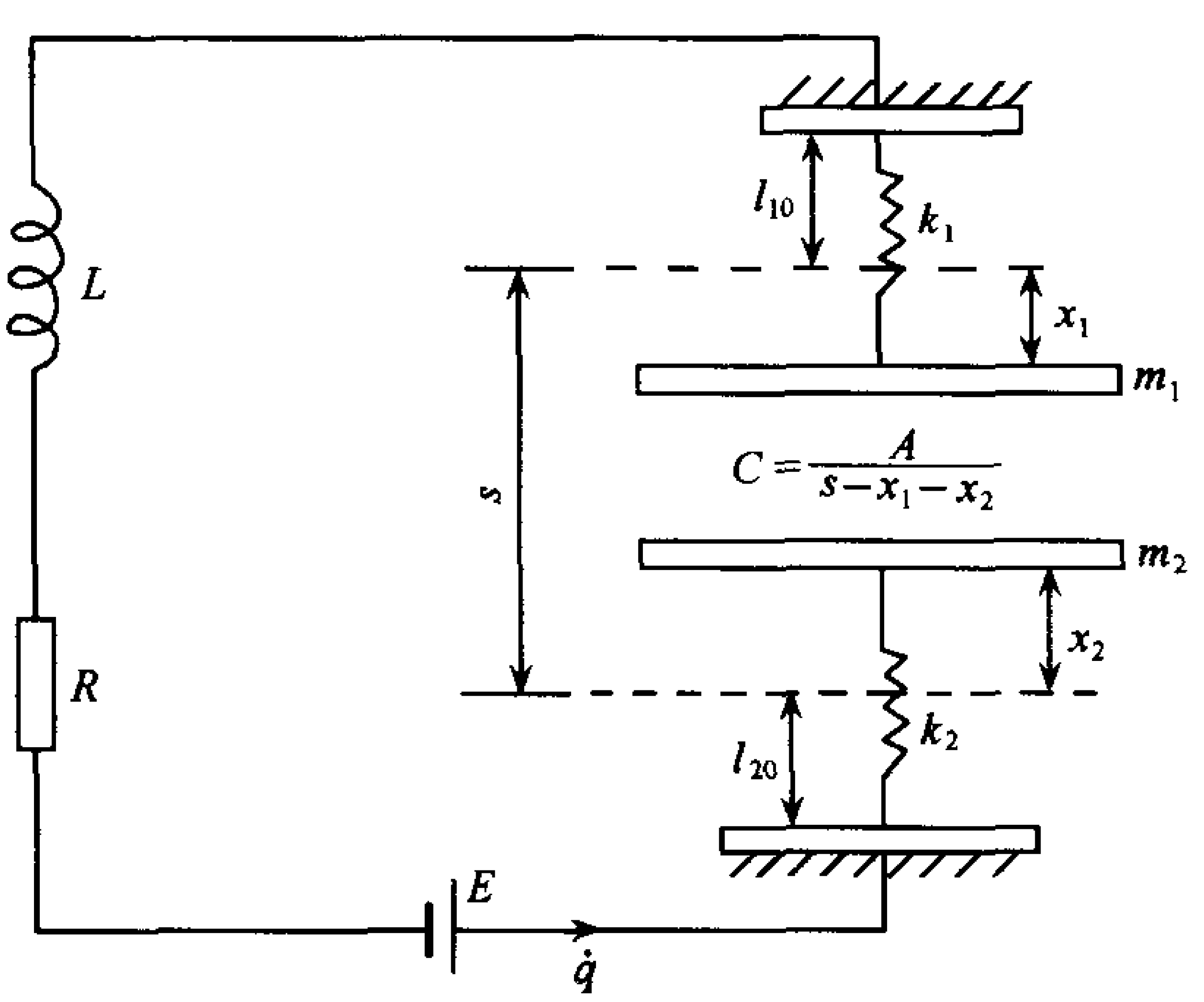


图 9.92

解
$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

$$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+\frac{1}{2}q^2\frac{s-x_1-x_2}{A}-Eq$$

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}L\dot{q}^2-\frac{1}{2}k_1x_1^2-\frac{1}{2}k_2x_2^2-\frac{1}{2}q^2\frac{s-x_1-x_2}{A}+Eq$$

$$Q_{x_1}=0,\quad Q_{x_2}=0,\quad Q_q=-R\dot{q}$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i}=Q_i$$
得

$$m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-\frac{q^2}{2A}=0$$

$$m_2\ddot{x}_2+k_2x_2-\frac{q^2}{2A}=0$$

$$L\ddot{q}+\frac{s-x_1-x_2}{A}q-E=-R\dot{q}$$

9.4.16　图 9.93 中半圆柱 A 通过一根扭转常数为 k(转单位角度时受到恢复力矩为 k)的细弹性棒钉在位于通过柱心的固定的垂直轴 O 上，可在固定的半圆柱面 B 内转动，构成可变电容器，假定其电容为 $C=C_0\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)$，$\theta=\theta_0$ 时，弹性棒未被扭曲，写出拉格朗日函数和运动微分方程.

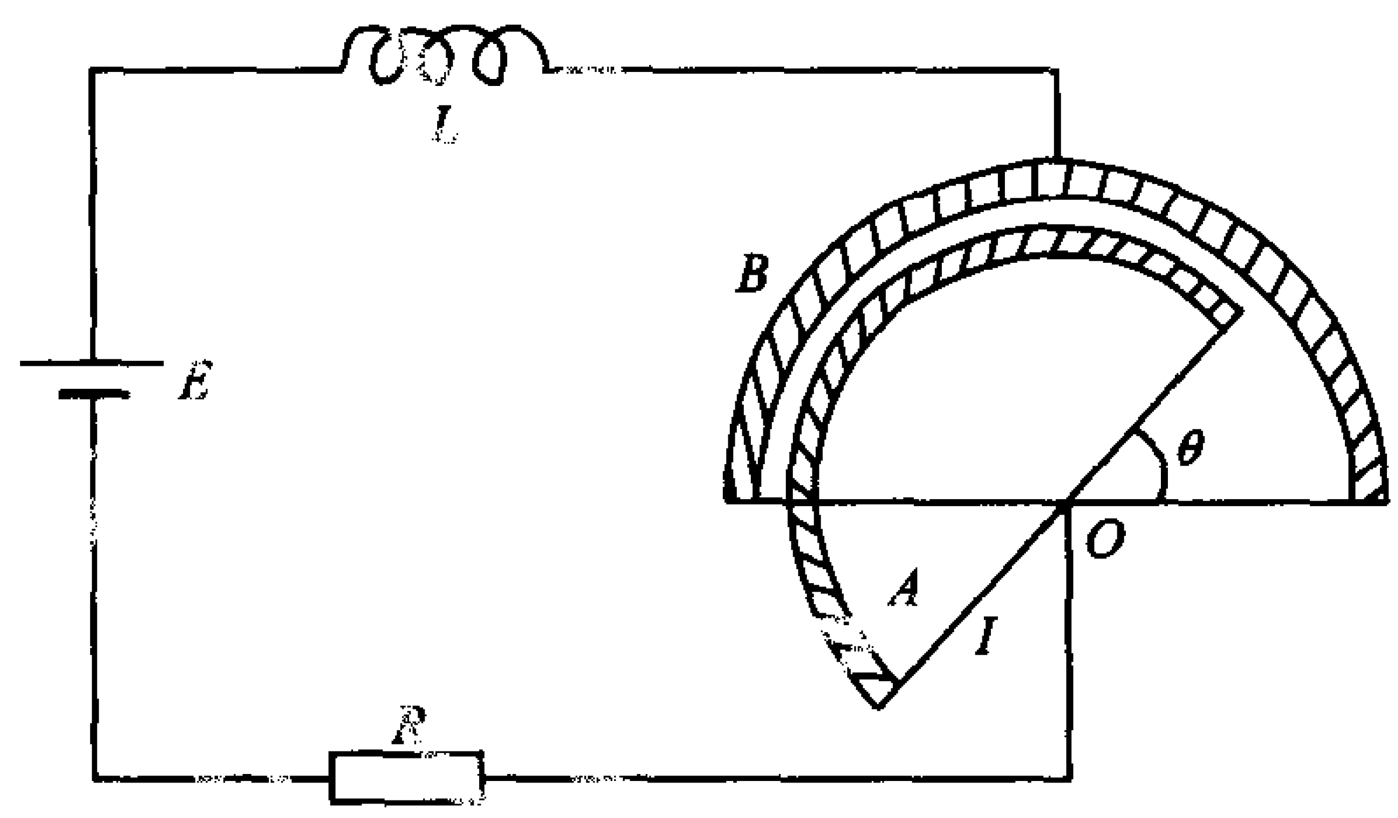


图 9.93

解
$$T=\frac{1}{2}L\dot{q}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$
其中 I 是半圆柱 B 绕 O 轴的转动惯量

$$V=\frac{1}{2}k(\theta-\theta_0)^2-\frac{q^2}{2C_0(1-\theta/\pi)}-Eq$$

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}L\dot{q}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k(\theta-\theta_0)^2-\frac{q^2}{2C_0(1-\theta/\pi)}+Eq$$

$$Q_q=-R\dot{q},\qquad Q_\theta=0$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i}=Q_i$$
得运动微分方程为

$$L\ddot{q}+\frac{1}{C_0(1-\theta/\pi)}q-E=-R\dot{q}$$

$$I\ddot{\theta}+k(\theta-\theta_0)+\frac{1}{2\pi C_0(1-\theta/\pi)^2}q^2=0$$

9.4.17　可变电容器与墙式电流计如图 9.94 所示连接，设电流计中的磁场沿径向，磁感应强度为 B，线圈有 n 匝，每匝面积为 A_1，线圈绕轴的转动惯量为 I，k_1 是扭转弹簧的

扭转常数，可变电容器的电容 $C=\dfrac{A_2}{d-x}$，A_2、d 均为常量，l_0 是极板不带电时，质量为 m 的极板平衡时的弹簧长度，n 匝线圈的自感系数为 L_1，写出系统的拉格朗日函数和运动微分方程.

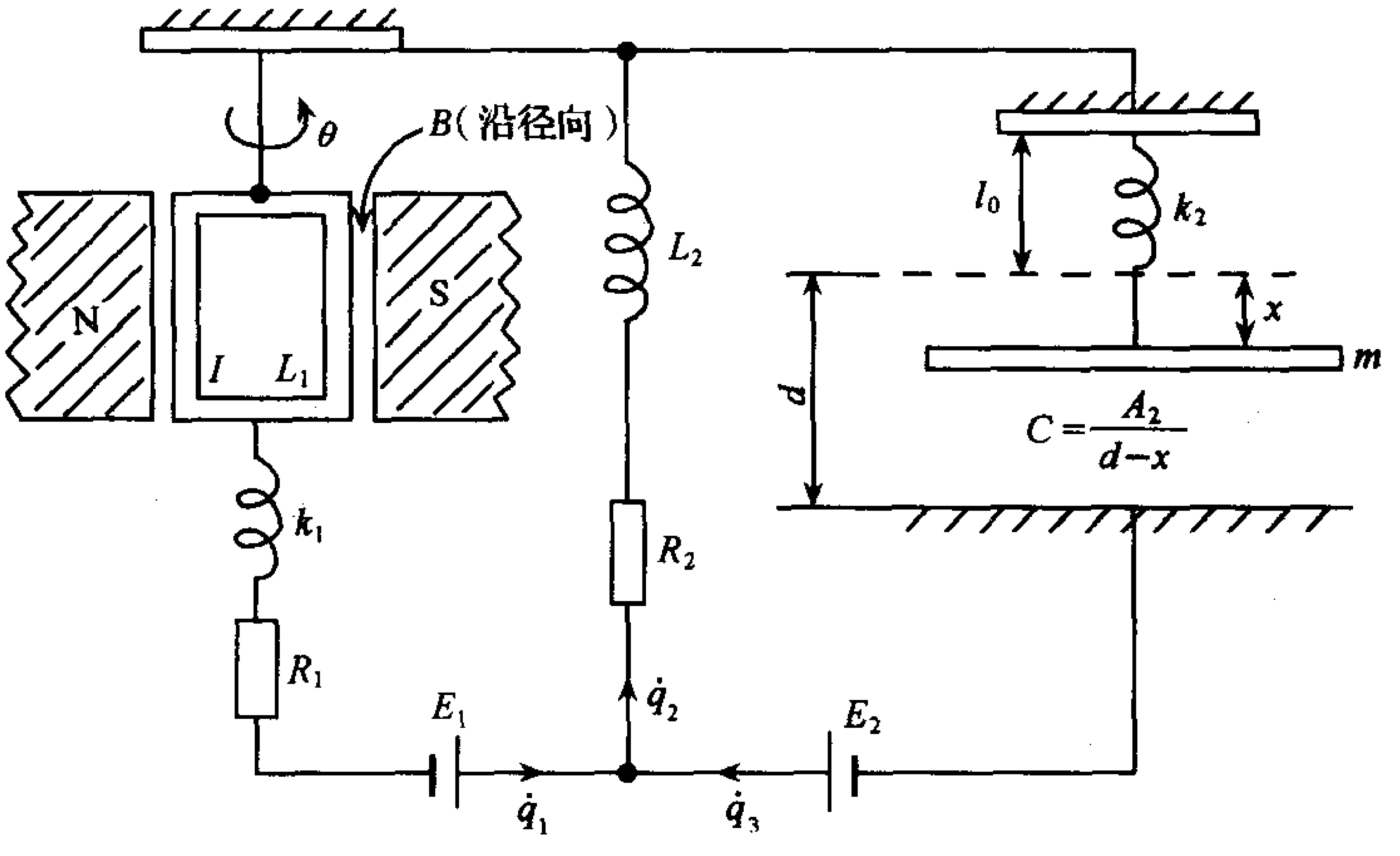


图 9.94

解　此系统有四个自由度，用 θ、q_1、q_2、x 作为广义坐标. $\dot{q}_3=\dot{q}_2-\dot{q}_1$，电流计线圈当有电流 $\dot{q}_1$ 通过时，受到磁场的力矩为 $nBA_1\dot{q}_1$，

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V=-E_1q_1-E_2(q_2-q_1)-nBA_1\dot{q}_1\theta+\frac{1}{2}k_1\theta^2+\frac{1}{2}k_2x^2+\frac{(q_2-q_1)^2}{2A_2}(d-x)$$

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+E_1q_1+E_2(q_2-q_1)$$
$$+nBA_1\dot{q}_1\theta-\frac{1}{2}k_1\theta^2-\frac{1}{2}k_2x^2-\frac{(q_2-q_1)^2}{2A_2}(d-x).$$

$$\delta W=-R_1\dot{q}_1\delta q_1-R_2\dot{q}_2\delta q_2$$

所以

$$Q_\theta=0,\quad Q_{q_1}=-R_1\dot{q}_1,\quad Q_{q_2}=-R\dot{q}_2,\quad Q_x=0$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\theta}}=I\dot{\theta},\qquad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\theta}=nBA_1\dot{q}_1-k_1\theta$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_1}=L_1\dot{q}_1+nBA_1\theta,\qquad \frac{\partial L}{\partial q_1}=E_1-E_2+\frac{q_2-q_1}{A_2}(d-x)$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_2}=L_2\dot{q}_2,\qquad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_2}=E_2-\frac{1}{A_2}(q_2-q_1)(d-x)$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}}=m\dot{x},\qquad \frac{\partial L}{\partial x}=-k_2x+\frac{1}{2A_2}(q_2-q_1)^2$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_i}=Q_i$$

可得运动微分方程为

$$I\ddot{\theta}+k_1\theta-nBA_1\dot{q}_1=0$$

$$L_1\ddot{q}_1+nBA_1\dot{\theta}-E_1+E_2-\frac{1}{A_2}(q_2-q_1)(d-x)=-R_1\dot{q}_1$$

$$L_2\ddot{q}_2-E_2+\frac{1}{A_2}(q_2-q_1)(d-x)=-R\dot{q}_2$$

$$m\ddot{x}+k_2x-\frac{1}{2A_2}(q_2-q_1)^2=0$$

9.4.18　半径为 r 的圆盘的中心安装在水平的弹性棒的一端，弹性棒的另一端是固定的，圆盘转动 θ 角时，弹性棒给予圆盘的力矩为 $-k_1\theta$，图 9.95 中弹簧的劲度系数为 k_2，m_1、m_2 是两个金属圆柱的质量，用绝缘的不可伸长的轻绳和弹簧连接并跨在圆盘上，圆盘转动时，圆盘与绳子间无相对滑动，圆盘绕弹性棒的转动惯量为 I，圆柱体可分别在两个固定的导电圆筒内作竖直运动，圆柱体与圆筒构成可变电容器

$$C_1=\begin{cases}C_{10}\left(1-\dfrac{y_1}{l_1}\right) & y_1\geqslant 0\\ C_{10} & y_1<0\end{cases}$$

$$C_2=\begin{cases}C_{20}\left(1-\dfrac{y_2}{l_2}\right) & y_2\geqslant 0\\ C_{20} & y_2<0\end{cases}$$

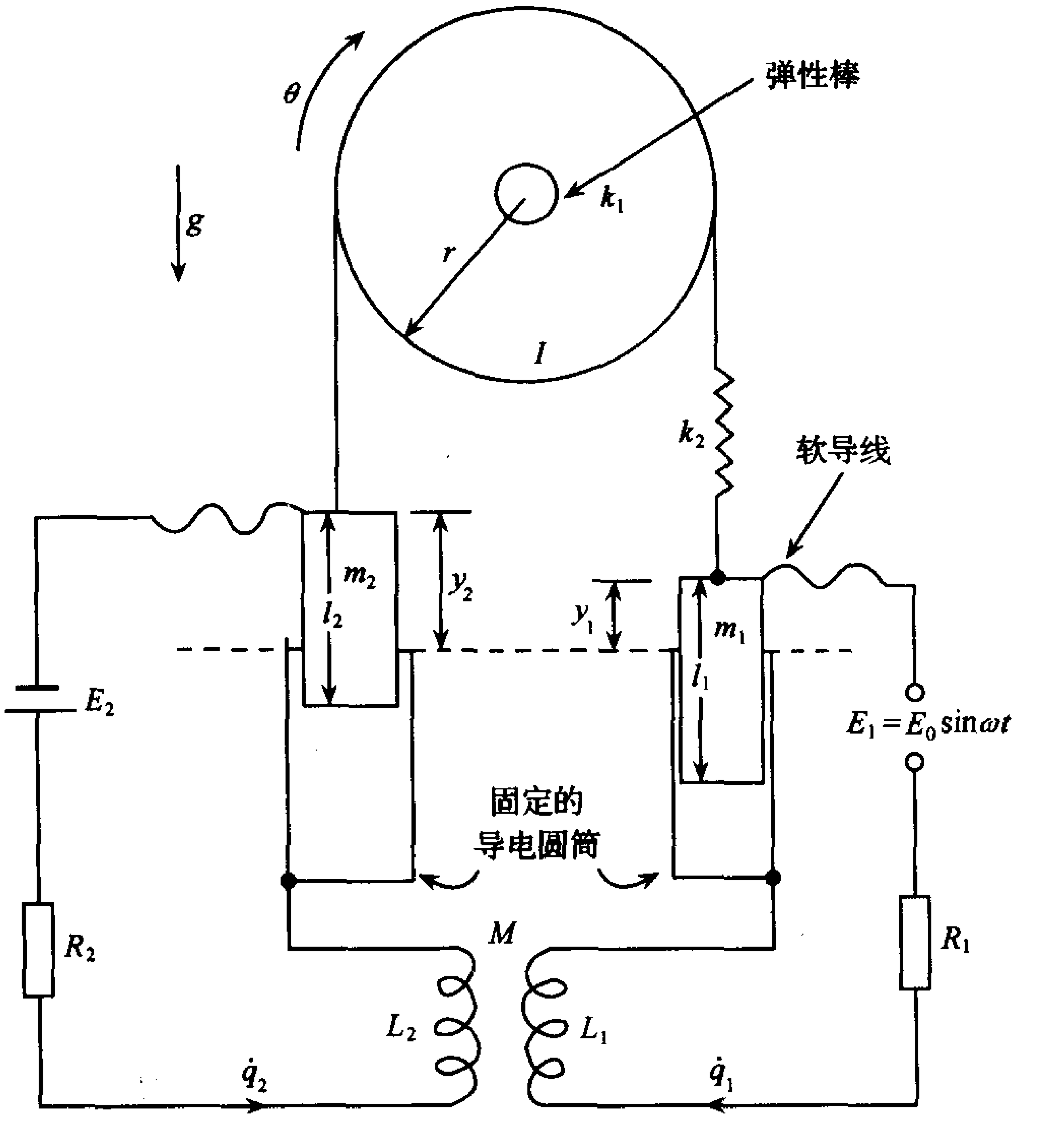


图 9.95

由互感将两个电路耦合，用 q_1、q_2，y_1、y_2 为广义坐标，写出系统的动能、势能和运动微分方程.

解　圆盘与绳子间无相对滑动，

$$r\dot{\theta}=\dot{y}_2,\quad \dot{\theta}=\frac{1}{r}\dot{y}_2$$

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{y}_2}{r}\right)^2+\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2+M\dot{q}_1\dot{q}_2$$

设弹簧的伸长量为 l，原长为 l_0，绳长为 L，由于绳子不可伸长，L 为常量，

$$L+y_1+y_2+l_0+l=\text{常量}$$

令 $y_1+y_2+l=b$ 为常量，$l=b-(y_1+y_2)$，弹簧的势能为

$$\frac{1}{2}k_2l^2=\frac{1}{2}k_2(b-y_1-y_2)^2$$

$$V=\frac{1}{2C_1}q_1^2+\frac{1}{2C_2}q_2^2-E_1q_1-E_2q_2+\frac{1}{2}k_1\left(\frac{y_2}{r}\right)^2+\frac{1}{2}k_2(b-y_1-y_2)^2+m_1gy_1+m_2gy_2$$

这里用了 $\theta=\frac{y_2}{r}$，是将绳子跨在圆盘上时，当 $y_2=0$ 时，弹性棒未扭转.

注意：C_1 与 y_1 有关，C_2 与 y_2 有关.

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2+\frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\dot{y}_2^2+\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2+M\dot{q}_1\dot{q}_2-\frac{1}{2C_1}q_1^2$$
$$-\frac{1}{2C_2}q_2^2+E_1q_1+E_2q_2-\frac{1}{2}\frac{k_1}{r^2}y_2^2-\frac{1}{2}k_2(b-y_1-y_2)^2-m_1gy_1-m_2gy_2$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_1}=L_1\dot{q}_1+M\dot{q}_2,\qquad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_1}=-\frac{q_1}{C_1}+E_1$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_2}=L_2\dot{q}_2+M\dot{q}_1,\qquad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_2}=-\frac{q_2}{C_2}+E_2$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{y}_1}=m_1\dot{y}_1,$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial y_1}=\begin{cases}k_2(b-y_1-y_2)-m_1g-\dfrac{l_1q_1^2}{2C_{10}(l_1-y_1)^2} & y_1\geqslant 0\\ k_2(b-y_1-y_2)-m_1g & y_1\leqslant 0\end{cases}$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{y}_2}=m_2\dot{y}_2+\frac{I}{r^2}\dot{y}_2$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial y_2}=\begin{cases}k_2(b-y_1-y_2)-m_2g-\dfrac{k_1}{r^2}y_2-\dfrac{l_2q_2^2}{2C_{20}(l_1-y_2)^2} & y_2>0\\ k_2(b-y_1-y_2)-m_2g-\dfrac{k_1}{r^2}y_2 & y_2\leqslant 0\end{cases}$$

$$Q_{q_1}=-R_1\dot{q}_1,\quad Q_{q_2}=-R_2\dot{q}_2,\quad Q_{y_1}=0,\quad Q_{y_2}=0$$

运动微分方程为

$$L_1\ddot{q}_1+M\ddot{q}_2+\frac{l_1q_1}{C_{10}(l_1-y_1)}-E_1=-R_1\dot{q}_1\qquad y_1>0$$

$$L_1\ddot{q}_1+M\ddot{q}_2+\frac{1}{C_{10}}q_1-E_1=-R_1\dot{q}_1\qquad y_1\leqslant 0$$

$$L_2\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + \frac{l_2 q_2}{C_{20}(l_2 - y_2)} - E_2 = - R_2\dot{q}_2 \qquad y_2 > 0$$

$$L_2\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + \frac{q_2}{C_{20}} - E_2 = - R_2\dot{q}_2 \qquad y_2 \leqslant 0$$

$$m_1\ddot{y}_1 - k_2(b - y_1 - y_2) + m_1 g + \frac{l_1 q_1^2}{2C_{10}(l_1 - y_1)^2} = 0 \qquad y_1 > 0$$

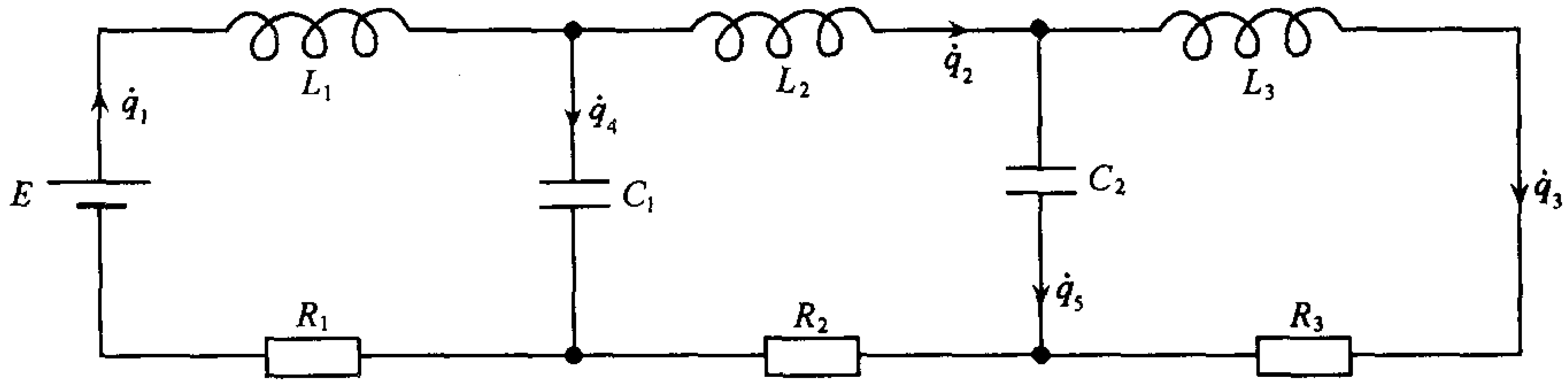
$$m_1\ddot{y}_1 - k_2(b - y_1 - y_2) + m_1 g = 0 \qquad y_1 \leqslant 0$$

$$m_2\ddot{y}_2 + \frac{I}{r^2}\ddot{y}_2 - k_2(b - y_1 - y_2) + m_2 g - \frac{k_1}{r^2}y_2 + \frac{l_2 q_2^2}{2C_{20}(l_2 - y_2)^2} = 0 \qquad y_2 > 0$$

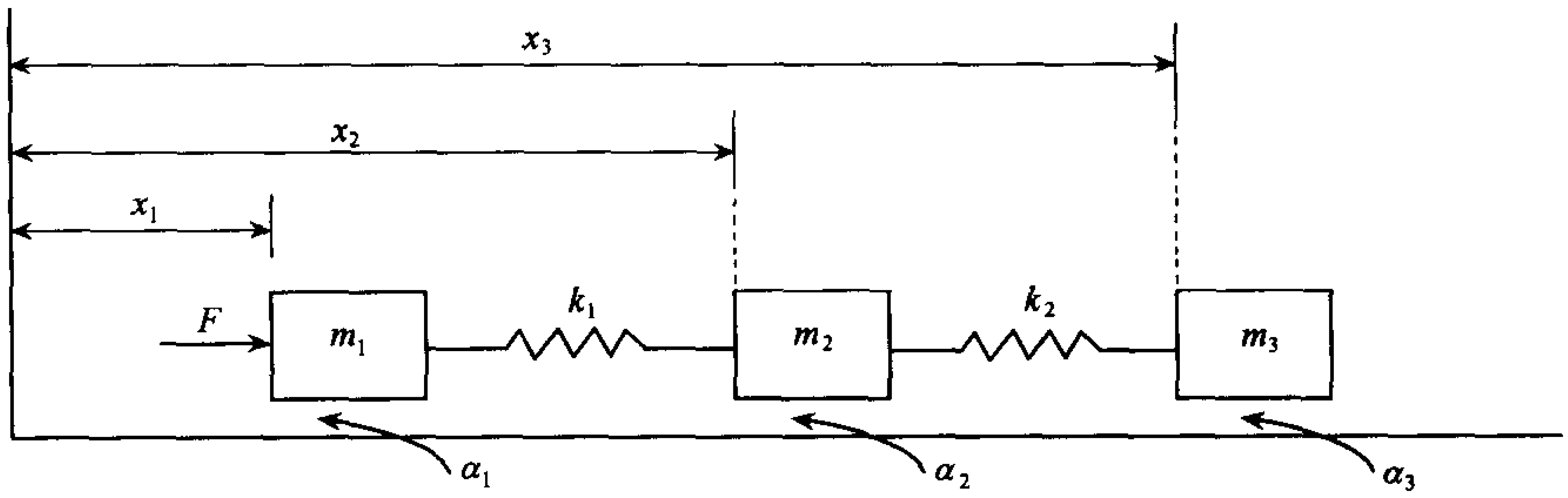
$$m_2\ddot{y}_2 + \frac{I}{r^2}\ddot{y}_2 - k_2(b - y_1 - y_2) + m_2 g - \frac{k_1}{r^2}y_2 = 0 \qquad y_2 \leqslant 0$$

其中 $E_1 = E_0\sin\omega t$.

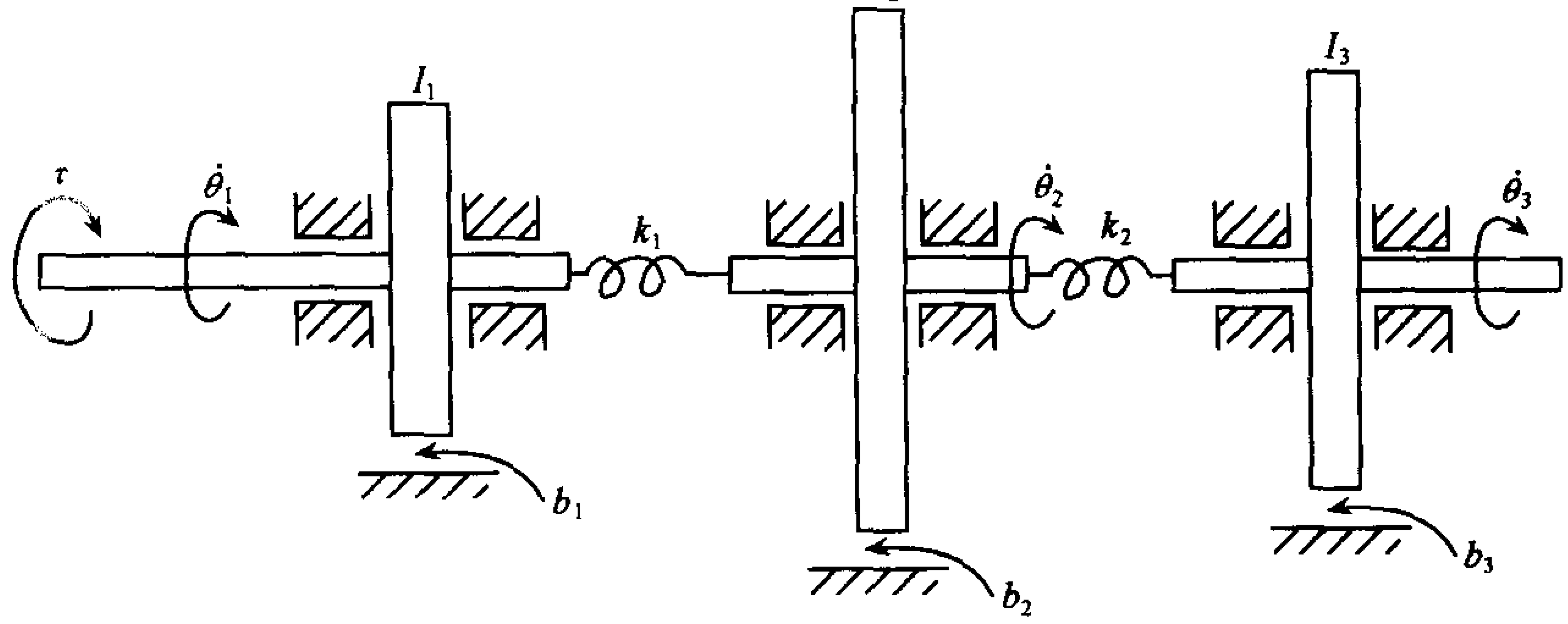
9.4.19　图 9.96(a)、(b)、(c)分别画了三个系统. 在(a)中,E 提供恒定的电压,并假



(a)



(b)



(c)

图 9.96

定线圈间无互感;在(b)中,F 是恒定的外力,每个木块受到黏性力$-\alpha_i\dot{x}_i$;在(c)中,τ 是恒定的外力矩,每个圆盘受到制动器的黏性力矩$-b_ir_i\dot{\theta}_i$,k_1、k_2 是弹簧的扭转常数.写出三个系统的拉格朗日函数,并证明:适当选择坐标,对应的物理量取相同的值,三个系统的运动微分方程相同.

解　对于图 9.96(a)所示的系统,

$$T_a=\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_3^2$$

$$V_a=\frac{1}{2C_1}q_4^2+\frac{1}{2C_2}q_5^2=\frac{1}{2C_1}(q_1-q_2)^2+\frac{1}{2C_2}(q_2-q_3)^2-Eq_1$$

$$\widetilde{L}_a=\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}L_3\dot{q}_3^2-\frac{1}{2C_1}(q_1-q_2)^2-\frac{1}{2C_2}(q_2-q_3)^2+Eq_1$$

$$\widetilde{R}_a=\frac{1}{2}R_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}R_3\dot{q}_3^2$$

运动微分方程为

$$L_1\ddot{q}_1+\frac{1}{C_1}q_1-\frac{1}{C_1}q_2-E=-R_1\dot{q}_1$$

$$L_2\ddot{q}_2-\frac{1}{C_1}q_1+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)q_2-\frac{1}{C_2}q_3=-R_2\dot{q}_2$$

$$L_3\ddot{q}_3-\frac{1}{C_2}q_2+\frac{1}{C_2}q_3=-R_3\dot{q}_3.$$

对于图 9.96(b)所示的系统,设劲度系数为 k_1、k_2 的两弹簧的原长分别为 l_{10}、l_{20},

$$T_b=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

$$V_b=\frac{1}{2}k_1(x_2-x_1-l_{10})^2+\frac{1}{2}k_2(x_3-x_2-l_{20})^2-Fx_1$$

$$L_b=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2-\frac{1}{2}k_1(x_2-x_1-l_{10})^2-\frac{1}{2}k_2(x_3-x_2-l_{20})^2+Fx$$

$$R_b=\frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\alpha_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}\alpha_3\dot{x}_3^2$$

运动微分方程为

$$m_1\ddot{x}_1-k_1(x_2-x_1-l_{10})-F=-\alpha_1\dot{x}_1$$

$$m_2\ddot{x}_2+k_1(x_2-x_1-l_{10})-k_2(x_3-x_2-l_{20})=-\alpha_2\dot{x}_2$$

$$m_3\ddot{x}_3+k_2(x_3-x_2-l_{20})=-\alpha_3\dot{x}_3$$

对于图 9.96(c)所示的系统,

$$T_C=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2$$

$$V_C=\frac{1}{2}k_1(\theta_2-\theta_1)^2+\frac{1}{2}k_2(\theta_3-\theta_2)^2-\tau\theta_1,$$

$$L_C=\frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}_1^2+I_2\dot{\theta}_2^2+I_3\dot{\theta}_3^2)-\frac{1}{2}k_1(\theta_2-\theta_1)^2-\frac{1}{2}k_2(\theta_3-\theta_2)^2+\tau\theta_1$$

$$R_C=\frac{1}{2}b_1r_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}b_2r_2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}b_3r_3\dot{\theta}_3^2$$

运动微分方程为

$$I_1\ddot{\theta}_1+k_1\theta_1-k_1\theta_2-\tau=-b_1r_1\dot{\theta}_1$$

$$I_2\ddot{\theta}_2-k_1\theta_1+(k_1+k_2)\theta_2-k_2\theta_3=-b_2r_2\dot{\theta}_2$$

$$I_3\ddot{\theta}_3-k_2\theta_2+k_2\theta_3=-b_3r_3\dot{\theta}_3$$

若三个系统所取的广义坐标的零点均取在平衡位置，即令 $q_i'=q_i-q_{i0}$，$x_i'=x_i-x_{i0}$，$\theta_i'=\theta_i-\theta_{i0}$，$(i=1,2,3)$，$q_{i0}$是图 9.96(a)系统平衡时，第 i 个电容带正电的极板上的电荷，x_{i0}是图 9.96(b)系统平衡时，第 i 个木块的坐标，θ_{i0}是图 9.96(c)系统平衡时，第 i 个圆盘的转角. 它们满足的方程，可由相应的运动微分方程令广义坐标对时间的一阶、二阶导数等于零获得，

$$\begin{cases}\dfrac{q_{10}}{C_1}-\dfrac{q_{20}}{C_1}-E=0\\[2mm]-\dfrac{q_{10}}{C_1}+\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right)q_{20}-\dfrac{q_{30}}{C_2}=0\\[2mm]-\dfrac{q_{20}}{C_2}+\dfrac{q_{30}}{C_2}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-k_1(x_{20}-x_{10}-l_{10})-F=0\\k_1(x_{20}-x_{10}-l_{10})-k_2(x_{30}-x_{20}-l_{20})=0\\k_2(x_{30}-x_{20}-l_{20})=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}k_1\theta_{10}-k_1\theta_{20}-\tau=0\\-k_1\theta_{10}+(k_1+k_2)\theta_{20}-k_2\theta_{30}=0\\-k_2\theta_{20}+k_2\theta_{30}=0\end{cases}$$

三个系统的运动微分方程可改写为

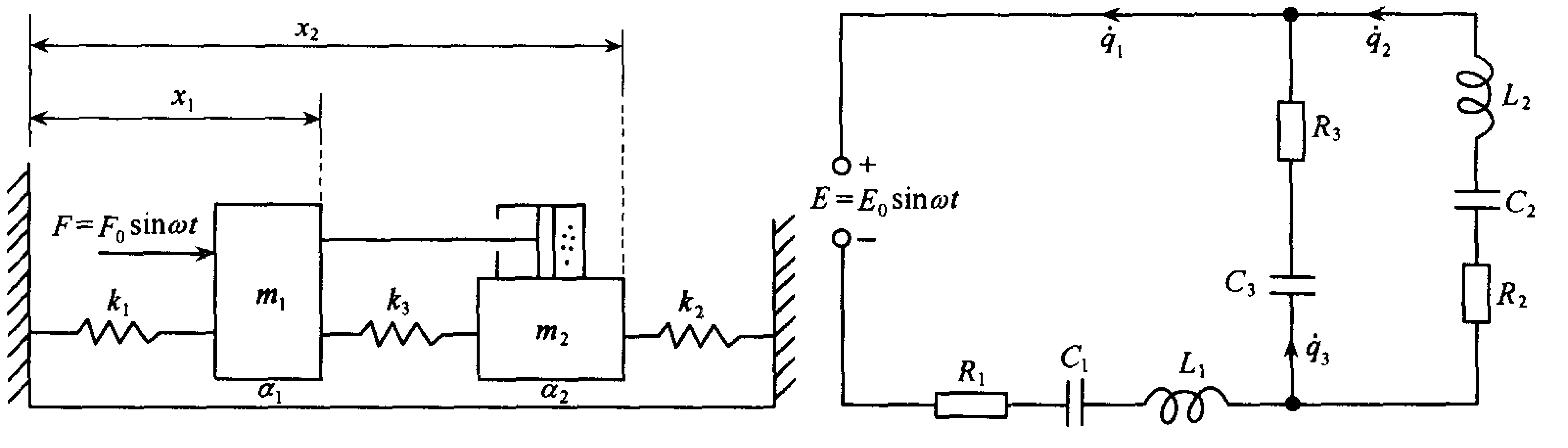
$$\begin{cases}L_1\ddot{q}_1'+\dfrac{1}{C_1}q_1'-\dfrac{1}{C_1}q_2'=-R_1\dot{q}_1'\\[2mm]L_2\ddot{q}_2'-\dfrac{1}{C_2}q_1'+\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right)q_2'-\dfrac{1}{C_2}q_3'=-R_2\dot{q}_2'\\[2mm]L_3\ddot{q}_3'-\dfrac{1}{C_2}q_2'+\dfrac{1}{C_2}q_3'=-R_3\dot{q}_3'\end{cases}$$

$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1'+k_1x_1'-k_1x_2'=-\alpha_1\dot{x}_1'\\m_2\ddot{x}_2'-k_1x_1'+(k_1+k_2)x_2'-k_2x_3'=-\alpha_2\dot{x}_2'\\m_3\ddot{x}_3'-k_2x_2'+k_2x_3'=-\alpha_3\dot{x}_3'\end{cases}$$

$$\begin{cases}I_1\ddot{\theta}_1'+k_1\theta_1'-k_1\theta_2'=-b_1r_1\dot{\theta}_1'\\I_2\ddot{\theta}_2'-k_1\theta_1'+(k_1+k_2)\theta_2'-k_2\theta_3'=-b_2r_2\dot{\theta}_2'\\I_3\ddot{\theta}_3'-k_3\dot{\theta}_2'+k_2\theta_3'=-b_3r_3\dot{\theta}_3'\end{cases}$$

只要 $L_i=m_i=I_i$，$\dfrac{1}{C_i}=k_i$，$R_i=\alpha_i=b_ir_i$，$(i=1,2,3)$，则 q_i'、x_i'、$\theta_i'(i=1,2,3)$遵从完全相同的微分方程.

9.4.20　列出图 9.97(a)、(b)系统的运动微分方程，质量为 m_1、m_2 的两木块底面受



(a)　　(b)

图 9.97

到黏性阻力，黏度分别为 α_1、α_2，减震器也提供一个黏性阻力，黏度为 α_3，证明两个系统可以是等效的.

证明　设图 9.97(a)系统无 F 时，在 $x_1=x_{10}$，$x_2=x_{20}$是系统的平衡位置，取此位置为势能的零点，则

$$V_a=\frac{1}{2}k_1(x_1-x_{10})^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_{20})^2+\frac{1}{2}k_3[(x_2-x_{20})-(x_1-x_{10})]^2$$

$$L_a=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k_1(x_1-x_{10})^2-\frac{1}{2}k_2(x_2-x_{20})^2$$
$$-\frac{1}{2}k_3[(x_2-x_{20})-(x_1-x_{10})]^2$$

令 $x_1'=x_1-x_{10}$，$x_2'=x_2-x_{20}$，则

$$L_a=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1'^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2'^2-\frac{1}{2}k_1x_1'^2-\frac{1}{2}k_2x_2'^2-\frac{1}{2}k_3(x_2'-x_1')^2$$

$$\begin{aligned}\delta W&=F_0\sin\omega t\delta x_1-\alpha_1\dot{x}_1\delta x_1-\alpha_2\dot{x}_2\delta x_2+\alpha_3(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\delta x_1-\alpha_3(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\delta x_2\\&=F_0\sin\omega t\delta x_1'-\alpha_1\dot{x}_1'\delta x_1'+\alpha_3(\dot{x}_2'-\dot{x}_1')\delta x_1'-\alpha_2\dot{x}_2'\delta x_2'\\&\quad-\alpha_3(\dot{x}_2'-\dot{x}_1')\delta x_2'\end{aligned}$$

$$Q_1=F_0\sin\omega t-\alpha_1\dot{x}_1'+\alpha_3(\dot{x}_2'-\dot{x}_1')$$

$$Q_2=-\alpha_2\dot{x}_2'-\alpha_3(\dot{x}_2'-\dot{x}_1')$$

$$\tilde{L}_b=\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2-\frac{1}{2C_1}q_1^2-\frac{1}{2C_2}q_2^2-\frac{1}{2C_2}(q_1-q_2)^2$$

$$\begin{aligned}\delta W&=-E_0\sin\omega t\delta q_1-R_1\dot{q}_1\delta q_1-R_2\dot{q}_2\delta q_2-R_3\dot{q}_3\delta q_3\\&=-E_0\sin\omega t\delta q_1-R_1\dot{q}_1\delta q_1-R_2\dot{q}_2\delta q_2-R_3(\dot{q}_2-\dot{q}_1)(\delta q_2-\delta q_1)\end{aligned}$$

$$Q_1=-E_0\sin\omega t-R_1\dot{q}_1+R_3(\dot{q}_2-\dot{q}_1)$$

$$Q_2=-R_2\dot{q}_2-R_3(\dot{q}_2-\dot{q}_1)$$

比较两个系统的拉格朗日函数和广义力可见，只要 $m_1=L_1$，$m_2=L_2$，$k_1=\frac{1}{C_1}$，$k_2=\frac{1}{C_1}$，$k_3=\frac{1}{C_3}$，$F_0=-E_0$，$\alpha_1=R_1$，$\alpha_2=R_2$，$\alpha_3=R_3$，x_1' 与 q_1、x_2' 与 q_2 有完全相同的运动微分方程，这样，两个系统就完全等效了.

第十章　有限多自由度系统的小振动

10.1　自由的小振动

10.1.1　一个刚性结构由三根无质量的杆联结在一起,并贴着质量均为 m 的两个点质量组成,$AB=BC=L$,　$BD=l$,$\angle ABD=\angle DBC=\theta$,如图 10.1 那样支承在固定点 D 上,并以小振幅前后摆动.求振动的角频率,要做这样的振动对 l 有何要求?

解　系统的质心位于 AC 的中点,在 BD 的延长线上,系统的重力势能等于位于质心的具有系统质量的质点的重力势能.

$$V = 2m(L\cos\theta - l)(1-\cos\varphi)g \approx mg(L\cos\theta - l)\varphi^2$$

其中 φ 是偏离平衡位置($\varphi=0$)的角位移,φ 是 BD 与竖直线间的夹角,最后的式子已考虑了小振幅振动,φ 是小量,$1-\cos\varphi\approx\frac{1}{2}\varphi^2$.

$$AD = CD = \sqrt{L^2+l^2-2Ll\cos\theta}$$

系统是个刚性结构,位于 A、C 的两质点对 D 点的角速度等于质心对 D 点的角速度 $\dot{\varphi}$,系统的动能为

$$T = 2\times\frac{1}{2}m(AD\,\dot{\varphi})^2 = m(L^2+l^2-2Ll\cos\theta)\,\dot{\varphi}^2$$

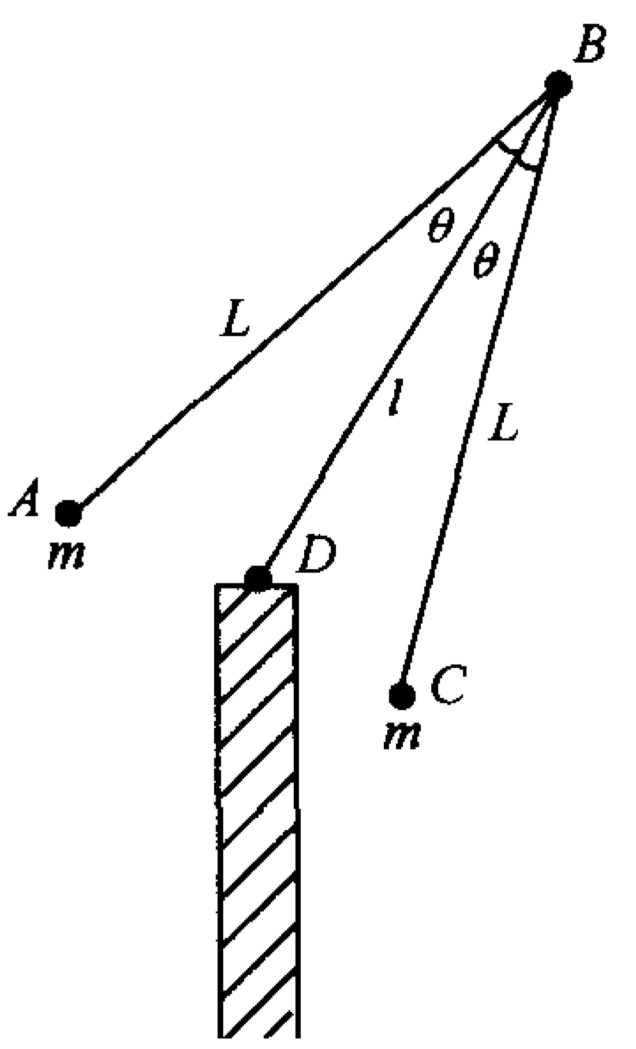


图 10.1

系统的拉格朗日函数为

$$L = m(L^2+l^2-2Ll\cos\theta)\,\dot{\varphi}^2 - mg(L\cos\theta-l)\,\varphi^2$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

得运动微分方程为

$$(L^2+l^2-2Ll\cos\theta)\,\ddot{\varphi}+(L\cos\theta-l)g\varphi=0$$

小幅振动的角频率为

$$\omega=\left[\frac{(L\cos\theta-l)g}{L^2+l^2-2Ll\cos\theta}\right]^{1/2}$$

在平衡位置,$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$,由此得 $\varphi=0$.

要在平衡位置附近做小振动,必须是稳定的平衡位置,要求在平衡位置有$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}>0$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=2mg(L\cos\theta-l)>0$$

要求 l 满足的条件是

$$l<L\cos\theta$$

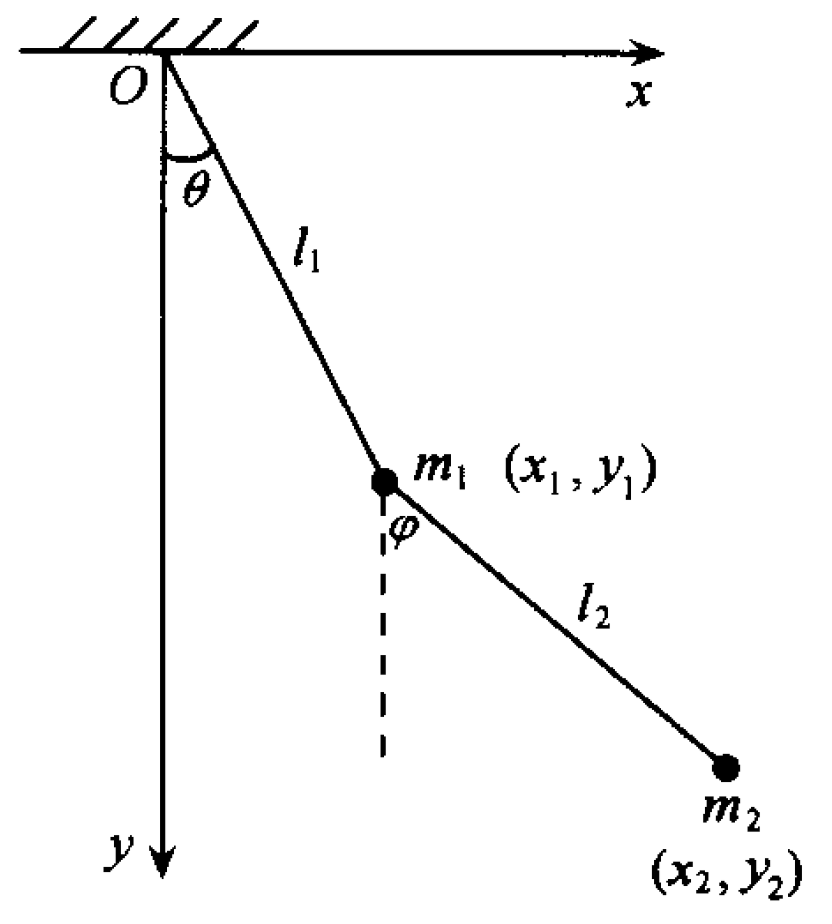


图 10.2

10.1.2　质量为 m_1 的质点用长为 l_1 的、不可伸长的轻绳系于固定点 O，另一质量为 m_2 的质点用长为 l_2 不可伸长的轻绳系于前一质点上，求此系统做小振动的简正模式和相应的角频率.

解　取图 10.2 的坐标，θ、φ 为广义坐标，

$$x_1 = l_1\sin\theta, y_1 = l_1\cos\theta$$

$$x_2 = l_1\sin\theta + l_2\sin\varphi$$

$$y_2 = l_1\cos\theta + l_2\cos\varphi$$

系统的动能(做小振动近似)为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \theta) \\ &\approx \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

系统的势能(做小振动近似)为

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \\ &= -(m_1 + m_2)g l_1\cos\theta - m_2 g l_2\cos\varphi \\ &\approx V_0 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g l_1\theta^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2\varphi^2 \end{aligned}$$

其中 V_0 是常量，势能的零点可以任意选取，V_0 值无关重要，故不必具体写出.

惯性矩阵和刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix}$$

系统有两个自由度，有两个简正频率，

$$\theta = u_1\cos(\omega t + \alpha), \qquad \varphi = u_2\cos(\omega t + \alpha)$$

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

即

$$\begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1(g - l_1\omega^2) & -m_2 l_1 l_2\omega^2 \\ -m_2 l_1 l_2\omega^2 & m_2 l_2(g - l_2\omega^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

u_1、u_2 要得非零解，必须

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)l_1(g - l_1\omega^2) & -m_2 l_1 l_2\omega^2 \\ -m_2 l_1 l_2\omega^2 & m_2 l_2(g - l_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

可得

$$m_1 l_1 l_2\omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2)g\omega^2 + (m_1 + m_2)g^2 = 0$$

$$\omega_1, \omega_2 = \left\{\frac{g}{2m_1 l_1 l_2}\left[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[m_2(l_1 + l_2)^2 + m_1(l_1 - l_2)^2]}\right]\right\}^{1/2}$$

其中 ω_1 的式子用式中的"+"号，ω_2 的式子用式中的"-"号.

用 ω_1 代入(1)式，解出的 u_1、u_2 标为 $u_1^{(1)}$、$u_2^{(1)}$，

$$\frac{u_1^{(1)}}{u_2^{(1)}}=\frac{1}{2l_1}\left[l_1-l_2-\sqrt{\frac{m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2}{m_1+m_2}}\right]$$

用 ω_2 代入(1)式，得

$$\frac{u_1^{(2)}}{u_2^{(2)}}=\frac{1}{2l_1}\left[l_1-l_2+\sqrt{\frac{m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2}{m_1+m_2}}\right]$$

可以考虑以下极限情况得到熟知的结果，作为上述计算的正确性的一种检验.

当 $m_1\to 0$ 时，　　$\omega=\omega_2\to\sqrt{\dfrac{g}{(l_1+l_2)}}$

当 $l_1\to 0$ 时，　　$\omega=\omega_2\to\sqrt{\dfrac{g}{l_2}}$

当 $l_2\to 0$ 时，　　$\omega=\omega_2\to\sqrt{\dfrac{g}{l_1}}$

ω_1 均为无穷大，系统不运动，这也是合理的，因为上述几个极限情况，都只有一个自由度，只存在一个简正频率.

10.1.3　半径为 r 的均质球在一个半径为 R 的固定球壳内表面滚动，试求该球在平衡位置附近做小振动的周期.

解　设球的质量为 m，

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2+mr^2\right)\dot{\varphi}^2$$

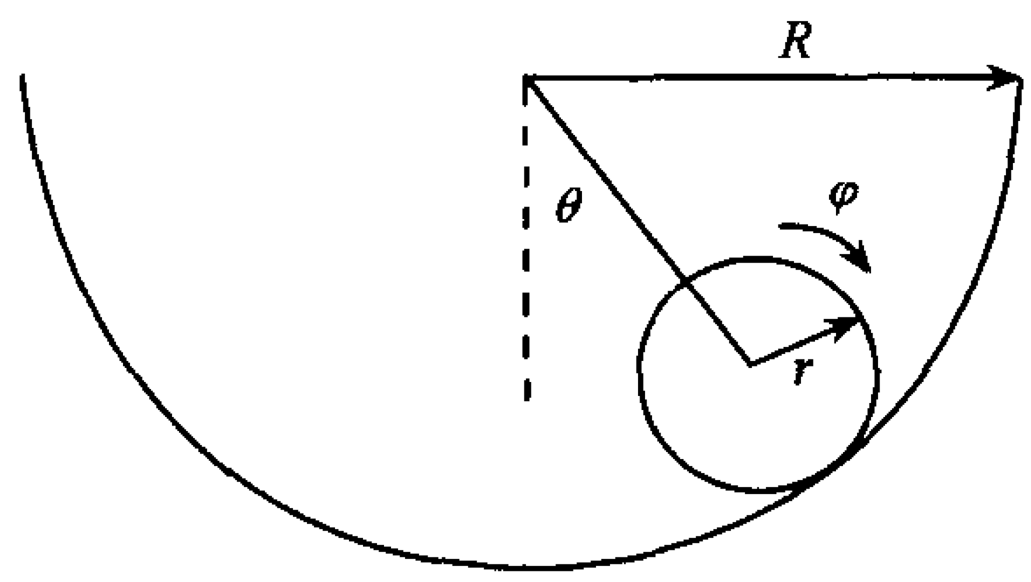


图 10.3

由于纯滚动，

$$(R-r)\dot{\theta}-r\dot{\varphi}=0$$

$$\dot{\varphi}=\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$

$$T=\frac{7}{10}mr^2\left(\frac{R-r}{r}\dot{\theta}\right)^2=\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

$$V=mg(R-r)(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$$

$$L=T-V=\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得
$$\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\theta}+mg(R-r)\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

10.1.4 前题所述的双摆,能否在一定条件下,系统的运动为一个单摆?

解 由前题解出的简正频率和振动模式,可以写出系统运动的通解如下:

$$\theta=\frac{1}{2l_1}\left[l_1-l_2-\sqrt{\frac{m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2}{m_1+m_2}}\right]A\cos(\omega_1t+\alpha_1)$$

$$+\frac{1}{2l_1}\left[l_1-l_2+\sqrt{\frac{m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2}{m_1+m_2}}\right]B\cos(\omega_2t+\alpha_2)$$

$$\varphi=A\cos(\omega_1t+\alpha_1)+B\cos(\omega_2t+\alpha_2)$$

其中

$$\omega_1=\left\{\frac{g}{2m_1l_1l_2}\left[(m_1+m_2)(l_1+l_2)+\sqrt{(m_1+m_2)[m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2]}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_2=\left\{\frac{g}{2m_1l_1l_2}\left[(m_1+m_2)(l_1+l_2)-\sqrt{(m_1+m_2)[m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2]}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

要使系统像一个单摆那样运动,需 $\theta=\varphi$.

有两种情况,$\theta=\varphi$:

(a) $\frac{1}{2l_1}\left[l_1-l_2-\sqrt{\frac{m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2}{m_1+m_2}}\right]=1$,且 $B=0$;

(b) $\frac{1}{2l_1}\left[l_1-l_2+\sqrt{\frac{m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2}{m_1+m_2}}\right]=1$,且 $A=0$.

第一种情况不可能,因为

$$-\sqrt{\frac{m_2(l_1+l_2)^2+m_1(l_1-l_2)^2}{m_1+m_2}}=l_1+l_2$$

不能成立,等号左边为负值,右边为正值,不可能相等.

第二种情况是可能的,但要求 $l_1l_2=0$,即 $l_1=0$ 或 $l_2=0$,这两种情况实际上就是一个单摆,因此可作出结论:双摆系统在任何情况下都不可能像单摆那样运动.

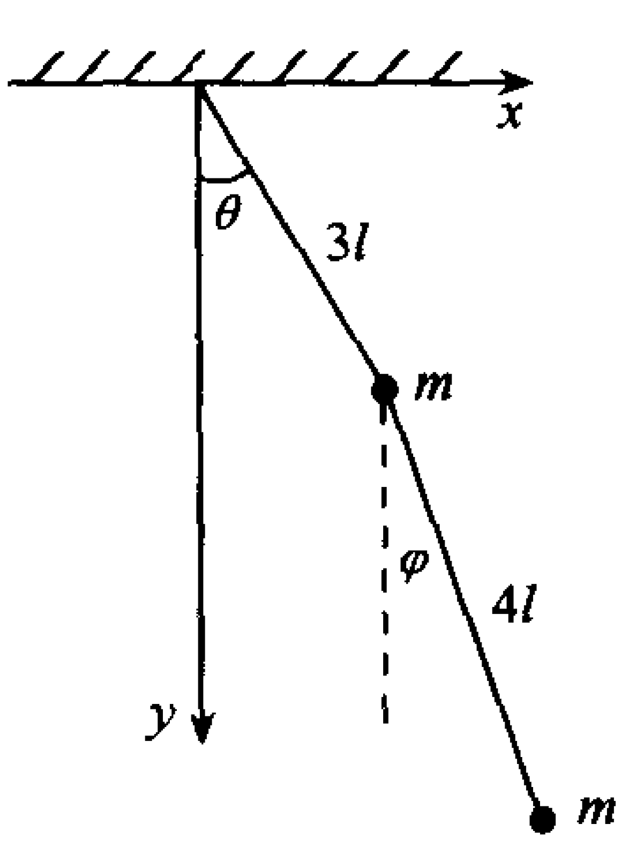


图 10.4

10.1.5 一个长度为 $4l$、质量为 m 的单摆悬挂在另一个长度为 $3l$、质量为 m 的单摆下面,如图 10.4 所示.这系统可能做这样的绕平衡位置的小振动:下面单摆上的某一点无水平位移,找出这一点的位置.

解 分别用 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 表示上、下两个质点的坐标.

$$x_1=3l\sin\theta,y_1=3l\cos\theta$$

$$x_2=3l\sin\theta+4l\sin\varphi$$

$$y_2=3l\cos\theta+4l\cos\varphi$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}m[18l^2\dot{\theta}^2 + 16l^2\dot{\varphi}^2 + 24l^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)]$$

$$V = -mgy_1 - mgy_2 = -mg(6l\cos\theta + 4l\cos\varphi)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2[18\dot{\theta}^2 + 16\dot{\varphi}^2 + 24\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)] + mgl(6\cos\theta + 4\cos\varphi)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

得

$$3\ddot{\theta} + 2\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) - 2\dot{\varphi}(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\sin(\theta-\varphi) + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$4\ddot{\varphi} + 3\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - 3\dot{\theta}(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\sin(\theta-\varphi) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

对于小振动，上两式只保留一级小量，

$$3\ddot{\theta} + 2\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$3\ddot{\theta} + 4\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

试用

$$\theta = \theta_0 e^{i\omega t}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$$

代入上述两方程，得

$$\begin{cases} \left(\frac{g}{l} - 3\omega^2\right)\theta_0 - 2\omega^2\varphi_0 = 0 \\ -3\omega^2\theta_0 + \left(\frac{g}{l} - 4\omega^2\right)\varphi_0 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} - 3\omega^2 & -2\omega^2 \\ -3\omega^2 & \frac{g}{l} - 4\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解出简正频率，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{6l}}$$

将 ω_1、ω_2 分别代入(1)式，得

$$\varphi_0^{(1)} = -\theta_0^{(1)}, \qquad \varphi_0^{(2)} = \frac{3}{2}\theta_0^{(2)}$$

θ、φ 的通解可写为

$$\theta = A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\varphi = -A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{3}{2}B\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

设下面的摆绳上离上面的质点的距离为 s 的一点在小振动中不动，则

$$3l\theta + x\varphi = 3l[A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B\cos(\omega_2 t + \alpha_2)]$$

$$+ s[-A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{3}{2}B\cos(\omega_2 t + \alpha_2)] = 0$$

对一切 t 都成立.

如两种振动模式都被激发,要求 s 满足

$$3l - s = 0, \qquad 3l + \frac{3}{2}s = 0$$

两式同时满足是不可能的,说明只能有一种振动模式被激发.若这一点必须在绳上,则要求 s 在$[0,4l]$区间内,则要求满足 $3l-s=0,s=3l$.这是只有第一种振动模式被激发的情况;若不要 s 在$[0,4l]$区间内,可要求 $3l+\frac{3}{2}s=0,s=-2l$,这一点在下面那段绳的向上的延长线上离上面质点距离 $2l$ 处,这是只有第二种振动模式被激发的情况.

10.1.6 CO_2 的简单经典模型是由三个质点组成的线状结构,用弹簧力代替原子间的作用力,两个弹簧自然长度为 l,劲度系数为 k,只允许沿连线方向运动. C^{4+} 的质量为 M,O^{2-} 的质量为 m.

(1) 这个系统有多少个振动自由度?

(2) 写出各质点的运动微分方程;

(3) 求简正频率和振动模式(振幅比).

解 (1) 系统有三个自由度,但只有两个振动自由度.

(2) 用 x_1、x_2、x_3 分别表示 O^{2-}、C^{4+}、O^{2-}对原平衡位置的位移,

$$T = \frac{1}{2}m\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\,\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}_3^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}M\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

得运动微分方程为

$$m\,\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0$$
$$M\,\ddot{x}_2 - k(x_1 - 2x_2 + x_3) = 0$$
$$m\,\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0$$

(3) 令 $x_i = A_i e^{i\omega t}$,代入微分方程组,可得

$$\begin{cases}(k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (2k - M\omega^2)A_2 - kA_3 = 0 \\ -kA_2 + (k - m\omega^2)A_3 = 0\end{cases} \tag{1}$$

A_1、A_2、A_3 有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解得
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2m+M}{mM}k}, \qquad \omega_3 = 0$$

其中 ω_1、ω_2 是所要求的简正频率；$\omega_3=0$，不是振动，是系统整体的平动.

依次将 ω_1、ω_2 代入方程组(1)，可解出相应的振幅比：

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=0,\quad \frac{A_3^{(1)}}{A_1^{(1)}}=-1$$

$$\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=-\frac{2m}{M},\quad \frac{A_3^{(2)}}{A_1^{(2)}}=1$$

或写作
$$\omega_1:(1,0,-1),\qquad \omega_2:\left(1,-\frac{2m}{M},1\right)$$

10.1.7 若上题中系统处于平衡位置，突然左边的质点受到一冲量 p 的作用，求此后该质点的运动.

解 由上题求出的振动模式，可写出三个质点运动的通解为

$$x_1=C\cos(\omega_1t+\alpha_1)+D\cos(\omega_2t+\alpha_2)+at+b$$

$$x_2=-\frac{2m}{M}D\cos(\omega_2t+\alpha_2)+at+b$$

$$x_3=-C\cos(\omega_1t+\alpha_1)+D\cos(\omega_2t+\alpha_2)+at+b$$

其中 $at+b$ 是整体做平动的特解.

C、D、α_1、α_2、a、b 均为待定常量，由初始条件：$t=0$ 时，$x_1=x_2=x_3=0$，$\dot{x}_1=\frac{p}{m}$，$\dot{x}_2=\dot{x}_3=0$ 确定，可得

$$C=\frac{p}{2m\omega_1},\quad D=\frac{pM}{2m(M+2m)\omega_2},\quad \alpha_1=\alpha_2=-\frac{\pi}{2}$$

$$a=\frac{p}{M+2m},\quad b=0$$

左边质点的运动方程为

$$x_1=\frac{p}{2m\omega_1}\sin\omega_1t+\frac{pM}{2m(M+2m)\omega_2}\sin\omega_2t+\frac{pt}{M+2m}$$

10.1.8 一根长 L、截面积 A、质量 M 的均质圆木垂直地浮在水中，并用劲度系数为 k 的轻弹簧与均质的、质量为 M、长度为 $2L$ 的杠杆相连，杠杆的枢轴装在其中心，圆木限于做竖直运动，弹簧为自然长度时杠杆处于水平的平衡位置，如图 10.5 所示，水的密度为 ρ.

(1) 求杠杆小角位移时的简正模(频率和位移比)；

(2) 讨论劲度系数 k 很大时的极限情况.

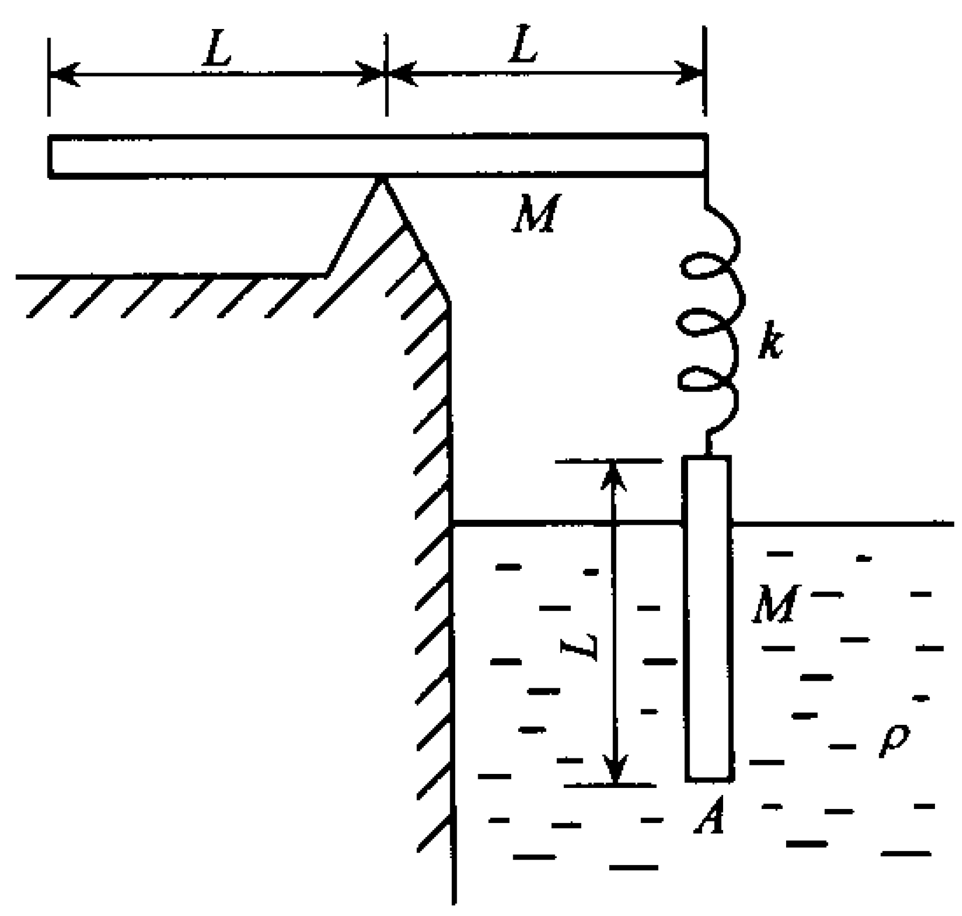


图 10.5

解 (1) 取杠杆与水平线的夹角为 θ(顺时针方向为正)和圆木的竖直坐标 x(向下为正)为广义坐标，均选系统的平衡位置为广义坐标的零点.

$$T=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$V=\frac{1}{2}k(x-L\theta)^2+\frac{1}{2}\rho gAx^2$$

注意重力已与平衡时的浮力相抵消,因而$\frac{1}{2}\rho gAx^2$ 实际上已包括了重力势能和浮力势能.

改用 $L\theta$ 和 x 为广义坐标.惯性矩阵和刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}M & 0\\ 0 & M\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k & -k\\ -k & k+\rho gA\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}k-\frac{1}{3}M\omega^2 & -k\\ -k & k+\rho gA-M\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$k^2+k\rho gA-\left(\frac{4}{3}kM+\frac{1}{3}M\rho gA\right)\omega^2+\frac{1}{3}M^2\omega^4-k^2=0$$

$$M^2\omega^4-(4kM+M\rho gA)\omega^2+3k\rho gA=0$$

$$\omega_1^2=\frac{1}{2M}\left[4k+\rho gA+\sqrt{(4k+\rho gA)^2-12k\rho gA}\right]$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{2M}\left[4k+\rho gA-\sqrt{(4k+\rho gA)^2-12k\rho gA}\right]$$

将 ω_1^2、ω_2^2 分别代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$,解出

$$\frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6k}\left[\rho gA+\sqrt{(4k+\rho gA)^2-12k\rho gA}\right]$$

$$\frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6k}\left[\rho gA-\sqrt{(4k+\rho gA)^2-12k\rho gA}\right]$$

(2) k 很大时

$$\sqrt{(4k+\rho gA)^2-12k\rho gA}=\sqrt{16k^2-4k\rho gA}$$

$$=4k\sqrt{1-\frac{\rho gA}{4k}}\approx 4k-\frac{1}{2}\rho gA$$

$$\omega_1^2\approx\frac{1}{2M}\left(4k+\rho gA+4k-\frac{1}{2}\rho gA\right)\approx\frac{4k}{M}$$

$$\omega_1=2\sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6k}\left(\rho gA+4k-\frac{1}{2}\rho gA\right)\approx-\frac{1}{3}$$

$$\omega_2^2\approx\frac{1}{2M}\left(4k+\rho gA-4k+\frac{1}{2}\rho gA\right)=\frac{3\rho gA}{4M}$$

$$\omega_2=\sqrt{3\rho gA/4M}$$

$$\frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6k}\left(\rho gA-4k+\frac{1}{2}\rho gA\right)\approx 1$$

ω_1 的极限情况是弹簧力比重力、浮力的合力大得多,但 k 还不是无限大的情况,这时仅弹簧力起作用,

$$|\boldsymbol{H}| \approx \begin{vmatrix} k-\frac{1}{3}M\omega^2 & -k \\ -k & k-M\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

得出　$\omega_1=2\sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

ω_2 的极限情况可认为 $k\to\infty$，弹簧基本上保持自然长度，好像弹簧如同一个不可伸长的轻绳，可得 $\omega_2=\sqrt{3\rho gA/4M}\left(这时\ x=L\theta，只有一个自由度，T=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}M\dot{x}^2\right)$

10.1.9　用一根劲度系数为 k 的弹簧，把一个质量为 m 的木块拴在质量为 M 的楔上，楔的斜面与水平面成 α 角，楔又在水平面上滑动，如图 10.6 所示，所有的接触面都是光滑的.

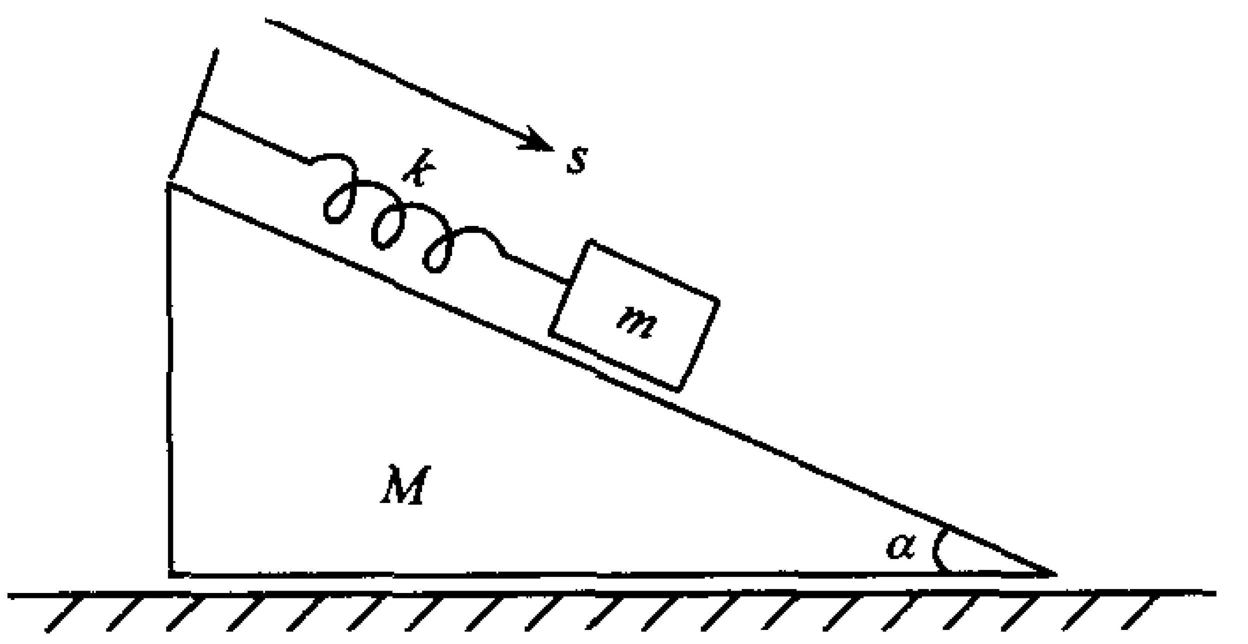


图 10.6

(1) 已知弹簧的原长为 d，求木块和楔都处于静止时的弹簧长度 s_0；

(2) 以楔的坐标 x 和弹簧长度 s 为广义坐标，写出系统的拉格朗日函数和运动微分方程；

(3) 求振动的角频率.

解　(1) 木块处于平衡时，沿斜面的合力为零，

$$mg\sin\alpha-k(s_0-d)=0$$

$$s_0=\frac{1}{k}mg\sin\alpha+d$$

(2)
$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}+\dot{s}\cos\alpha)^2+\frac{1}{2}m(\dot{s}\sin\alpha)^2$$

$$=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{s}^2+m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha$$

$$V=\frac{1}{2}k(s-d)^2-mgs\sin\alpha$$

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{s}^2+m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha-\frac{1}{2}k(s-d)^2+mgs\sin\alpha$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

得运动微分方程为

$$(M+m)\ddot{x}+m\ddot{s}\cos\alpha=0$$

$$m\ddot{s}+m\ddot{x}\cos\alpha+k(s-d)-mg\sin\alpha=0$$

(3) 用前式消去后式中的 $\ddot{x}$，可得

$$\frac{m(M+m\sin^2\alpha)}{M+m}\ddot{s}+k(s-d)-mg\sin\alpha=0$$

令 $s'=s-d-\dfrac{mg\sin\alpha}{k}$，上式可改写为

$$\frac{m(M+m\sin^2\alpha)}{M+m}\ddot{s}'+ks'=0$$

振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k(M+m)}{m(M+m\sin^2\alpha)}}$$

10.1.10　一个粒子在由式

$$z=\frac{1}{2}b(x^2+y^2)$$

(其中 b 为常量,z 轴沿竖直方向)给出的轴对称容器的内壁上做无摩擦运动,如图 10.9 所示.

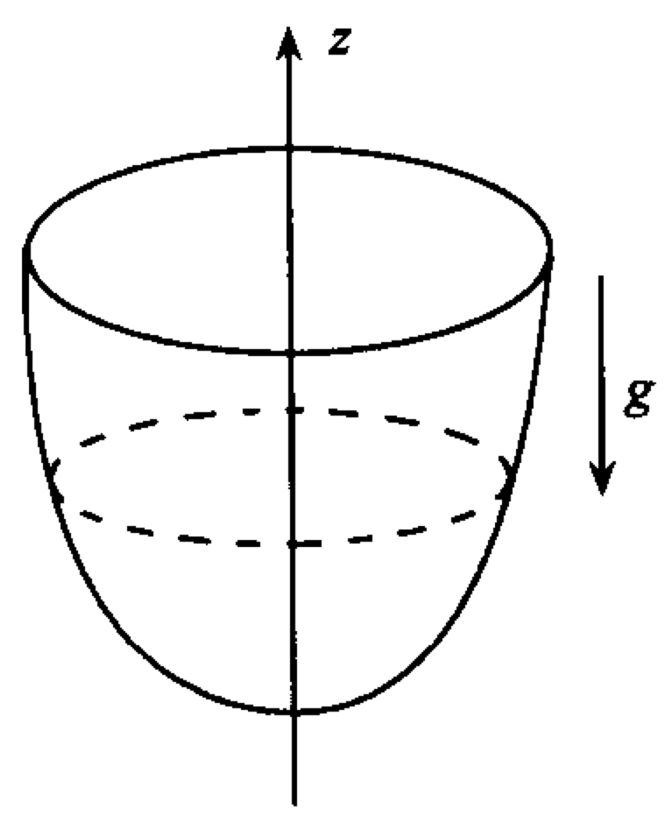


图 10.7

(1) 粒子在高度 $z=z_0$ 处的圆轨道中运动,求质量为 m 的粒子的能量和对 z 轴的角动量;

(2) 微微向下拨动在水平圆轨道上运动的粒子,求围绕原来轨道的小振幅振动的角频率.

解　用柱坐标,题目给出了约束关系:

$$z=\frac{1}{2}b(x^2+y^2)=\frac{1}{2}br^2$$

用 r、φ 为广义坐标,

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+b^2r^2\dot{r}^2)-\frac{1}{2}mbgr^2$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

得

$$(1+b^2r^2)\ddot{r}+b^2r\dot{r}^2-r\dot{\varphi}^2+bgr=0 \tag{1}$$

在 $z=z_0$ 处做水平的圆周运动,$\dot{r}=0$,$\ddot{r}=0$,代入上式可得

$$\dot{\varphi}_0=\sqrt{bg}$$

由约束关系,

$$r=r_0=\sqrt{\frac{2z_0}{b}}$$

$$E=T+V=\frac{1}{2}mr_0^2\dot{\varphi}_0^2+mgz_0=2mgz_0$$

$$J=mr_0^2\dot{\varphi}_0=2mz_0\sqrt{\frac{g}{b}}$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=\text{常量}.$$

所以

$$r^2\dot{\varphi}=r_0^2\dot{\varphi}_0=2z_0\sqrt{\frac{g}{b}} \tag{2}$$

用(2)式消去(1)式中的 $\dot{\varphi}$,

$$(1+b^2r^2)\ddot{r}+b^2r\dot{r}^2-\frac{4z_0^2g}{br^3}+bgr=0 \tag{3}$$

令 $r=r_0+\delta r$,δr 为一级小量,只保留一级小量,并注意$\frac{4z_0^2}{r_i^4}=b^2$,(3)式可近似为

$$(1+b^2r_0^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\delta r)+4bg\delta r=0$$

在 r 方向的小振动角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{4bg}{1+b^2r_0^2}}=\sqrt{\frac{4bg}{1+2bz_0}}$$

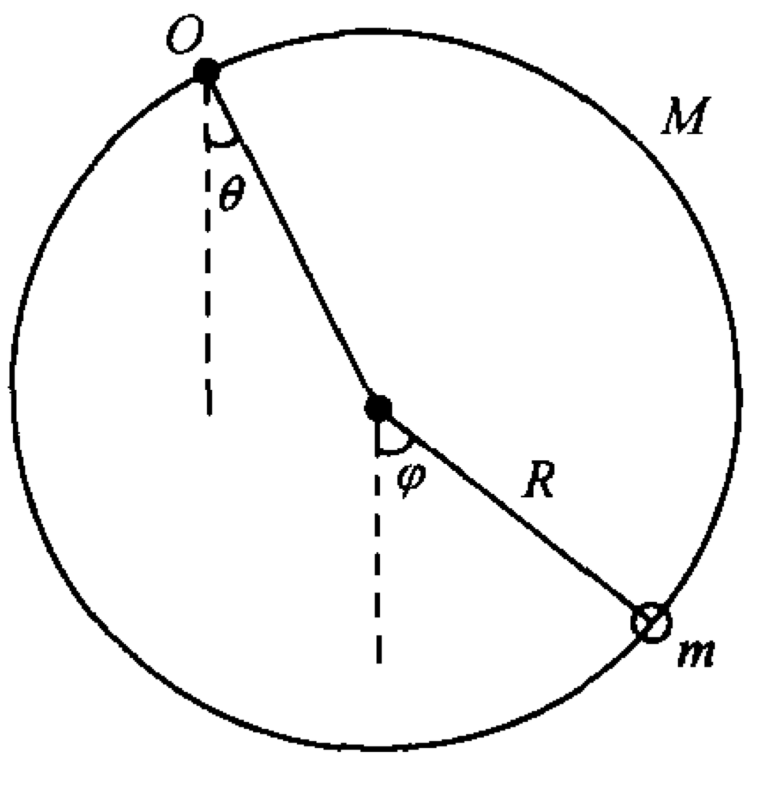


图 10.8

10.1.11　一个质量为 M、半径为 R 的环被悬挂在位于环上一点的枢轴上,环可围绕枢轴在它自己的垂直平面内自由转动,一个质量为 m 的珠子在环上做无摩擦滑动.

(1) 选适当的广义坐标,写出此系统的拉格朗日函数;

(2) 对于 m、M 的一般情况及 $m\gg M$ 和 $m\ll M$ 两种极限情况求小振动的简正频率.

解　(1) 用图 10.8 中的 θ、φ 为广义坐标,

$$T=\frac{1}{2}\times 2MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m[(R\dot{\theta})^2+(R\dot{\varphi})^2+2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)]$$

$$V=MgR(1-\cos\theta)+mgR[(1-\cos\theta)]+1(1-\cos\varphi)]$$

$$L=\frac{1}{2}(2M+m)R^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2+mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)$$
$$-(M+m)gR(1-\cos\theta)-mgR(1-\cos\varphi)$$

(2) 在平衡位置 $\theta=0$、$\varphi=0$ 附近的小振动,T、V 可作近似,保留到二级小量,

$$T=\frac{1}{2}(2M+m)R^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2+mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$V=\frac{1}{2}(M+m)gR\theta^2+\frac{1}{2}mgR\varphi^2$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}(2M+m)R^2 & mR^2\\ mR^2 & mR^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}(M+m)gR & 0\\ 0 & mgR\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}(M+m)gR-\omega^2(2M+m)R^2 & -mR^2\omega^2\\ -mR^2\omega^2 & mgR^2-mR^2\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$2MR^4\omega^4-(3M+2m)gR^3\omega^2+(M+m)g^2R^2=0$$

$$[MR\omega^2-(M+m)g](2R\omega^2-g)=0$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{2R}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{(M+m)g}{MR}}$$

当 $m\gg M$ 时,　　$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{2R}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{mg}{MR}}$

当 $m\ll M$ 时,　　$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{2R}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{R}}$

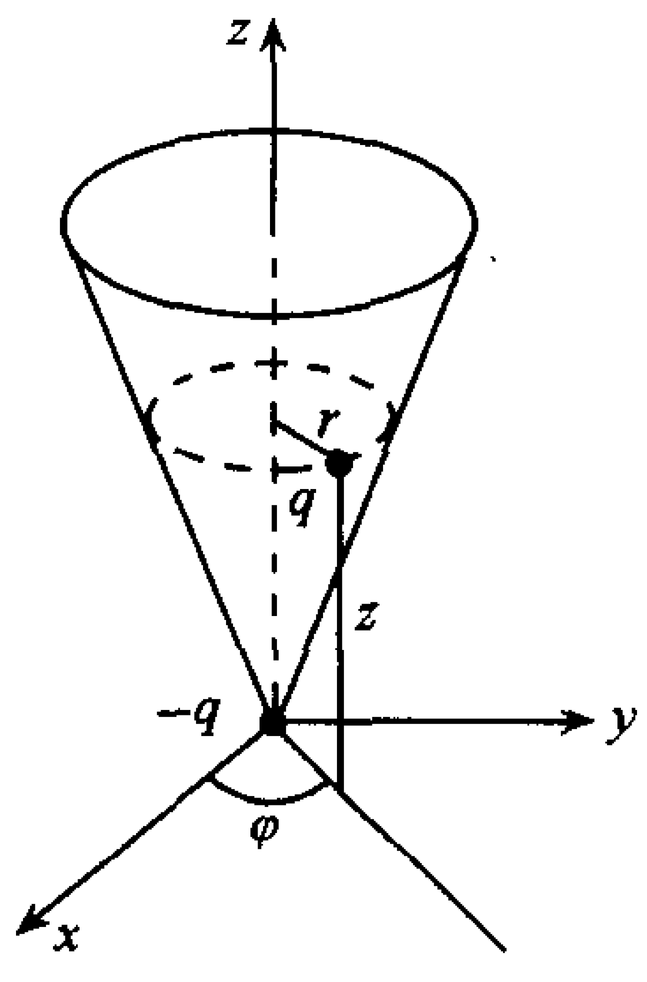


图 10.9

10.1.12　一个质量为 m、带电量为 q 的小物体，被限制在张角为 2α 的圆锥面内侧做无摩擦运动，一个 $-q$ 的电荷固定在圆锥的顶点上，不计重力，图 10.9 中虚线是运动物体在圆锥内表面的稳定轨道，绕 z 轴的角速度为 $\dot{\varphi}_0$，求围绕此稳定轨道小振动的角频率，假定 $v \ll c$(光速)所以辐射是可以忽略的.

解　选取柱坐标中的 r、φ 为广义坐标，有关系 $z = r\cot\alpha$，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$V = q\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\csc\alpha}\right) = -\frac{q^2\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{q^2\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

得

$$m\ddot{r}\csc^2\alpha - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{q^2\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \tag{1}$$

$$mr^2\dot{\varphi} = J(\text{常量}) \tag{2}$$

对于平衡轨道，$\ddot{r} = 0, r = r_0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$，由(1)式得

$$mr_0\dot{\varphi}_0^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sin\alpha}{r_0^2} \tag{3}$$

用(2)、(3)式，可把(1)式改写为

$$m\ddot{r} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin^3\alpha\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) = 0 \tag{4}$$

考虑在平衡轨道 $r = r_0$ 附近的小振动，令 $r = r_0 + x$，$x \ll r_0$ 为一级小量. 保留一级小量，(4)式可近似为

$$m\ddot{x} + \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\sin^3\alpha\right)x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m r_0^3}\sin^3\alpha = \dot{\varphi}_0^2\sin^2\alpha$$

(这里用了(3)式)

$$\omega = \dot{\varphi}_0\sin\alpha$$

10.1.13　一个转动惯量(对其对称轴)为 I 的飞轮，在水平面内绕固定的过圆心 O 与圆平面垂直的对称轴转动，一个质量为 m 的小球可以自由地沿半径方向的一条轴滑动，小球用一根劲度系数为 k、自然长度为 l 的轻弹簧连接在轮的中心，如图 10.10 所示，求：

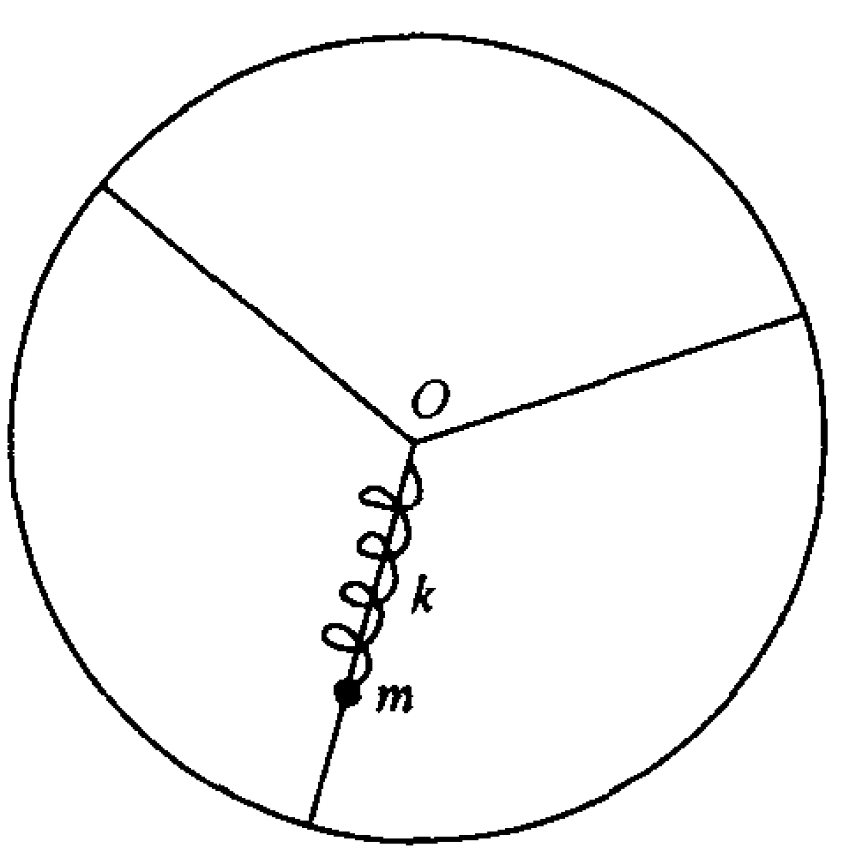


图 10.10

(1) 飞轮以恒定角速度 Ω_0 转动与弹簧有稳定长度 r_0 之间的关系；

(2) 用弹簧长度 r、飞轮的转角 θ 为广义坐标，写出系

统的运动微分方程；

(3) 飞轮的角速度在 Ω_0 附近，小球离轮心的距离在 r_0 附近，即系统在(1)的稳定运动附近做小振动的角频率.

解 (1)

$$k(r_0-l)=mr_0\Omega_0^2$$

$$r_0=\frac{kl}{k-m\Omega_0^2}$$

(2)

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V=\frac{1}{2}k(r-l)^2$$

$$L=\frac{1}{2}(I+mr^2)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}k(r-l)^2$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

得运动微分方程为

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+k(r-l)=0$$

$$(I+mr^2)\dot{\theta}=(I+mr_0^2)\Omega_0$$

其中 r_0、Ω_0 是两个常量，由初始条件给出，因为不一定是稳定运动，不要求有(1)问得出的关系.

(3) 在(1)问的稳定运动附近做小振动，此时 r_0 和 Ω_0 之间有(1)给出的关系.

用运动微分方程的第二个式子消去第一个式子中的 $\dot{\theta}$，得

$$m\ddot{r}-mr\left[\left(\frac{I+mr_0^2}{I+mr^2}\right)\Omega_0\right]^2+k(r-l)=0$$

在(1)问的稳定运动附近做小振动，令 $x=r-r_0$，x 为一级小量，

$$\begin{aligned}
&(r_0+x)\left[\frac{I+mr_0^2}{I+m(r_0+x)^2}\right]^2\Omega_0^2\\
&\approx(r_0+x)\left[\frac{I+mr_0^2}{I+mr_0^2+2mr_0x}\right]^2\Omega_0^2\\
&=(r_0+x)\left(1+\frac{2mr_0x}{I+mr_0^2}\right)^{-2}\Omega_0^2\\
&\approx(r_0+x)\left(1-\frac{4mr_0x}{I+mr_0^2}\right)\Omega_0^2
\end{aligned}$$

$$m\ddot{x}-m(r_0+x)\left(1-\frac{4mr_0x}{I+mr_0^2}\right)\Omega_0^2+k(r_0-l+x)=0$$

用 $mr_0\Omega_0^2=k(r_0-l)$，上式可改写为

$$m\ddot{x}+\frac{4m^2r_0^2\Omega_0^2}{I+mr_0^2}x-m\Omega_0^2x+kx=0$$

$$m\ddot{x}+\left(k+\frac{3m^2r_0^2-mI}{I+mr_0^2}\Omega_0^2\right)x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}+\frac{3mr_0^2-I}{I+mr_0^2}\Omega_0^2}$$

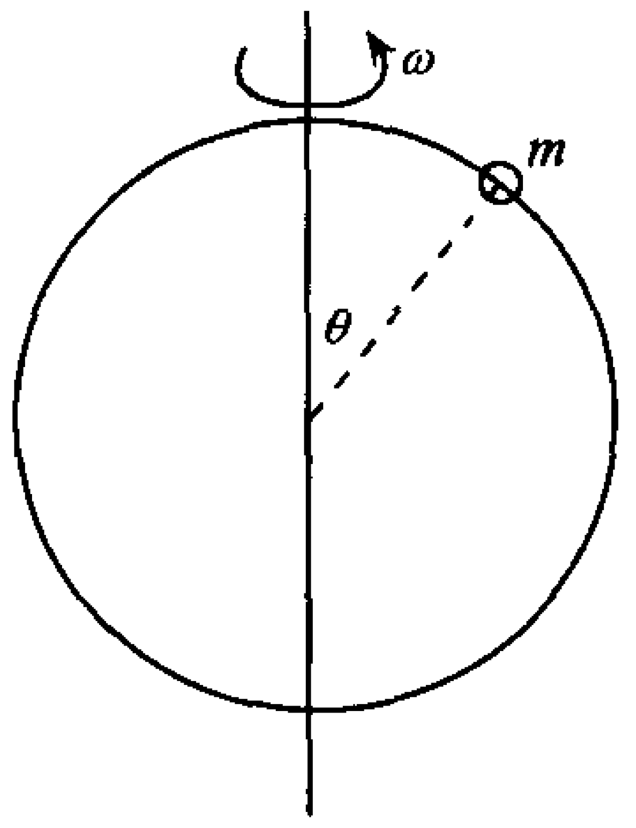


图 10.11

10.1.14　一质量为 m 的珠子被限制在半径为 b 的光滑圆环上运动，该圆环以固定的角速度绕同它的直径相重合的固定的竖直轴旋转.

(1) 写出拉格朗日函数和珠子的运动微分方程；

(2) 求临界角速度 Ω，$\omega<\Omega$ 时，圆环的底部是珠子的一个稳定平衡位置；

(3) 当 $\omega>\Omega$ 时，求珠子的稳定平衡位置.

解　(1) 用静参考系，取图 10.11 中的 θ 为广义坐标，

$$T=\frac{1}{2}m(b^2\dot{\theta}^2+b^2\sin^2\theta\omega^2)$$

$$V=mgb\cos\theta$$

$$L=\frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)-mgb\cos\theta$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得运动微分方程为

$$b\ddot{\theta}-b\omega^2\sin\theta\cos\theta-g\sin\theta=0$$

(2) 当珠子在圆环底部附近运动时，$\theta=\pi+\theta'$，θ' 为小量，

$$\sin\theta=\sin(\pi+\theta')\approx\sin\pi+\cos(\pi+\theta')\big|_{\theta'=0}\theta'=-\theta'$$

$$\cos\theta=\cos(\pi+\theta')\approx\cos\pi-\sin(\pi+\theta')\big|_{\theta'=0}\theta'=-1$$

运动微分方程可近似为

$$b\ddot{\theta}'+(g-b\omega^2)\theta'=0$$

圆环底部是珠子的一个稳定平衡位置，需在 $\theta=\pi$ 附近，也即在 $\theta'=0$ 附近的运动必须是小振动，要求$\frac{g-b\omega^2}{b}>0$，由此可求出临界角速度 Ω，

$$g-b\Omega^2=0,\qquad\Omega=\sqrt{\frac{g}{b}}$$

(3) 当 $\omega>\Omega$ 时，

$$b\ddot{\theta}-b\omega^2\sin\theta\cos\theta-g\sin\theta=0$$

处于平衡位置时，$\ddot{\theta}=0$，

$$\sin\theta(b\omega^2\cos\theta+g)=0$$

$\sin\theta_0=0$，$\theta_0=0$ 为平衡位置，但如(2)中所述，$\omega>\Omega$ 时，它不是稳定平衡位置，

$$b\omega^2\cos\theta_0+g=0$$

$$\theta_0=\arccos\left(-\frac{g}{b\omega^2}\right)$$

是平衡位置，θ_0 在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$区间内.

为考察在此位置的平衡的稳定性，令 $\theta=\theta_0+\theta'$，θ' 为小量，将 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 均在 $\theta=\theta_0$ 处作泰勒展开，只保留一级小量，

$$\sin\theta = \sin\theta_0 + \cos\theta_0\theta'$$
$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \sin\theta_0\theta'$$

在 $\theta=\theta_0$ 附近运动的运动微分方程可近似为

$$\ddot{\theta}' + \omega^2\sin^2\theta_0\theta' = 0$$

$\omega^2\sin^2\theta_0>0$，故 $\theta_0=\arccos\left(-\frac{g}{b\omega^2}\right)$ 是稳定平衡位置.

10.1.15　质量为 m 的粒子在竖直平面内的光滑的抛物线 $z=\frac{1}{a}x^2$（a 为常量，z 轴竖直向上）上运动.

（1）写出拉格朗日函数；

（2）给出关于平衡位置做小振动的运动微分方程并求解.

解　（1）用 x 为广义坐标，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{4x^2}{a^2}\right)\dot{x}^2$$

$$V = mgz = \frac{1}{a}mgx^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{4x^2}{a^2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{a}mgx^2$$

（2）由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

得运动微分方程为

$$\left(1+\frac{4x^2}{a^2}\right)\ddot{x}+\frac{2g}{a}x=0$$

平衡位置处，$\ddot{x}=0$ 或$\frac{\partial V}{\partial x}=0$，可得 $x=0$ 为平衡位置，且$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\frac{2}{a}mg>0$，$x=0$ 是稳定平衡位置.

在平衡位置附近，因为 x、$\ddot{x}$ 均为一级小量，仅保留一级小量，运动微分方程可近似为

$$\ddot{x}+\frac{2g}{a}x=0$$

解出
$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{a}}t+\alpha\right)$$

其中 A、α 为积分常数，由初条件确定.

10.1.16　长$\frac{3}{2}l$、质量为 m 的均质棒，用一根长 l、可不计其质量的弦线悬于固定点，如图 10.12 所示. 求在平面内小振动的简正频率和振动模式.

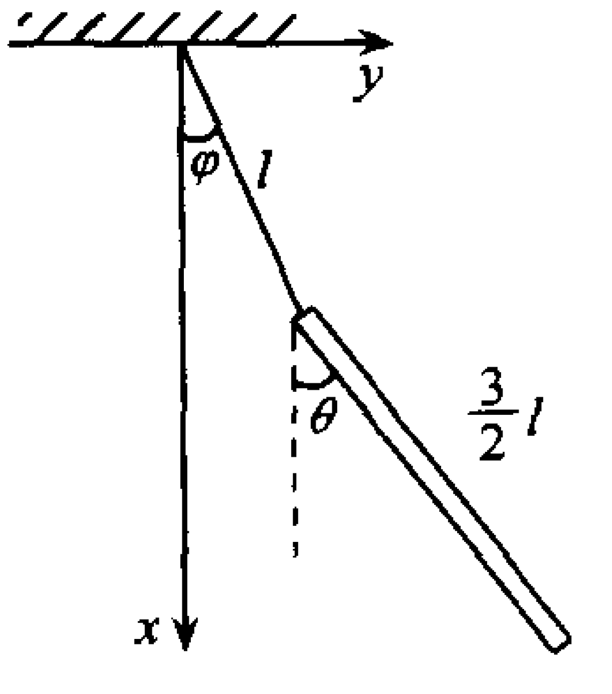


图 10.12

解　取图中 φ、θ 为广义坐标，棒的质心坐标为

$$x = l\cos\varphi + \frac{3}{4}l\cos\theta$$

$$y = l\sin\varphi + \frac{3}{4}l\sin\theta$$

质心速度为

$$\dot{x} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi - \frac{3}{4}l\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y} = l\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{3}{4}l\dot{\theta}\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m\left(\frac{3}{2}l\right)^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{8}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}ml^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta - \varphi)$$

$$V = -mgx = -mgl\left(\cos\varphi + \frac{3}{4}\cos\theta\right)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{8}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}ml^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta - \varphi) + mg\left(\cos\varphi + \frac{3}{4}\cos\theta\right)$$

在平衡位置处，$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$，$\frac{\partial V}{\partial \theta}=0$，可见 $\varphi=0$、$\theta=0$ 为平衡位置.

在平衡位置 $\theta=0$、$\varphi=0$ 附近做小振动，

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2,\quad \cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2,\quad \cos(\theta - \varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta - \varphi)^2$$

$\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$均为一级小量，保留到二级小量，拉格朗日函数可近似为

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{8}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}ml^2\dot{\varphi}\dot{\theta} - \frac{1}{2}mgl\varphi^2 - \frac{3}{8}mgl\theta^2 + \frac{7}{4}mgl$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

得

$$l\ddot{\varphi} + \frac{3}{4}l\ddot{\theta} + g\varphi = 0$$

$$l\ddot{\varphi} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

特征方程

$$\begin{vmatrix} g - l\omega^2 & -\frac{3}{4}l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解出简正频率为

$$\omega_1 = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\frac{g}{l}}$$

将 ω_1、ω_2 分别代入

$$\begin{pmatrix} g-l\omega^2 & -\dfrac{3}{4}l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g-l\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0$$

得　$\omega_1: u_1^{(1)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad u_2^{(1)}=1$

$\omega_2: u_1^{(2)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad u_2^{(2)}=1$

上述振动模式可如图 10.13 所示.

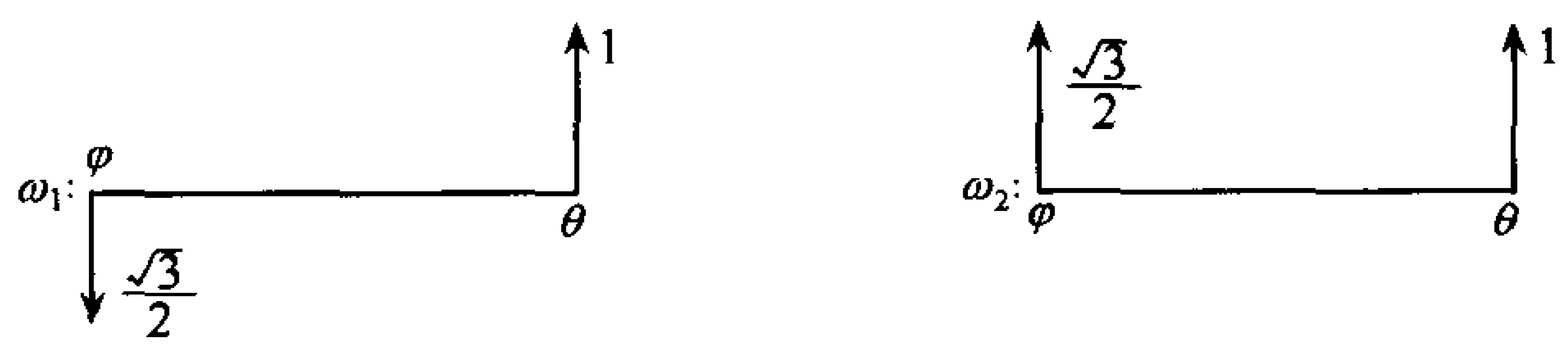


图 10.13

10.1.17　飞球节速器由连在长 l 的臂上的两个质量 m 和质量 M 组成，如图 10.14 所示. 该组合件绕竖直轴转动，质量 M 可沿该轴无摩擦上下滑动，忽略各臂质量、空气阻力，并假定 M 的直径很小. 假定轴以恒定角速度 ω_0 转动.

(1) 计算质量 M 的平衡高度；

(2) 求质量 M 在平衡位置附近小振动的角频率；

(3) 现假定轴被允许自由转动，小振动的角频率是否改变？若变，计算新的值.

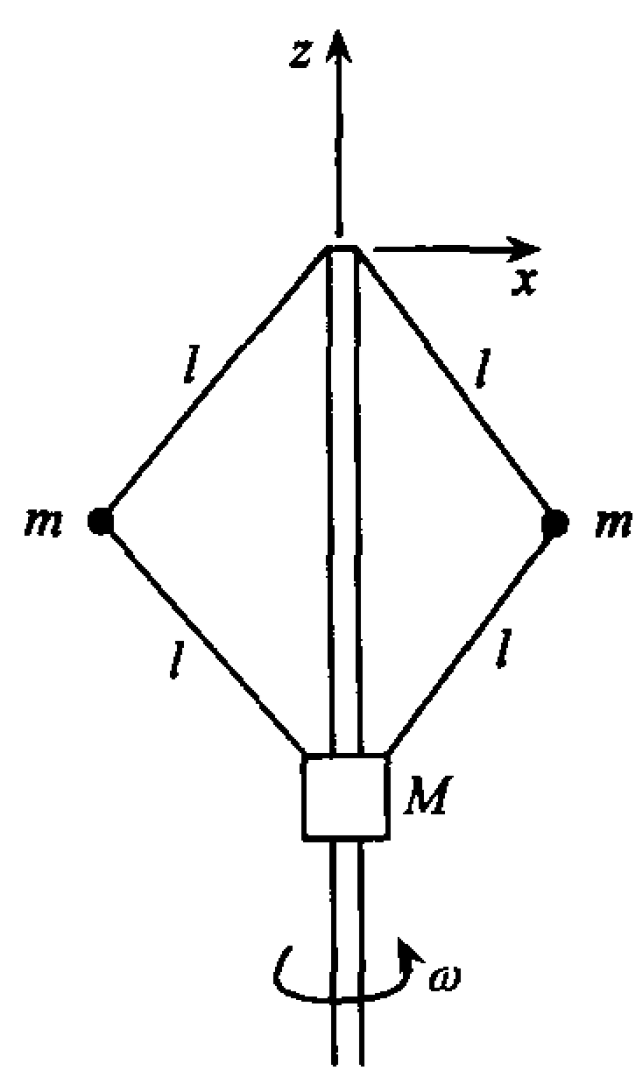


图 10.14

解　图 10.14 中 x 轴总在四臂所张的平面内，x 轴随组合件一起绕 z 轴转动，用一臂与轴的夹角 θ 为广义坐标，用 x_m、z_m 表示质量 m 的坐标，用 z_M 表示质量 M 的坐标，

$$x_m=l\sin\theta,\qquad z_m=-l\cos\theta$$

$$z_M=-2l\cos\theta$$

(1)
$$T=2\times\frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2+\dot{z}_m^2+x_m^2\omega_0^2)+\frac{1}{2}M\dot{z}_M^2$$

$$=ml^2\dot{\theta}^2+ml^2\omega_0^2\sin^2\theta+2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$V=2mgz_m+Mgz_M=(-2mgl-2Mgl)\cos\theta$$

$$L=(ml^2+2Ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2+ml^2\omega_0^2\sin^2\theta+2(m+M)gl\cos\theta$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得

$$(m+2M\sin^2\theta)l\ddot{\theta}+2Ml\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2-ml\omega_0^2\sin\theta\cos\theta+(m+M)g\sin\theta=0$$

质量 M 处于平衡位置时，$\dot{\theta}=0$，$\ddot{\theta}=0$，

$$ml\omega_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0=(m+M)g\sin\theta_0$$

$$\sin\theta_0 = 0,\text{或}\ \cos\theta_0 = \frac{(m+M)g}{ml\omega_0^2}$$

质量 M 的平衡高度分别为

$$z_M = -2l,\text{或}\ -\frac{2(m+M)g}{m\omega_0^2}$$

注意:这里求质量 M 的平衡位置不能用这里的 V,由 $\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$ 得出.因为这个 V 是用静参考系写出的,系统并不处于平衡,如改用绕轴以 ω_0 的角速度转动的参考系,M 的平衡位置也是系统的平衡位置,可用 $\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$,不过这个 V 应改为

$$V = -2(m+M)gl\cos\theta - ml^2\omega_0^2\sin^2\theta$$

后面新加的项是惯性离轴力势能.

(2) 在 $\sin\theta_0=0$,即 $\theta_0=0$ 这个平衡位置附近,运动微分方程可近似为

$$ml\ddot{\theta} + [(m+M)g - ml\omega_0^2]\theta = 0$$

如 $(m+M)g-ml\omega_0^2>0$,则 $\theta=0$ 是一个稳定平衡位置.在这个位置给一微扰,质量 M 不会远离平衡位置,但 θ 只能向正值方向运动,不能向负值方向运动.从 $\theta>0$ 回到 $\theta=0$ 后再怎样运动,题目未给出足够的条件无法讨论.因此我们讨论 $(m+M)g-ml\omega_0^2<0$ 的情况,$\theta=0$是一个不稳定平衡位置.存在着另一个平衡位置,那里 $\cos\theta_0=\frac{(m+M)g}{ml\omega_0^2}(<1)$,它是个稳定平衡位置.下面讨论在这个平衡位置附近的小振动.令 $\theta'=\theta-\theta_0$,用

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0\theta'$$
$$\cos\theta \approx \cos\theta_0 - \sin\theta_0\theta'$$

代入运动微分方程,只保留一级小量,得

$$(m+2M\sin^2\theta_0)l\ddot{\theta}' + ml\omega_0^2\sin^2\theta_0\theta' = 0$$

质量 M 在平衡位置附近小振动的角频率为

$$\Omega = \sqrt{\frac{m\omega_0^2\sin^2\theta_0}{m+2M\sin^2\theta_0}}$$

其中

$$\sin^2\theta_0=1-\left[\frac{(m+M)g}{ml\omega_0^2}\right]^2$$

(3) 转轴并不受约束,可以自由转动,用 $\dot{\varphi}$ 表示转动的角速度,系统的自由度增为两个,

$$L = (ml^2 + 2Ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 2(m+M)gl\cos\theta$$

因为 $\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$,$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=$常量,可得

$$\dot{\varphi}\sin^2\theta = \omega_0\sin^2\theta_0 \tag{1}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得

$$(m+2M\sin^2\theta)l\ddot{\theta} + 2Ml\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - ml\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + (m+M)g\sin\theta = 0 \tag{2}$$

用(1)式消去(2)式中的$\dot{\varphi}$,得

$$(m+2M\sin^2\theta)l\ddot{\theta}+2Ml\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2-\frac{ml\omega_0^2\sin^4\theta_0\cos\theta}{\sin^3\theta}+(m+M)g\sin\theta=0 \quad (3)$$

在质量M的平衡位置,$\theta_0=\arccos\left[\frac{(m+M)g}{ml\omega_0^2}\right]$,对$\cos\theta$、$\sin\theta$作泰勒展开,代入(3)式,只保留一级小量,得

$$(m+2M\sin^2\theta_0)l\ddot{\theta}'+(m+M)g\frac{1+3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0}\theta'=0$$

用$\cos\theta_0=\frac{(m+M)g}{ml\omega_0^2}$,上式也可改写为

$$(m+2M\sin^2\theta_0)\ddot{\theta}'+m\omega_0^2(1+3\cos^2\theta_0)\theta'=0$$

小振动的角频率为

$$\Omega=\omega_0\sqrt{\frac{m(1+3\cos^2\theta_0)}{m+2M\sin^2\theta_0}}$$

可见,有保持角速度为ω_0的约束还是在角速度为ω_0时不受约束,质量M在其平衡位置的小振动的角频率是不同的.

10.1.18　两个长度均为l、质量均为m的单摆悬在同一水平线上,用一根劲度系数为k的无质量的弹簧将两质点连起来,弹簧的自然长度等于两悬点间的距离.求系统在平衡位置附近做小振动的简正频率和简正坐标.若开始时两质点处于平衡位置,左边的质点由于受到一个冲量获得一个向右的水平速度v_0,用简正坐标表达系统的运动规律.

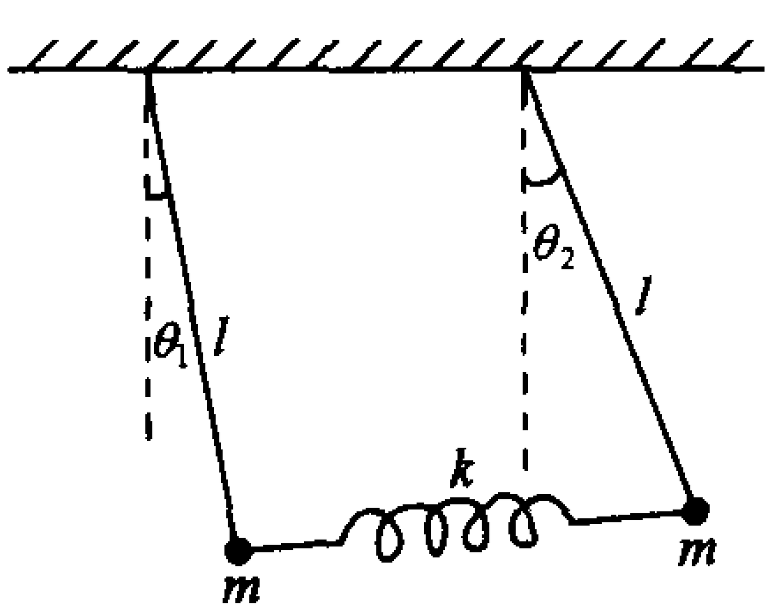


图 10.15

解　取图10.15的θ_1、θ_2为广义坐标.设两悬点间距为a,

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}k\left\{[a+l\sin\theta_2-l\sin\theta_1)^2+(-l\cos\theta_1+l\cos\theta_2)^2]^{\frac{1}{2}}-a\right\}^2\\&\quad+mg[l(1-\cos\theta_1)+l(1-\cos\theta_2)]\\&\approx\frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2+\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2)\\&=\frac{1}{2}(kl^2+mgl)\theta_1^2-kl^2\theta_1\theta_2+\frac{1}{2}(kl^2+mgl)\theta_2^2\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}ml^2&0\\0&ml^2\end{pmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}kl^2+mgl&-kl^2\\-kl^2&kl^2+mgl\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}kl^2+mgl-ml^2\omega^2&-kl^2\\-kl^2&kl^2+mgl-ml^2\omega^2\end{vmatrix}=0$$

可解出　　$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}$,　　$\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$

将ω_1代入$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$,

$$\begin{pmatrix} kl & -kl \\ -kl & kl \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

取 $u_1^{(1)}=1$，则 $u_2^{(1)}=1$.

将 ω_2 代入　　$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$，

$$\begin{pmatrix} -kl & -kl \\ -kl & -kl \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

取 $u_1^{(2)}=1$，则 $u_2^{(2)}=-1$.

两个特解为

$$\begin{cases} \theta_1^{(1)} = \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t + \alpha_1\right) \\ \theta_2^{(1)} = \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t + \alpha_1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1^{(2)} = \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}t + \alpha_2\right) \\ \theta_2^{(2)} = -\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}t + \alpha_2\right) \end{cases}$$

通解为

$$\theta_1 = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}t + \alpha_2\right)$$

$$\theta_2 = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) - C_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}t + \alpha_2\right)$$

初始条件：$t=0$ 时，$\theta_1=0$，$\theta_2=0$，$\dot{\theta}_1=\dfrac{v_0}{l}$，$\dot{\theta}_2=0$，定出

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2},\quad C_1 = -\frac{v_0}{2l}\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ 或 } -\frac{v_0}{2\omega_1 l}$$

$$C_2 = -\frac{v_0}{2l}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}} \text{ 或 } -\frac{v_0}{2\omega_2 l}$$

$$\theta_1 = \frac{v_0}{2\omega_1 l}\sin\omega_1 t + \frac{v_0}{2\omega_2 l}\sin\omega_2 t$$

$$\theta_2 = \frac{v_0}{2\omega_1 l}\sin\omega_1 t - \frac{v_0}{2\omega_1 l}\sin\omega_2 t$$

将 $u_1^{(1)}$、$u_2^{(1)}$、$u_1^{(2)}$、$u_2^{(2)}$ 代入简正坐标 ξ_1、ξ_2 与原用坐标 θ_1、θ_2 的关系式，

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = ml^2\begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = ml^2(\theta_1 + \theta_2),\quad \xi_2 = ml^2(\theta_1 - \theta_2)$$

简正坐标的常数倍仍是简正坐标，因此可用

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \xi_2 = \theta_1 - \theta_2$$

用此简正坐标表达的满足初始条件的解为

$$\xi_1 = \frac{v_0}{\omega_1 l}\sin\omega_1 t, \quad \xi_2 = \frac{v_0}{\omega_2 l}\sin\omega_2 t$$

10.1.19　两个质量分别为 M、m，且 $M>m$ 的质点被两根长 l 不可伸长的轻绳挂在支架上，用一根劲度系数为 k、原长等于两支点间距的轻弹簧将两质点相连，如图 10.16 所示. 求沿两质点连线在平衡位置附近做小振动的简正频率，给出在每个模式中 m 和 M 的运动之间的关系，写出通解. 若 $t=0$ 时，m 静止在它的平衡位置，M 从一个初始正位移处静止释放. 系统的总能量为 E_0(取平衡位置为势能的零点)、弹簧很弱，且 $M=2m$，求以后运动期间被 m 获得的最大能量. 说明在哪里用了弹簧很弱的条件.

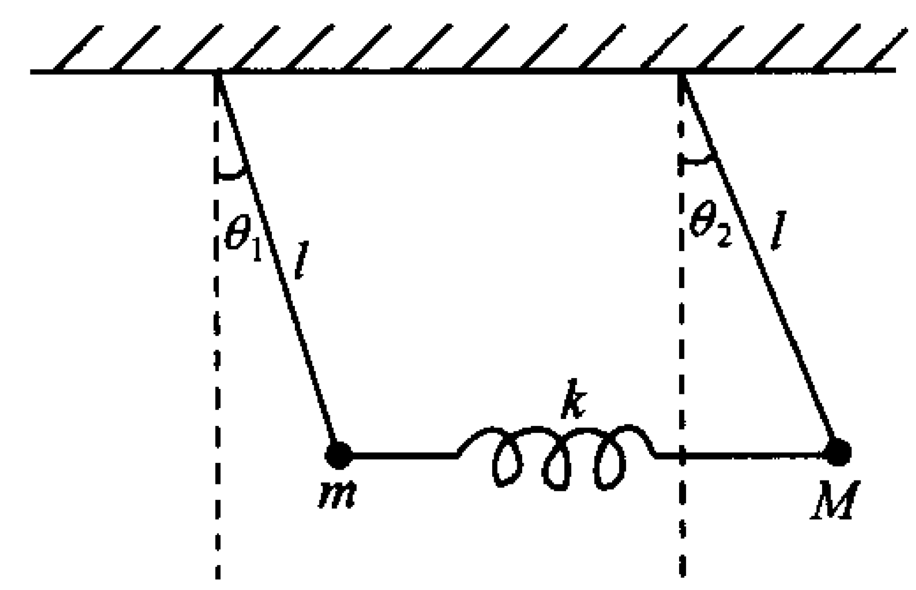


图 10.16

解　$L = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta_2^2 - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2 - mgl(1-\cos\theta_1) - Mgl(1-\cos\theta_2)$

$$\approx \frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta_2^2 - \frac{1}{2}(kl^2+mgl)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(kl^2+mgl)\theta_2^2 + kl^2\theta_1\theta_2$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_i} = 0$$

得

$$ml\ddot\theta_1 + (kl+mg)\theta_1 - kl\theta_2 = 0$$

$$Ml\ddot\theta_2 + (kl+Mg)\theta_2 - kl\theta_1 = 0$$

简正频率 ω 满足的方程为

$$\begin{vmatrix} kl+mg-ml\omega^2 & -kl \\ -kl & kl+Mg-Ml\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解出：

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mMg+kl(m+M)}{mMl}}$$

分别代入

$$(kl+mg-ml\omega^2)u_1 - klu_2 = 0$$

令　$u_1^{(1)}=1, u_1^{(2)}=1$，可得 $u_2^{(1)}=1, u_2^{(2)}=-\frac{m}{M}$.

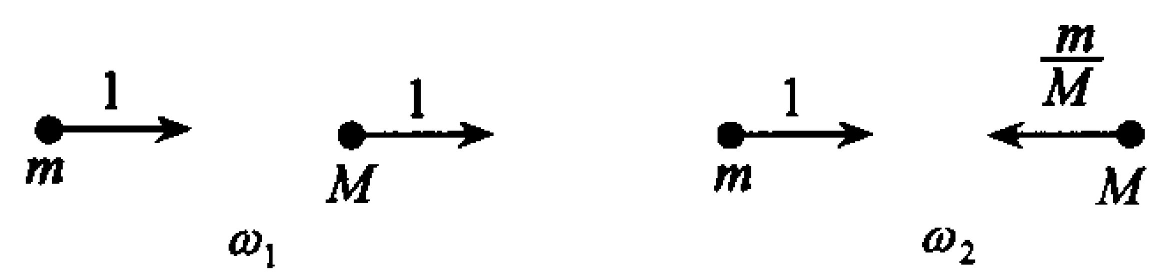


图 10.17

振动模式可用图 10.17 表示；第一种振动模式，简正频率为 ω_1，m 和 M 同相位且振幅相同；第二种振动模式，简正频率为 ω_2，m 和 M 的振动相位相反，振幅也不同，m 的振幅与 M 的振幅之比为 $1 : \frac{m}{M}$.

通解为

$$\theta_1 = C_1 u_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 u_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha_1\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{mMg + kl(m+M)}{mMl}} t + \alpha_2\right)$$
$$\theta_2 = C_1 u_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 u_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha_1\right) - \frac{m}{M} C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{mMg + kl(m+M)}{mMl}} t + \alpha_2\right)$$

对于下列初始条件：

$$t = 0 \text{ 时}, \theta_1 = 0, \quad \dot{\theta}_1 = 0, \quad \theta_2 = \theta_{20}, \quad \dot{\theta}_2 = 0$$

其中 θ_{20}满足下列方程，取正根：

$$\frac{1}{2} k l^2 \theta_{20}^2 + \frac{1}{2} Mgl \theta_{20}^2 = E_0$$

所以

$$\theta_{20} = \sqrt{\frac{2E_0}{kl^2 + Mgl}}$$

确定 C_1、C_2、α_1、α_2 的方程为

$$C_1 \cos\alpha_1 + C_2 \cos\alpha_2 = 0$$
$$-C_1 \omega_1 \sin\alpha_1 - C_2 \omega_2 \sin\alpha_2 = 0$$
$$C_1 \cos\alpha_1 - \frac{m}{M} C_2 \cos\alpha_2 = \theta_{20}$$
$$-C_1 \omega_1 \sin\alpha_1 + \frac{m}{M} C_2 \omega_2 \sin\alpha_2 = 0$$

解出

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0$$
$$C_1 = \frac{M}{m+M} \theta_{20}, \qquad C_2 = -\frac{M}{m+M} \theta_{20}$$

用 $M=2m$ 这个条件：

$$C_1 = \frac{2}{3} \theta_{20}, \quad C_2 = -\frac{2}{3} \theta_{20},$$
$$\theta_1 = \frac{2}{3} \theta_{20} (\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$
$$\theta_2 = \frac{2}{3} \theta_{20} \left(\cos\omega_1 t + \frac{1}{2} \cos\omega_2 t\right)$$

其中

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2mg + 3kl}{2ml}}, \qquad \theta_{20} = \sqrt{\frac{2E_0}{kl^2 + 2mgl}}$$

质点 m 的能量为

$$E_1 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} mgl \theta_1^2$$

弹簧很弱意味着 $kl \ll mg$，

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2mg + 3kl}{2ml}} = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{3kl}{2mg}\right)} \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{3kl}{4mg}\right) = \omega_1 (1 + \delta)$$

$$\theta_{20} = \sqrt{\frac{2E_0}{2mgl + kl^2}} = \sqrt{\frac{2E_0}{2mgl}} \left(1 + \frac{kl}{2mg}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{E_0}{mgl}} \left(1 - \frac{kl}{4mg}\right) = \sqrt{\frac{E_0}{mgl}} \left(1 - \frac{1}{3} \delta\right)$$

其中 $\delta=\dfrac{3kl}{4mg}\ll 1$.

用弱弹簧近似后,经计算可得

$$E_1=\frac{2}{9}mgl\theta_{20}^2[1+(1+\delta)^2\sin^2\omega_2 t+\cos^2\omega_2 t]$$
$$-2(1+\delta)\sin\omega_1 t+\sin\omega_2 t-2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t]$$
$$\approx\frac{4}{9}E_0\{1-\cos[(\omega_1-\omega_2)t]\}\qquad(\text{略去一切小量})$$

显然质点 m 的最大能量为

$$E_{1\max}=\frac{4}{9}E_0[1-(-1)]=\frac{8}{9}E_0$$

10.1.20　质量均为 m、荷电均为 e 的两金属小球,用同样长度为 l 的、不可伸长的轻绝缘绳系在同一水平线上,两悬点相距为 a. 让两球在其平衡位置附近做小振动,求简正频率(设电场力比重力小得多).

解
$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2+\frac{1}{2}ml\dot\theta_2^2$$

$$V=mgl(1-\cos\theta_1)+mgl(1-\cos\theta_2)+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r'}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

其中　$r'=\{(a+l\sin\theta_2-l\sin\theta_1)^2+[l(1-\cos\theta_1)-l(1-\cos\theta_2)]^2\}^{1/2}$

$$\approx a\left[1+\frac{l}{a}(\theta_2-\theta_1)+\frac{l^2}{a^2}(\theta_2-\theta_1)^2\right]$$

$$r'^{-1}=\frac{1}{a}\left[1-\frac{l}{a}(\theta_2-\theta_1)+\frac{2l^2}{a^2}(\theta_2-\theta_1)^2\right]$$

$$V\approx\frac{1}{2}mgl\theta_1^2+\frac{1}{2}mgl\theta_2^2-\frac{e^2l}{4\pi\varepsilon_0a^2}(\theta_2-\theta_1)+\frac{e^2l^2}{2\pi\varepsilon_0a^3}(\theta_2-\theta_1)^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}mgl+\frac{e^2l^2}{2\pi\varepsilon_0a^3}\right)(\theta_1^2+\theta_2^2)-\frac{e^2l^2}{\pi\varepsilon_0a^3}\theta_1\theta_2-\frac{e^2l}{4\pi\varepsilon_0a^2}(\theta_2-\theta_1)$$

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot\theta_2^2-\left(\frac{1}{2}mgl+\frac{e^2l^2}{2\pi\varepsilon_0a^3}\right)(\theta_1^2+\theta_2^2)+\frac{e^2l^2}{\pi\varepsilon_0a^3}\theta_1\theta_2+\frac{e^2l}{4\pi\varepsilon_0a^2}(\theta_2-\theta_1)$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0$$

得

$$\ddot\theta_1+\left(\frac{g}{L}+\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0ma^3}\right)\theta_1-\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0ma^3}\theta_2+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0mla^2}=0$$

$$\ddot\theta_2+\left(\frac{g}{l}+\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0ma^3}\right)\theta_2-\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0ma^3}\theta_1-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0mla^2}=0$$

在势能函数中出现 θ_1、θ_2 的一次方项,是二阶微分方程中出现非齐次项的原因,而这种情况的产生是因为 $\theta_1=0$、$\theta_2=0$ 不是平衡位置,平衡位置 θ_{10}、θ_{20}是这个非齐次方程的一个特定的特解,它们满足下列代数方程:

$$\left(\frac{g}{l}+\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0ma^3}\right)\theta_{10}-\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0ma^3}\theta_{20}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0mla^2}=0$$

$$\left(\frac{g}{l}+\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0 ma^3}\right)\theta_{20}-\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0 ma^3}\theta_{10}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mla^2}=0$$

由对称性可知,$\theta_{20}=-\theta_{10}$,可解出

$$\theta_{20}=-\theta_{10}=\frac{e^2a}{4(\pi\varepsilon_0 ma^3g+2e^2l)}$$

如取 $\theta'_1=\theta_1-\theta_{10}$,$\theta'_2=\theta_2-\theta_{20}$,二阶微分方程将是齐次的. 不论用 θ_1、θ_2 还是用 θ'_1、θ'_2 作广义坐标,不仅简正频率相同,而且简正频率满足的特征方程也是相同的,特征方程为

$$\begin{vmatrix}\frac{g}{l}+A-\omega^2 & -A\\ -A & \frac{g}{l}+A-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

其中

$$A=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0 ma^3}$$

解出

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+2A}=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2e^2}{\pi\varepsilon_0 ma^3}}$$

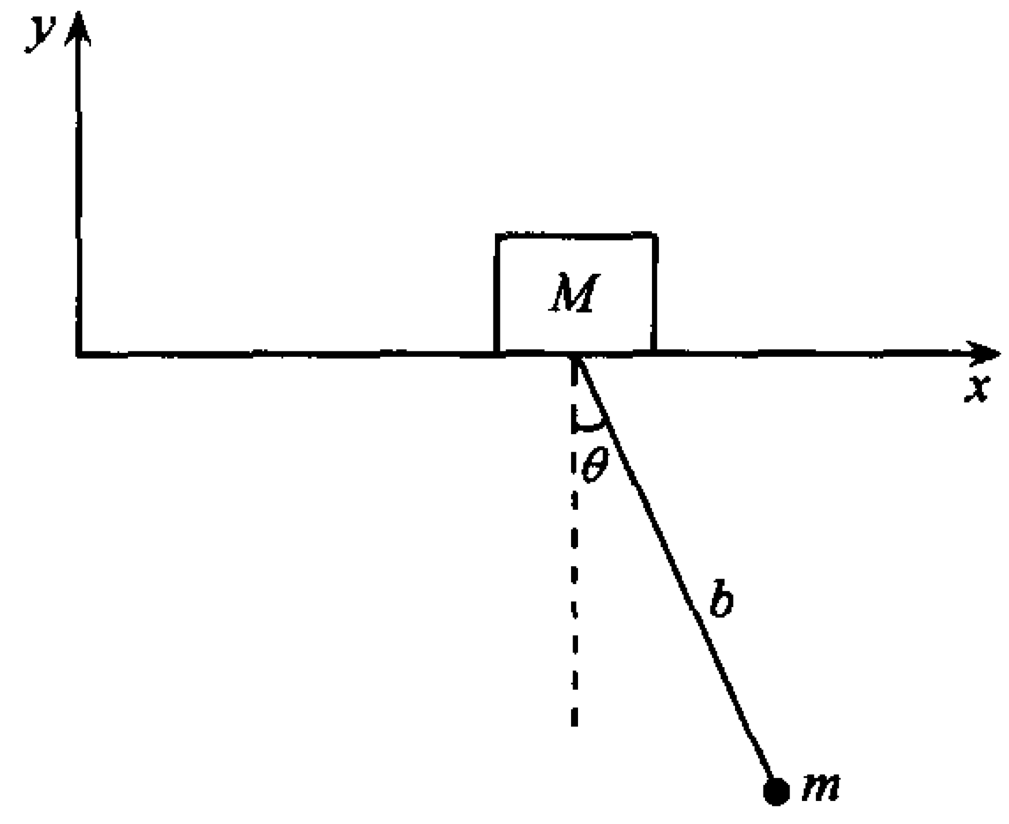


图 10.18

10.1.21 质量为 M 的物体被限制在水平的 x 轴上无摩擦地滑动,质量为 m 的质点通过一根无质量的、长度为 b 的、不可伸长的线和 M 联结,m 限在竖直的 xy 平面内运动,如图 10.18 所示.

(1) 写出系统的拉格朗日函数;

(2) 就小振动情形. 求简正坐标,并加以说明;

(3) 求用简正坐标表达的系统的运动学方程.

解 (1) 用 x、θ 为广义坐标,

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}+b\dot{\theta}\cos\theta)^2+(b\dot{\theta}\sin\theta)^2]$$

$$=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2+mb\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$V=mgb(1-\cos\theta)$$

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2+mb\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta-mgb(1-\cos\theta)$$

(2) 对于小振动情形,

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2+mb\dot{x}\dot{\theta}-\frac{1}{2}mgb\theta^2$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得运动微分方程为

$$(M+m)\dot{x}+mb\dot{\theta}=C(\text{常量})\tag{1}$$

$$\ddot{x}+b\ddot{\theta}+g\theta=0\tag{2}$$

若令 $\eta=x+\frac{mb}{m+M}\theta$,则(1)式可改写为

$$(m+M)\dot{\eta}=C\quad 或\quad \ddot{\eta}=0$$

η是一个简正坐标，它的物理意义是系统的质心的 x 坐标，质心在 x 方向做速度为$\dfrac{C}{m+M}$的匀速运动.

由 $\ddot{\eta}=0, \ddot{x}=-\dfrac{mb}{m+M}\ddot{\theta}$，将它代入(2)式，(2)式变成

$$\frac{Mb}{m+M}\ddot{\theta}+g\theta=0$$

可见，θ 就是另一个简正坐标.

θ 表示的运动是简谐振动，简正频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{(m+M)g}{Mb}}$$

(3) $\dot{\eta}=\dfrac{C}{m+M}, \eta=\dfrac{C}{m+M}t+D,$

$$\theta=A\cos\left(\sqrt{\frac{(m+M)g}{Mb}}t+\alpha\right)$$

C、D、A 和 α 均为积分常数，由初始条件确定.

10.1.22　由质量为 m 的质点和长为 l 的轻绳组成的单摆，悬挂在质量为 M 的物体上，该物体置在光滑的水平面上，并用一根劲度系数为 k 的水平轻弹簧连到一固定点，如图 10.19 所示.

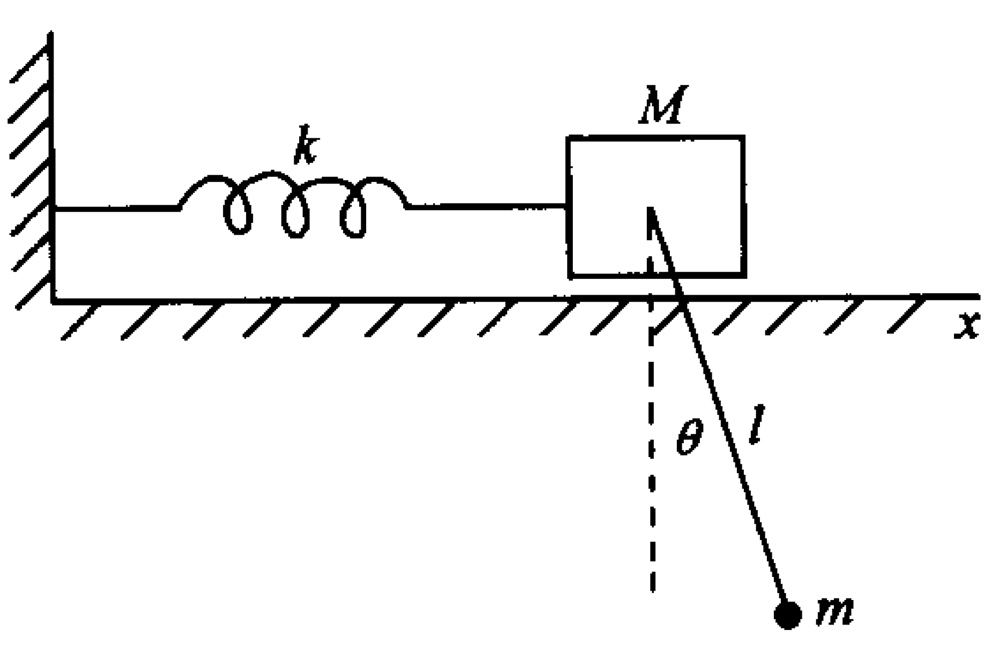


图 10.19

(1) 写出系统的拉格朗日函数；

(2) 求系统做小振动的角频率.

解　(1) x 轴的原点取在弹簧为原长时物体所在位置，

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$V=\frac{1}{2}kx^2+mgl(1-\cos\theta)$$

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta-\frac{1}{2}kx^2-mgl(1-\cos\theta)$$

(2) 做小振动，θ、x、$\dot{\theta}$ 和 $\dot{x}$ 均为小量，

$$L\approx\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}-\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得

$$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}+kx=0$$

$$ml\ddot{\theta}+m\ddot{x}+mg\theta=0$$

设　$x=u_1\cos(\omega t+\alpha), l\theta=u_2\cos(\omega t+\alpha)$

代入微分方程组，可得

$$\begin{pmatrix} k-(M+m)\omega^2 & -m\omega^2 \\ -m\omega^2 & \dfrac{mg}{l}-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0$$

u_1、u_2要得非零解,必须系数行列式等于零,

$$\begin{vmatrix} k-(M+m)\omega^2 & -m\omega^2 \\ -m\omega^2 & \dfrac{mg}{l}-m\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$M\omega^4-\left[k+(M+m)\frac{g}{l}\right]\omega^2+\frac{kg}{l}=0$$

解出

$$\omega_1=\sqrt{\frac{(M+m)g+kl+\sqrt{[(M+m)g+kl]^2-4kMgl}}{2Ml}}$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{(M+m)g+kl-\sqrt{[(M+m)g+kl]^2-4kMgl}}{2Ml}}$$

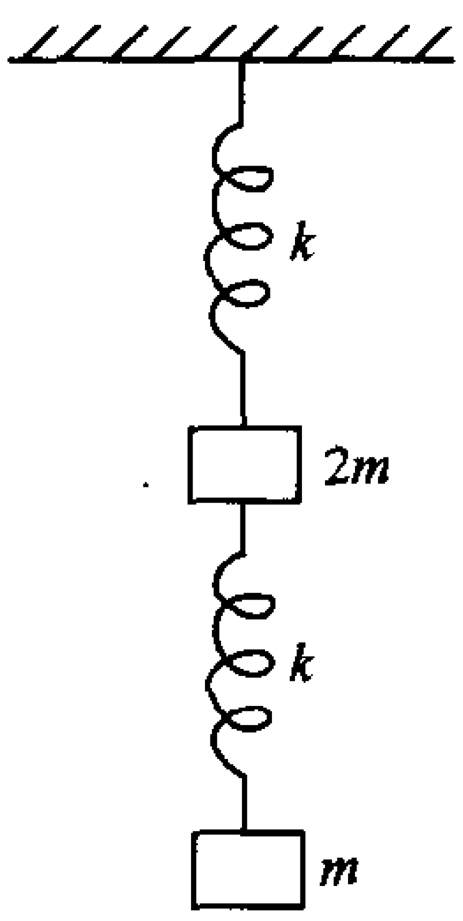


图 10.20

10.1.23 质量为 $2m$ 和 m 的两个质点,用两根劲度系数均为 k 的轻弹簧悬挂在固定的支架上,如图 10.20 所示,只考虑竖直方向上的运动.

(1) 求系统的简正频率,并描述每种模式的运动;

(2) 将质量为 $2m$ 的质点从平衡位置缓慢地向下移动一段距离 l,然后放开,让系统自由振动,求质量为 m 的质点的运动.

解 (1) 取竖直向下的 y 轴,y_1、y_2 分别表示上、下两个质点的位置,原点均取在悬点,再设上、下两个弹簧的原长为 l_1、l_2,则

$$L=T-V=\frac{1}{2}\times 2m\,\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m\,\dot{y}_2^2+2mgy_1+mgy_2$$

$$-\frac{1}{2}k(y_1-l_1)^2-\frac{1}{2}k(y_2-y_l-l_2)^2$$

$$=\frac{1}{2}m(2\,\dot{y}_1^2+\dot{y}_2^2)+mg(2y_1+y_2)-\frac{1}{2}k(y_1-l_1)^2-\frac{1}{2}k(y_2-y_1-l_2)^2$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y_i}=0$ 得

$$\begin{cases} 2m\,\ddot{y}_1+2ky_1-ky_2-2mg-kl_1+kl_2=0 \\ m\,\ddot{y}_2+ky_2-ky_1-mg-kl_2=0 \end{cases}$$

令 $y_1=y'_1+\eta_1$,$y_2=y'_2+\eta_2$,使

$$2k\eta_1-k\eta_2-2mg-kl_1+kl_2=0$$
$$k\eta_2-k\eta_1-mg-kl_2=0$$

即 $\eta_1=\dfrac{1}{k}(3mg+kl_1)$,$\eta_2=\dfrac{1}{k}(4mg+kl_1+kl_2)$

则运动微分方程可改写为

$$2m\,\ddot{y}'_1+2ky'_1-ky'_2=0$$
$$m\,\ddot{y}'_2+ky'_2-ky'_1=0$$

$y_1=\eta_1$、$y_2=\eta_2$ 或 $y'_1=0$、$y'_2=0$ 为系统的平衡位置.

令 $y'_1=u_1e^{i\omega t}$，$y'_2=u_2e^{i\omega t}$，可得

$$\begin{pmatrix} 2k-2m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2k-2m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

解出

$$\omega_1=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{k}{m}},\qquad \omega_2=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{k}{m}}$$

将 ω_1、ω_2 分别代入关于 u_1、u_2 的方程组，令 $u_1^{(1)}=1$，$u_1^{(2)}=1$，可得 $u_2^{(1)}=-\sqrt{2}$，$u_2^{(2)}=\sqrt{2}$.

振动模式可表示为

$$\omega_1:\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},\qquad \omega_2:\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

描述如下：按简正频率为 ω_1 的模式振动，上、下两质点的振动相位相反，振幅比为 $1:\sqrt{2}$；按简正频率为 ω_2 的模式振动，上、下两质点的振动相位相同，振幅比也是 $1:\sqrt{2}$.

(2) 系统的通解为

$$y'_1=A\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+B\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$y'_2=-\sqrt{2}A\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\sqrt{2}B\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

初始条件：$t=0$ 时，　　$y'_1=y'_2=l$，$\dot{y}'_1=\dot{y}'_2=0$

定出　　$\alpha_1=\alpha_2=0$，　$A=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$，　$B=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$

下面的质点的运动方程为

$$y_2=y'_2+\eta_2=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}+1)l\cos\left[\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{k}{m}}t\right]$$

$$+\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)l\cos\left[\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{k}{m}}t\right]+\frac{4mg}{k}+l_1+l_2$$

10.1.24　对于如图 10.21 所示的、两个质量为 m 的质点、用三根无质量的、劲度系数分别为 k 和 k' 的弹簧连接组成的系统，如果这两个质点从图上所标出的对称的初始位置静止释放，求此振动周期.

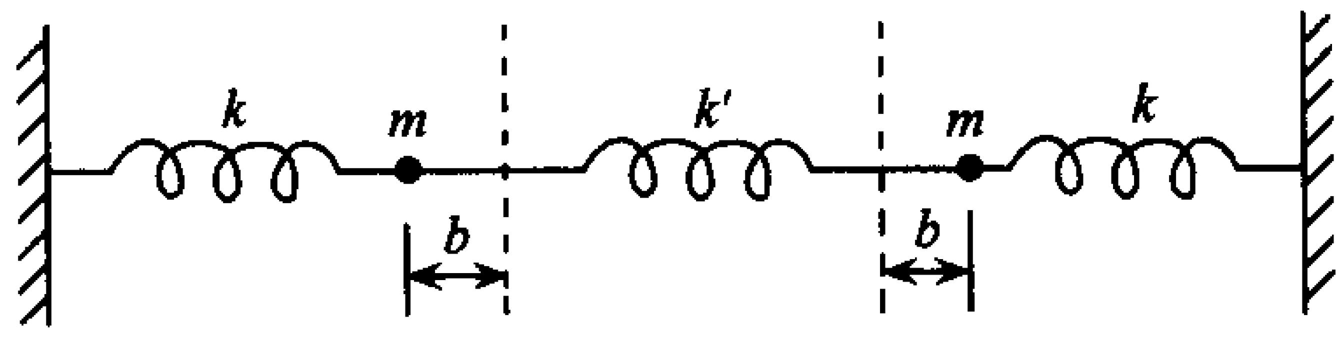


图 10.21

解　如只考虑两质点沿连线方向的运动，这个系统有两个自由度. 取 x_1、x_2 分别表示左、右两个质点的位置，原点均取在平衡位置，x_1 向左为正方向，x_2 向右为正方向，

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}k'(x_1+x_2)^2$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$$
得
$$m\ddot{x}_1+kx_1+k'(x_1+x_2)=0 \tag{1}$$
$$m\ddot{x}_2+kx_2+k'(x_1+x_2)=0 \tag{2}$$
由系统和所给初始条件的对称性,只有一种振动模式被激发.用上述的 x_1、x_2 坐标,两质点始终有 $x_1=x_2$,即两质点的振动振幅和相位都相同的振动模式被激发.

(1)、(2)式可改写为
$$m\ddot{x}_1+(2k'+k)x_1=0$$
$$m\ddot{x}_2+(2k'+k)x_2=0$$
立即可得振动的角频率和周期分别为
$$\omega=\sqrt{\frac{2k'+k}{m}},\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k'+k}}$$

10.1.25　考虑一质量为 m 的粒子在二维势场
$$V(x,y)=-\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}\lambda_0x^2y^2+\frac{1}{4}\lambda_1x^4$$
(k、λ_0、$\lambda_1>0$,均为常量)中的运动,求:

(1) 在什么点(x_0、y_0)质点处于稳定平衡?

(2) 给出围绕这个平衡位置做小振动的拉格朗日函数;

(3) 求(2)问所述振动的简正频率.

解　(1) 由$\frac{\partial V}{\partial x}=0$及$\frac{\partial V}{\partial y}=0$可得
$$-kx+\lambda_0xy^2+\lambda_1x^3=0$$
$$\lambda_0x^2y=0$$
以下几组(x,y)均能满足这两个方程,均为平衡位置.
$$\begin{cases}x_{10}=\sqrt{\dfrac{k}{\lambda_1}},\\ y_{10}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x_{20}=-\sqrt{\dfrac{k}{\lambda_1}},\\ y_{20}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x_{30}=0,\\ y_{30}\ \text{任意}.\end{cases}$$
$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2$$
$$=(-k+\lambda_0y^2+3\lambda_1x^2)(\mathrm{d}x)^2+4\lambda_0xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda_0x^2(\mathrm{d}y)^2$$
将(x_{10},y_{10})或(x_{20},y_{20})分别代入上式,均得
$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2=2k(\mathrm{d}x)^2+\frac{k\lambda_0}{\lambda_1}(\mathrm{d}y)^2>0$$
可见,这两个位置都是稳定平衡位置.

将(x_{30},y_{30})代入,
$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2=(-k+\lambda_0y^2)(\mathrm{d}x)^2$$

可见，当 $-k+\lambda_0 y_{30}^2>0$，即 $y_{30}>\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}$，$(0,y_{30})$ 的那些点都是"稳定平衡位置"，$y_{30}<-\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}$，$(0,y_{30})$ 的那些点也都是"稳定平衡位置"。而当 $-k+\lambda_0 y_{30}^2<0$，即 $-\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}<y_{30}<\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}$ 的那些点 $(0,y_{30})$ 是不稳定的平衡位置，在 $(0,y_{30})$ 对于 y_{30} 不限，沿 y 轴均是随遇平衡的。

(2) 考虑 (x_{10},y_{10}) 这个平衡位置，将 $V(x,y)$ 在 (x_{10},y_{10}) 点作泰勒展开，令 $x'=x-\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}$，$y'=y$，则

$$V(x',y')=-\frac{1}{2}k\left(x'+\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}\right)^2+\frac{1}{2}\lambda_0\left(x'+\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}\right)^2 y'^2+\frac{1}{4}\lambda_1\left(x'+\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}\right)^4$$

$$\approx -\frac{1}{2}k\cdot\frac{k}{\lambda_1}+\frac{1}{2}\lambda_0\frac{k}{\lambda_1}\cdot 0+\frac{1}{4}\lambda_1\left(\frac{k}{\lambda_1}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\left(-k+3\lambda_1\frac{k}{\lambda_1}\right)x'^2+\frac{\lambda}{\lambda_1}ky^2\right]$$

$$=-\frac{k^2}{4\lambda_1}+kx'^2+\frac{k\lambda_0}{2\lambda_1}y'^2$$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}'^2+\frac{1}{2}m\dot{y}'^2-kx'^2-\frac{k\lambda_0}{2\lambda_1}y'^2+\frac{k^2}{4\lambda_1}$$

或
$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2-k\left(x-\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}\right)^2-\frac{k\lambda_0}{2\lambda_1}y^2+\frac{k^2}{4\lambda_1}$$

考虑 (x_{20},y_{20}) 这个平衡位置，将 $V(x,y)$ 在 (x_{20},y_{20}) 处作泰勒展开，也保留到二级小量。令 $x'=x+\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}$，$y'=y$。和上面一样。计算

$$V(x',y')=V(0,0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\bigg|_{(0,0)}x'^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\bigg|_{(0,0)}x'y'+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\bigg|_{(0,0)}y'^2\right]$$

可得

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}'^2+\frac{1}{2}m\dot{y}'^2-kx'^2-\frac{k\lambda_0}{2\lambda_1}y'^2+\frac{k^2}{4\lambda_1}$$

或
$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2-k\left(x+\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}\right)^2-\frac{k\lambda_0}{2\lambda_1}y^2+\frac{k^2}{4\lambda_1}$$

考虑 $(0,y_{30})$，其中 $y_{30}>\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}$ 或 $y_{30}<-\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}$ 这些平衡位置，$V(x,y)$ 在这些位置作泰勒展开，保留到二级小量，可得

$$V(x,y)=\frac{1}{2}(-k+\lambda_0 y_{30}^2)x^2$$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2-\frac{1}{2}(-k+\lambda_0 y_{30}^2)x^2$$

(3) 对于在稳定平衡位置 $\left(\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}},0\right)$ 或 $\left(-\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}},0\right)$ 附近的小振动，有完全相同的拉格

朗日方程,

$$m\ddot{x}' + 2kx' = 0$$

$$m\ddot{y}' + \frac{k\lambda_0}{\lambda_1}y' = 0$$

均有两个简正频率,沿 x 方向振动,$\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}}$,沿 y 方向振动,$\omega_2=\sqrt{\frac{k\lambda_0}{\lambda_1}}$. 沿其他方向,是 x 方向角频率为 ω_1 的简谐振动与 y 方向角频率为 ω_2 的简谐振动的合成运动.

对于第三组稳定平衡位置附近的小振动,

$$m\ddot{x} + (-k + \lambda_0 y_{30}^2)x = 0$$

$$\dot{y} = \text{常量}$$

有一个简正频率:$\omega=\sqrt{\frac{-k+\lambda_0 y_{30}^2}{m}}$,其中 $y_{30}>\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}$ 或 $y_{30}<-\sqrt{\frac{k}{\lambda_0}}$. 但这小振动仅限于在与 x 轴平行的方向,因此严格地讲,这些点不能算作稳定平衡位置.

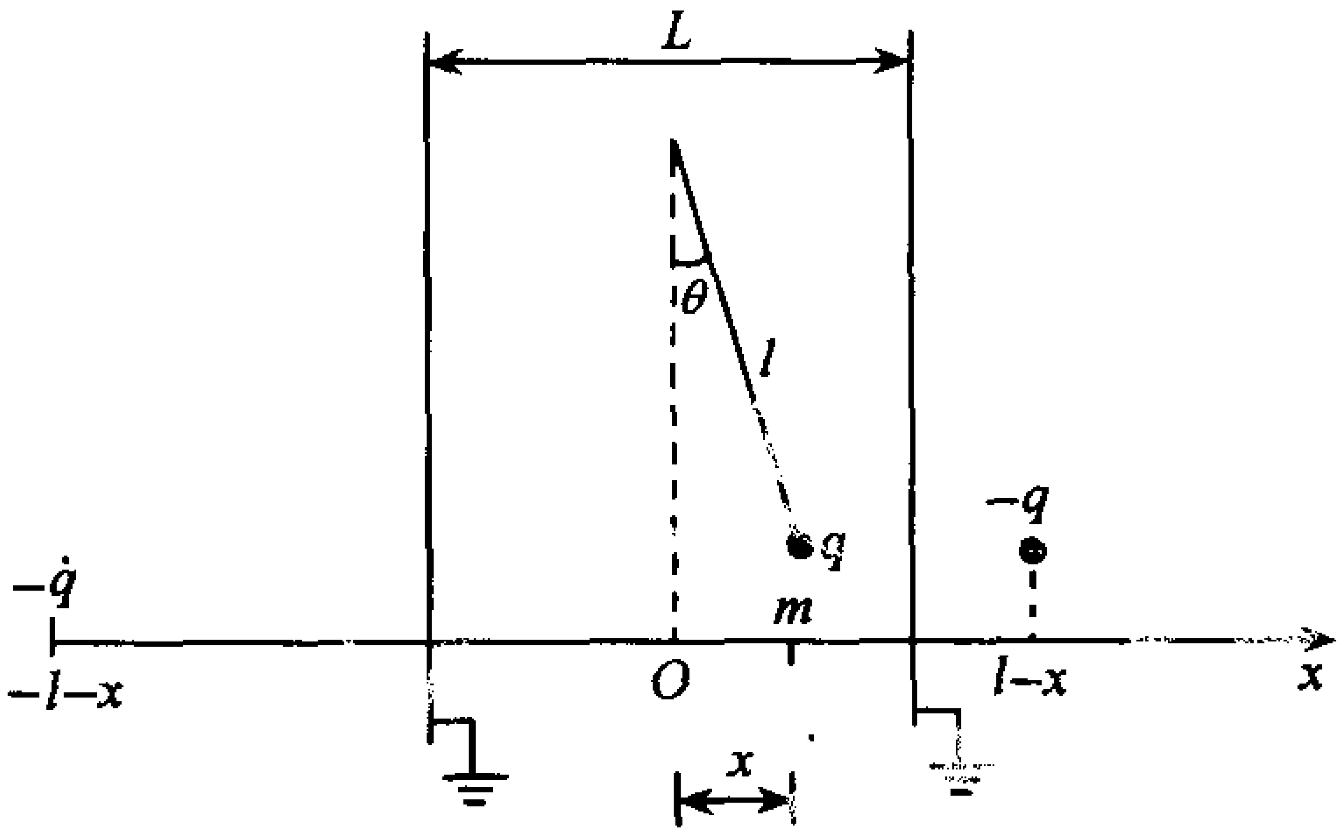


图 10.22

10.1.26 一个质量为 m、半径为 r 的小球,用一根长为 l 的、绝缘的、不可伸长的轻绳挂在电容器两极板的中间,两极板接地,间距为 L,球的电势为 V,平衡时,球位于距两极板等距离处,绳子在铅垂方向,电势满足什么条件时,球可在平衡位置附近做小振动,求振动的角频率,为了简化计算,可作适当的近似.

提示:可用两个镜像电荷代替两个接地的极板,而不是用两串镜像电荷来代替两个接地的极板.

解 小球所带的电荷为

$$q = 4\pi\varepsilon_0 rV$$

用两个镜像电荷代替两个接地的极板来考虑对小球的作用.

取水平的 x 轴,原点取在平衡位置,表示小球位置的坐标 x、θ 只有一个是独立的,小球位于 x(或 θ)位置时,两个镜像电荷分别位于 x 坐标为 $L-x$ 及 $-L-x$ 处,与小球的距离分别为 $L-2x$ 及 $L+2x$,如图 10.22 所示. 用 θ 作为广义坐标,

$$x = l\sin\theta, \quad \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta$$

小球的动能 T 和势能 U 分别为

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned} U &= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L-2x} + \frac{1}{L+2x} - \frac{2}{L}\right) + mgl(1-\cos\theta) \\ &= -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{L}{L^2-4x^2} - \frac{1}{L}\right) + mgl(1-\cos\theta) \\ &= -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{L}\left[\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^{-1} - 1\right] + mgl(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\approx -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4x^2}{L^3}+mgl\cdot\frac{1}{2}\theta^2\approx\left(\frac{1}{2}mgl-\frac{2q^2l^2}{\pi\varepsilon_0L^3}\right)\theta^2=\left(\frac{1}{2}mgl-\frac{32\pi\varepsilon_0r^2V^2l^2}{L^3}\right)\theta^2$$

可在平衡位置附近做小振动的条件是$\left.\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0}>0$，

即
$$\frac{1}{2}mgl-\frac{32\pi\varepsilon_0r^2V^2l^2}{L^3}>0$$

因此要求电势 V 满足的条件是

$$V<\left(\frac{mgL^3}{64\pi\varepsilon_0r^2l}\right)^{1/2}$$

在平衡位置附近做小振动的运动微分方程，由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$(其中 $L=T-U$)得

$$ml^2\ddot{\theta}+\left(mgl-\frac{64\pi\varepsilon_0r^2V^2l^2}{L^3}\right)\theta=0$$

$$\omega=\left(\frac{g}{l}-\frac{64\pi\varepsilon_0r^2V^2}{mL^3}\right)^{1/2}$$

说明：此题更严格的解法，当然是用两串镜像电荷而不是只用两个镜像电荷.

$$U=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)L-2x}+\frac{1}{(2n-1)L+2x}-\frac{2}{(2n-1)L}\right]+mg(1-\cos\theta)$$

$$=-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)L}\left[1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2L^2}-1\right]+mg(1-\cos\theta)$$

$$\approx-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{4x^2}{L^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}+\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$\approx\left(\frac{1}{2}mgl-\frac{32\pi\varepsilon_0r^2V^2l^2}{L^3}\alpha\right)\theta^2$$

其中　$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$

可在平衡位置附近做小振动，要求电势满足的条件改为

$$V<\left(\frac{mgL^3}{64\pi\varepsilon_0r^2l}\right)^{1/2}\cdot\alpha^{-1/2}$$

小振动的角频率改为

$$\omega=\left(\frac{g}{l}-\frac{64\pi\varepsilon_0r^2V^2}{mL^3}\alpha\right)^{1/2}$$

α 这个无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$收敛是很快的，只取一项($n=1$)时，$\alpha=1$，取两项时($n=1,2$)，$\alpha=1.037$，取三项时，$\alpha=1.045$，取四项时，$\alpha=1.0479$，取五项时，$\alpha=1.0492$.

可见，用两个镜像电荷而不用两串镜像电荷所引起的误差是相当小的.

10.1.27　三个自然长度为$\sqrt{2}$、劲度系数为 k 的轻弹簧，与一质量为 m 的质点相连，三个弹簧的另一端分别固定在$(-1,1)$、$(1,1)$和$(-1,-1)$处，质点 m 仅在水平且光滑的 xy 平面内运动.

(1) 写出系统的拉格朗日函数；

(2) 确定平衡位置,并说明是否稳定平衡;

(3) 写出系统在平衡位置附近做小振动的拉格朗日函数;

(4) 求简正频率和简正坐标;

(5) 画出振动模式图.

解 (1) $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k\{[(x+1)^2+(y-1)^2]^{1/2} - \sqrt{2}\}^2$

$$- \frac{1}{2}k\{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{1/2} - \sqrt{2}\}^2$$

$$- \frac{1}{2}k\{[(x+1)^2+(y+1)^2]^{1/2} - \sqrt{2}\}^2$$

(2) 平衡位置处有

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

由 $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ 得

$$k\left[\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} - \sqrt{2}\right]\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}$$

$$+ k\left[\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} - \sqrt{2}\right]\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

$$+ k\left[\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} - \sqrt{2}\right]\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}} = 0$$

$$x+1+x-1+x+1-\sqrt{2}\left[\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}\right] = 0$$

由 $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ 得

$$y-1+y-1+y+1-\sqrt{2}\left[\frac{y-1}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} + \frac{y+1}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}\right] = 0$$

$x=0, y=0$ 是上述两个方程的解,因此,(0,0)点是平衡位置.

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = k\left\{3 - \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}\right] - \frac{(x+1)^2}{[(x+1)^2+(y-1)^2]^{3/2}}$$

$$\left.\left. - \frac{(x-1)^2}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{3/2}} - \frac{(x+1)^2}{[(x+1)^2+(y+1)^2]^{3/2}}\right\}\right|_{(0,0)} = \frac{3}{2}k$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = \frac{3}{2}k$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,0)} = k(-\sqrt{2})\Big\{-\frac{(x+1)(y-1)}{[(x+1)^2+(y-1)^2]^{3/2}} - \frac{(x-1)(y-1)}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{3/2}} - \frac{(x+1)(y+1)}{[(x+1)^2+(y+1)^2]^{3/2}}\Big\}\Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2}k$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,0)} xy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)} y^2$$

$$= \frac{3}{2}kx^2 + kxy + \frac{3}{2}ky^2 = \frac{3}{2}k\left(x+\frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{4}{3}ky^2 > 0$$

可见，(0,0)点是稳定平衡位置.

(3) 在平衡位置(0,0)附近，

$$V(x,y) \approx V(0,0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,0)} xy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)} y^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}kx^2 + kxy + \frac{3}{2}ky^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2\right)$$

(4) 由动能、势能的表达式，可写惯性矩阵和刚度矩阵为.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k & \frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2}k & \frac{3}{2}k \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}k - m\omega^2 & \frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2}k & \frac{3}{2}k - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}k - m\omega^2 & \frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2}k & \frac{3}{2}k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$m^2\omega^4 - 3mk\omega^2 + 2k^2 = 0$$

解出

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

将 ω_1 代入(1)式，取 $u_1^{(1)}=1$，得 $u_2^{(1)}=-1$；将 ω_2 代入(1)式，取 $u_1^{(2)}=1$，得 $u_2^{(2)}=-1$.

由简正坐标和原用坐标的关系，

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0\\0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$$

简正坐标的常数倍也是简正坐标，可取

$$\xi=x+y,\quad \eta=x-y$$

为简正坐标.

(5) 振动模式可图示如图 10.23：

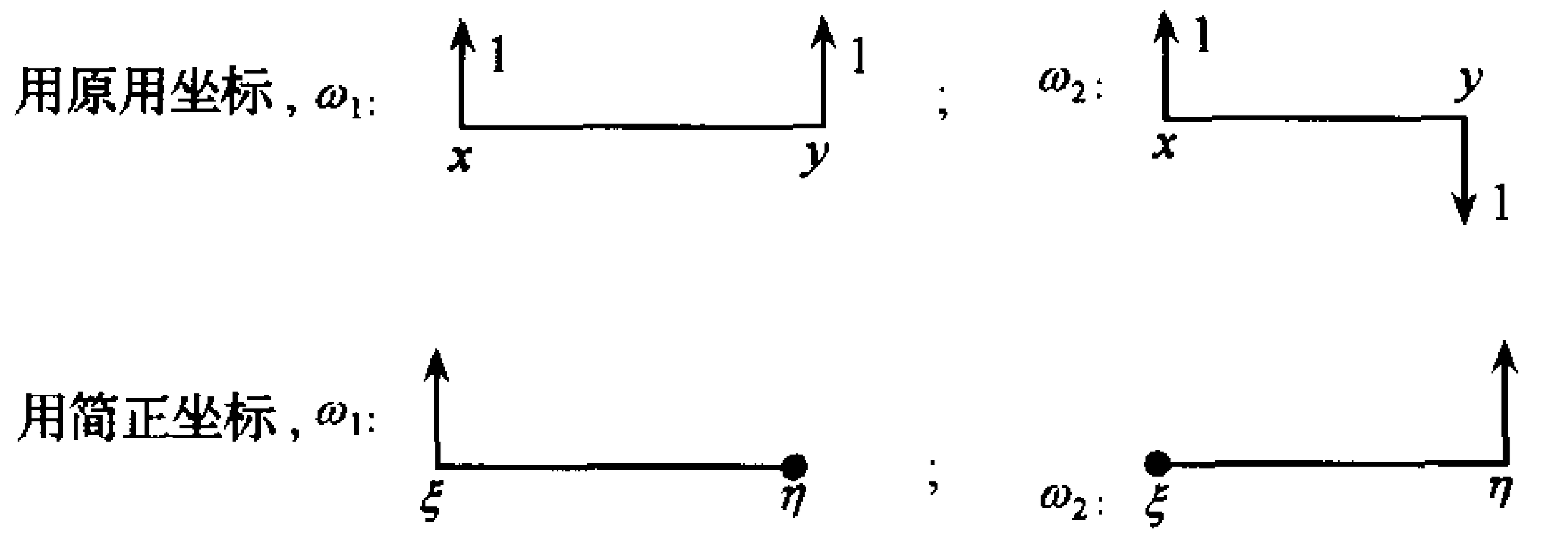


图 10.23

10.1.28 一质量为 m 的质点在重力作用下在一个方程为

$$z=x^2+y^2-xy$$

的光滑曲面上运动，其中 z 轴指向竖直向上.

(1) 求此质点的运动微分方程；

(2) 求质点围绕稳定平衡位置做小振动的简正频率；

(3) 若将质点由平衡位置稍微移开一点再放开它，要保证只有较高频率的简正模式被激发，x 和 y 的位移之比应为多大?

解 (1)

$$z=x^2+y^2-xy$$

$$\dot{z}=2x\dot{x}+2y\dot{y}-\dot{x}y-x\dot{y}=\dot{x}(2x-y)+\dot{y}(2y-x)$$

$$L=\frac{1}{2}m[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{x}^2(2x-y)^2+\dot{y}^2(2y-x)^2$$

$$+2\dot{x}\dot{y}(2x-y)(2y-x)]-mg(x^2+y^2-xy)$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{x}+\dot{x}(2x-y)^2+\dot{y}(2x-y)(2y-x)]$$

$$=2\dot{x}^2(2x-y)-\dot{y}^2(2y-x)+2\dot{x}\dot{y}(2y-x)-\dot{x}\dot{y}(2x-y)-2gx+gy$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{y}+\dot{y}(2y-x)^2+\dot{x}(2x-y)(2y-x)]$$

$$=-\dot{x}^2(2x-y)+2\dot{y}(2y-x)-\dot{x}\dot{y}(2y-x)+2\dot{x}\dot{y}(2x-y)-2gy+gx$$

(2) 在平衡位置，$\dot{x}=0,\dot{y}=0,\ddot{x}=0,\ddot{y}=0$，由上述运动微分方程或由 $\frac{\partial V}{\partial x}=0,\frac{\partial V}{\partial y}=0$，均可得平衡位置满足的方程为

$$-2gx+gy=0$$

$$-2gy+gx=0$$

可见，$x=0,y=0$ 为平衡位置.

在平衡位置附近的运动，仅保留二级小量，拉格朗日函数可近似为

$$L \approx \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mg(x^2+y^2-xy)$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$或由上述运动微分方程作近似，只保留一级小量，均可得在平衡位置附近运动的运动微分方程为

$$\ddot{x}=-2gx+gy$$
$$\ddot{y}=-2gy+gx$$

设

$$x=u_1\cos(\omega t+\alpha)$$
$$y=u_2\cos(\omega t+\alpha)$$

代入运动微分方程，得

$$\begin{pmatrix} 2g-\omega^2 & -g \\ -g & 2g-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0 \tag{1}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2g-\omega^2 & -g \\ -g & 2g-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\omega^4-4g\omega^2+3g=0$$

解得

$$\omega_1=\sqrt{g},\qquad \omega_2=\sqrt{3g}$$

(3) 将 ω_2 代入(1)式得

$$(2g-3g)u_1^{(2)}-gu_2^{(2)}=0$$

$$\frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}}=-1$$

因此，当 x、y 的初始位移大小相等、正负号相反时，从那里静止释放，就只有较高频率的振动模式被激发，$\frac{u_1^{(2)}}{u_2^{(2)}}=-1$ 就是题目要求的 x 和 y 的位移之比.

10.1.29 图 10.24 中两物体质量均为 m、两弹簧的劲度系数均为 k，绳子不可伸长，绳子与滑轮间无摩擦力. 当系统在平衡位置时给左边物体向下的初速度 v_0，求系统的运动.

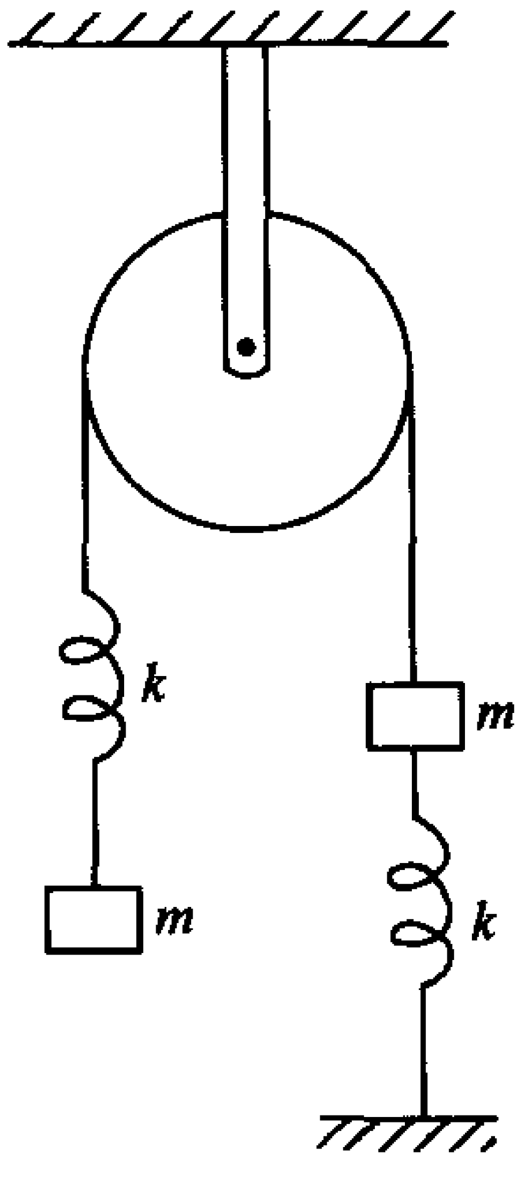


图 10.24

解　取竖直向上的 x_1 坐标表示右边物体的位置，竖直向下的 x_2 坐标表示左边物体的位置，x_1、x_2 的零点分别为系统平衡时 m_1、m_2 所在位置，弹簧力和重力的合力的势能为

$$V=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2=kx_1^2+\frac{1}{2}kx_2^2-kx_1x_2$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{pmatrix}$$

由 $|\boldsymbol{H}|=0$ 得

$$m^2\omega^4 - 3mk\omega^2 + k^2 = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m},\quad \omega_2^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega_1) = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2}k & -k \\ -k & -\frac{1+\sqrt{5}}{2}k \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\boldsymbol{H}(\omega_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}k & k \\ k & \frac{1-\sqrt{5}}{2}k \end{bmatrix}$$

取 $u_1^{(1)}=1$,则 $u_2^{(1)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

$$\boldsymbol{H}(\omega_2) = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}k & -k \\ -k & \frac{-1+\sqrt{5}}{2}k \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\boldsymbol{H}(\omega_2) = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}k & k \\ k & \frac{1+\sqrt{5}}{2}k \end{bmatrix}$$

取 $u_1^{(2)}=1$,则 $u_2^{(2)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

两个特解为

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ x_2^{(1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_2^{(2)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}$$

通解为

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} = C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_2 &= C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}$$

初始条件为:$t=0$ 时,$x_1=0,\dot{x}_1=0,x_2=0,\dot{x}_2=v_0$,定出

$$C_1 = -\frac{v_0}{\sqrt{5}\,\omega_1} = -0.276v_0\sqrt{\frac{m}{k}},\quad C_2 = \frac{v_0}{\sqrt{5}\,\omega_2} = 0.724v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$x_1 = -0.276 v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(1.618\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + 0.724 v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(0.618\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$x_2 = 0.171 v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(1.618\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + 1.17 v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(0.618\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

10.1.30 质量均为 m 的两小球固定在长度为 $2l$ 的轻杆上，杆的两端支撑在劲度系数均为 k 的弹簧上，如图 10.25 所示，求系统只做竖直方向的小振动时的简正频率以及节点（振动模式中保持不动的点）的位置.

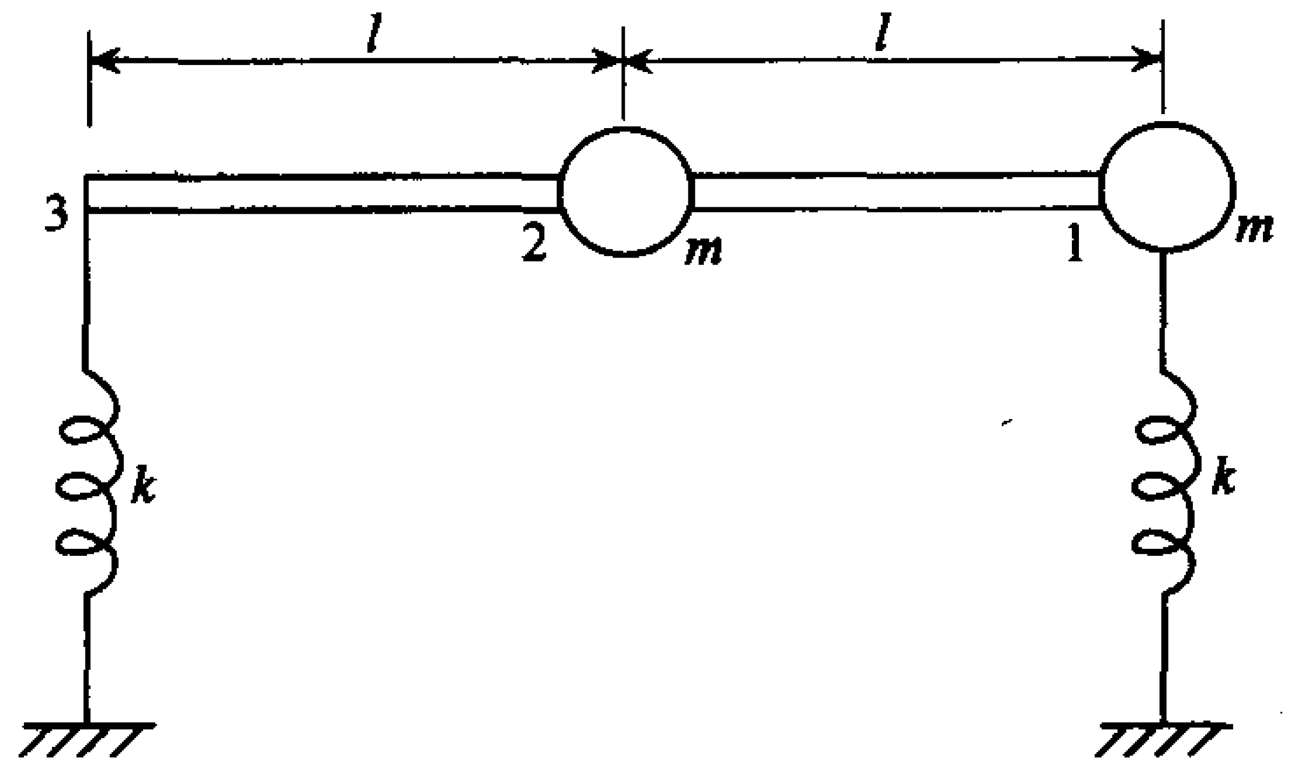


图 10.25

解 取竖直向上的 x_1、x_2、x_3 轴分别表示杆的右端、中心和左端的位置，原点分别取在弹簧为原长时 1、2、3 点的位置.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 + mgx_1 + mgx_2$$

x_1、x_2、x_3 不是都独立的，有约束关系

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3), \quad 或 \quad x_3 = 2x_2 - x_1$$

取 x_1、x_2 为广义坐标，

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(2x_2 - x_1)^2 + mgx_1 + mgx_2$$
$$= kx_1^2 + 2kx_2^2 - 2kx_1x_2 + mgx_1 + mgx_2$$

V 中有广义坐标的线性项是因为 x_1、x_2 的零点未取在平衡位置. 由 $\frac{\partial V}{\partial x_1}=0$、$\frac{\partial V}{\partial x_2}=0$ 可定出平衡位置：

$$x_1 = -\frac{3mg}{2k}, \quad x_2 = -\frac{mg}{k}$$

令 $x'_1 = x_1 + \frac{3mg}{2k}$，$x'_2 = x_2 + \frac{mg}{k}$，可将动能、势能写成

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2_1 + \frac{1}{2}m\dot{x}'^2_2$$

$$V = V_0 + kx'^2_1 + 2kx'^2_2 - 2kx'_1x'_2$$

其中 $V_0 = V(x'_1, x'_2)\Big|_{(0,0)} = V(x_1, x_2)\Big|_{\left(-\frac{3mg}{2k}, -\frac{mg}{k}\right)}$，因不影响结果，不必算出.

惯性矩阵、刚度矩阵和特征矩阵分别为

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 4k \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2k-m\omega^2 & -2k\\ -2k & 4k-m\omega^2\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}2k-m\omega^2 & -2k\\ -2k & 4k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$m^2\omega^4-6km\omega^2+4k^2=0$$

可得

$$\omega_1^2=(3+\sqrt{5})\frac{k}{m},\qquad \omega_2^2=(3-\sqrt{5})\frac{k}{m}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega_1)=\begin{pmatrix}(-1-\sqrt{5})k & -2k\\ -2k & (1-\sqrt{5})k\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{H}(\omega_1)=\begin{pmatrix}(1-\sqrt{5})k & 2k\\ 2k & -(1+\sqrt{5})k\end{pmatrix}$$

取 $u_1^{(1)}=1$,则

$$u_2^{(1)}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=-1.618$$

$$\boldsymbol{H}(\omega_2)=\begin{pmatrix}(-1+\sqrt{5})k & -2k\\ -2k & (1+\sqrt{5})k\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{H}(\omega_2)=\begin{pmatrix}(1+\sqrt{5})k & 2k\\ 2k & (-1+\sqrt{5})k\end{pmatrix}$$

取 $u_1^{(2)}=1$,则

$$u_2^{(2)}=-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618$$

两种振动模式中节点的位置如下图 10.26(a)、(b)所示.

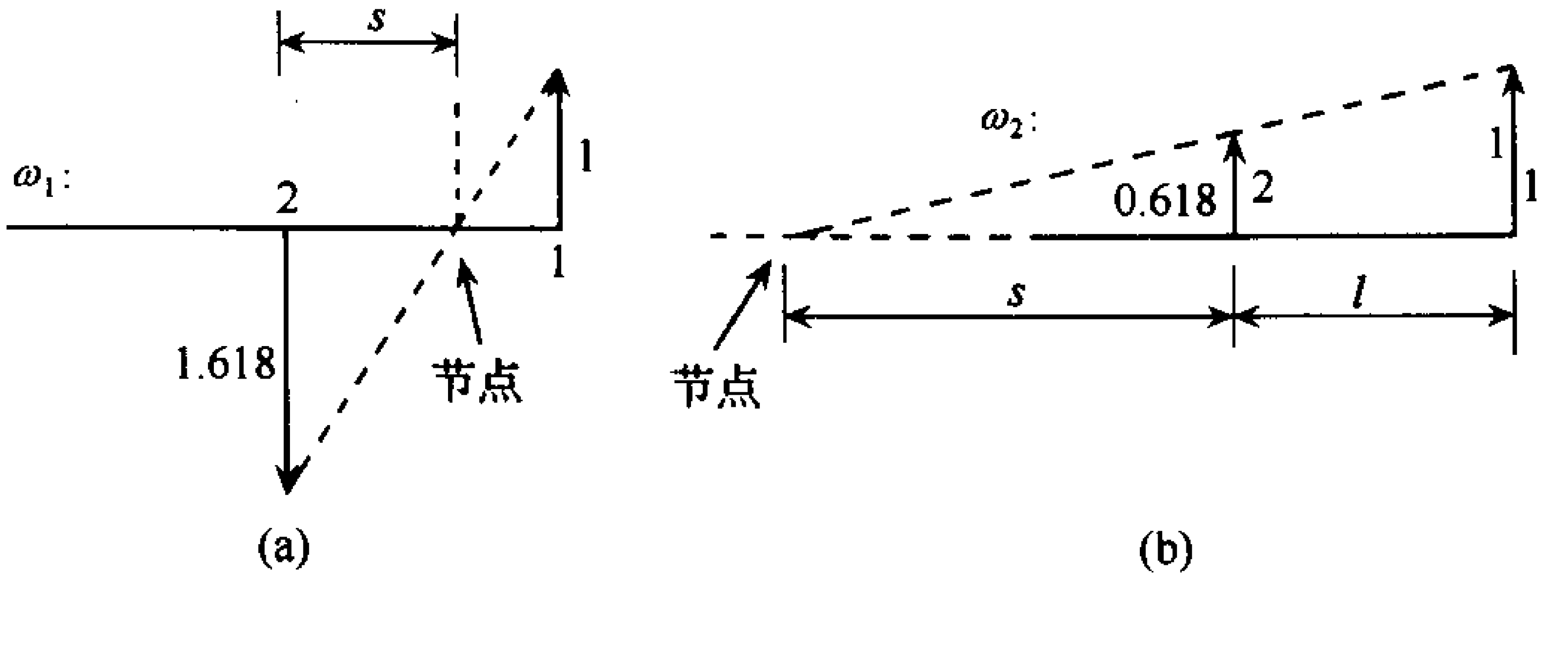


图 10.26

对于简正频率为

$$\omega_1=\sqrt{(3+\sqrt{5})\frac{k}{m}}=2.288\sqrt{\frac{k}{m}}$$

的模式,节点位于 2 点的右方 s 处,

$$\frac{s}{l-s}=1.618,\quad s=0.618l$$

对于简正频率为

$$\omega_2 = \sqrt{(3-\sqrt{5})\frac{k}{m}} = 0.874\sqrt{\frac{k}{m}}$$

的模式，节点位于 2 点的左方 s 处，

$$\frac{s}{s+l} = 0.618, \quad s = 1.618l$$

10.1.31　一个质量为 $4m$、半径为 $2b$ 的均质半球形碗静置在一光滑的桌面上，其边缘所在平面是水平的. 在它内部躺着一个质量为 m、半径为 b 的完全粗糙的均质球，系统运动时，球心与碗心保持在一个竖直平面内，即系统平衡时它们所在的竖直平面. 证明：小振动的简正频率为 ω_1、ω_2，其平方 ω_1^2、ω_2^2 是下列方程的根：

$$156b^2x^2 - 260bgx + 75g^2 = 0$$

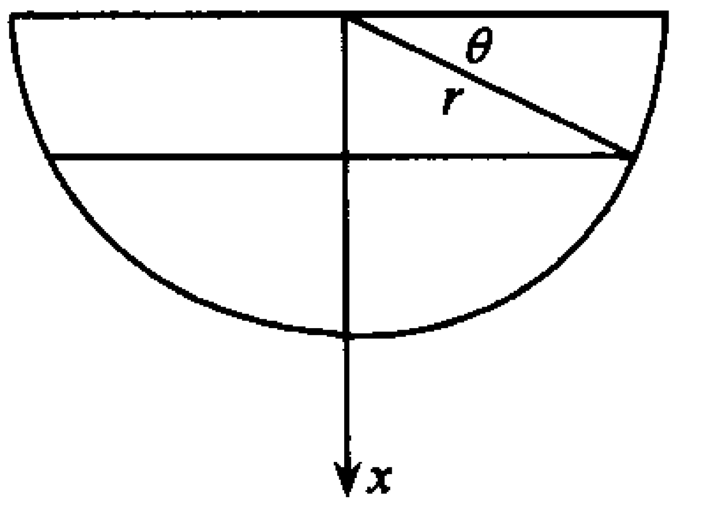


图 10.27

证明　先求半球形碗的质心位置，由图 10.27，

$$mx_C = \int x\mathrm{d}m$$

$$x = r\sin\theta, \quad m = 2\pi r^2\rho$$

位于 $x \sim x+\mathrm{d}x$ 处的质元质量

$$\mathrm{d}m = 2\pi r\cos\theta \cdot r\mathrm{d}\theta \cdot \rho$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi r^2\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta \cdot \rho 2\pi r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}r = b$$

这里用了半球形碗的半径 $r=2b$.

半球形碗对通过碗心的水平轴的转动惯量为

$$I = \frac{2}{3}(4m)(2b)^2 = \frac{32}{3}mb^2$$

用关于转动惯量的平行轴定理，半球形碗对通过质心的水平轴的转动惯量为

$$I_C = I - 4m \cdot b^2 = \frac{20}{3}mb^2$$

取静坐标系 Oxy，x_1、y_1 表示碗的质心 C 的坐标，x_2、y_2 表示球心 D 的坐标，$x_{O'}$ 表示碗心的 x 坐标，φ 是 $O'C$ 与竖直线的夹角，θ 是 $O'D$ 与竖直线的夹角，用 ψ 表示球围绕球心顺时针的转角，如图 10.28 所示.

以 $x_{O'}$、φ、θ 作为广义坐标，

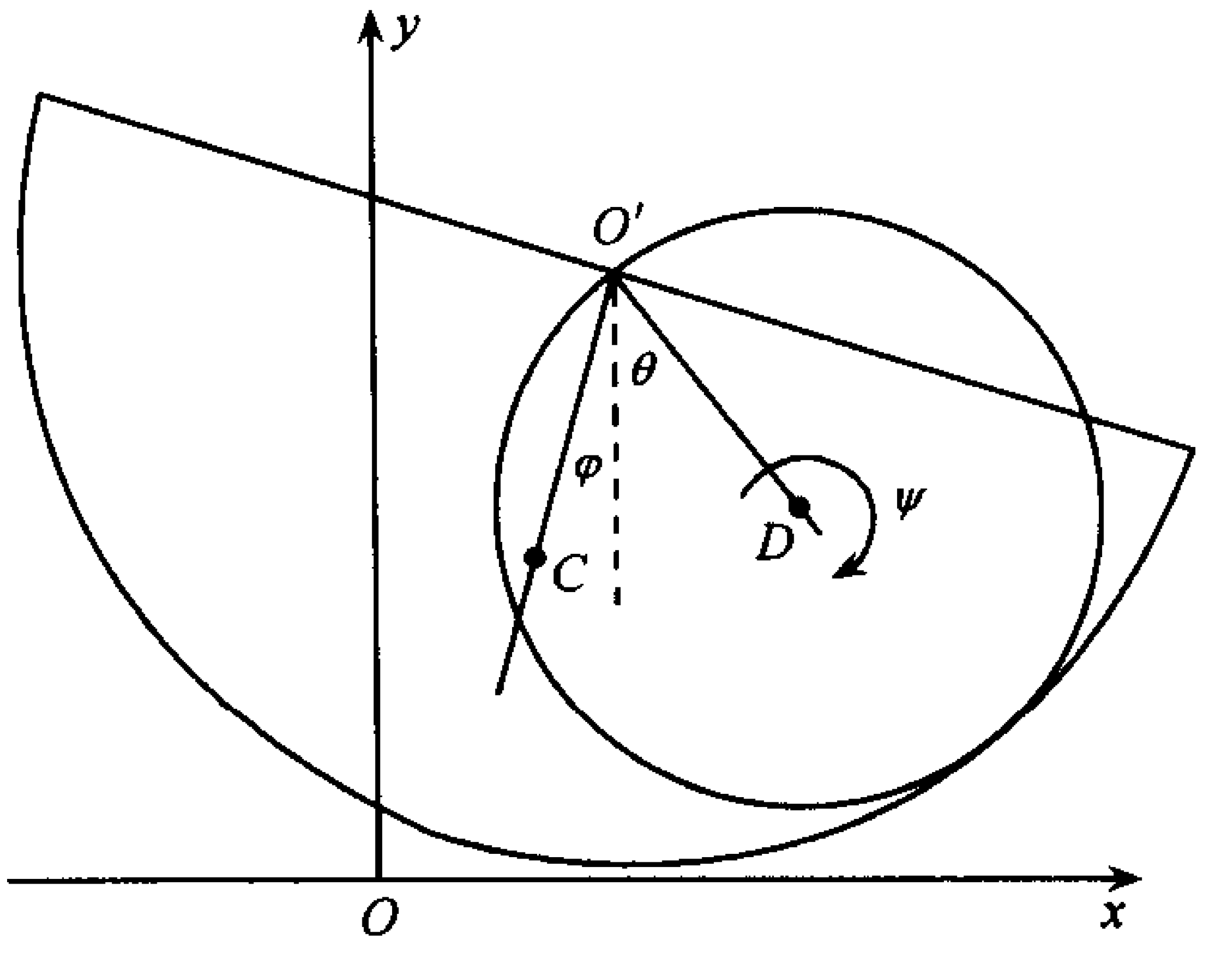


图 10.28

$$x_1 = x_{O'} - b\sin\varphi, \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_{O'} - b\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$y_1 = 2b - b\cos\varphi, \quad \dot{y}_1 = b\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$x_2 = x_{O'} + b\sin\theta, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_{O'} + b\dot{\theta}\cos\theta$$

$$y_2 = 2b - b\cos\theta, \quad \dot{y}_2 = b\dot{\theta}\sin\theta$$

考虑碗为参考系,球与碗的两接触点间无相对滑动,D 点的速度为 $b(\dot{\theta}+\dot{\varphi})$,球上的接触点相对于 D 点"平动参考系"(对碗参考系而言)的角速度也就是球相对于碗的角速度设为$\dot{\psi}'$(规定顺时针方向为正),则

$$b(\dot{\theta}+\dot{\varphi}) - b\dot{\psi}' = 0$$

所以

$$\dot{\psi}' = \dot{\theta} + \dot{\varphi}$$

碗相对于静参考系的角速度为$\dot{\varphi}$,球相对于球心平动参考系的角速度$\dot{\psi}$也就是球相对于静参考系的角速度,用角速度合成法则,

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}' + \dot{\varphi} = \dot{\theta} + 2\dot{\varphi}$$

将$\dot{x}_1$、$\dot{y}_1$、$\dot{x}_2$、$\dot{y}_2$、$\dot{\psi}$与 $x_{O'}$、φ、θ、$\dot{x}_{O'}$、$\dot{\varphi}$、$\dot{\theta}$ 的关系计算系统的动能,得

$$T = \frac{1}{2}\times 4m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mb^2\dot{\psi}^2$$

$$= 2m(\dot{x}_{O'}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 - 2b\dot{x}_{O'}\dot{\varphi}\cos\varphi) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_{O'}^2 + b^2\dot{\theta}^2$$

$$+ 2b\dot{x}_{O'}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{10}{3}mb^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{5}mb^2(\dot{\theta} + 2\dot{\varphi})^2$$

$$V = 4mgy_1 + mgy_2$$

$$= 4mg(2b - b\cos\varphi) + mg(2b - b\cos\theta)$$

$$L = T - V$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial x_{O'}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{O'}} = \text{常量} = 0$$

求简正频率与初始条件无关,因此我们可以选取初始条件,使上述常量为零,

$$5m\dot{x}_{O'} - 4mb\dot{\varphi}\cos\varphi + mb\dot{\theta}\cos\theta = 0$$

$$\dot{x}_{O'} = \frac{4}{5}b\dot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{5}b\dot{\theta}\cos\theta \tag{1}$$

(1) 式可以积分,

$$x_{O'} = \frac{4}{5}b\sin\varphi - \frac{1}{5}b\sin\theta + \text{常量}$$

这个式子的物理意义是系统在 x 方向动量守恒.(1)式可以积分,是几何约束,可以用它减少系统的自由度,这样就消除了一个非振动自由度,剩下的是两个振动自由度.将(1)式代入动能的表达式,并做小振动近似.只保留二级小量,

$$T \approx \frac{68}{15}mb^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{5}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{8}{5}mb^2\dot{\varphi}\dot{\theta}$$

$$V \approx 5mgb + 2mgb\varphi^2 + \frac{1}{2}mgb\theta^2$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \frac{136}{15}mb^2 & \frac{8}{5}mb^2 \\ \frac{8}{5}mb^2 & \frac{6}{5}mb^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 4mgb & 0 \\ 0 & mgb \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} 4mgb - \frac{136}{15}mb^2\omega^2 & -\frac{8}{5}mb^2\omega^2 \\ -\frac{8}{5}mb^2\omega^2 & mgb - \frac{6}{5}mb^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

令 $x=\omega^2$，

$$\left(4mgb - \frac{136}{15}mb^2x\right)\left(mgb - \frac{6}{5}mb^2x\right) - \left(-\frac{8}{5}mb^2x\right)^2 = 0$$

约去公因子$(mb)^2$，可得

$$\frac{624}{75}b^2x^2 - \frac{208}{15}bgx + 4g^2 = 0$$

两边乘以$\frac{75}{4}$，即得

$$156b^2x^2 - 260bgx + 75g^2 = 0$$

10.1.32 质量为 m 的质点用长为 l 的不可伸长的轻绳系在另一质量为 m 的质点上，这个质点又用同样的轻绳系在套在光滑水平杆上的、质量为 $2m$ 的小环上. 试证：在平衡位置附近的小振动中有一种振动模式，下半段绳子与铅垂线所成的角恒为上半段绳子与铅垂线所成的角的两倍；另一种振动模式，上述两个角度大小相等但符号相反.

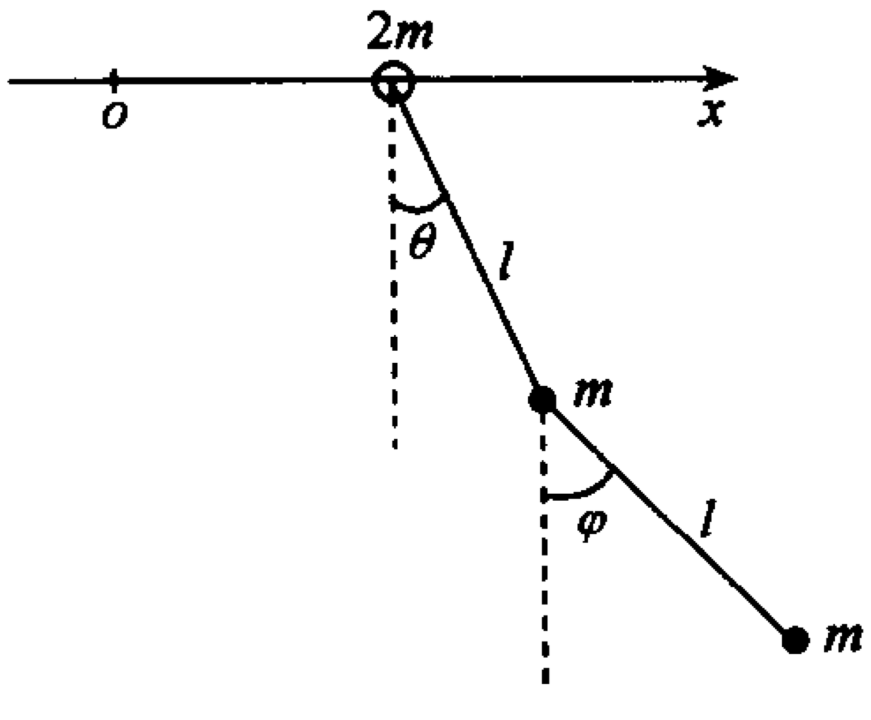


图 10.29

证明 取图 10.29 的 x、θ、φ 为广义坐标，

$$T = \frac{1}{2} \times 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2]$$

$$+ \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta + l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2]$$

$$= 2m\dot{x}^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{x}(2\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi) + ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)$$

$$\approx 2m\dot{x}^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{x}(2\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

这里用了小振动近似，θ、φ、$\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$均为小量.

$$V = mgl(1 - \cos\theta) + mgl(1 - \cos\theta) + mgl(1 - \cos\varphi)$$

$$\approx mgl\theta^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

$$L = T - V$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\text{常量}$$

与上题所述一样,可取初始条件,使此常量为零,

$$\dot{x}=-\frac{1}{4}l(2\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

它也是可积分的几何约束,用它可消除一个非振动自由度,

$$\begin{aligned}T&=2m\left[-\frac{1}{4}l(2\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right]^2+ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\\&\quad-\frac{1}{4}ml^2(2\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\\&=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\frac{3}{4}\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}ml^2 & \frac{1}{2}ml^2\\ \frac{1}{2}ml^2 & \frac{3}{4}ml^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}2mgl & 0\\ 0 & mgl\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}2mgl-ml^2\omega^2 & -\frac{1}{2}ml^2\omega^2\\ -\frac{1}{2}ml^2\omega^2 & mgl-\frac{3}{4}ml^2\omega^2\end{vmatrix}=0$$

可得

$$\omega^4-\frac{5g}{l}\omega^2+4\frac{g^2}{l^2}=0$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

将 ω_1、ω_2 分别代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$,可得两个独立的方程为

$$mglu_1^{(1)}-\frac{1}{2}mglu_2^{(1)}=0$$

$$-2mglu_1^{(2)}-2mglu_2^{(2)}=0$$

所以

$$\frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}=2,\quad \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}}=-1$$

这就证明了简正频率为$\sqrt{\frac{g}{l}}$的模式.任何时刻均有 $\varphi=2\theta$,简正频率为 $2\sqrt{\frac{g}{l}}$的模式,任何时刻均有 $\varphi=-\theta$.

10.1.33　一个系统运动时,其动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$$

$$V=2q_1^2+\frac{5}{2}q_2^2+2q_3^2-q_1q_2-q_2q_3$$

如开始时，$q_1=q_{10}, q_2=q_{20}, q_3=q_{30}, \dot{q}_1=\dot{q}_2=\dot{q}_3=0$，求此系统的运动.

解　$$L=T-V=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-2q_1^2-\frac{5}{2}q_2^2-2q_3^2+q_1q_2+q_2q_3$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得运动微分方程为

$$\ddot{q}_1+4q_1-q_2=0$$
$$\ddot{q}_2+5q_2-q_1-q_3=0$$
$$\ddot{q}_3+4q_3-q_2=0$$

设特解具有下列形式：$q_j=u_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，代入上述微分方程，得

$$\begin{cases}(4-\omega^2)u_1-u_2=0\\ -u_1+(5-\omega^2)u_2-u_3=0\\ -u_2+(4-\omega^2)u_3=0\end{cases}\tag{1}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}4-\omega^2 & -1 & 0\\ -1 & 5-\omega^2 & -1\\ 0 & -1 & 4-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

可解出　$$\omega_1=\sqrt{3},\quad \omega_2=2,\quad \omega_3=\sqrt{6}.$$

将 ω_1 代入方程组(1)，取 $u_1^{(1)}=1$，得

$$u_2^{(1)}=1,\quad u_3^{(1)}=1$$

将 ω_2 代入方程组(1)，取 $u_1^{(2)}=1$，得

$$u_2^{(2)}=0,\quad u_3^{(2)}=-1$$

将 ω_3 代入方程组(1)，取 $u_1^{(3)}=1$，得

$$u_2^{(3)}=-2,\quad u_3^{(3)}=1$$

ω_1、ω_2、ω_3 均为实数，说明 q_j 均为振动. 特解可写为

$$\begin{cases}q_1^{(1)}=\cos(\sqrt{3}\,t+\alpha_1)\\ q_2^{(1)}=\cos(\sqrt{3}+\alpha_1)\\ q_3^{(1)}=\cos(\sqrt{3}+\alpha_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}q_1^{(2)}=\cos(2t+\alpha_2)\\ q_2^{(2)}=0\\ q_3^{(2)}=-\cos(2t+\alpha_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}q_1^{(3)}=\cos(\sqrt{6}\,t+\alpha_3)\\ q_2^{(3)}=-2\cos(\sqrt{6}\,t+\alpha_3)\\ q_3^{(3)}=\cos(\sqrt{6}\,t+\alpha_3)\end{cases}$$

通解为　$$q_j=\sum_{i=1}^{3}C_iu_j^{(i)}\cos(\omega_it+\alpha_i)\quad (j=1,2,3)$$

即　$$q_1=C_1\cos(\sqrt{3}\,t+\alpha_1)+C_2\cos(2t+\alpha_2)+C_3\cos(\sqrt{6}\,t+\alpha_3)$$

$$q_2 = C_1\cos(\sqrt{3}t + \alpha_1) - 2C_3\cos(\sqrt{6}t + \alpha_3)$$

$$q_3 = C_1\cos(\sqrt{3}t + \alpha_1) - C_2\cos(2t + \alpha_2) + C_3\cos(\sqrt{6}t + \alpha_3)$$

由初始条件：$t=0$ 时，$q_1=q_{10}$，$q_2=q_{20}$，$q_3=q_{30}$，$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\dot{q}_3=0$，可定 C_1、C_2、C_3、α_1、α_2 和 α_3，可得

$$q_1 = \frac{1}{6}[2(q_{10} + q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{3}t + 3(q_{10} - q_{30})\cos 2t + (q_{10} - 2q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{6}t]$$

$$q_2 = \frac{1}{3}[(q_{10} + q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{3}t - (q_{10} - 2q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{6}t]$$

$$q_3 = \frac{1}{6}[2(q_{10} + q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{3}t - 3(q_{10} - q_{30})\cos 2t + (q_{10} - 2q_{20} + q_{30})\cos\sqrt{6}t]$$

10.1.34　三个质量均为 m 的物体，被限制在沿交于一点相互成 120°角、处于同一水平面的三条光滑直线运动，用三根劲度系数均为 k 的轻弹簧将它们相互连结，如图 10.30 所示. 图中三质点分别位于 O_1、O_2、O_3 时，系统处于平衡位置. 考虑系统在平衡位置附近的小振动.

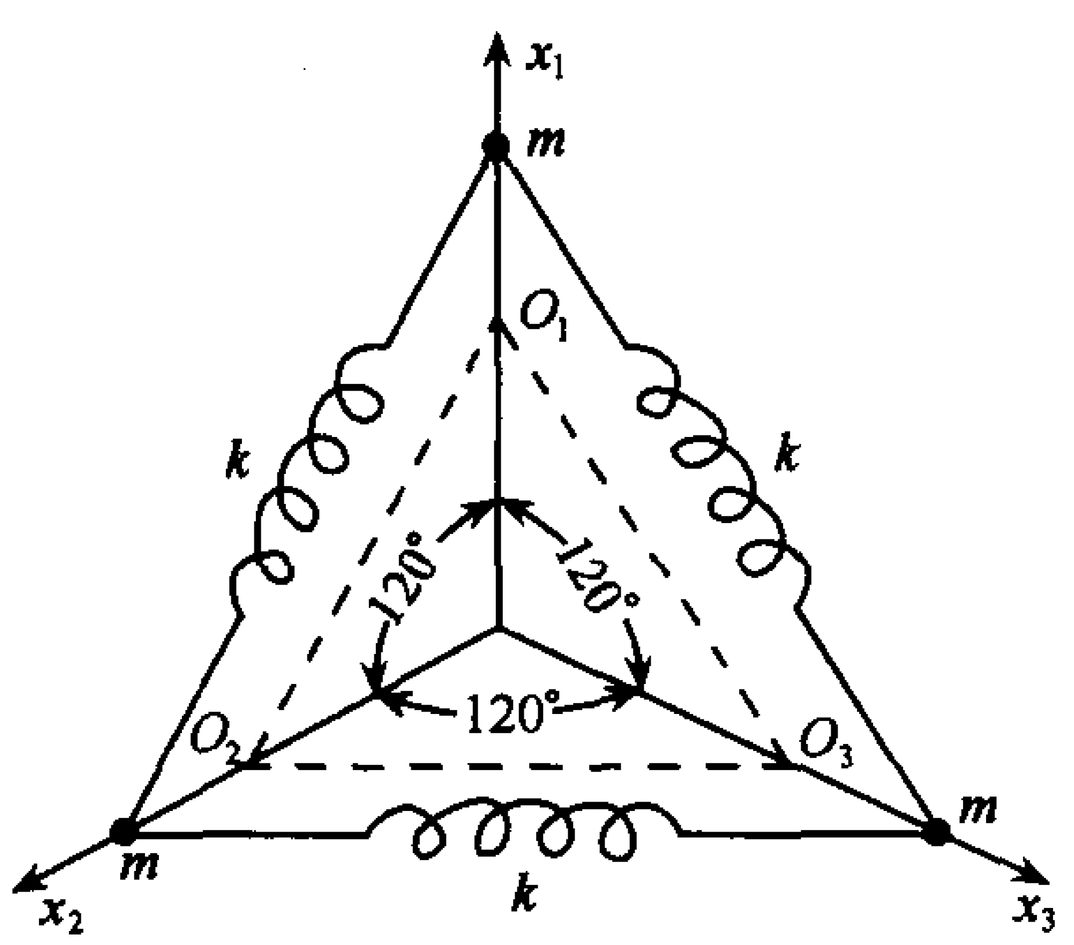


图 10.30

(1) 写出系统的运动微分方程；

(2) 求简正频率和振动模式.

解　(1) 取广义坐标 x_1、x_2、x_3，零点分别取在系统的平衡位置 O_1、O_2、O_3，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

在图 10.31 位于 x_1、x_2 轴上的两质点分别从平衡位置位移 x_1、x_2 时，连结它们的弹簧的伸长量为

$$x_1\cos(30° + \alpha) + x_2\cos(30° - \alpha)$$

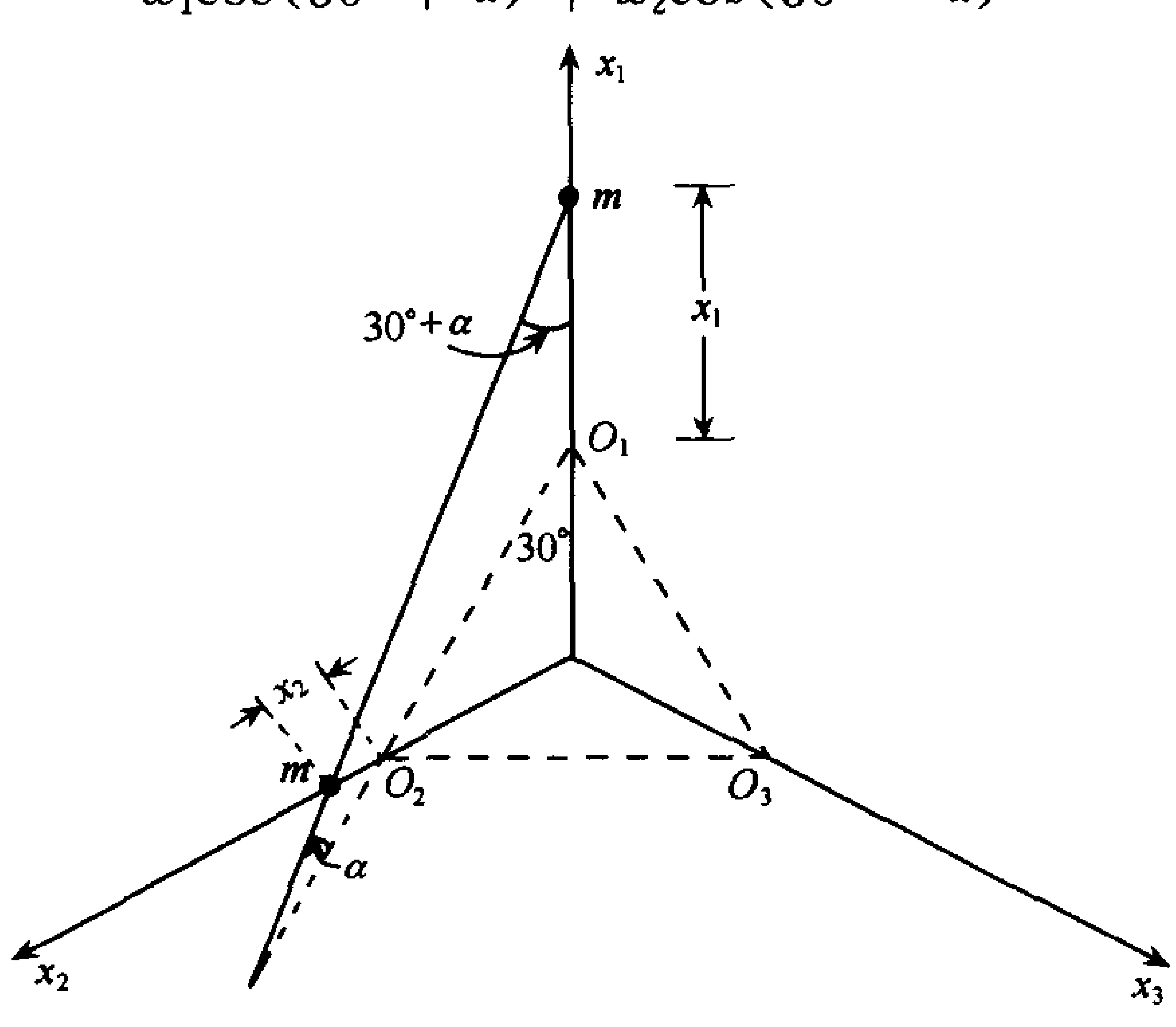


图 10.31

$$=x_1(\cos30°\cos\alpha-\sin30°\sin\alpha)+x_2(\cos30°\cos\alpha+\sin30°\sin\alpha)$$

小振动，x_1、x_2 和 α 均为小量，

$$\cos\alpha\approx1,\quad \sin\alpha\approx\alpha$$

$$x_1\cos(30°+\alpha)+x_2\cos(30°-\alpha)\approx\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+x_2)$$

同样计算另两个弹簧的伸长量，分别为$\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2+x_3)$和$\frac{\sqrt{3}}{2}(x_3+x_1)$，

$$V=\frac{1}{2}k\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+x_2)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2+x_3)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x_3+x_1)\right]^2\right\}$$

$$=\frac{3}{8}k[(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2]$$

$$=\frac{3}{8}k(2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{3}{4}k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$得运动微分方程为

$$m\ddot{x}_1+\frac{3}{2}kx_1+\frac{3}{4}kx_2+\frac{3}{4}kx_3=0$$

$$m\ddot{x}_2+\frac{3}{2}kx_2+\frac{3}{4}kx_1+\frac{3}{4}kx_3=0$$

$$m\ddot{x}_3+\frac{3}{2}kx_3+\frac{3}{4}kx_1+\frac{3}{4}kx_2=0$$

（2）由动能、势能的表达式可写出惯性矩阵、刚度矩阵、特征矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k&\frac{3}{4}k&\frac{3}{4}k\\\frac{3}{4}k&\frac{3}{2}k&\frac{3}{4}k\\\frac{3}{4}k&\frac{3}{4}k&\frac{3}{2}k\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}|=\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k-m\omega^2&\frac{3}{4}k&\frac{3}{4}k\\\frac{3}{4}k&\frac{3}{2}k-m\omega^2&\frac{3}{4}k\\\frac{3}{4}k&\frac{3}{4}k&\frac{3}{2}k-m\omega^2\end{pmatrix}$$

为书写简便起见，令$\eta=\frac{3}{4}k$. 特征方程为

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} 2\eta - m\omega^2 & \eta & \eta \\ \eta & 2\eta - m\omega^2 & \eta \\ \eta & \eta & 2\eta - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(m\omega^2)^3 - 6\eta(m\omega^2)^2 + 9\eta^2(m\omega^2) - 4\eta^3 = 0$$

从各项的系数有 $1-6+9-4=0$ 可知.必有一个因子 $m\omega^2-\eta$,进而可得

$$(m\omega^2 - \eta)(m\omega^2 - \eta)(m\omega^2 - 4\eta) = 0$$

三个简正频率分别为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\eta}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{4m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\eta}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{4m}}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{4\eta}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

将 ω_1、ω_2、ω_3 依次代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$.今 $\omega_1=\omega_2$,是简并的,代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$,只能得到一个独立的方程.

将 ω_1、ω_2 代入得

$$\eta(u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

ω_1:取 $u_1^{(1)}=1$,$u_2^{(1)}=0$,则 $u_3^{(1)}=-1$;

ω_2:取 $u_1^{(2)}=1$,$u_2^{(2)}=-\dfrac{1}{2}$,则 $u_3^{(2)}=-\dfrac{1}{2}$.

将 ω_3 代入得

$$-2ku_1^{(3)} + ku_2^{(3)} + ku_3^{(3)} = 0$$

$$ku_1^{(3)} - 2ku_2^{(3)} + ku_3^{(3)} = 0$$

取 $u_1^{(3)}=1$,则 $u_2^{(3)}=1$,$u_3^{(3)}=1$.

10.1.35　三个质量均为 m 的质点在由势能

$$V = V_0(\mathrm{e}^{-\alpha} + \mathrm{e}^{-\beta} + \mathrm{e}^{-\gamma})$$

[其中 V_0 为常量,α、β、γ 是它们的角距离(以弧度为单位)]给出的力作用下在半径为 b 的水平圆圈上无摩擦地运动.当 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$时,系统处于平衡.求系统偏离平衡位置做小振动的简正频率.

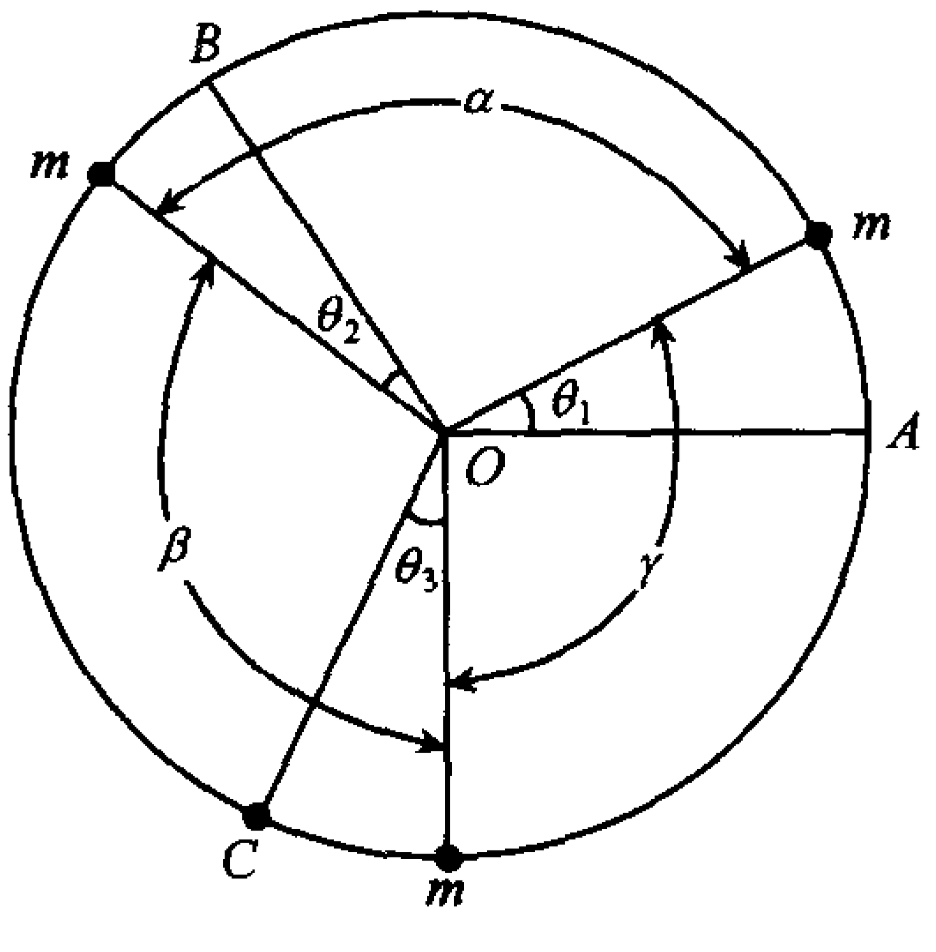


图 10.32

解　三质点处于图中 A、B、C 时为一个平衡位置,偏离平衡位置的角位移为 θ_1、θ_2、θ_3 时,它们之间的角距离分别为

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + \theta_2 - \theta_1$$

$$\beta = \frac{2\pi}{3} + \theta_3 - \theta_2$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{3} + \theta_1 - \theta_3$$

$$V(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = V_0 e^{-\frac{2\pi}{3}}(e^{\theta_1-\theta_2} + e^{\theta_2-\theta_3} + e^{\theta_3-\theta_1})$$

$$\approx V_0 e^{-\frac{2\pi}{3}}\Big[1 + (\theta_1-\theta_2) + \frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2 + 1 + (\theta_2-\theta_3) + \frac{1}{2}(\theta_2-\theta_3)^2 + 1 + (\theta_3-\theta_1) + \frac{1}{2}(\theta_3-\theta_1)^2\Big]$$

$$= V_0 e^{-\frac{2\pi}{3}}\Big[3 + \frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2 + \frac{1}{2}(\theta_2-\theta_3)^2 + \frac{1}{2}(\theta_3-\theta_1)^2\Big]$$

$$= V_0 e^{-\frac{2\pi}{3}}(3 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_1\theta_2 - \theta_2\theta_3 - \theta_3\theta_1)$$

$$T = \frac{1}{2}mb^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2)$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2A & -A & -A \\ -A & 2A & -A \\ -A & -A & 2A \end{pmatrix}$$

其中 $B=mb^2, A=V_0 e^{-\frac{2\pi}{3}}$，

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} 2A-B\omega^2 & -A & -A \\ -A & 2A-B\omega^2 & -A \\ -A & -A & 2A-B\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

第一列加第三列作第一列，再第一行减第三行作第一行，得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3A+B\omega^2 \\ -2A & 2A-B\omega^2 & -A \\ A-B\omega^2 & -A & 2A-B\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3A+B\omega^2)[2A^2 - (A-B\omega^2)(2A-B\omega^2)] = 0$$

$$(-3A+B\omega^2)(-B^2\omega^4 + 3AB\omega^2) = 0$$

可得　$\omega_1 = 0$

$$\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3A}{B}} = \sqrt{\frac{3V_0 e^{-2\pi/3}}{mb^2}}$$

$\omega_1=0$ 不是振动，是整个系统沿圆圈做等角速转动，只有两个简正频率，它们是简并的.

10.1.36　三个质点，其中两个质量为 m，一个质量为 M，被约束在半径为 r 的光滑的水平圆环上运动，并用三根相同的轻弹簧将它们互相连接. 如图 10.33 所示，劲度系数为 k. 让系统只围绕一个平衡位置做小振动.

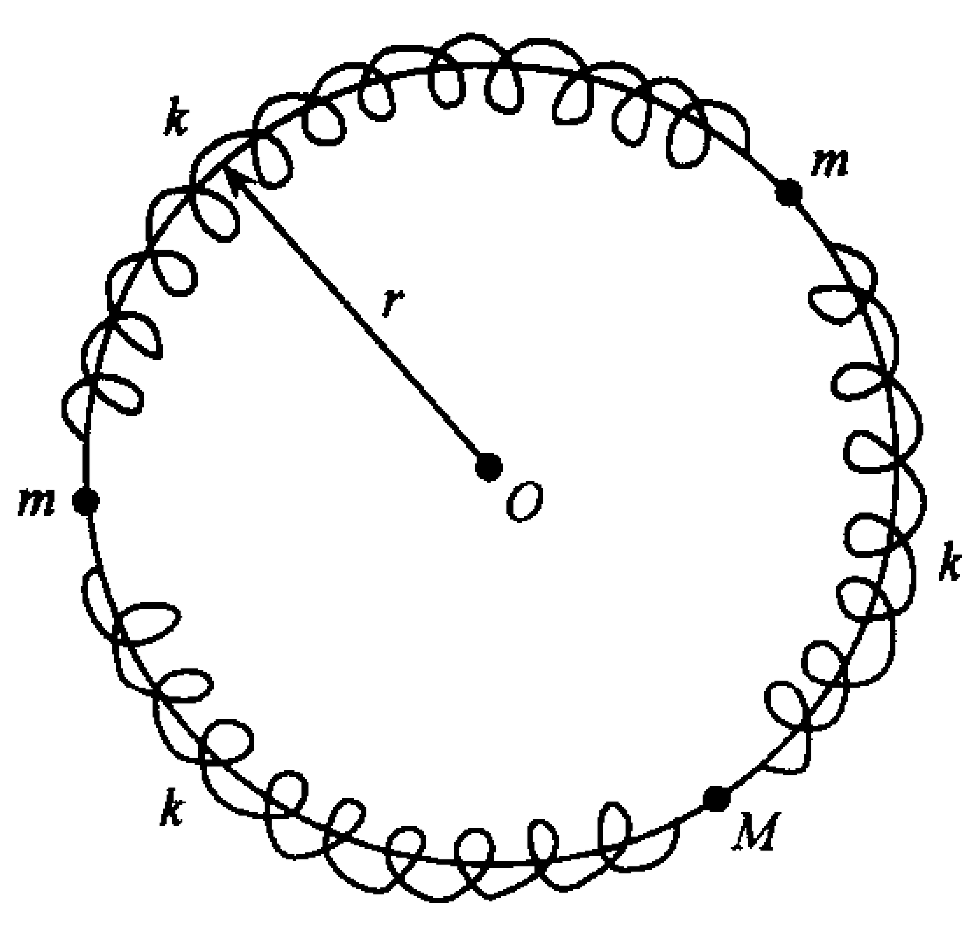


图 10.33

(1) 定性描述系统做简谐振动的振动模式；

(2) 找出一组简正坐标，求出简正频率.

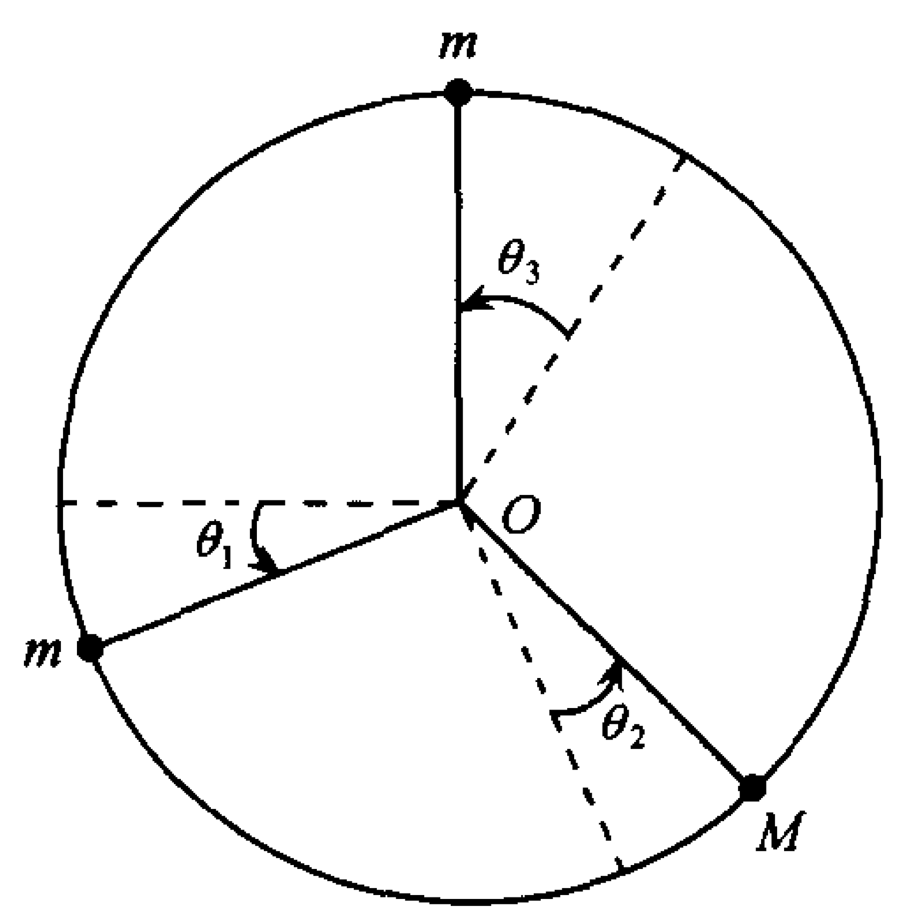


图 10.34

解　方法一：(1) 由于在水平面内所受外力的作用线都通过环心(弹簧力为内力，在竖直方向，每个质点所受合外力均为零)，系统对环心的角动量守恒. 必存在一个系统整体以恒定角速度转动，系统的角动量不为零，简正频率 $\omega=0$，实际上不是振动，实际上只有两个振动自由度，题目要求只围绕一个平衡位置做小振动，就是这两种振动模式，系统的角动量均为零.

用 θ_1、θ_2、θ_3(如图 10.34 所示)分别表示 m、M、m 偏离一个平衡位置(图中虚线表示的位置)的角位移，根据系统的角动量为零，可以设想：

一种振动模式，$u_1^{(1)}=1$，$u_2^{(1)}=0$，$u_3^{(1)}=-1$. 即两个 m 的振幅相同，但相位相反，M 不动；

另一种振动模式，$u_1^{(2)}=1$，$u_2^{(2)}=-\dfrac{2m}{M}$，$u_3^{(2)}=1$. 即两个 m 的振幅和相位都相同，M 的振幅是两个 m 的振幅的$\dfrac{2m}{M}$倍，相位相反.

(2)
$$T=\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_3^2)+\frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V=\frac{1}{2}k\left(\frac{2\pi}{3}r+r\theta_2-r\theta_1-a\right)^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{2\pi}{3}r+r\theta_3-r\theta_2-a\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k\left(\frac{2\pi}{3}r+r\theta_1-r\theta_3-a\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}k\left(\frac{2\pi}{3}r-a\right)^2$$

其中 a 为弹簧原长.

$$L=T-V$$

由$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i}=0$ 得

$$m\ddot{\theta}_1+k(2\theta_1-\theta_2-\theta_3)=0 \tag{1}$$

$$M\ddot{\theta}_2+k(2\theta_2-\theta_3-\theta_1)=0 \tag{2}$$

$$m\ddot{\theta}_3+k(2\theta_3-\theta_1-\theta_2)=0 \tag{3}$$

(1)式+(2)式+(3)式，得

$$m\ddot{\theta}_1+M\ddot{\theta}_2+m\ddot{\theta}_3=0 \tag{4}$$

(1)式−(3)式，得

$$m(\ddot{\theta}_1-\ddot{\theta}_3)+3k(\theta_1-\theta_3)=0 \tag{5}$$

用(4)、(5)式，可引入两个简正坐标，

$$\xi=\theta_1+\frac{M}{m}\theta_2+\theta_3$$

相应的"简正频率"为 $\omega_1=0$,它不是振动,而是整体以恒定角速度围绕环心 O 转动,

$$\eta=\theta_1-\theta_3$$

相应的简正频率为

$$\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

简正坐标 η 与上述的 $u_1^{(1)}=1,u_2^{(1)}=0,u_3^{(1)}=-1$ 的振动模式相对应,简正坐标 ζ 应与上述的 $u_1^{(2)}=1,u_2^{(2)}=-\frac{2m}{M},u_3^{(2)}=1$ 的振动模式相对应. 由此可见试用(1)式+(3)式$-2\times$(2)式得

$$m(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_3)-2M\ddot{\theta}_2+3k(\theta_1-2\theta_2+\theta_3)=0$$

不能得到第三个简正坐标,改用(1)式$\times\frac{1}{m}$+(3)式$\times\frac{1}{m}$-(2)式$\times\frac{2}{M}$,得

$$\ddot{\theta}_1-2\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3+\frac{2m+M}{mM}k(\theta_1-2\theta_2+\theta_3)=0$$

可见

$$\zeta=\theta_1-2\theta_2+\theta_3$$

为第三个简正坐标,相应的简正频率为

$$\omega_3=\sqrt{\frac{2m+M}{mM}k}$$

方法二:用前面已用过的方法,

$$V=\frac{1}{2}kr^2(2\theta_1^2+2\theta_2^2+2\theta_3^2-2\theta_1\theta_2-2\theta_2\theta_3-2\theta_3\theta_1)$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}mr^2&0&0\\0&Mr^2&0\\0&0&mr^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}2kr^2&-kr^2&-kr^2\\-kr^2&2kr^2&-kr^2\\-kr^2&-kr^2&2kr^2\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}|=r^2\begin{vmatrix}2k-m\omega^2&-k&-k\\-k&2k-M\omega^2&-k\\-k&-k&2k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$

第一行减第三行作第一行,再第一列加第三列作第一列,得

$$\begin{vmatrix}0&0&-3k+m\omega^2\\-2k&2k-M\omega^2&-k\\k-m\omega^2&-k&2k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$(-3k+m\omega^2)[2k^2-(k-m\omega^2)(2k-M\omega^2)]=0$$

可得 $\omega_1=0$,　$\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$,　$\omega_3=\sqrt{\frac{2m+M}{mM}k}$.

将 ω_2 代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$,

$$\begin{pmatrix} -k & -k & -k \\ -k & k\left(2-\dfrac{3M}{m}\right) & -k \\ -k & -k & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{pmatrix}=0$$

$$u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+u_3^{(2)}=0$$

$$-u_1^{(2)}+\left(2-\frac{3M}{m}\right)u_2^{(2)}-u_3^{(2)}=0$$

取　$u_1^{(2)}=1$,则

$$u_2^{(2)}=0,\quad u_3^{(2)}=-1$$

将 ω_3 代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{M-2m}{M}k & -k & -k \\ -k & -\dfrac{M}{m}k & -k \\ -k & -k & \dfrac{M-2m}{M}k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_3^{(3)} \end{pmatrix}=0$$

$$(M-2m)u_1^{(3)}-Mu_2^{(3)}-Mu_3^{(3)}=0$$

$$mu_1^{(3)}+Mu_2^{(3)}+mu_3^{(3)}=0$$

取 $u_1^{(3)}=1$,则

$$u_2^{(3)}=-\frac{2m}{M},\quad u_3^{(3)}=1$$

将 ω_1 代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$,

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix}=0$$

$$2u_1^{(1)}-u_2^{(1)}-u_3^{(1)}=0$$

$$u_1^{(1)}-2u_2^{(1)}+u_3^{(1)}=0$$

取 $u_1^{(1)}=1$,则

$$u_2^{(1)}=1,\quad u_3^{(1)}=1$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\dfrac{2m}{M} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m\theta_1+M\theta_2+m\theta_3 \\ m\theta_1-m\theta_3 \\ m\theta_1-2m\theta_2+m\theta_3 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases}\xi = m\theta_1 + M\theta_2 + m\theta_3 \\ \eta = m\theta_1 - m\theta_3 \\ \zeta = m\theta_1 - 2m\theta_2 + m\theta_3\end{cases} \quad 或 \begin{cases}\xi = \theta_1 + \dfrac{M}{m}\theta_2 + \theta_3 \\ \eta = \theta_1 - \theta_3 \\ \zeta = \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3\end{cases}$$

10.1.37 两个质量为 m 和一个质量为 M 的点状物体用两根劲度系数为 k、自然长度为零的轻弹簧连结，一起被限制在竖直的半径为 R 的光滑圆管道内运动，如图 10.35 所示，物体可以相互通过，求系统围绕平衡位置小振动的振动模式，并描述每一个模式.

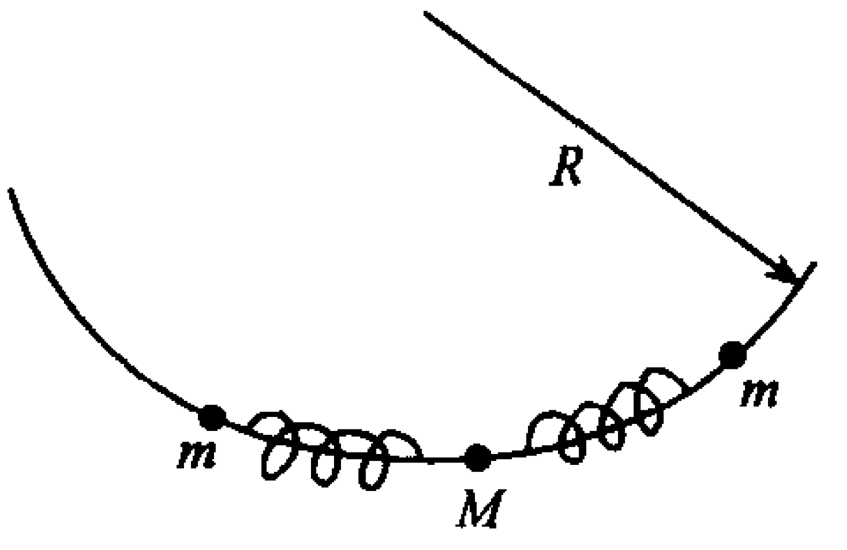


图 10.35

解 用 θ_1、θ_2、θ_3 表示 m、M、m 三物体偏离平衡位置的角位移，均以逆时针方向为正，

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot\theta_1^2 + R^2\dot\theta_3^2) + \frac{1}{2}MR^2\dot\theta_2^2$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2}k(R\theta_2 - R\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(R\theta_3 - R\theta_2)^2 + mgR(1-\cos\theta_1) \\ &\quad + MgR(1-\cos\theta_2) + mgR(1-\cos\theta_3) \\ &\approx \frac{1}{2}kR^2(\theta_1^2 + 2\theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\theta_1\theta_2 - 2\theta_2\theta_3) + \frac{1}{2}mgR(\theta_1^2+\theta_3^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}MgR\theta_2^2\end{aligned}$$

为书写简便起见，令 $x_1=R\theta_1, x_2=R\theta_2, x_3=R\theta_3$.

$$\begin{aligned}L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot x_1^2 + \dot x_2^2 + \dot x_3^2) - \Big[\frac{1}{2}\left(k + \frac{mg}{R}\right)(x_1^2 + x_3^2) \\ + \frac{1}{2}\left(2k + \frac{Mg}{R}\right)x_2^2 - kx_1x_2 - kx_2x_3\Big]\end{aligned}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ 得

$$m\ddot x_1 + \left(k + \frac{mg}{R}\right)x_1 - kx_2 = 0$$

$$M\ddot x_2 + \left(2k + \frac{Mg}{R}\right)x_2 - k(x_1 + x_3) = 0$$

$$m\ddot x_3 + \left(k + \frac{mg}{R}\right)x_3 - kx_2 = 0$$

设 $x_i = u_i\cos(\omega t + \alpha)$，则

$$\begin{pmatrix} k + \frac{mg}{R} - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k + \frac{Mg}{R} - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k + \frac{mg}{R} - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1 \\ u_2 \\ u_3\end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

u_1、u_2、u_3 得非零解，必有

$$\begin{vmatrix} k+\dfrac{mg}{R}-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k+\dfrac{Mg}{R}-M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k+\dfrac{mg}{R}-m\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

解得 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{g}{k}+\dfrac{k}{m}},\qquad \omega_2=\sqrt{\dfrac{g}{R}+\dfrac{k}{m}+\dfrac{2k}{M}},\qquad \omega_3=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

将 ω_1、ω_2、ω_3 分别代入(1)式,取 $u_1^{(1)}=u_1^{(2)}=u_1^{(3)}=1$,可得 $u_2^{(1)}=0, u_3^{(1)}=-1; u_2^{(2)}=-\dfrac{2m}{M}$, $u_3^{(2)}=1; u_2^{(3)}=1, u_3^{(3)}=1$.

三种振动模式(如图 10.36 所示)分别为:

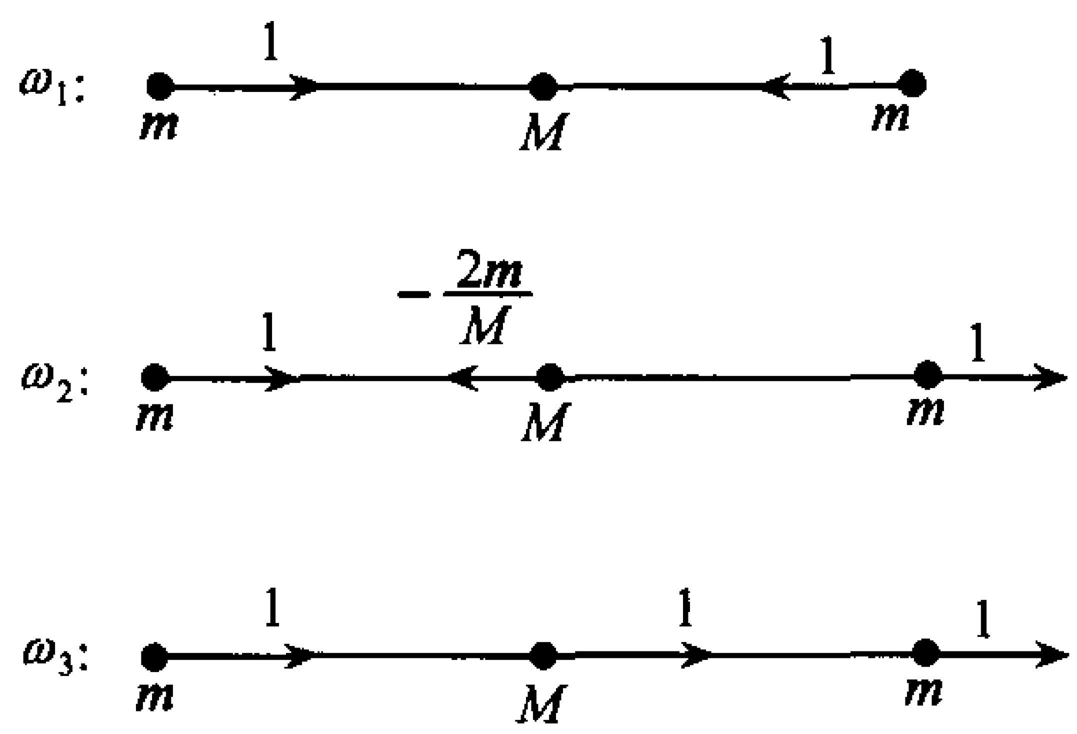


图 10.36

ω_1: $(1,0,-1)$

ω_2: $\left(1,-\dfrac{2m}{M},-1\right)$

ω_3: $(1,1,1)$

第一种振动模式:M 不动,两个 m 振幅相同、相位相反;第二种振动模式:两个 m 振幅和相位均相同,M 的振幅是 m 的振幅的 $\dfrac{2m}{M}$ 倍,相位相反;第三种振动模式:三个物体振幅相同、相位也相同,是弹簧保持原长(为零)不起作用的情况.

10.1.38 一块质量为 m 的均质正方形薄板,在相邻的两个角用劲度系数为 k 的、完全相同的弹簧悬挂起来,如图 10.37 所示,弹簧和薄板在竖直平面内做小振动,求简正频率.

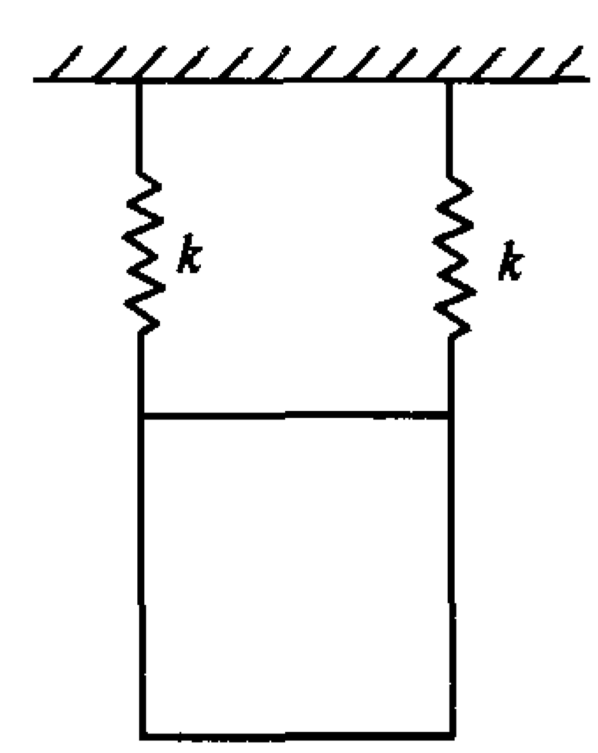


图 10.37

解 取平衡时质心所在位置为坐标系的原点,取质心的 x、y 坐标和绕质心的转角 θ 为广义坐标,如图 10.38 所示.

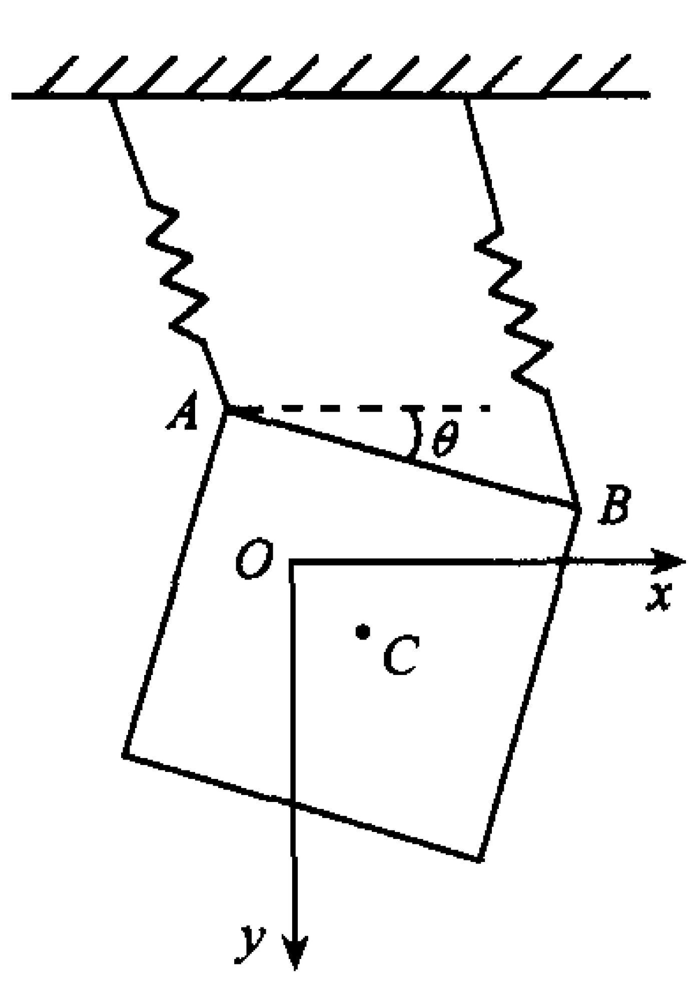


图 10.38

用关于转动惯量的垂直轴定理.设正方形边长为 a,绕通过质心垂直于薄板的轴的转动惯量为 $I=\dfrac{1}{6}ma^2$,

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{12}ma^2\dot{\theta}^2$$

考虑在平衡位置附近的小振动.A、B 点在 x、y 方向的改变量分别为

$$\Delta x_A\approx x+\frac{1}{2}a\theta,\qquad \Delta y_A=y-\frac{1}{2}a\theta$$

$$\Delta x_B\approx x+\frac{1}{2}a\theta,\qquad \Delta y_B=y+\frac{1}{2}a\theta$$

$$\boldsymbol{F}_A=-k\Delta x_A\boldsymbol{i}-k\Delta y_A\boldsymbol{j}=-k\left(x+\frac{1}{2}a\theta\right)\boldsymbol{i}-k\left(y-\frac{1}{2}a\theta\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F}_B = -k\Delta x_B\boldsymbol{i} - k\Delta y_B\boldsymbol{j} = -k\left(x + \frac{1}{2}a\theta\right)\boldsymbol{i} - k\left(y + \frac{1}{2}a\theta\right)\boldsymbol{j}$$

注意：由于坐标原点取在平衡位置，考虑弹簧由平衡位置的再伸长来写的"弹簧力"，实际上已是弹簧力和重力的合力.

$\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$ 均是保守力，势能分别为

$$V_A = \frac{1}{2}k(\Delta x_A)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta y_A)^2 = \frac{1}{2}k\left(x + \frac{1}{2}a\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(y - \frac{1}{2}a\theta\right)^2$$

$$V_B = \frac{1}{2}k\left(x + \frac{1}{2}a\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(y + \frac{1}{2}a\theta\right)^2$$

$$V = V_A + V_B = k\left(x + \frac{1}{2}a\theta\right)^2 + ky^2 + \frac{1}{4}ka^2\theta^2$$

可以验证，由上述的势能求得的广义力 Q_x、Q_y、Q_θ 与由 $\delta W = \boldsymbol{F}_A \cdot \delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}_B \cdot \delta \boldsymbol{r}_B$ 算出的 Q_x、Q_y、Q_θ 是完全相同的.

写惯性矩阵和刚度矩阵时，矩阵元的量纲必须相同，因此我们改取 x、y、$a\theta$ 为广义坐标，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{12}m(a\,\dot{\theta})^2$$

$$V = \frac{1}{2}[2k(x^2 + y^2) + k(a\theta)^2 + 2kx(a\theta)]$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & 0 & k \\ 0 & 2k - m\omega^2 & 0 \\ k & 0 & k - \frac{1}{6}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解出　　$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$，　$\omega_2 = \sqrt{(4+\sqrt{10})\frac{k}{m}}$，$\omega_3 = \sqrt{(4-\sqrt{10})\frac{k}{m}}$.

10.1.39　三个质量均为 M 的质点被图 10.39 中所画的六根弹簧连接起来，A、B、C 三点是固定的，组成等边三角形，所有弹簧的劲度系数均为 k. 平衡时，三个质点组成一个等边三角形，如质点受到约束，只能沿 ΔABC 的三条中线运动，运动所在的平面是光滑的水平面，求小振动的简正频率和振动模式.

解　取各质点向外偏离平衡位置的位移 x_1、x_2、x_3 为广义坐标，

$$T = \frac{1}{2}M\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\,\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\,\dot{x}_3^2$$

考虑图 10.40 一条弹簧的势能，设平衡时弹簧的长度为 a，

$$V_1=\frac{1}{2}k\left\{\sqrt{\left[a+(x_1+x_2)\cos\frac{\pi}{6}\right]^2+\left[(x_2-x_1)\sin\frac{\pi}{6}\right]^2}-a\right\}^2$$

$$\approx\frac{1}{2}k\left\{\sqrt{a^2+2a(x_1+x_2)\cos\frac{\pi}{6}}-a\right\}^2$$

近似中略去了根号内的二级小量 x_1^2、x_2^2、x_1x_2 这些项，它们对 V_1 的贡献是四级小量，我们只保留 V_1 的二级小量，

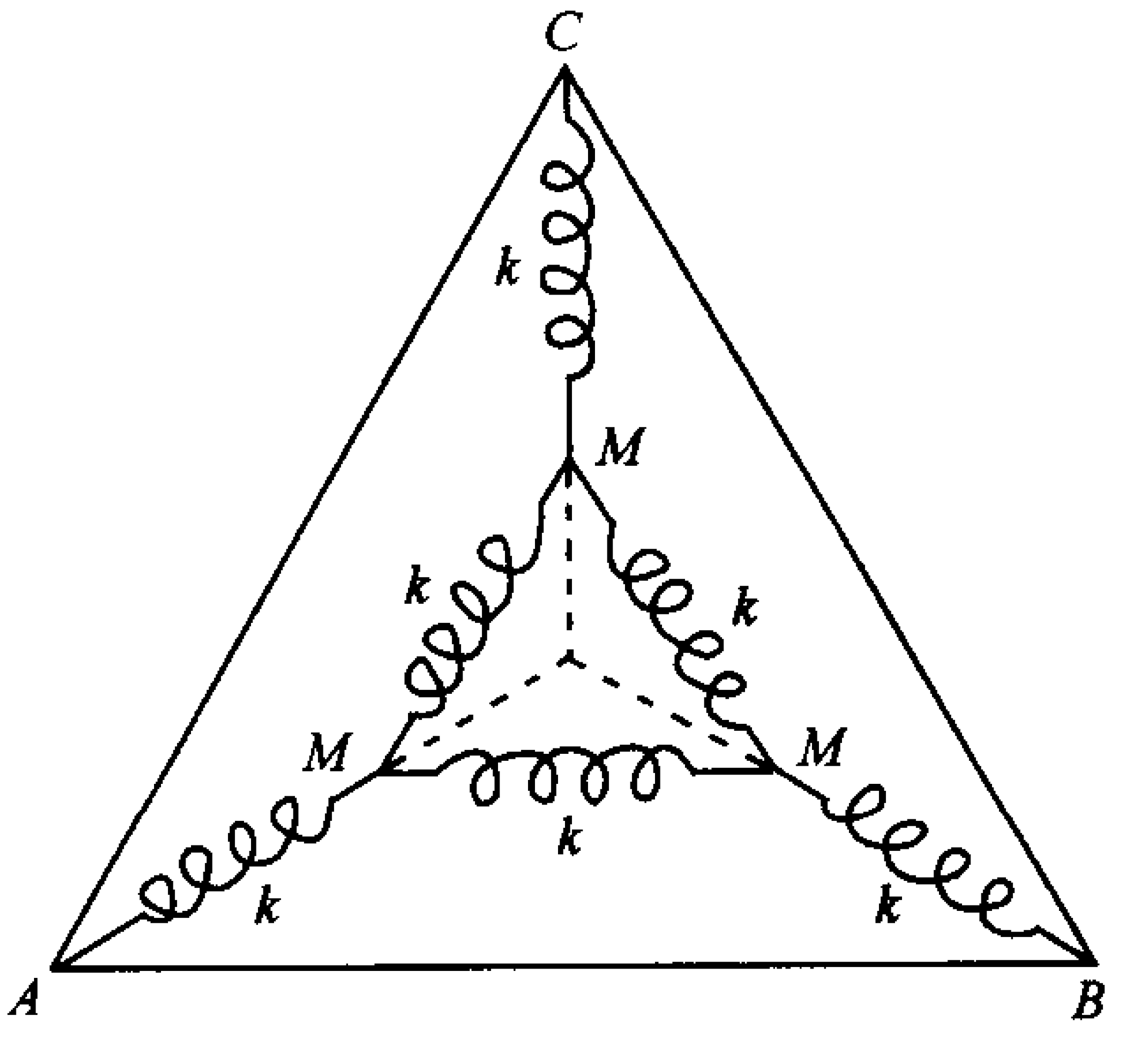


图 10.39

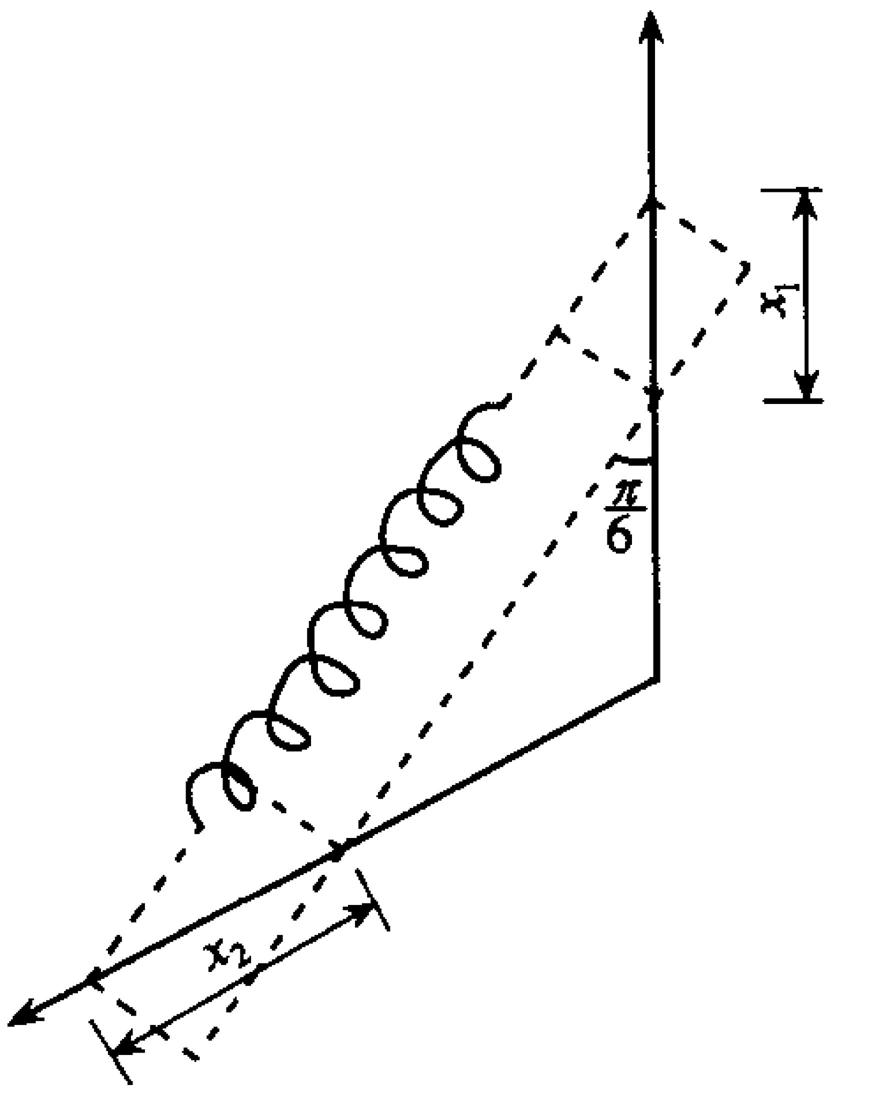


图 10.40

$$V_1=\frac{1}{2}k\left\{a\left[1+\frac{2}{a}(x_1+x_2)\cos\frac{\pi}{6}\right]^{1/2}-a\right\}^2$$

$$\approx\frac{1}{2}k\left\{a\left[1+\frac{1}{a}(x_1+x_2)\cos\frac{\pi}{6}\right]-a\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}k\left[(x_1+x_2)\cos\frac{\pi}{6}\right]^2=\frac{3}{8}k(x_1+x_2)^2$$

所以 $V=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}kx_2^2+\frac{1}{2}kx_3^2+\frac{3}{8}k(x_1+x_2)^2+\frac{3}{8}k(x_2+x_3)^2+\frac{3}{8}k(x_3+x_1)^2$

$$=\frac{1}{2}k\left(\frac{5}{2}x_1^2+\frac{5}{2}x_2^2+\frac{5}{2}x_3^2+\frac{3}{2}x_1x_2+\frac{3}{2}x_2x_3+\frac{3}{2}x_3x_1\right)$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}M&0&0\\0&M&0\\0&0&M\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}k&\frac{3}{4}k&\frac{3}{4}k\\\frac{3}{4}k&\frac{5}{2}k&\frac{3}{4}k\\\frac{3}{4}k&\frac{3}{4}k&\frac{5}{2}k\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} \frac{5}{2}k - M\omega^2 & \frac{3}{4}k & \frac{3}{4}k \\ \frac{3}{4}k & \frac{5}{2}k - M\omega^2 & \frac{3}{4}k \\ \frac{3}{4}k & \frac{3}{4}k & \frac{5}{2}k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

第一行减第二行作第一行，再第一列加第二列作第二列得

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{4}k - M\omega^2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4}k & \frac{13}{4}k - M\omega^2 & \frac{3}{4}k \\ \frac{3}{4}k & \frac{3}{2}k & \frac{5}{2}k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{7}{4}k - M\omega^2\right)\left[\left(\frac{13}{4}k - M\omega^2\right)\left(\frac{5}{2}k - M\omega^2\right) - \frac{9}{8}k^2\right] = 0$$

$$\left(\frac{7}{4}k - M\omega^2\right)\left(M^2\omega^4 - \frac{23}{4}kM\omega^2 + 7k^2\right) = 0$$

$$\left(\frac{7}{4}k - M\omega^2\right)\left(M\omega^2 - \frac{7}{4}k\right)(M\omega^2 - 4k) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{7k}{4M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{4M}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{4k}{M}}$$

ω_1、ω_2 是简并的，将它们代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$，得

$$\frac{3}{4}k(u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

只能得到一个独立方程. 今取两个解：

取 $u_1^{(1)}=1, u_2^{(1)}=0$，则 $u_3^{(1)}=-1$；

取 $u_1^{(2)}=1, u_2^{(2)}=-2$，则 $u_3^{(2)}=1$.

将 ω_3 代入 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0$，得

$$-2u_1^{(3)} + u_2^{(3)} + u_3^{(3)} = 0$$

$$u_1^{(3)} - 2u_2^{(3)} + u_3^{(3)} = 0$$

取 $u_1^{(3)}=1$，则 $u_2^{(3)}=1, u_3^{(3)}=1$.

模式图如图 10.41 所示.

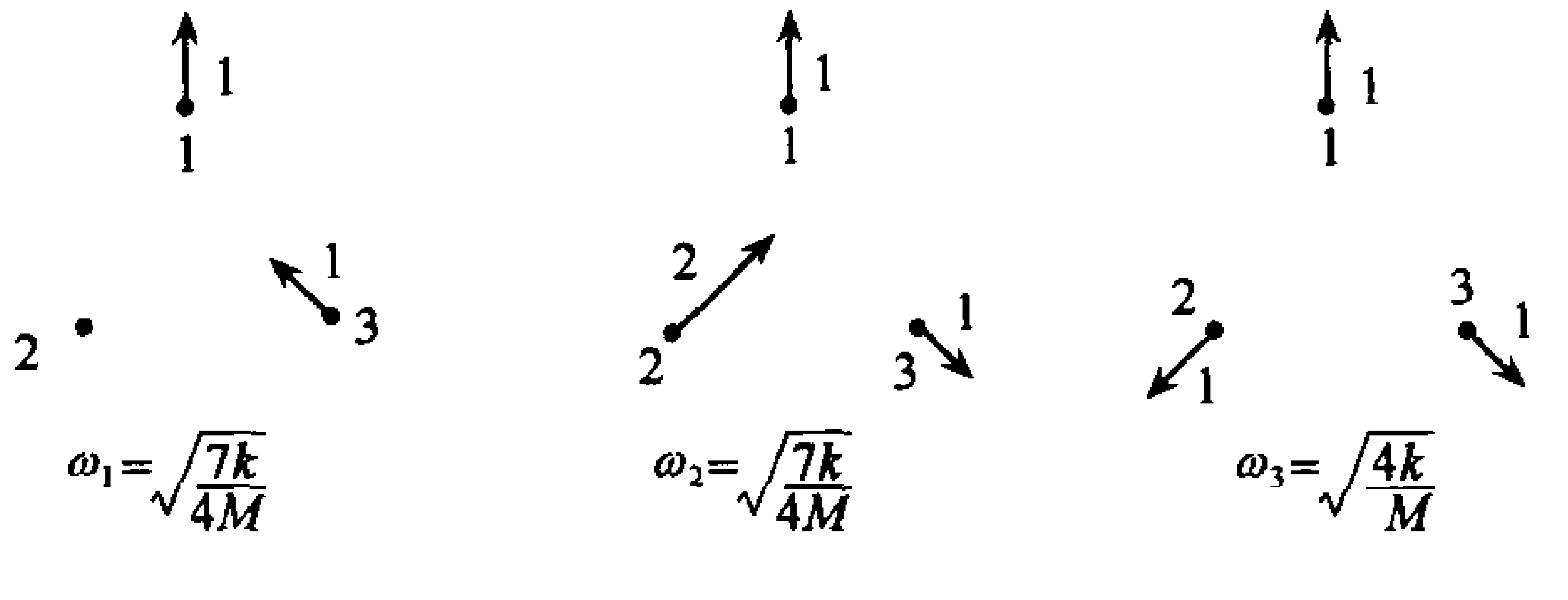


图 10.41

10.1.40　一个质量为 M、长为 a、宽度为 b 的均质矩形板，在其每个角用一根劲度系数为 k 的同样的轻弹簧支撑，这些弹簧只能在铅垂方向运动，求小振动时振动的简正频率.

解　取平衡时质心的位置为竖直向上的静坐标轴 ζ 的原点，另取固连于薄板的动坐标系 $Cxyz$、x、y 轴在板上分别与矩形的边平行和垂直，如图 10.42 所示.

取质心 C 的 ζ 坐标，板对 x 轴的转角 φ、对 y 轴的转角 θ 为广义坐标.

矩形板对过质心的 x 轴、y 轴的转动惯量分别为

$$I_{xx}=\frac{1}{12}Ma^2,\quad I_{yy}=\frac{1}{12}Mb^2$$

$$T=\frac{1}{2}M\dot{\zeta}^2+\frac{1}{2}I_{xx}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I_{yy}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}M\dot{\zeta}^2+\frac{1}{24}Ma^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{24}Mb^2\dot{\theta}^2$$

$$V=\frac{1}{2}k\zeta_A^2+\frac{1}{2}k\zeta_B^2+\frac{1}{2}k\zeta_D^2+\frac{1}{2}k\zeta_E^2$$

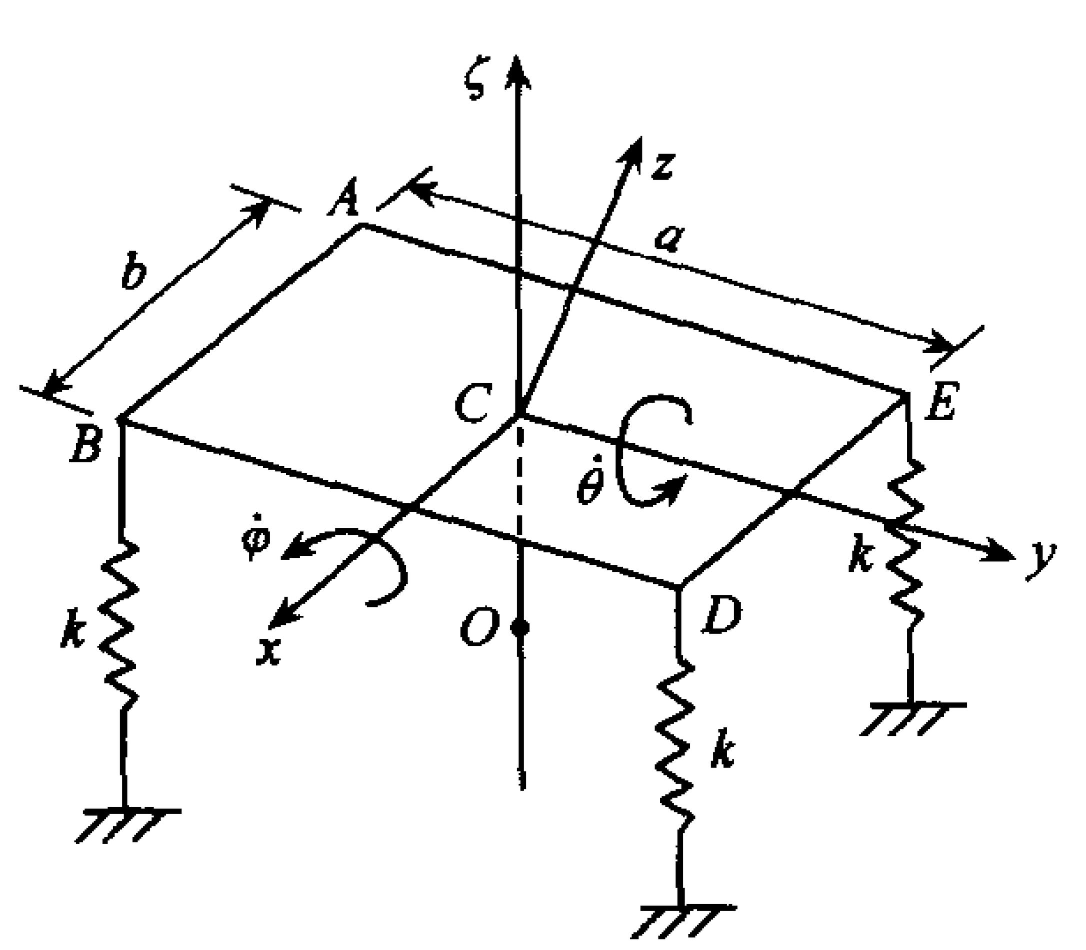


图 10.42

其中 ζ_A、ζ_B、ζ_D、ζ_E 分别是矩形板四个角 A、B、D、E 的 ζ 坐标，

$$\zeta_A=\zeta-\frac{1}{2}a\varphi+\frac{1}{2}b\theta,\quad \zeta_B=\zeta-\frac{1}{2}a\varphi-\frac{1}{2}b\theta$$

$$\zeta_D=\zeta+\frac{1}{2}a\varphi-\frac{1}{2}b\theta,\quad \zeta_E=\zeta+\frac{1}{2}a\varphi+\frac{1}{2}b\theta$$

$$V=\frac{1}{2}k(4\zeta^2+a^2\varphi^2+b^2\theta^2)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{\zeta}^2+\frac{1}{24}Ma^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{24}Mb^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k(4\zeta^2+a^2\varphi^2+b^2\theta^2)$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 可得

$$M\ddot{\zeta}+4k\zeta=0$$

$$\frac{1}{12}Ma^2\ddot{\varphi}+ka^2\varphi=0$$

$$\frac{1}{12}Mb^2\ddot{\theta}+kb^2\theta=0$$

小振动的简正频率为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{4k}{M}}=2\sqrt{\frac{k}{M}},\qquad \omega_2=\omega_3=\sqrt{\frac{12k}{M}}=2\sqrt{\frac{3k}{M}}$$

10.1.41　一个质量为 M、半径为 R 的均质薄圆盘用两根劲度系数均为 k、原长均为 l_0 的轻弹簧，连在一个无摩擦的桌面上的两个固定点，盘可在桌面上做平面平行运动. 处于平衡时弹簧长度为 $l(>l_0)$，求围绕平衡位置做小振动的简正频率.

解　取平衡位置为 x、y 坐标的原点，两个固定点的连线为 x 轴，取盘心的 x、y 坐标及盘的转角 φ 为广义坐标，如图 10.44 所示.

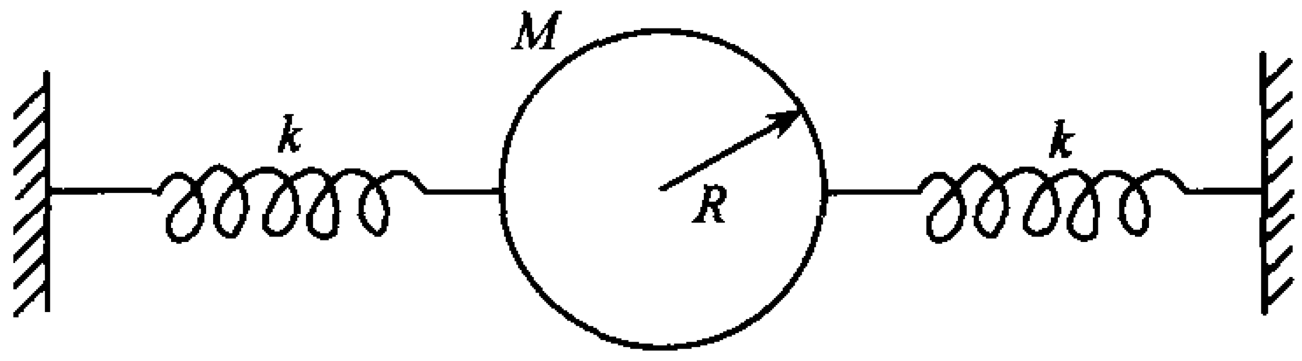


图 10.43

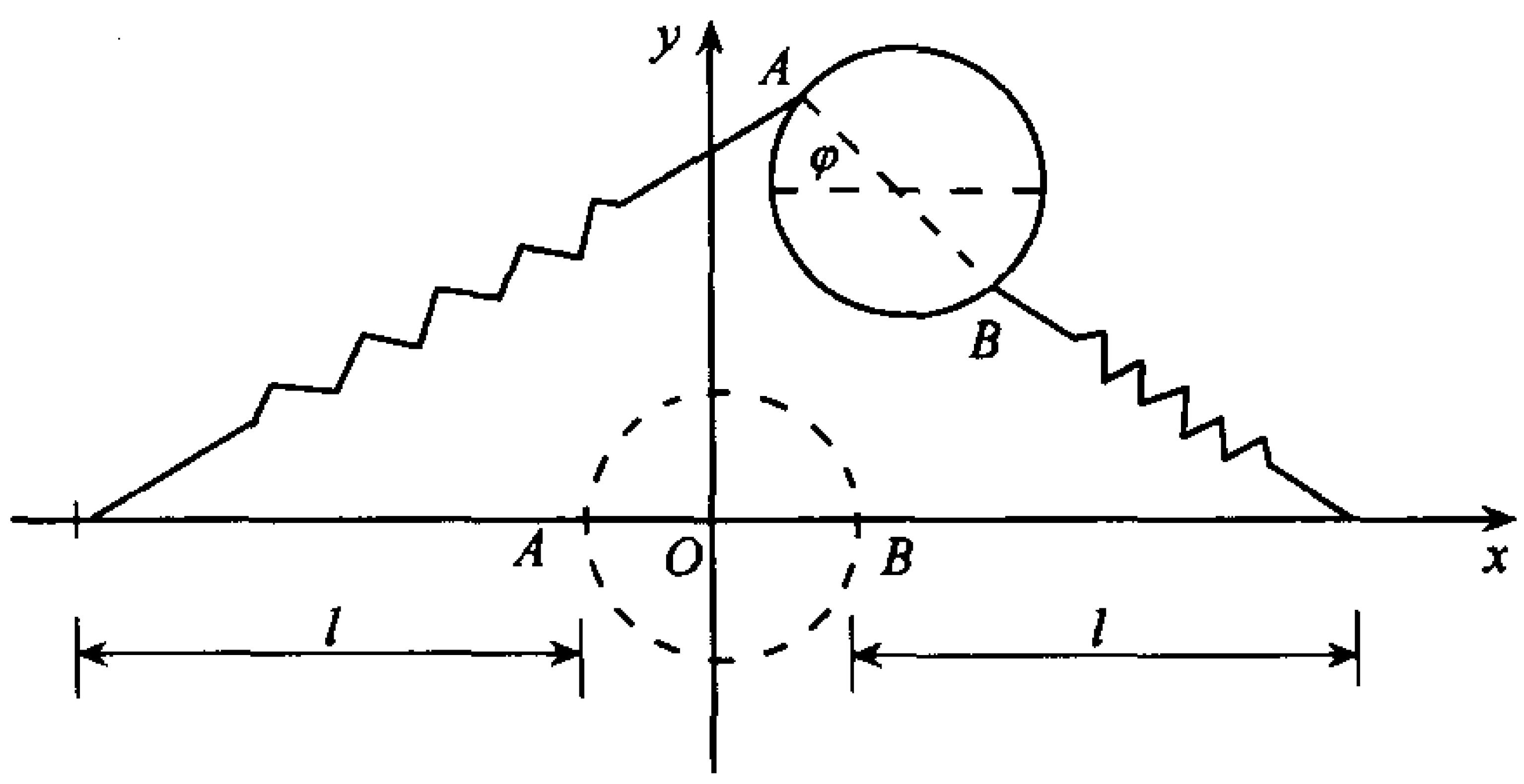


图 10.44

$$x_A = x - R\cos\varphi,\quad y_A = y + R\sin\varphi$$

$$x_B = x + R\cos\varphi,\quad y_B = y - R\sin\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(l+R+x_A)^2 + y_A^2} - l_0\right]^2 - \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

$$+ \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(l+R-x_B)^2 + y_B^2} - l_0\right]^2 - \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

代入 x_A、y_A、x_B、y_B，保留二级小量，经计算可得

$$V = \frac{1}{2}k\left[2x^2 + 2\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)y^2 + 2R(l+R)\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)\varphi^2\right]$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$$

$$- k\left[x^2 + \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)y^2 + R(l+R)\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)\varphi^2\right]$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ 可得

$$M\ddot{x} + 2kx = 0$$

$$M\ddot{y} + 2\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)ky = 0$$

$$\frac{1}{2}MR\ddot{\varphi} + 2(l+R)\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)k\varphi = 0$$

小振动的简正频率分别为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k(l-l_0)}{Ml}}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{4(l+R)(l-l_0)k}{MRl}}$$

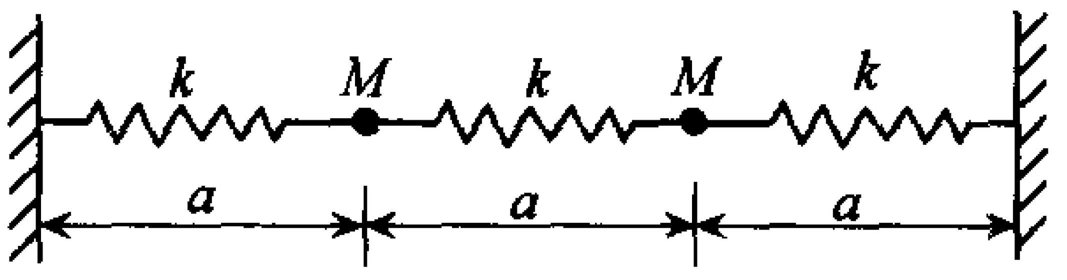


图 10.45

10.1.42 两个质量为 M 的小球用三根劲度系数均为 k、原长均为 $\frac{a}{2}$ 的轻弹簧相连,且连到两个固定点上,如图 10.45 所示,小球能做左右和上下运动,求系统围绕图示的平衡位置做小振动的简正频率(重力可以不计).

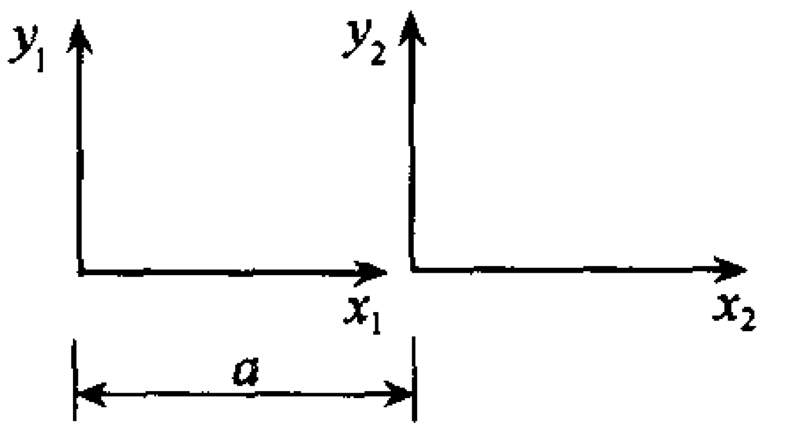


图 10.46

解 取平衡位置为广义坐标 x_1、y_1、x_2、y_2 的原点. x_1、x_2 轴沿左右方向,y_1、y_2 沿上下方向,如图 10.46 所示,

$$V = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(a+x_1)^2+y_1^2}-\frac{1}{2}a\right]^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(a+x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}-\frac{a}{2}\right]^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(a-x_2)^2+y_2^2}-\frac{a}{2}\right]^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

简化计算时注意保留二级小量,例如

$$\left[\sqrt{(a+x_1)^2+y_1^2}-\frac{a}{2}\right]^2$$

$$= a^2 + x_1^2 + 2ax_1 + y_1^2 + \frac{a^2}{4} - a\sqrt{a^2+2ax_1+x_1^2+y_1^2}$$

$$= a^2 + x_1^2 + 2ax_1 + y_1^2 + \frac{a^2}{4} - a^2\left(1+\frac{2x_1}{a}+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx a^2 + x_1^2 + 2ax_1 + y_1^2 + \frac{a^2}{4} - a^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2x_1}{a}+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2x_1}{a}+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2}\right)^2\right]$$

$$\approx x_1^2 + 2ax_1 + y_1^2 + \frac{a^2}{4} - ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2$$

$$= x_1^2 + ax_1 + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{a^2}{4}$$

可得

$$V = \frac{1}{2}k(2x_1^2 + 2x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - y_1y_2)$$

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{1}{2}k(2x_1^2 + 2x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - y_1y_2)$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ 得

$$M\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \tag{1}$$

$$M\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \tag{2}$$

$$M\ddot{y}_1 + ky_1 - \frac{1}{2}ky_2 = 0 \tag{3}$$

$$M\ddot{y}_2 + ky_2 - \frac{1}{2}ky_1 = 0 \tag{4}$$

(1)、(2)两式的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2k - M\omega^2 & -k \\ -k & 2k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解出两小球在左右方向运动的简正频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{M}}$$

(3)、(4)两式的特征方程为

$$\begin{vmatrix} k - M\omega^2 & -\frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k & k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解出上下方向运动的两个简正频率为

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{2M}}, \qquad \omega_4 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}$$

附带指出，如作用于小球的重力不能忽略.势能中需加上重力势能，不影响运动微分方程(1)、(2)式，因而不会对 ω_1、ω_2 有所影响，但微分方程(3)、(4)式需作修改，都有一项重力的常数项，只是影响在竖直方向的平衡位置，对 ω_3、ω_4 也无影响.

10.1.43　四个质量为 m 的全同质点用四根劲度系数为 k 的全同弹簧连起来，被限制在一半径为 b 的光滑的水平圆周上运动，如图 10.47 所示.

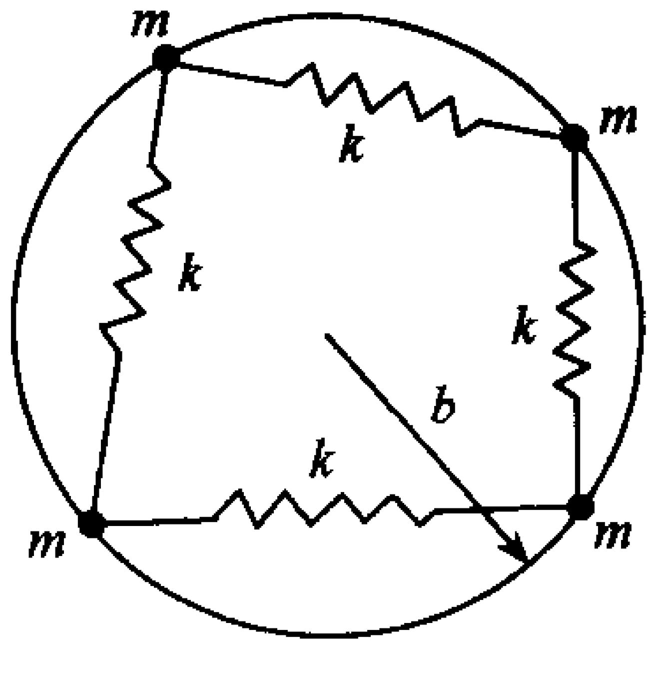


图 10.47

(1) 有几种小振动振动模式；

(2) 小振动简正频率多大？

解　(1) 显然四个质点的连线构成正方形时系统可处于平衡，按逆时针方向依次给每一个质点编号，用逆时针方向偏离平衡位置的角位移 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 作为广义坐标，

$$T = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_4^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k\sum_{n=1}^{4}\left[2b\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{n+1} - \theta_n\right) - 2b\sin\frac{\pi}{4}\right]^2$$

其中 $\theta_5=\theta_1$. 计算其中一项的近似式，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}k\left[2b\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2 - \theta_1\right) - 2b\sin\frac{\pi}{4}\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}k\cdot 4b^2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 \\
&\approx 2kb^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right]^2 = \frac{1}{4}kb^2(\theta_2 - \theta_1)^2
\end{aligned}$$

所以
$$V=\frac{1}{4}kb^2\sum_{n=1}^{4}(\theta_{n+1}-\theta_n)^2$$
显然，$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4$，$V=0$，是随遇平衡的情况，是整体转动的情况，它不是振动，因此四个自由度的系统，只有三个振动自由度，故有三种小振动振动模式.

(2)
$$T=\frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2+\dot{\theta}_4^2)$$
$$V=\frac{1}{4}kb^2[(\theta_2-\theta_1)^2+(\theta_3-\theta_2)^2+(\theta_4-\theta_3)^2+(\theta_1-\theta_4)^2]$$
$$=\frac{1}{2}kb^2(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\theta_4^2-\theta_1\theta_2-\theta_2\theta_3-\theta_3\theta_4-\theta_4\theta_1)$$
$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} mb^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & mb^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & mb^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & mb^2\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} kb^2 & -\frac{1}{2}kb^2 & 0 & -\frac{1}{2}kb^2\\ -\frac{1}{2}kb^2 & kb^2 & -\frac{1}{2}kb^2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}kb^2 & kb^2 & -\frac{1}{2}kb^2\\ -\frac{1}{2}kb^2 & 0 & -\frac{1}{2}kb^2 & kb^2\end{pmatrix}$$
$$|\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=b^2\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & -\frac{1}{2}k & 0 & -\frac{1}{2}k\\ -\frac{1}{2}k & k-m\omega^2 & -\frac{1}{2}k & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}k & k-m\omega^2 & -\frac{1}{2}k\\ -\frac{1}{2}k & 0 & -\frac{1}{2}k & k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$
第二列减第四列作第二列，然后第二行加第四行作第二行，可得
$$\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}k\\ -k & 0 & -k & k-m\omega^2\\ 0 & 0 & k-m\omega^2 & -\frac{1}{2}k\\ -\frac{1}{2}k & -(k-m\omega^2) & -\frac{1}{2}k & k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$
可见
$$k-m\omega^2=0,\qquad \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & 0 & -\frac{1}{2}k \\ -k & -k & k-m\omega^2 \\ 0 & k-m\omega^2 & -\frac{1}{2}k \end{vmatrix}=0$$

$$(k-m\omega^2)\left[(-k)\left(-\frac{1}{2}k\right)-(k-m\omega^2)^2\right]-\frac{1}{2}k(-k)(k-m\omega^2)=0$$

$$(k-m\omega^2)[k^2-(k-m\omega^2)^2]=0$$

$$(k-m\omega^2)(2k-m\omega^2)\cdot m\omega^2=0$$

所以
$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \omega_3=\sqrt{\frac{2k}{m}},\qquad \omega_4=0$$

$\omega_4=0$ 不是简正频率，系统的运动是整体一起以恒定的角速度转动.

10.1.44　一质点在一个三维各向同性谐振子势场中振动的角频率为 ω_0，若质点带电荷 e，还受到均匀的电磁场作用，$\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{i}$. 求质点的振动频率，并讨论在弱场和强场两种极限情况下的振动频率.

解　　$\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{i}$

可取标势　　$\phi=-E_0x$

矢势　　$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}B_0(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$

可以验证有　　$\nabla\times\boldsymbol{A}=B_0\boldsymbol{k}$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2+y^2+z^2)+e\phi-e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}\\ &=\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2+y^2+z^2)-eE_0x+\frac{1}{2}eB_0(\dot{x}y-x\dot{y}) \end{aligned}$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2+y^2+z^2)+eE_0x-\frac{1}{2}eB_0(\dot{x}y-x\dot{y})$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得

$$m\ddot{x}-eB_0\dot{y}+m\omega_0^2x-eE_0=0$$

$$m\ddot{y}+eB_0\dot{x}+m\omega_0^2y=0$$

$$m\ddot{z}+m\omega_0^2z=0$$

立即可得质点在 z 方向振动的角频率为 ω_0.

若令 $x'=x-\frac{eE_0}{m\omega_0^2}$

$$\ddot{x}'+\omega_0^2x'-\frac{eB_0}{m}\dot{y}=0 \tag{1}$$

$$\ddot{y}+\omega_0^2y+\frac{eB_0}{m}\dot{x}'=0 \tag{2}$$

(1)式+(2)式×i，再令 $w=x'+\mathrm{i}y$，

$$\ddot{x}' + \mathrm{i}\,\ddot{y} + \omega_0^2(x' + \mathrm{i}y) + \mathrm{i}\,\frac{eB_0}{m}(\dot{x}' + \mathrm{i}\dot{y}) = 0$$

即

$$\ddot{w} + \mathrm{i}\,\frac{eB_0}{m}\dot{w} + \omega_0^2 w = 0$$

特征方程为

$$r^2 + \mathrm{i}\,\frac{eB_0}{m}r + \omega_0^2 = 0$$

$$r = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{i}\,\frac{eB_0}{m} \pm \sqrt{-\frac{e^2B_0^2}{m^2} - 4\omega_0^2}\right] = \left(-\frac{eB_0}{2m} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)\mathrm{i}$$

$$w = C_1'\exp\left[i\left(-\frac{eB_0}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t\right] + C_2'\exp\left[i\left(-\frac{eB_0}{2m} - \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t\right]$$

$$x' = \mathrm{Re}w = C_1\cos\left[\left(-\frac{eB_0}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t + \alpha_1\right] + C_2\cos\left[\left(-\frac{eB_0}{2m} - \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t + \alpha_2\right]$$

$$y = \mathrm{Im}w = C_1\sin\left[\left(-\frac{eB_0}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t + \alpha_1\right] + C_2\sin\left[\left(-\frac{eB_0}{2m} - \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t + \alpha_2\right]$$

$$x = x' + \frac{eE_0}{m\omega_0^2} = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} + C_1\cos\left[\left(-\frac{eB_0}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t + \alpha_1\right] + C_2\cos\left[\left(-\frac{eB_0}{2m} - \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\right)t + \alpha_2\right]$$

可见，在 x、y 方向，振动角频率各有两个，它们是$\sqrt{\omega_0^2+\frac{e^2B_0^2}{4m^2}}\pm\frac{eB_0}{2m}$，在 z 方向，振动角频率为 ω_0.

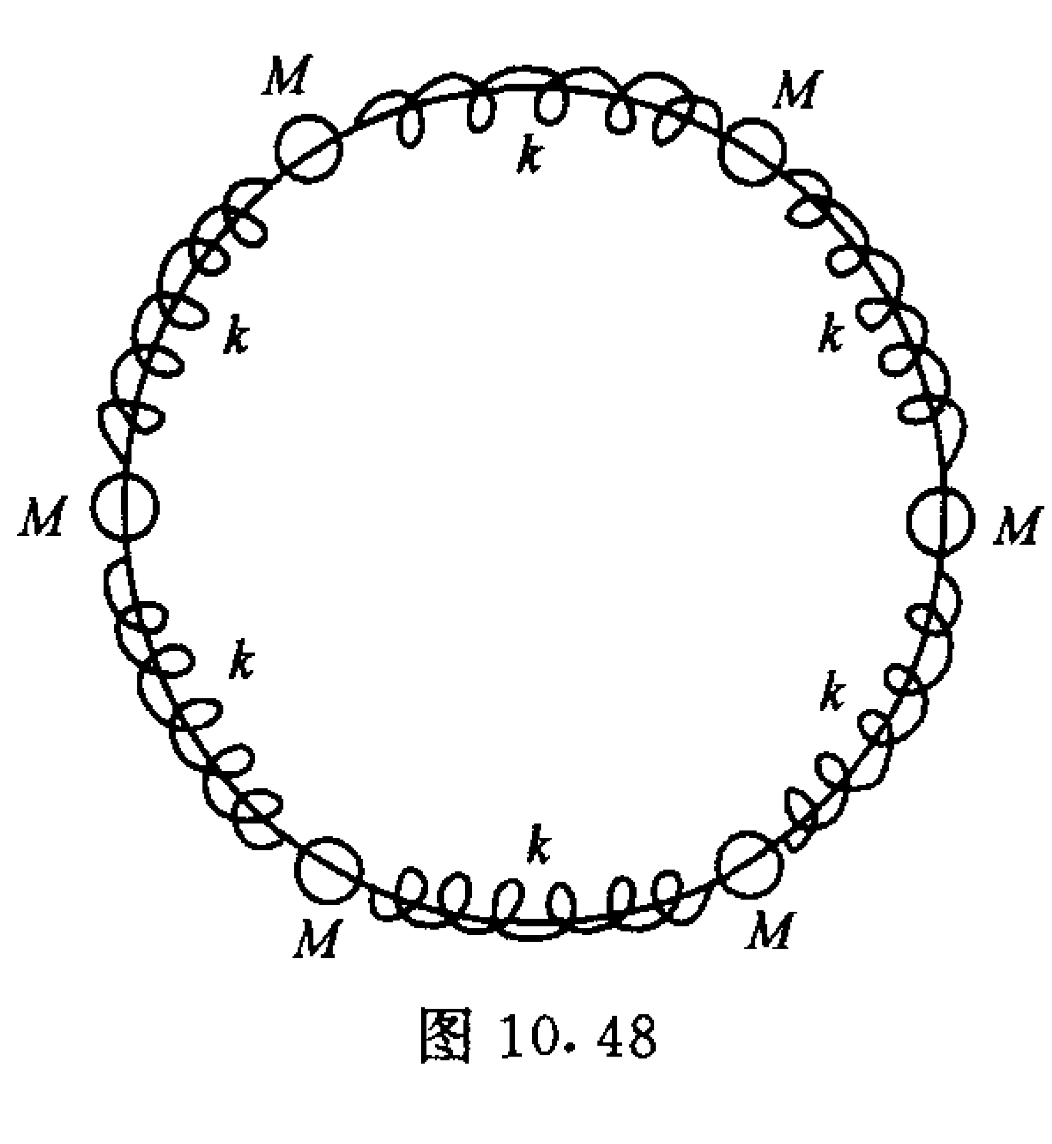


图 10.48

弱场极限情况下，$\frac{eB_0}{2m}\ll\omega_0$，$x$、$y$ 方向的振动角频率各有两个，它们是 $\omega_0\pm\frac{eB_0}{2m}$.

强场极限情况下，$\frac{eB_0}{2m}\gg\omega_0$，$x$、$y$ 方向的振动角频率仍各有两个，它们是$\frac{eB_0}{m}+\frac{m\omega_0^2}{eB_0}$和$\frac{m\omega_0^2}{eB_0}$.

10.1.45　一个苯环模型是由一个光滑的、无质量的圆环上串上六个质量为 M 的小珠子，珠子之间用劲度系数为 k 的六根轻弹簧相连，如图 10.48 所

示那样组成，并考虑圆环是固定的.

(1) 说明系统有多少个小振动振动模式；

(2) 算出所有的小振动简正频率和振动模式并画出振动模式图，用箭号表示珠子的运动的振幅和相位，涂黑表示小珠静止不动；

(3) 哪些振动模式与实际的苯分子的振动模式有联系.

提示：可利用问题的对称性简化计算.

解　(1) 给六个珠子按逆时针方向依次编号，从 1 到 6，偏离平衡位置的角位移也相应的标为从 θ_1 到 θ_6，逆时针方向为正.

设圆环的半径为 r，弹簧的原长为 a，则系统的势能可写为

$$V = \frac{1}{2}kr^2\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\pi}{3} + \theta_{i+1} - \theta_i - \frac{a}{r}\right)^2$$

其中 $\theta_7=\theta_1$.

显然，当 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_6$ 时，$V=$常量，这是随遇平衡的情况，系统整体做恒定角速度的转动(因为系统所受外力均指向环心，对环心的角动量守恒，因此角速度必须恒定)，系统有六个自由度，去掉一个 $\omega=0$ 不是振动，尚有五种小振动振动模式.

(2)
$$T = \frac{1}{2}Mr^2\sum_{i=1}^{6}\dot{\theta}_i^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}Mr^2\sum_{i=1}^{6}\dot{\theta}_i^2 - \frac{1}{2}kr^2\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\pi}{3} + \theta_{i+1} - \theta_i - \frac{a}{r}\right)^2$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0$ 得

$$M\ddot{\theta}_i + k(-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,6)$$

其中 $\theta_7=\theta_1,\theta_0=\theta_6$.

令 $\theta_i=u_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，代入微分方程组，要得 $u_1,u_2,\cdots u_6$ 的非零解，ω 需满足特征方程

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

其中 $\varepsilon=\frac{M\omega^2-2k}{k}$.

把行列式展开，求 ε 的六个解，进而求出六个 ω 值. 可求出简正频率，不是太麻烦，可进而求振动模式 $u_i^{(j)}$，就比较麻烦了.

下面我们利用问题的对称性，可以简化计算. 如前所述，系统对环心的角动量是守恒的，角动量不等于零是整体的转动，五种振动模式系统对环心的角动量均为零，由此考虑对称性，可画出图 10.49 所示的五种振动模式(尚待验证).

第一种振动模式，如图 10.49(a)所示.

$$\theta_1 = 0,\quad \theta_3 = -\theta_2,\quad \theta_4 = 0,\quad \theta_6 = -\theta_5$$

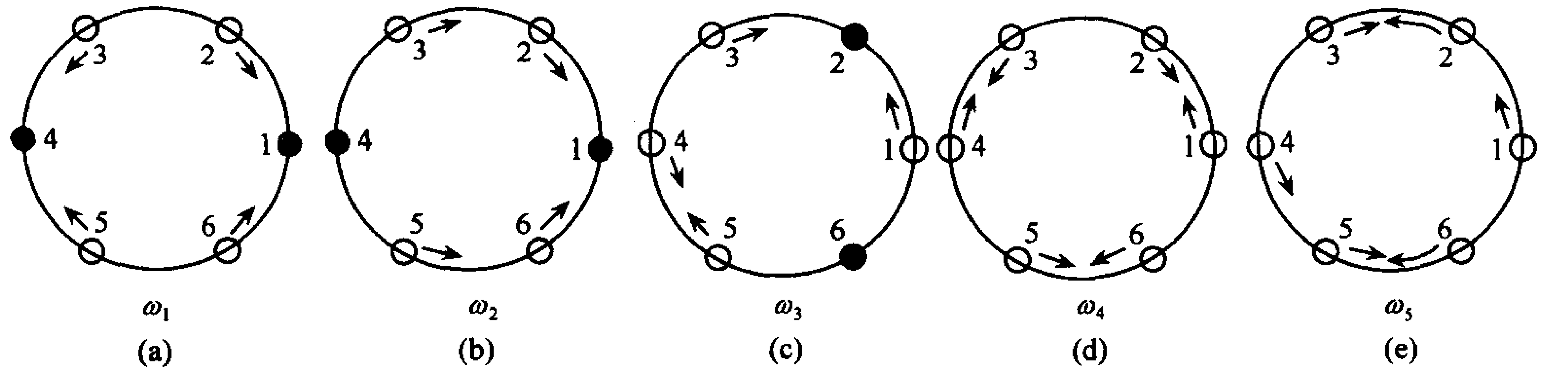


图 10.49

运动微分方程可简化为

$$k[-(-\theta_5)-\theta_2]=0$$

$$M\ddot{\theta}_2+k[2\theta_2-(-\theta_2)]=0$$

$$M(-\ddot{\theta}_2)+k[-\theta_2-2(-\theta_2)]=0$$

$$k[-(-\theta_2)-\theta_5]=0$$

$$M\ddot{\theta}_5+k[2\theta_5-(-\theta_5)]=0$$

$$M(-\ddot{\theta}_5)+k[-\theta_5+2(-\theta_5)]=0$$

六个方程中,只有三个独立的方程,它们是

$$M\ddot{\theta}_2+3k\theta_2=0$$

$$M\ddot{\theta}_5+3k\theta_5=0$$

$$\theta_5-\theta_2=0$$

由此可见,$\omega_1=\sqrt{\dfrac{3k}{M}}$.

如图 10.49(a)那样,取 $u_2^{(1)}=-1$,则 $u_5^{(1)}=-1, u_3^{(1)}=-u_2^{(1)}=1, u_6^{(1)}=-u_5^{(1)}=1, u_1^{(1)}=u_4^{(1)}=0$. 正如解图 10.49(a)所示.

第二种振动模式,如解图 10.49(b)所示.

$$\theta_1=0,\quad \theta_6=-\theta_2,\quad \theta_5=-\theta_3,\quad \theta_4=0$$

运动微分方程可简化为

$$k(\theta_2-\theta_2)=0$$

$$M\ddot{\theta}_2+k(2\theta_2-\theta_3)=0$$

$$M\ddot{\theta}_3+k(-\theta_2+2\theta_3)=0$$

$$k(-\theta_3+\theta_3)=0$$

$$-M\ddot{\theta}_3+k(-2\theta_3+\theta_2)=0$$

$$-M\ddot{\theta}_2+k(\theta_3-2\theta_2)=0$$

独立的方程只有两个,它们是

$$M\ddot{\theta}_2+2k\theta_2-k\theta_3=0$$

$$M\ddot{\theta}_3 + 2k\theta_3 - k\theta_2 = 0$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2k - M\omega^2 & -k \\ -k & 2k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M^2\omega^4 - 4kM\omega^2 + 3k^2 = 0$$

$$(M\omega^2 - k)(M\omega^2 - 3k) = 0$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3k}{M}}$ 就是前述的第一种振动模式，

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

由 $$(2k - M\omega_2^2)u_2^{(2)} - ku_3^{(2)} = 0$$

或 $$-ku_2^{(2)} + (2k - M\omega_2^2)u_3^{(2)} = 0$$

并按解图 10.49(b)所画，令 $u_2^{(2)} = -1$，可得 $u_3^{(2)} = -1$，

所以 $u_1^{(2)} = 0, u_2^{(2)} = -1, u_3^{(2)} = -1, u_4^{(2)} = 0, u_5^{(2)} = 1, u_6^{(2)} = 1$. 正如解图 10.49(b)所画那样.

第三种振动模式，如解图 10.49(c)所示，

$$\theta_2 = \theta_6 = 0, \quad \theta_3 = -\theta_1, \quad \theta_5 = -\theta_4$$

运动微分方程可简化为

$$M\ddot{\theta}_1 + k(2\theta_1) = 0$$

$$M\ddot{\theta}_1 + 2k\theta_1 + k\theta_4 = 0$$

$$M\ddot{\theta}_4 + 3k\theta_4 + k\theta_1 = 0$$

$$M\ddot{\theta}_4 + 3k\theta_4 = 0$$

$$\theta_4 - \theta_1 = 0$$

只能得零解，无意义，可见不存在这种模式.

重新考虑第三种振动模式，如解图 10.49(d)所示，

$$\theta_2 = -\theta_1, \quad \theta_4 = -\theta_3, \quad \theta_6 = -\theta_5$$

运动微分方程可简化为

$$M\ddot{\theta}_1 + 3k\theta_1 + k\theta_5 = 0$$

$$M\ddot{\theta}_1 + 3k\theta_1 + k\theta_3 = 0$$

$$M\ddot{\theta}_3 + 3k\theta_3 + k\theta_1 = 0$$

$$M\ddot{\theta}_3 + 3k\theta_3 + k\theta_5 = 0$$

$$M\ddot{\theta}_5 + 3k\theta_5 + k\theta_3 = 0$$

$$M\ddot{\theta}_5 + 3k\theta_5 + k\theta_1 = 0$$

六个方程中最多只能有三个独立的方程，当 $\theta_1 = \theta_3 = \theta_5$ 时，六个方程都变成

$$M\ddot{\theta}_i + 4k\theta_i = 0 \qquad (i = 1,3,5)$$

可见
$$\omega_3^{(3)}=\sqrt{\frac{4k}{M}}$$
取 $u_1^{(3)}=1$,则 $u_3^{(3)}=u_5^{(3)}=1, u_2^{(3)}=u_4^{(3)}=u_6^{(3)}=-1$. 其模式图正如图 10.49(d)所示.

现考虑解图 10.49(e)所示的振动模式,
$$\theta_3=-(\theta_2+\theta_4),\quad \theta_6=-(\theta_1+\theta_5)$$
运动微分方程可改写为
$$M\ddot{\theta}_1+k(3\theta_1+\theta_5-\theta_2)=0 \tag{1}$$
$$M\ddot{\theta}_2+k(3\theta_2-\theta_1+\theta_4)=0 \tag{2}$$
$$-M(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_4)+k(-3\theta_2-3\theta_4)=0 \tag{3}$$
$$M\ddot{\theta}_4+k(3\theta_4+\theta_2-\theta_5)=0 \tag{4}$$
$$M\ddot{\theta}_5+k(3\theta_5-\theta_4+\theta_1)=0 \tag{5}$$
$$-M(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_5)+k(3\theta_1+3\theta_5)=0 \tag{6}$$
由式(3)和式(6)可得此振动模式的简正频率为
$$\omega_4=\sqrt{\frac{3k}{M}}$$
考虑到此简正频率,由式(1)或式(4),可得 $\theta_2=\theta_5$,由式(2)或式(5),可得 $\theta_1=\theta_4$.

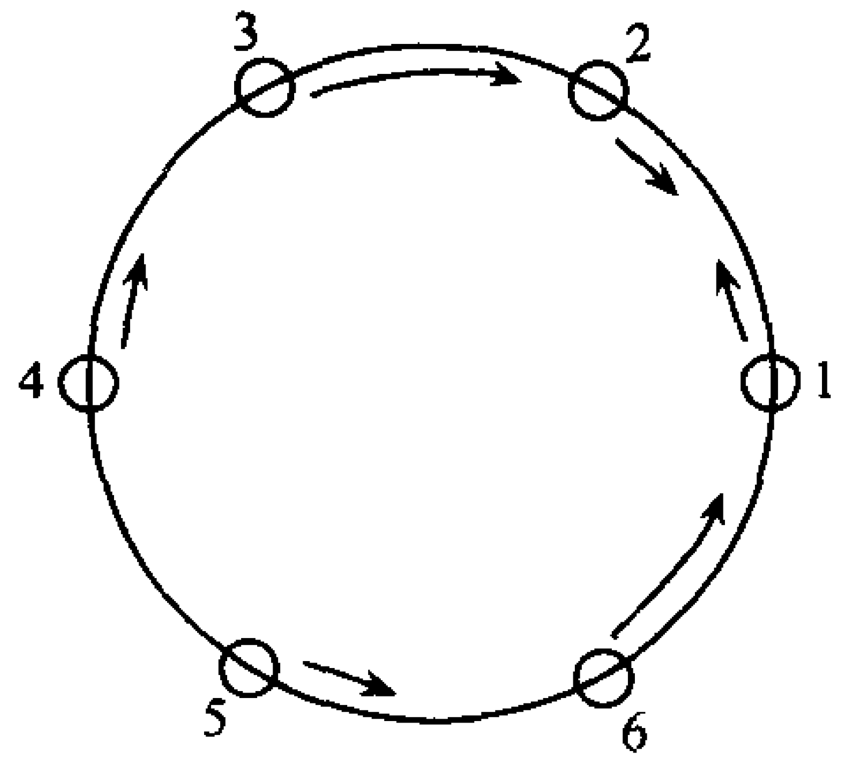


图 10.50

因此振动模式为 $u_1^{(4)}=1, u_2^{(4)}=1, u_4^{(4)}=1, u_5^{(4)}=1, u_3^{(4)}=-(u_2^{(4)}+u_4^{(4)})=-2, u_6^{(4)}=-(u_1^{(4)}+u_5^{(4)})=-2$,和图 10.49(e)所画的是一致的. 这里,$u_1^{(4)}=1, u_2^{(4)}=1$ 是我们可任意选取的,如取 $u_1^{(4)}=1, u_2^{(4)}=-1$,则 $u_4^{(4)}=1, u_5^{(4)}=-1$, $u_3^{(4)}=0, u_6^{(4)}=0$,实际上就成了第一种振动模式,表面上的差别可以给小珠重新编号加以消除. u_1、u_2 只能有两种独立的选取法,如取 $u_1=0, u_2=-1$,就与第一种模式的写法完全相同了;若不重新编号,也可把 $u_3=u_6=0$ 的振动视为第一、第四两种振动模式的线性叠加.

现找第五种振动模式,试用图 10.50 的模式图,
$$\theta_1=-\theta_2,\quad \theta_3=-\theta_6,\quad \theta_4=-\theta_5$$
独立的微分方程为
$$M\ddot{\theta}_1+k(3\theta_1+\theta_3)=0 \tag{7}$$
$$M\ddot{\theta}_3+k(\theta_1+2\theta_3-\theta_4)=0 \tag{8}$$
$$M\ddot{\theta}_4+k(3\theta_4-\theta_3)=0 \tag{9}$$
式(7)×a+式(8)×b+式(9)×c,得
$$M(a\ddot{\theta}_1+b\ddot{\theta}_3+c\ddot{\theta}_4)+k[(3a+b)\theta_1+(a+2b-c)\theta_3+(-b+3c)\theta_4]=0 \tag{10}$$
$a\theta_1+b\theta_3+c\theta_4$ 成为简正坐标. 要求 a、b、c 满足下列方程组:

$$3a+b=a$$
$$a+2b-c=b$$
$$-b+3c=c$$

由此可得　$b=-2a,\quad c=\dfrac{1}{2}b$

取 $a=1$，则　$b=-2,\quad c=-1$

将 a、b、c 值代入式(10)，得

$$M(\ddot{\theta}_1-2\ddot{\theta}_3-\ddot{\theta}_4)+k(\theta_1-2\theta_3-\theta_4)=0$$

所以　$\omega_5=\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

将 $\theta_1=u_1^{(5)}e^{i\omega_5 t}$、$\theta_3=u_3^{(5)}e^{i\omega_5 t}$、$\theta_4=u_4^{(5)}e^{i\omega_5 t}$代入式(7)、(8)、(9)，得

$$2u_1^{(5)}+u_3^{(5)}=0$$
$$u_3^{(5)}+u_1^{(5)}-u_4^{(5)}=0$$
$$2u_4^{(5)}-u_3^{(5)}=0$$

取 $u_1^{(5)}=1$，则解得 $u_3^{(5)}=-2$，$u_4^{(5)}=-1$，再用 $\theta_1=-\theta_2$，$\theta_3=-\theta_6$，$\theta_4=-\theta_5$，得 $u_2^{(5)}=-1$，$u_6^{(5)}=2$，$u_5^{(5)}=1$；正是图 10.50 所画的模式图.

(3) 实际的苯分子和题目所给的苯模型类似，但苯分子不存在固定的圆环，没有受到圆环给予的作用线通过环心的力，因而质心的加速度为零，因此凡是振动模式中质心加速度为零的与实际的苯分子的振动模式有联系，它们是简正频率为 ω_1、ω_3 和 ω_4 的振动模式，模式图分别是图 10.49(a)、(d)、(e)图. 如果整体的转动也算一种模式，它也是与苯分子有联系的.

10.1.46　在小振动理论中，常遇到如下形式的拉格朗日函数：

$$L=T-V$$

其中　$T=\sum\limits_{i,j=1}^{N}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$

$$V=\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}q_iq_j$$

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是实对称的.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，即 $\boldsymbol{x}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}\geqslant 0$，对任何的列矩阵均成立. 证明一般这样一个矩阵的本征值大于或等于零，并说明我们不会涉及零本征值；

(2) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}^{\pm 1/2}$是存在的；

(3) 用坐标变换关系 $q_i=\sum\limits_{j=1}^{N}(\boldsymbol{A}^{\pm 1/2}\boldsymbol{S})_{ij}\theta_j$，其中 $\boldsymbol{S}$ 是 $N\times N$ 矩阵，引入新坐标 θ_j，证明可以选用矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都对角化，说明对角化后的 $\boldsymbol{B}$ 的对角元素的物理意义.

证明　(1) 对于一个由 n 个质点构成的质点系，采用笛卡儿坐标，

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)\geqslant 0$$

采用广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_N$，与原用的笛卡儿坐标的变换关系，对于小振动问题可写成

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, \cdots, q_N) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

可得

$$T = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \geqslant 0 \tag{1}$$

其中 a_{ij}是在平衡位置的值，故为常量、实数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是实对称矩阵，(1)式也可写成

$$T = \boldsymbol{q}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{q} \geqslant 0$$

对任意取的 $\boldsymbol{q}$ 或写作 $\boldsymbol{x}$，都有 $T=\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \geqslant 0$.

设 $\boldsymbol{x}_\mu$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值 λ_μ 的本征矢量，即

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}_\mu = \lambda_\mu \boldsymbol{x}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, N) \tag{2}$$

因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称的，其本征值 λ_μ 均为实数.

式(2)两边左乘$\boldsymbol{x}_\mu^T$，

$$\boldsymbol{x}_\mu^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}_\mu = \boldsymbol{x}_\mu^T \cdot \lambda_\mu \boldsymbol{x}_\mu = \lambda_\mu \boldsymbol{x}_\mu^T \cdot \boldsymbol{x}_\mu = \lambda_\mu \sum_{i=1}^{N} x_{\mu i}^2$$

因为 $\boldsymbol{x}_\mu^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}_\mu \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{N} x_{\mu i}^2 > 0$，因而 $\lambda_\mu \geqslant 0$. 这就证明了 $\boldsymbol{A}$ 的本征值大于等于零.

我们不会遇到 $\boldsymbol{A}$ 有零本征值的情况，如 $\boldsymbol{A}$ 存在零本征值，则 $\boldsymbol{A}$ 对角化后写出的动能的平方和式子中少了一项广义速度平方项，则由拉格朗日方程，拉格朗日函数中既无这个广义速度，也无这个广义坐标，自由度数就不对了，这是不可能的，因而惯性矩阵是不会出现零本征值的.

(2) 只要$|\boldsymbol{A}|>0$，就有 $\boldsymbol{A}^{\pm 1/2}$存在. 现在证明$|\boldsymbol{A}|>0$，实对称矩阵可作正交变换使之对角化. 设使 $\boldsymbol{A}$ 对角化的正交变换矩阵为 $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}$($\boldsymbol{I}$ 表示 $N\times N$ 的单位矩阵)，

$$\boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\lambda}$$

这里$\boldsymbol{\lambda}$是一个对角矩阵，

$$\lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$$

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{S}^T||\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{\lambda}| = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i > 0$$

($\boldsymbol{A}$ 的本征值 λ_i 均大于零).

(3) 用变换 $q_i = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{S})_{ij}\theta_j$ 引入新坐标 θ_i，这里 $\boldsymbol{S}$ 是使 $\boldsymbol{A}$ 对角化的正交矩阵，

$$T = \dot{\boldsymbol{q}}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = (\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{S}\,\dot{\boldsymbol{\theta}})^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{S}^T (\boldsymbol{A}^{-1/2})^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$\boldsymbol{A}$ 是实对称的，

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}^{-1/2})^T = (\boldsymbol{A}^T)^{-1/2} = \boldsymbol{A}^{-1/2}$$
$$T = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

与此类似,可得

$$V = \boldsymbol{q}^T \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{\theta}$$

因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,其中用了

$$(\boldsymbol{A}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2})^T = (\boldsymbol{A}^{-1/2})^T\boldsymbol{B}^T \cdot (\boldsymbol{A}^{-1/2})^T = \boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}$$

$\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}$是实对称矩阵,能被正交矩阵 $\boldsymbol{S}$ 对角化. 所以,我们得到

$$T = \sum_{j=1}^{N} \dot{\theta}_j^2, \quad V = \sum_{j=1}^{N} B_j\,\theta_j^2$$

其中 B_j 是 $\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}$对角化了的矩阵的对角元素,即

$$(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{S})_{ij} = B_j\delta_{ij}$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \sum_{j=1}^{N}(\dot{\theta}_j^2 - B_j\theta_j^2)$$

由拉格朗日方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\,\dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_i} = 0$ 得

$$\ddot{\theta}_i + B_i\theta_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

因此 B_i 是系统的简正频率 ω_i 的平方.

10.1.47 一根轻弹性绳在两个固定点 A、B 之间拉紧,A、B 间距离为 $4a$,绳的张力为 τ,一个质量为 $3m$ 的质点系在绳子中点 C,两个质量为 $4m$ 的质点分别系在 AC、CB 的中点,该系统开始处于平衡状态,突然给两个质量为 $4m$ 的质点以同样方向的横向速度 u,证明质量为 $3m$ 的质点在 t 时刻的位移为

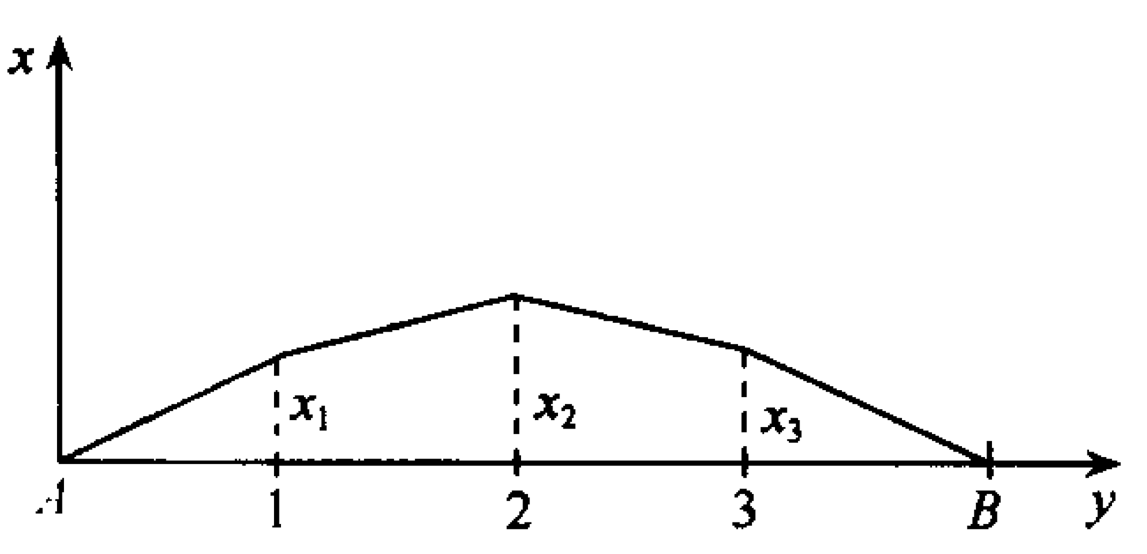


图 10.51

$$\frac{4u}{5\omega}\left(-\sin\omega t + \sqrt{6}\sin\frac{1}{\sqrt{6}}\omega t\right)$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{\tau}{ma}}$(不考虑重力的作用).

证明 取自 A 至 B 依次排列的三个质点的偏离平衡位置的横向位移 x_1、x_2、x_3 为广义坐标,如图 10.51 所示,

$$4m\,\ddot{x}_1 = -\tau\frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_{y=a-\varepsilon} + \tau\frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_{y=a+\varepsilon}$$

$$= -\tau\frac{x_1}{a} + \tau\frac{x_2 - x_1}{a} = -\frac{2\tau}{a}x_1 + \frac{\tau}{a}x_2$$

$$3m\,\ddot{x}_2 = -\tau\frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_{y=2a-\varepsilon} + \tau\frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_{y=2a+\varepsilon}$$

$$= -\tau\frac{x_2 - x_1}{a} + \tau\frac{x_3 - x_2}{a} = -\frac{2\tau}{a}x_2 + \frac{\tau}{a}x_1 + \frac{\tau}{a}x_3$$

$$4m\,\ddot{x}_3 = -\tau\frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_{y=3a-\varepsilon} + \tau\frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_{y=3a+\varepsilon}$$

$$= -\tau\frac{x_3 - x_2}{a} + \tau\frac{0 - x_3}{a} = -\frac{2\tau}{a}x_3 + \frac{\tau}{a}x_2$$

运动微分方程也可由

$$T = \frac{1}{2}(4m)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}\cdot 3m\,\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{a}\right)[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2]$$

$$L = T - V,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

获得.

令$\dfrac{\tau}{a}=A$,运动微分方程可写为

$$4m\,\ddot{x}_1 + 2Ax_1 - Ax_2 = 0$$

$$3m\,\ddot{x}_2 - Ax_1 + 2Ax_2 - Ax_3 = 0$$

$$4m\,\ddot{x}_3 - Ax_2 + 2Ax_3 = 0$$

设 $x_i=u_i\cos(\omega t+\alpha)\quad(i=1,2,3)$,代入微分方程组,得

$$(2A - 4m\omega^2)u_1 - Au_2 = 0$$

$$-Au_1 + (2A - 3m\omega^2)u_2 - Au_3 = 0$$

$$-Au_2 + (2A - 4m\omega^2)u_3 = 0$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2A - 4m\omega^2 & -A & 0 \\ -A & 2A - 3m\omega^2 & -A \\ 0 & -A & 2A - 4m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

将第一列减第三列作第一列,再将第一行加第三行作第三行,得

$$\begin{vmatrix} 2A - 4m\omega^2 & -A & 0 \\ 0 & 2A - 3m\omega^2 & -A \\ 0 & -2A & 2A - 4m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2A - 4m\omega^2)(12m^2\omega^4 - 14Am\omega^2 + 2A^2) = 0$$

$$4(A - 2m\omega^2)(6m\omega^2 - A)(m\omega^2 - A) = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{A}{2m} = \frac{\tau}{2ma}$$

$$\omega_2^2 = \frac{A}{6m} = \frac{\tau}{6ma}$$

$$\omega_3^2 = \frac{A}{m} = \frac{\tau}{ma}$$

将 ω_1^2 代入特征矩阵,求其伴随矩阵,

$$\mathrm{adj}\begin{pmatrix} 0 & -A & 0 \\ -A & \frac{1}{2}A & -A \\ 0 & -A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^2 & 0 & A^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ A^2 & 0 & -A^2 \end{pmatrix}$$

其任一非零列与 $u_1^{(1)}$、$u_2^{(1)}$、$u_3^{(1)}$ 成正比. 可取

$$u_1^{(1)}=1,\quad u_2^{(1)}=0,\quad u_3^{(1)}=-1$$

将 ω_2^2 代入特征矩阵,求其伴随矩阵,

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}A & -A & 0\\ -A & \frac{3}{2}A & -A\\ 0 & -A & \frac{4}{3}A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2 & \frac{4}{3}A^2 & A^2\\ \frac{4}{3}A^2 & \frac{16}{9}A^2 & \frac{4}{3}A^2\\ A^2 & \frac{4}{3}A^2 & A^2\end{pmatrix}$$

取 $u_1^{(2)}=1, u_2^{(2)}=\frac{4}{3}, u_3^{(2)}=1$

将 ω_3^2 代入特征矩阵,求其伴随矩阵,

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix}-2A & -A & 0\\ -A & -A & -A\\ 0 & -A & -2A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2 & -2A^2 & A^2\\ -2A^2 & 4A^2 & -2A^2\\ A^2 & -2A^2 & A^2\end{pmatrix}$$

取 $u_1^{(3)}=1, u_2^{(3)}=-2, u_3^{(3)}=1$

通解为

$$\begin{aligned}x_1&=C_1u_1^{(1)}\cos(\omega_1t+\alpha_1)+C_2u_1^{(2)}\cos(\omega_2t+\alpha_2)+C_3u_1^{(3)}\cos(\omega_3t+\alpha_3)\\&=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{2ma}}t+\alpha_1\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{6ma}}t+\alpha_2\right)+C_3\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{ma}}t+\alpha_3\right)\end{aligned}$$

$$x_2=\frac{4}{3}C_2\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{6ma}}t+\alpha_2\right)-2C_3\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{ma}}t+\alpha_3\right)$$

$$x_3=-C_1\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{2ma}}t+\alpha_1\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{6ma}}t+\alpha_2\right)+C_3\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{ma}}t+\alpha_3\right)$$

初始条件:$t=0$ 时,$x_1=x_2=x_3=0, \dot{x}_1=\dot{x}_3=u, \dot{x}_2=0$,定出 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{\pi}{2}, C_1=0, C_2=-\frac{3u}{5}\sqrt{\frac{6ma}{\tau}}, C_3=-\frac{2u}{5}\sqrt{\frac{ma}{\tau}}$.

质量为 $3m$ 的质点 t 时刻的位移为

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{4}{3}\left(-\frac{3u}{5}\sqrt{\frac{6ma}{\tau}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{6ma}}t+\frac{\pi}{2}\right)-2\left(-\frac{2u}{5}\sqrt{\frac{ma}{\tau}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{ma}}t+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{4u}{5}\sqrt{\frac{6ma}{\tau}}\sin\left(\sqrt{\frac{\tau}{6ma}}t\right)-\frac{4u}{5}\sqrt{\frac{ma}{\tau}}\sin\left(\sqrt{\frac{\tau}{ma}}t\right)\end{aligned}$$

令 $\omega=\sqrt{\frac{\tau}{ma}}$,可把 x_2 改写成

$$x_2=\frac{4u}{5\omega}\left(\sqrt{6}\sin\frac{1}{\sqrt{6}}\omega t-\sin\omega t\right)$$

10.1.48　(1) 两相同单摆,质点质量为 m,摆长为 l,用劲度系数为 k 的轻弹簧连起来,弹簧的自然长度等于两悬点间距,如图 10.52(a)所示. 试求此系统围绕平衡位置做小

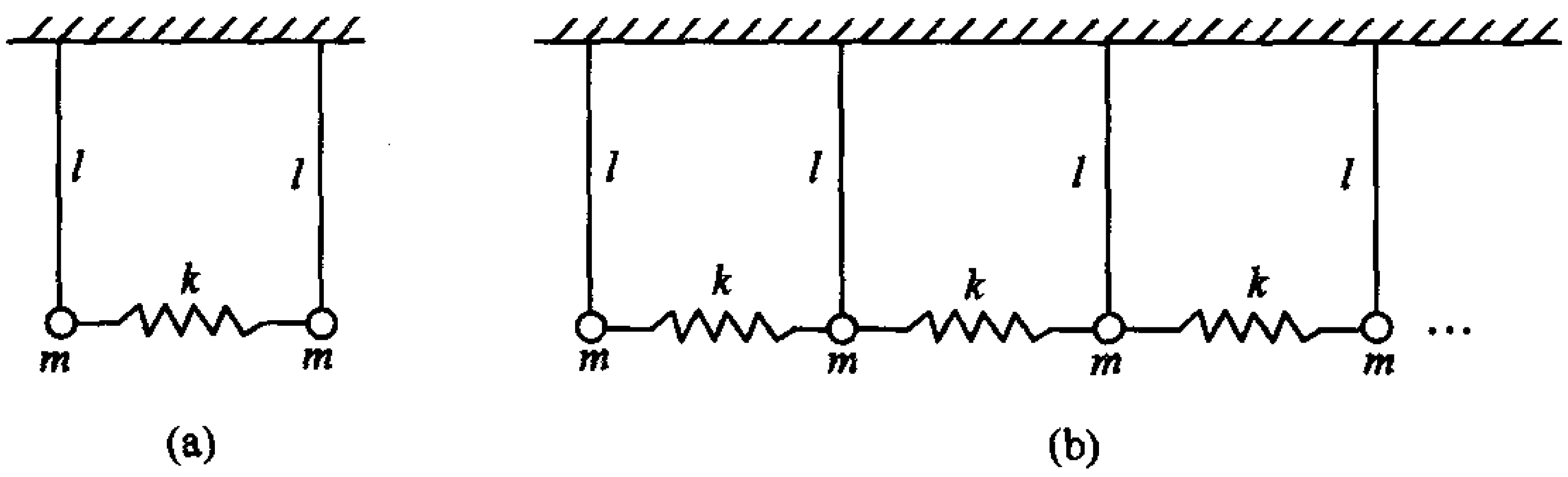


图 10.52

振动的简正频率和振动模式；

(2) 无限多个这样的单摆，两两用弹簧耦合，如图 10.52(b)所示，求此系统的振动模式和相应的简正频率.

解　(1) $L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2-\frac{1}{2}mgl\theta_1^2-\frac{1}{2}mgl\theta_2^2-\frac{1}{2}k(l\theta_2-l\theta_1)^2$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0$得

$$ml^2\ddot{\theta}_1+mgl\theta_1-kl^2(\theta_2-\theta_1)=0 \tag{1}$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2+mgl\theta_2+kl^2(\theta_2-\theta_1)=0 \tag{2}$$

式(1)+式(2)得

$$l(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+g(\theta_1+\theta_2)=0$$

式(1)−式(2)得

$$ml(\ddot{\theta}_1-\ddot{\theta}_2)+(mg+2kl)(\theta_1-\theta_2)=0$$

可取简正坐标 ξ、η，

$$\xi=\theta_1+\theta_2,\quad \eta=\theta_1-\theta_2$$

$$\theta_1=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\quad \theta_2=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$$

简正频率为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$$

振动模式：用简正坐标，ω_1：ξ、η 方向振动的振幅比为 1∶0；ω_2：ξ、η 方向振动的振幅比为 0∶1.

用坐标 θ_1、θ_2，ω_1：$\frac{u_1^{(1)}}{u_2^{(1)}}=1$；$\omega_2$：$\frac{u_1^{(1)}}{u_2^{(2)}}=-1$.

(2)
$$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+\cdots)-\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots)-\frac{1}{2}kl^2[(\theta_2-\theta_1)^2+(\theta_3-\theta_2)^2+\cdots]$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0$得

$$ml^2\ddot{\theta}_n+mgl\theta_n+kl^2[(\theta_n-\theta_{n-1})-(\theta_{n+1}-\theta_n)]=0$$

即
$$ml\ddot{\theta}_n+mg\theta_n+kl(2\theta_n-\theta_{n+1}-\theta_{n-1})=0 \tag{3}$$
因为 $n\to\infty$ 时 θ_n 保持有限，可假定振幅在空间和在时间上都周期地变化，即令
$$\theta_n = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kna-\omega t)} \tag{4}$$
其中 a 为弹簧的自然长度，"波数"$k=\frac{2\pi}{\lambda}$，λ 为"波长"必为 a 的整数倍，即 $\lambda=a,2a,3a,\cdots$，对应的 ω（简正频率）由将式(4)代入式(3)得到的关系确定，此关系为
$$\cos ka = 1+\frac{mg-ml\omega^2}{2kl}$$
$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}(1-\cos ka)}$$
相应于 $\lambda=a$、$2a$、$3a$、$4a,\cdots$的简正频率 ω_1、ω_2、ω_3、$\omega_4,\cdots$分别为
$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{4k}{m}},\quad \omega_3=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{3k}{m}}$$
$$\omega_4=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}},\cdots$$

计算相应的振动模式：将 $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}\left(相应的\ k=\frac{2\pi}{a}\right)$ 代入式(4)得
$$\theta_n = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kna-\omega_1 t)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi n-\omega_1 t)}$$
可见振动模式
$$u_1^{(1)}:u_2^{(1)}:u_3^{(1)}:\cdots = 1:1:1:\cdots$$

将 $\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{4k}{m}}\left(相应的\ k=\frac{2\pi}{2a}=\frac{\pi}{a}\right)$ 代入式(4)得
$$\theta_n = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi n-\omega_2 t)}$$
振动模式可表示为
$$(u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},\cdots) = (-1,1,-1,\cdots)$$

将 $\omega_3=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{3k}{m}}$ 代入式(4)，相应的 $k=\frac{2\pi}{3a}$，
$$\theta_n = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}n-\omega_3 t\right)}$$
振动模式为
$$(u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)},\cdots) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}},1,\cdots\right)$$

将 $\omega_4=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}\left(相应的\ k=\frac{\pi}{2a}\right)$ 代入式(4)得
$$\theta_n = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi n}{2}-\omega_4 t\right)}$$
振动模式为
$$(u_1^{(4)},u_2^{(4)},u_3^{(4)},\cdots) = (i,-1,-i,\cdots)$$

照此做法，可计算相应于简正频率 ω_5、ω_6、$\cdots$的振动模式.

10.2 有阻尼和(或)有周期性外力作用下的小振动

10.2.1 三个质量均为 m 的相同的物体,用两根劲度系数均为 k 的轻弹簧连结,如图 10.53 所示. 设运动是一维的,开始时($t=0$)三个物体均静止并分别在各自的平衡位置,设物体 A 受一外力 $F(t)=f\cos\omega t(t>0)$,求物体 C 的运动.

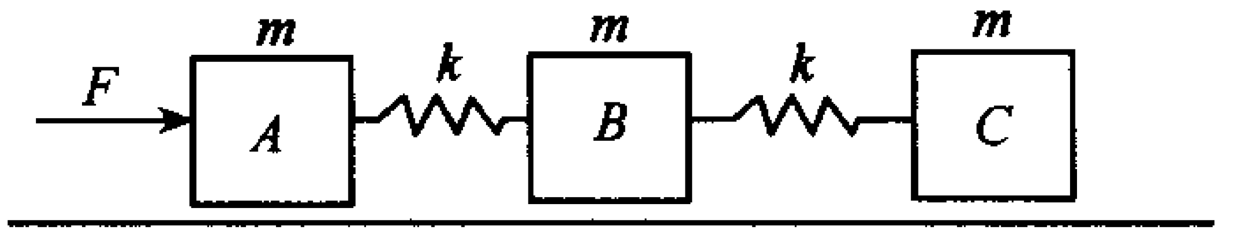


图 10.53

解 取物体 A、B、C 偏离各自平衡位置的位移 x_1、x_2、x_3(均向右为正)为广义坐标,

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}k(x_3-x_2)^2$$

$$Q_1=f\cos\omega t,\quad Q_2=Q_3=0$$

由$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=Q_i$ 得

$$m\ddot{x}_1-k(x_2-x_1)=f\cos\omega t \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_2+k(2x_2-x_1-x_3)=0 \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_3+k(x_3-x_2)=0 \tag{3}$$

式(1)+式(2)+式(3)得

$$m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2+\ddot{x}_3)=f\cos\omega t$$

式(1)−式(3)得

$$m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_3)+k(x_1-x_3)=f\cos\omega t$$

式(1)+式(3)−2×式(2),得

$$m(\ddot{x}_1-2\ddot{x}_2+\ddot{x}_3)+3k(x_1-2x_2+x_3)=f\cos\omega t$$

令 $y_1=x_1+x_2+x_3$,$y_2=x_1-x_3$,$y_3=x_1-2x_2+x_3$,

$$m\ddot{y}_1=f\cos\omega t \tag{4}$$

$$m\ddot{y}_2+ky_2=f\cos\omega t \tag{5}$$

$$m\ddot{y}_3+3ky_3=f\cos\omega t \tag{6}$$

初始条件:$t=0$ 时,$x_1=x_2=x_3=0$,$\dot{x}_1=\dot{x}_2=\dot{x}_3=0$,则 $y_1=y_2=y_3=0$,$\dot{y}_1=\dot{y}_2=\dot{y}_3=0$.

用上述初始条件,积分式(4)、(5)、(6)得

$$y_1=\frac{f}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

$$y_2=\frac{f}{k-m\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_2 t)$$

其中 $\omega_2=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

$$y_3=\frac{f}{3k-m\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_3 t)$$

其中 $\omega_3=\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.

物体 C 的运动为

$$x_3=\frac{1}{6}(2y_1-3y_2+y_3)$$
$$=\frac{f}{6}\left[\frac{2}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)-\frac{3}{k-m\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_2 t)+\frac{1}{3k-m\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_3 t)\right]$$

其中 $\omega_2=\sqrt{\dfrac{k}{m}},\omega_3=\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.

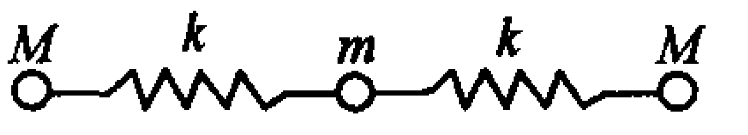


图 10.54

10.2.2 两个质量为 M 的质点分别用劲度系数为 k 的轻弹簧与质量为 $m(m<M)$的质点相连，如图 10.54 所示做一维运动，若中间的质点被频率为 $\omega_0=2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 的简谐方式所驱动，问左边质点的稳态运动和驱动运动同相位还是反相位？

解 取左、中、右三个质点偏离平衡位置的位移 x_1、x_2、x_3(向右为正)为广义坐标，

$$L=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_3^2-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}k(x_3-x_2)^2$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0$ 得

$$M\ddot{x}_1+k(x_1-x_2)=0 \tag{1}$$
$$m\ddot{x}_2+k(2x_2-x_1-x_3)=0$$
$$M\ddot{x}_3+k(x_3-x_2)=0$$

中间的质点以频率为 $\omega_0=2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 做简谐运动，

设
$$x_2=B\sin\omega_0 t$$
代入式(1)得
$$M\ddot{x}_1+kx_1=kB\sin\omega_0 t \tag{2}$$
左边质点的受迫振动，达到稳态后将以强迫力的角频率做简谐振动，设稳态运动为
$$x_1=A\sin\omega_0 t$$
代入式(2)得
$$-M\omega_0^2A\sin\omega_0 t+kA\sin\omega_0 t=kB\sin\omega_0 t$$
$$A=\frac{kB}{k-M\omega_0^2}=\frac{m}{m-4M}B$$
$$\frac{A}{B}=\frac{m}{m-4M}<0$$
可见，左边质点的运动终将与驱动运动反相位.

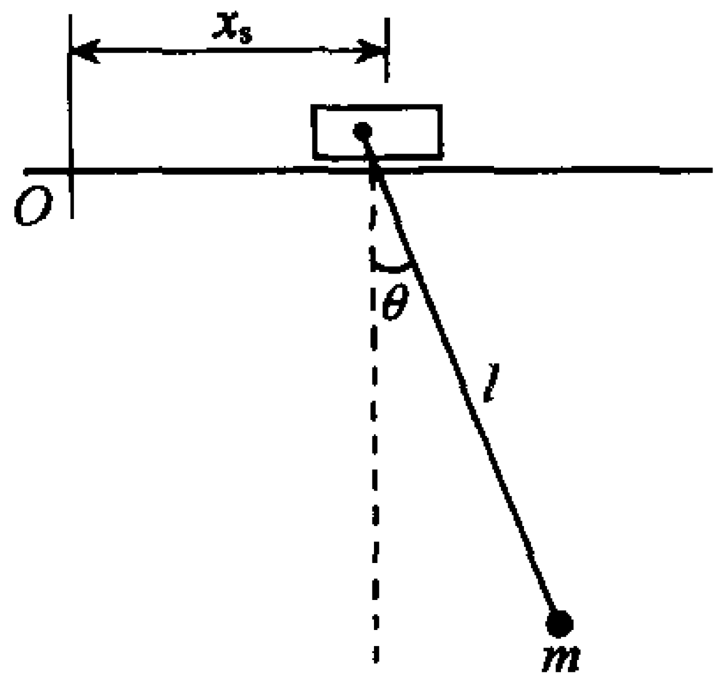


图 10.55

10.2.3 一单摆悬挂在一随时间沿水平方向驱动的支座上，如图 10.55 所示.

(1) 已知支座的运动 $x_s(t)$，写出摆线与竖直方向的夹角 θ 满足的运动微分方程；

(2) 若 $x_s = A\cos\omega t$,运动中角位移 θ 很小,求摆锤的运动.

解 (1) 以支座为参考系,

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

摆锤受到向右的惯性力为

$$-m\ddot{x}_s(t)$$

$$\delta W = -m\ddot{x}_s(t)\cos\theta \cdot l\delta\theta$$

惯性力的广义力为

$$Q = -ml\ddot{x}_s(t)\cos\theta$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = Q$,运动微分方程为

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = -\ddot{x}_s(t)\cos\theta$$

(2) $$x_s(t) = A\cos\omega t$$

θ 很小, $$\sin\theta\approx\theta,\cos\theta\approx 1$$

运动微分方程为

$$l\ddot{\theta} + g\theta = A\omega^2\cos\omega t$$

设微分方程的特解为

$$\theta^* = B\cos\omega t$$

代入微分方程,可定出 B,得

$$\theta^* = \frac{\omega^2}{g - l\omega^2}A\cos\omega t$$

摆锤运动的通解为

$$\theta = C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right) + \frac{\omega^2}{g - l\omega^2}A\cos\omega t$$

C、α 是积分常数,由初始条件确定. 运动中 θ 保持小量,故不会出现共振现象,$\frac{g}{l}\neq\omega^2$.

10.2.4 若双摆中两质点质量均为 m,摆线长度均为 l,两质点受到介质的阻力,其大小与速率成正比,比例系数为 b. 求:

(1) 两种频率的阻尼振动都是弱阻尼的条件;

(2) 在上述条件下运动的一般解.

解 (1) $$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2]$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2 + 2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\approx ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$V = mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(1-\cos\theta_2) \approx mgl\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl\theta_2^2$$

其中 θ_1、θ_2 分别是上、下两条摆线与竖直向下方向间的夹角,

$$L=\frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)-\frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2+\theta_2^2)$$

瑞利耗散函数为

$$R=\frac{1}{2}bl^2(2\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=-\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}_i}$得运动微分方程

$$2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\frac{b}{m}(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)+\frac{2g}{l}\theta_1=0$$

$$\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\frac{b}{m}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)+\frac{g}{l}\theta_2=0$$

求简正坐标，先作坐标变换，使势能函数变成“球”型平方和，取坐标变换矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

引入新坐标 φ_1、φ_2，

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

即
$$\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1,\quad \theta_2=\varphi_2$$

变换后新的势能 V' 和动能 T' 为

$$V'=\frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2+\varphi_2^2)$$

$$T'=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2+\sqrt{2}\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)$$

$$\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}ml^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}ml^2\\ \frac{1}{\sqrt{2}}ml^2 & ml^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}'=\begin{pmatrix}mgl & 0\\ 0 & mgl\end{pmatrix}$$

耗散函数矩阵为

$$\boldsymbol{R}'=\begin{pmatrix}bl^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}bl^2\\ \frac{1}{\sqrt{2}}bl^2 & bl^2\end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 矩阵同时对角化，也就把 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{R}$ 三个矩阵都同时对角化了. 现求正交变换矩阵 $\boldsymbol{E}$，使 $\boldsymbol{M}'$ 矩阵对角化，为书写简便起见，写 $\boldsymbol{M}'$ 以 ml^2 为单位. 求 $\boldsymbol{M}'$ 矩阵的特征值 λ，其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

解出　$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

将 λ_1 代入特征方程左边行列式相应的矩阵,得

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

其伴随矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

其归一化的列矩阵为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

将 λ_2 代入特征方程左边行列式相应的矩阵,求所得矩阵的伴随矩阵,取其列矩阵(已归一化)为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

由这两个列矩阵作为 $\boldsymbol{E}$ 的两列,即得

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}'' = \boldsymbol{E}^T \cdot \boldsymbol{M}' \cdot \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ml^2$$

同样经过此变换后,耗散函数矩阵变为

$$\boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{E}^T \cdot \boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} bl^2$$

已成"球"型的刚度矩阵在正交变换下保持不变，即 $\boldsymbol{K}''=\boldsymbol{K}'$.

经 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 两次变换后，θ_1、θ_2 变成 ξ_1、ξ_2，变换关系为

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$$

即

$$\theta_1=\frac{1}{2}\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2 \tag{1}$$

$$\theta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2 \tag{2}$$

采用 ξ_1、ξ_2 后，运动微分方程为

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)ml^2\ddot{\xi}_1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)bl^2\dot{\xi}_1+mgl\xi_1=0$$

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)ml^2\ddot{\xi}_2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)bl^2\dot{\xi}\dot{\xi}_2+mgl\xi_2=0$$

约去公因子后，可改写为

$$\ddot{\xi}_1+\frac{b}{m}\dot{\xi}_1+(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}\xi_1=0 \tag{3}$$

$$\ddot{\xi}_2+\frac{b}{m}\dot{\xi}_2+(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}\xi_2=0 \tag{4}$$

两个频率的阻尼振动都是弱阻尼的条件分别为

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2<(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2<(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}$$

满足后一个式子，也必满足前一个式子. 故要求 $\left(\frac{b}{2m}\right)^2<(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}$.

(2) 在弱阻尼情况下，式(3)、(4)的一般解分别为

$$\xi_1=A_1e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_1t+\alpha_1)$$

$$\xi_2=A_2e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_2t+\alpha_2)$$

其中

$$\omega_1=\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}-\frac{b^2}{4m^2}},\quad \omega_2=\sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}-\frac{b^2}{4m^2}}$$

由式(1)、(2)，

$$\theta_1=\frac{1}{2}\left[A_1e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_1t+\alpha_1)-A_2e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_2t+\alpha_2)\right]$$

$$\theta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[A_1e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_1t+\alpha_1)+A_2e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_2t+\alpha_2)\right]$$

因为 A_1、A_2 都是待定的常数，可写得简单些. 令 $C_1=\frac{1}{2}A_1$，$C_2=-\frac{1}{2}A_2$，则把一般解写为

$$\theta_1 = C_1 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\theta_2 = -\sqrt{2}C_1 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{2}C_2 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

其中
$$\omega_1=\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}-\frac{b^2}{4m^2}},\quad \omega_2=\sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}-\frac{b^2}{4m^2}}$$

10.2.5 若10.1.40题的振动受到介质的阻力，其单位面积受力的大小与速率成正比，比例系数为β，求：

(1) 三个自由度的阻尼振动都是过阻尼的条件；

(2) 在上述条件下运动的一般解.

解 (1) 在解10.1.40题时已得到

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\zeta}^2 + \frac{1}{24}Ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}Mb^2\dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(4\zeta^2 + a^2\varphi^2 + b^2\theta^2)$$

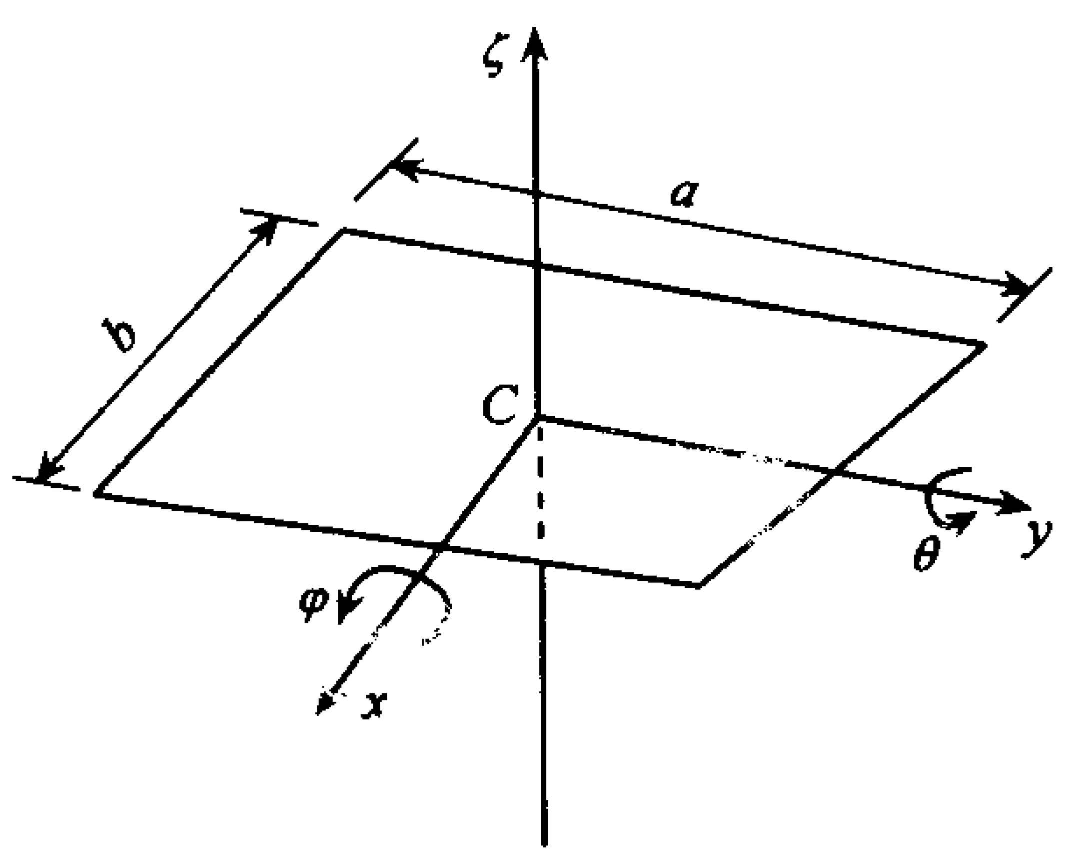


图10.56

现在来求耗散函数.在板上取固连于矩形板的xy坐标，原点位于质心，x、y轴分别平行于边长为b和a的边，如图10.56所示.平衡时，x、y轴分别与固定坐标轴ξ、η重合.

板上点(x,y)的ξ、η、ζ坐标为

$$\xi(x,y) = x\cos\theta \approx x$$

$$\eta(x,y) = y\cos\varphi \approx y$$

$$\zeta(x,y) = \zeta + y\sin\varphi - x\sin\theta \approx \zeta + y\varphi - x\theta$$

其中ζ是质心C的ζ坐标，

$$\dot{\xi}(x,y) \approx 0$$

$$\dot{\eta}(x,y) \approx 0$$

$$\dot{\zeta}(x,y) \approx \dot{\zeta} + y\dot{\varphi} - x\dot{\theta}$$

$$\delta\xi(x,y) \approx 0$$

$$\delta\eta(x,y) \approx 0$$

$$\delta\zeta(x,y) \approx \delta\zeta + y\delta\varphi - x\delta\theta$$

面元$dxdy$所受的黏性力做的虚功为

$$-\beta\dot{\zeta}(x,y)dxdy\delta\zeta(x,y) = -\beta(\dot{\zeta} + y\dot{\varphi} - x\dot{\theta})(\delta\zeta + y\delta\varphi - x\delta\theta)dxdy$$

平板所受黏性阻力做的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= -\beta\int(\dot{\zeta} + y\dot{\varphi} - x\dot{\theta})(\delta\zeta + y\delta\varphi - x\delta\theta)dxdy \\ &= -\beta\int(\dot{\zeta} + y\dot{\varphi} - x\dot{\theta})dxdy\delta\zeta \\ &\quad -\beta\int(\dot{\zeta} + y\dot{\varphi} - x\dot{\theta})ydxdy\delta\varphi \\ &\quad -\beta\int(\dot{\zeta} + y\dot{\varphi} - x\dot{\theta})(-x)dxdy\delta\theta\end{aligned}$$

所以
$$Q_\zeta = -\beta\int(\dot\zeta + y\dot\varphi - x\dot\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\beta\left[\dot\zeta ab + b\dot\varphi\frac{1}{2}y^2\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} - a\dot\theta\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\right] = -\beta ab\dot\zeta$$
$$Q_\varphi = -\beta\int(\dot\zeta + y\dot\varphi - x\dot\theta)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\beta\left[\dot\zeta b\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \dot\varphi b\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} - \int\dot\theta\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x\mathrm{d}x\right]$$
$$= -\frac{1}{12}\beta a^3 b\dot\varphi$$
$$Q_\theta = -\beta\int(\dot\zeta + y\dot\varphi - x\dot\theta)(-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{12}\beta ab^3\dot\theta$$

由 $Q_\zeta = -\dfrac{\partial R}{\partial\dot\zeta}, Q_\varphi = -\dfrac{\partial R}{\partial\dot\varphi}, Q_\theta = -\dfrac{\partial R}{\partial\dot\theta}$，得
$$\mathrm{d}R = -Q_\zeta\mathrm{d}\dot\zeta - Q_\varphi\mathrm{d}\dot\varphi - Q_\theta\mathrm{d}\dot\theta$$
$$= \beta ab\dot\zeta\mathrm{d}\dot\zeta + \frac{1}{12}\beta a^3 b\dot\varphi\mathrm{d}\dot\varphi + \frac{1}{12}\beta ab^3\dot\theta\mathrm{d}\dot\theta$$
$$R = \frac{1}{2}ab\beta\left(\dot\zeta^2 + \frac{1}{12}a^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{12}b^2\dot\theta^2\right)$$

为书写简便起见，令 $q_1=\zeta, q_2=\frac{1}{2}a\varphi, q_3=\frac{1}{2}b\theta$，则
$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot q_1^2 + \frac{1}{3}\dot q_2^2 + \frac{1}{3}\dot q_3^2\right)$$
$$V = \frac{1}{2}k(4q_1^2 + 4q_2^2 + 4q_3^2)$$
$$R = \frac{1}{2}ab\beta\left(\dot q_1^2 + \frac{1}{3}\dot q_2^2 + \frac{1}{3}\dot q_3^2\right)$$

由
$$\boldsymbol{M}\cdot\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{q} = 0$$
得
$$M\ddot q_1 + ab\beta\dot q_1 + 4kq_1 = 0 \tag{1}$$
$$\frac{1}{3}M\ddot q_2 + \frac{1}{3}ab\beta\dot q_2 + 4kq_2 = 0 \tag{2}$$
$$\frac{1}{3}M\ddot q_3 + \frac{1}{3}ab\beta\dot q_3 + 4kq_3 = 0 \tag{3}$$

要求 q_1 上的运动是过阻尼振动，条件是
$$\left(\frac{ab\beta}{2M}\right)^2 > \frac{4k}{M}，即(ab\beta)^2 > 16kM$$

要求 q_2、q_3 上的运动是过阻尼振动，条件是
$$\left(\frac{ab\beta}{2M}\right)^2 > \frac{12k}{M}，即(ab\beta)^2 > 48kM$$

因此要求三个自由度的振动都是过阻尼振动，条件是
$$(ab\beta)^2 > 48kM$$

(2) 上述方程(1)的特征方程为

$$Mr^2 + ab\beta r + 4k = 0$$

$$r = \frac{1}{2M}[-ab\beta \pm \sqrt{(ab\beta)^2 - 16kM}]$$

所以

$$\zeta=q_1=C_1\exp\left\{\frac{1}{2M}[-ab\beta+\sqrt{(ab\beta)^2-16kM}]t\right\}+C_2\exp\left\{\frac{1}{2M}[-ab\beta-\sqrt{(ab\beta)^2-16kM}]t\right\}$$

微分方程式(2)、(3)的特征方程均为

$$\frac{1}{3}Mr^2 + \frac{1}{3}ab\beta r + 4k = 0$$

或

$$Mr^2+ab\beta r+12k=0$$

$$r = \frac{1}{2M}[-ab\beta \pm \sqrt{(ab\beta)^2 - 48kM}]$$

所以

$$\varphi = \frac{2q_2}{a} = C_1'\exp\left\{\frac{1}{2M}[-ab\beta + \sqrt{(ab\beta)^2 - 48kM}]t\right\} + C_2'\exp\left\{\frac{1}{2M}[-ab\beta - \sqrt{(ab\beta)^2 - 48kM}]t\right\}$$

$$\theta = \frac{2q_3}{b} = C_1''\exp\left\{\frac{1}{2M}[-ab\beta + \sqrt{(ab\beta)^2 - 48kM}]t\right\} + C_2''\exp\left\{\frac{1}{2M}[-ab\beta - \sqrt{(ab\beta)^2 - 48kM}]t\right\}$$

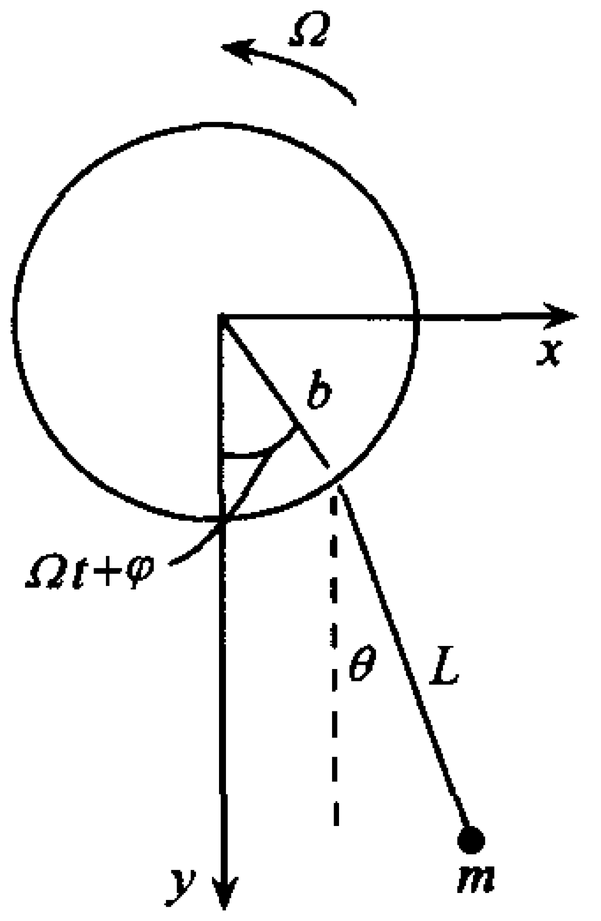


图 10.57

10.2.6 一个摆长为 L 的单摆被悬挂在半径为 b 的轮子的边缘,轮子在竖直面内以恒定角速度 Ω 绕固定的水平轴转动,摆锤在轮子平面内摆动. 假定 b 和振幅都很小,求运动方程的稳态解.

解 取图 10.57 所示的固定坐标 x、y,以 θ 为广义坐标,

$$x = b\sin(\Omega t + \varphi) + L\sin\theta$$

$$y = b\cos(\Omega t + \varphi) + L\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m[b^2\Omega^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2bL\Omega\dot{\theta}\cos(\theta - \Omega t - \varphi)]$$

$$V = -mgy = -mgb\cos(\Omega t + \varphi) - mgL\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}m[b^2\Omega^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2bL\Omega\dot{\theta}\cos(\theta - \Omega t - \varphi)] + mgb\cos(\Omega t + \varphi) + mgL\cos\theta$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ 得

$$L\ddot{\theta} + b\Omega^2\sin(\theta - \Omega t - \varphi) + g\sin\theta = 0$$

振幅很小,$\sin\theta\approx\theta$,所以

$$\sin(\theta - \Omega t - \varphi) = \sin\theta\cos(\Omega t + \varphi) - \cos\theta\sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\approx \theta\cos(\Omega t+\varphi)-\sin(\Omega t+\varphi)$$

b 也很小,$b\theta$ 项也可忽略,微分方程近似为

$$L\ddot{\theta}+g\theta=b\Omega^2\sin(\Omega t+\varphi)$$

这是受迫振动的微分方程,受迫振动稳态解其振动的角频率是强迫力的角频率。设稳态解为

$$\theta=A\sin(\Omega t+\alpha)$$

由振幅矢量关系画成的图 10.58 可见.

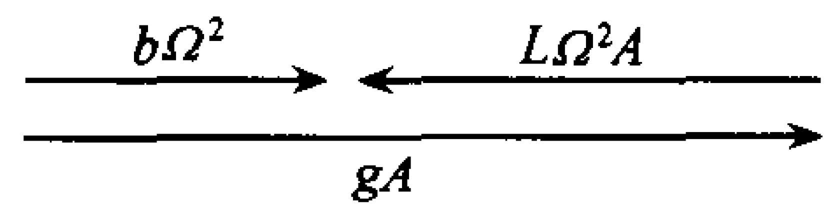


图 10.58

$$\alpha=\varphi$$

$$gA-L\Omega^2 A=b\Omega^2$$

所以
$$A=\frac{b\Omega^2}{g-L\Omega^2}$$

稳态解为
$$\theta=\frac{b\Omega^2}{g-L\Omega^2}\sin(\Omega t+\varphi)$$

10.2.7　若给 10.1.22 题中 M 一个水平的简谐力 $F_0\cos\Omega t$,为简化计算,设 $M=4m$,$k=\frac{3mg}{l}$,求此振动的一般解.

解　$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta-\frac{1}{2}kx^2-mgl(1-\cos\theta)$

令 $M=4m$,$k=3mg/l$. 为书写简便起见,k 值暂不代入,考虑小振动,

$$L=\frac{5}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}-\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

令 $s=l\theta$,并用 $3mg/l=k$,

$$\frac{1}{2}mgl\theta^2=\frac{1}{6}\frac{3mg}{l}(l\theta)^2=\frac{1}{6}ks^2$$

$$L=\frac{5}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{s}^2+m\dot{x}\dot{s}-\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{6}ks^2$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}5m & m\\ m & m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & \frac{1}{3}k\end{pmatrix}$$

再令 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}s$,x 不变,变换矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

变换后的 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 分别变为 $\boldsymbol{M}'$、$\boldsymbol{K}'$,

$$\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}5m & \sqrt{3}m\\ \sqrt{3}m & 3m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

再作正交变换 $\boldsymbol{E}$,使惯性矩阵对角化,为书写简便起见,写 $\boldsymbol{M}'$ 以 m 为单位,求 $\boldsymbol{M}'$ 矩阵的特征值 λ,其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

解出
$$\lambda_1=2, \quad \lambda_2=6$$

将 λ_1 代入式(1)左边相应的矩阵,得

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

其伴随矩阵为

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

其归一化的列矩阵为$\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

将 λ_2 代入式(1)左边相应的矩阵. 求其伴随矩阵中归一化的列矩阵,得$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

这两个列矩阵作第一列和第二列,构成

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

变换后的 $\boldsymbol{M}'$ 写成 $\boldsymbol{M}''$ 已对角化,对角元素即上述两个本征值,

$$\boldsymbol{M}'' = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 6m \end{pmatrix}$$

已成"球"型的对角矩阵 $\boldsymbol{K}'$ 在正交变换下不变.

从 x、s 到简正坐标 ξ、η 的变换矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

用广义坐标 x、s 时,广义力为

$$Q_x = F_0\cos\Omega t, \qquad Q_s = 0$$

采用简正坐标 ξ、η 后,广义力 Q_ξ、Q_η 与 Q_x、Q_s 有下列关系:

$$\begin{pmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_s \end{pmatrix}$$

其中变换矩阵为 G^T，代入 Q_x、Q_s，得

$$Q_\xi = \frac{1}{2} F_0 \cos \Omega t$$

$$Q_\eta = -\frac{\sqrt{3}}{2} F_0 \cos \Omega t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi & -\frac{\sqrt{3}}{2}\eta \\ -\frac{3}{2}\xi & -\frac{\sqrt{3}}{2}\eta \end{pmatrix}$$

采用简正坐标 ξ、η 后，运动微分方程为

$$2m\ddot{\xi} + k\xi = \frac{1}{2} F_0 \cos \Omega t$$

$$6m\ddot{\eta} + k\eta = -\frac{\sqrt{3}}{2} F_0 \cos \Omega t$$

上述两非齐次线性常系数微分方程的特解为

$$\xi^* = \frac{\frac{F_0}{4m}}{\frac{k}{2m} - \Omega^2} \cos \Omega t = \frac{F_0 l}{2m(3g - 2l\Omega^2)} \cos \Omega t$$

$$\eta^* = \frac{\frac{-\sqrt{3} F_0}{12m}}{\frac{k}{6m} - \Omega^2} \cos \Omega t = \frac{-\sqrt{3} F_0 l}{6m(g - 2l\Omega^2)} \cos \Omega t$$

非齐次方程的一般解等于非齐次方程的特解加上相应的齐次方程的一般解，所以一般解为

$$\xi = \frac{F_0 l}{2m(3g - 2l\Omega^2)} \cos \Omega t + C_1' \cos\left(\sqrt{\frac{3g}{2l}} t + \alpha_1\right)$$

$$\eta = -\frac{\sqrt{3} F_0 l}{6m(g - 2l\Omega^2)} \cos \Omega t + C_2' \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2l}} t + \alpha_2\right)$$

写上述 ξ^*、η^*、ξ、η 时都用了 $k = \frac{3mg}{l}$.

$$x = \frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta = \left[\frac{F_0 l}{4m(3g - 2l\Omega^2)} + \frac{F_0 l}{4m(g - 2l\Omega^2)}\right] \cos \Omega t$$

$$+ C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3g}{2l}} t + \alpha_1\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2l}} t + \alpha_2\right)$$

$$\theta = -\frac{3}{2l}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2l}\eta = \left[-\frac{3F_0}{4m(3g - 2l\Omega^2)} + \frac{F_0}{4m(g - 2l\Omega^2)}\right] \cos \Omega t$$

$$-\frac{3}{l}C_1\cos\left(\sqrt{\frac{3g}{2l}}t+\alpha_1\right)+\frac{1}{l}C_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2l}}t+\alpha_2\right)$$

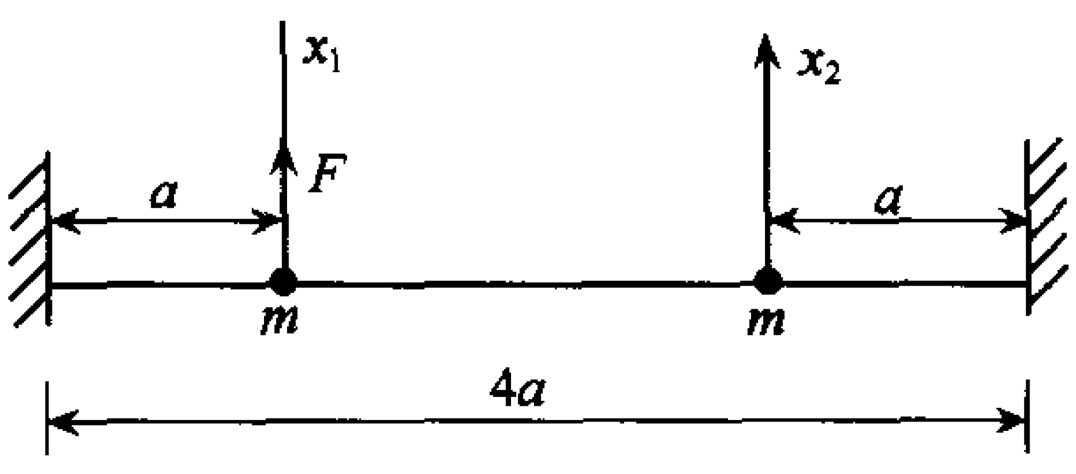


图 10.59

10.2.8　一根长为 $4a$ 的轻弹性绳两端系在固定点,处于拉紧状态,在离两个端点各为 a 处各系一个质量为 m 的质点,此时绳的张力为 τ,给其中一个质点加一个垂直于绳的力 $F_0\cos\Omega t$,两质点均受到空气的阻力,其大小与速率成正比,比例系数为 β,求两质点运动的稳态解.

解

$$T=\frac{1}{2}m\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\,\dot{x}_2^2$$

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}\frac{\tau}{a}x_1^2+\frac{1}{2}\frac{\tau}{2a}(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}\frac{\tau}{a}x_2^2\\&=\frac{1}{2}\frac{\tau}{a}\left(\frac{3}{2}x_1^2-x_1x_2+\frac{3}{2}x_2^2\right)\\&=\frac{1}{2}k\left(\frac{3}{2}x_1^2-x_1x_2+\frac{3}{2}x_2^2\right)\end{aligned}$$

这里 $k=\dfrac{\tau}{a}$

$$R=\frac{1}{2}\beta\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\beta\,\dot{x}_2^2$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k&-\frac{1}{2}k\\-\frac{1}{2}k&\frac{3}{2}k\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{pmatrix}$$

本题采用与前几题不同的求简正坐标方法,先求自由振动的简正频率和振动模式,然后用简正坐标与原用坐标的关系得到简正坐标,

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}\frac{3}{2}k-m\omega^2&-\frac{1}{2}k\\-\frac{1}{2}k&\frac{3}{2}k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$(m\omega^2)^2-3km\omega^2+2k^2=0$$

$$\omega_1^2=\frac{k}{m},\qquad\omega_2^2=\frac{2k}{m}$$

代入 ω_1^2,

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}k&-\frac{1}{2}k\\-\frac{1}{2}k&\frac{1}{2}k\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}+\frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k\\ \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k\end{pmatrix},\text{取 }\boldsymbol{u}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

代入 ω_2^2，

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k\\ -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k\\ \frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k\end{pmatrix},\text{取 }\boldsymbol{u}^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

用简正坐标与原用坐标的关系，

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1^{(1)} & u_2^{(1)}\\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

这里考虑到简正坐标的常数倍仍是简正坐标，在写 $\boldsymbol{M}$ 的矩阵时除去了公因子 m，

$$\boldsymbol{G}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

变换为简正坐标后，$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{M}$ 分别变为

$$\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{G}^T\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k & -\frac{1}{2}k\\ -\frac{1}{2}k & \frac{3}{2}k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k}{2} & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{G}^T\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}m & 0\\ 0 & \frac{1}{2}m\end{pmatrix}$$

同样

$$\boldsymbol{R}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\beta & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\beta\end{pmatrix}$$

广义力

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}F_0\cos\Omega t\\ 0\end{pmatrix}$$

变为$\boldsymbol{\Xi}$，

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0\cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}F_0\cos\Omega t \\ \frac{1}{2}F_0\cos\Omega t \end{pmatrix}$$

变换后的运动微分方程为

$$\boldsymbol{M}' \cdot \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{R}' \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{K}' \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Xi}$$

即

$$\frac{1}{2}m\,\ddot{\xi}_1 + \frac{1}{2}\beta\,\dot{\xi}_1 + \frac{1}{2}k\,\xi_1 = \frac{1}{2}F_0\cos\Omega t$$

$$\frac{1}{2}m\,\ddot{\xi}_2 + \frac{1}{2}\beta\,\dot{\xi}_2 + k\,\xi_2 = \frac{1}{2}F_0\cos\Omega t$$

写成标准形式，则为

$$\ddot{\xi}_1 + 2\frac{\beta}{2m}\dot{\xi}_1 + \frac{k}{m}\xi_1 = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

$$\ddot{\xi}_2 + 2\frac{\beta}{2m}\dot{\xi}_2 + \frac{2k}{m}\xi_2 = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

稳态解为

$$\xi_1 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \varphi_1)$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{a} - m\Omega^2\right)^2 + \beta^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \varphi_1)$$

其中

$$\varphi_1 = -\arctan\left(\frac{2\frac{\beta}{2m}\Omega}{\frac{k}{m} - \Omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{\beta\Omega}{\frac{\tau}{a} - m\Omega^2}\right)$$

$$\xi_2 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m} - \Omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \varphi_2)$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{2\tau}{a} - m\Omega^2\right)^2 + \beta^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \varphi_2)$$

其中

$$\varphi_2 = -\arctan\left(\frac{2\cdot\frac{\beta}{2m}\Omega}{\frac{2k}{m} - \Omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{\beta\Omega}{\frac{2\tau}{a} - m\Omega^2}\right)$$

由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\xi}$，

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2),\quad x_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)$$

第十一章　力学的哈密顿表述

11.1　哈密顿正则方程

11.1.1　用柱坐标和球坐标分别写出质量为 m 的质点在势场 $V(x、y、z)$ 中运动的哈密顿函数.

解　用柱坐标 $r、\varphi、z$，

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z}$$

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{p_z^2}{m} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{p_z^2}{m}\right) - V\right] \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} + V(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \end{aligned}$$

用球坐标 $r、\varphi、\theta$，

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

$$H=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r}-\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta}-\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi}-L$$

$$=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta}+V(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$$

11.1.2　写出 9.3.11 题所述系统的哈密顿函数,并由正则方程得到它的运动微分方程.

解　由解 9.3.11 题已得到的拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+qE_0\ln r+\frac{1}{2}qB_0r^2\dot{\varphi}$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\quad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}+\frac{1}{2}qB_0r^2$$

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\varphi}=\frac{1}{mr^2}\left(p_\varphi-\frac{1}{2}qB_0r^2\right)$$

$$H=p_r\dot{r}+p_\varphi\dot{\varphi}+p_z\dot{z}-L$$

$$=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{1}{2mr^2}\left(p_\varphi-\frac{1}{2}qB_0r^2\right)^2+\frac{p_z^2}{2m}-qE_0\ln r$$

由　$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$　得

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\qquad \dot{\varphi}=\frac{1}{mr^2}\left(p_\varphi-\frac{1}{2}qB_0r^2\right)$$

$$\dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_r=\frac{1}{mr^2}\left(p_\varphi^2-\frac{1}{4}q^2B_0^2r^4\right)+\frac{qE_0}{r}\tag{1}$$

$$\dot{p}_\varphi=0$$

$$p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}+\frac{1}{2}qB_0r^2=\text{常量}\tag{2}$$

$$\dot{p}_z=0$$

$$p_z=m\dot{z}=\text{常量}\tag{3}$$

将 $p_r=m\dot{r},p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}+\frac{1}{2}qB_0r^2$ 代入式(1)可得

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2-qB_0r\dot{\varphi}-\frac{qE_0}{r}=0\tag{4}$$

式(2)、(3)、(4)即所求的运动微分方程.

11.1.3　用哈密顿正则方程重解 9.3.48 题.

解

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right)$$

其中

$$p_r=m\dot{r},\quad p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}$$

由
$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i$$
今　$Q_r=N,Q_\varphi=-\mu|N|r$,可得

$$\dot{r}=\frac{1}{m}p_r,\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r=\frac{1}{mr^3}p_\varphi^2+N \tag{1}$$

$$\dot{p}_\varphi=-\mu|N|r \tag{2}$$

将 p_r、p_φ 代入式(1)、(2),可得

$$m\ddot{r}=mr\dot{\varphi}^2+N \tag{3}$$

$$mr^2\ddot{\varphi}+2r\dot{r}\dot{\varphi}=-\mu|N|r \tag{4}$$

有约束关系
$$r=a$$
由式(3)

$$N=-ma\dot{\varphi}^2$$

式(4)可写成

$$ma^2\ddot{\varphi}=-\mu ma^2\dot{\varphi}^2$$
$$\ddot{\varphi}=-\mu\dot{\varphi}^2$$

得到与 9.3.48 题解中完全相同的微分方程,以下同 9.3.48 题的解(略).

11.1.4　一个单位质量的质点在用极坐标表达的势能为 $V=\frac{k\cos\varphi}{r^2}$(其中 k 为常量)的力场中在一个平面上运动.如 $t=0$ 时,$r=a$,$\dot{r}=0$,试用哈密顿正则方程证明 $t=\left(\frac{r^2-a^2}{2E}\right)^{1/2}$,其中 E 是恒定的总能量.

证明
$$L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{k\cos\varphi}{r^2}$$
$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right)+\frac{k\cos\varphi}{r^2}$$
$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=p_r$$
$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{1}{r^2}p_\varphi$$
$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{r^3}p_\varphi^2+\frac{2k\cos\varphi}{r^3}$$
$$\dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=\frac{k\sin\varphi}{r^2}$$

从上述四个方程中消去 p_r、p_φ,得

$$\ddot{r}=\frac{1}{r^3}(r^2\dot{\varphi})^2+\frac{2k\cos\varphi}{r^3}=r\dot{\varphi}^2+\frac{2k\cos\varphi}{r^3}$$

$$r^2\ddot{\varphi}+2r\dot{r}\dot{\varphi}=\frac{k\sin\varphi}{r^2}$$

因为
$$\frac{\partial H}{\partial t}=0,\qquad H=E$$

即
$$\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right)+\frac{k\cos\varphi}{r^2}=E$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{k\cos\varphi}{r^2}=E$$

解出
$$\dot{\varphi}^2=\frac{2E}{r^2}-\frac{2k\cos\varphi}{r^4}-\frac{\dot{r}^2}{r^2}$$

$$\ddot{r}=\frac{2E}{r}-\frac{2k\cos\varphi}{r^3}-\frac{\dot{r}^2}{r}+\frac{2k\cos\varphi}{r^3}=\frac{2E}{r}-\frac{\dot{r}^2}{r}$$

用
$$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}\dot{r}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{r}^2}{\mathrm{d}r}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{r}^2=\frac{2E}{r}dr-\frac{\dot{r}^2}{r}\mathrm{d}r$$

$$r\mathrm{d}\dot{r}^2+2\dot{r}^2\mathrm{d}r=4E\mathrm{d}r$$

试用 $f(r)$作为积分因子,

$$f(r)r\mathrm{d}\dot{r}^2+2f(r)\dot{r}^2\mathrm{d}r$$

为恰当微分,要求

$$\frac{\partial}{\partial r}[f(r)r]=\frac{\partial}{\partial\dot{r}^2}[2f(r)\dot{r}^2]$$

$$f(r)+r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}=2f(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{f}=\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

可取
$$f(r)=r$$

$$r^2\mathrm{d}\dot{r}^2+2r\dot{r}^2\mathrm{d}r=4Er\mathrm{d}r$$

两边积分,用初始条件,$t=0$ 时,$r=a$,$\dot{r}=0$,

$$r^2\dot{r}^2=2Er^2-2Ea^2$$

$$\dot{r}^2=\frac{1}{r^2}\cdot 2E(r^2-a^2)$$

$$t=\int_a^r\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{2E(r^2-a^2)}}=\sqrt{\frac{r^2-a^2}{2E}}$$

11.1.5 一个质量为 m 的质点在具有势能为 $V(r)$的保守力作用下运动,用球坐标 r、θ、φ为广义坐标,证明 p_φ、$\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta}+V(r)$和 $p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$都是运动常数.

证明
$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)-V(r)$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+V(r)$$

因为
$$\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0$$

所以
$$p_\varphi=\text{常量}$$
因为
$$\frac{\partial H}{\partial t}=0$$
所以
$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r)=\text{常量}$$
$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=\frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}p_\varphi^2$$
$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$
$$p_\theta\dot{p}_\theta=mr^2\dot{\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}p_\varphi^2=\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}p_\varphi^2\dot{\theta}$$
$$p_\theta\mathrm{d}p_\theta=p_\varphi^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\mathrm{d}\theta=p_\varphi^2\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{1}{2}p_\theta^2=-\frac{1}{2\sin^2\theta}p_\varphi^2+\text{常量}$$
所以
$$p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2=\text{常量}$$
作上述积分时用了 p_φ 为常量.

也可用$\left[p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2,H\right]=0$ 证明 $p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2$ 为运动常数.

11.1.6 质量分别为 m 和 M 的两个质点相互作用,其势能为 $V(r)$,其中 r 是两个质点间的距离,选系统的质心的笛卡儿坐标 X、Y、Z 和质点 m 相对于 M 的球坐标 r、θ、φ 为广义坐标,写出系统的哈密顿函数,并找出六个运动常数.

解
$$T=\frac{1}{2}(m+M)(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)+\frac{1}{2}m(\dot{r}_1^2+r_1^2\dot{\theta}^2+r_1^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$
$$+\frac{1}{2}M(\dot{r}_2^2+r_2^2\dot{\theta}^2+r_2^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$
$$r_1=\frac{M}{m+M}r,\qquad r_2=\frac{m}{m+M}r$$
$$m\dot{r}_1^2+M\dot{r}_2^2=m\left(\frac{M}{m+M}\dot{r}\right)^2+M\left(\frac{M}{m+M}\dot{r}\right)^2=\frac{mM}{m+M}\dot{r}^2$$
同样可得,$mr_1^2+Mr_2^2=\dfrac{mM}{m+M}r^2$
$$T=\frac{1}{2}(m+M)(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)+\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$
$$L=T-V$$
$$H=\frac{1}{2(m+M)}(p_X^2+p_Y^2+p_Z^2)+\frac{m+M}{2mM}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r)$$
因为$\dfrac{\partial H}{\partial X}=0,\dfrac{\partial H}{\partial Y}=0,\dfrac{\partial H}{\partial Z}=0,\dfrac{\partial H}{\partial t}=0,\dfrac{\partial H}{\partial\varphi}=0$,$p_X$、$p_Y$、$p_Z$、$H$、$p_\varphi$ 均是运动常数.可用上题的办法证明.

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = 常量$$

11.1.7　一个质量为 m 的质点悬于质量不计、不可伸长的绳子的一端,绳子穿过桌上一个小孔,以恒定的速率 α 往上拉,开始时绳长为 l_0,质点在竖直平面内运动.选绳子与铅垂线的夹角 θ 为广义坐标,写出系统的哈密顿函数,此哈密顿函数是否是总能量?是否是运动常数?

解
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m[(-\alpha)^2 + (l_0 - \alpha t)^2\dot{\theta}^2]$$
$$V = -mg(l_0 - \alpha t)\cos\theta$$
$$L = \frac{1}{2}m[\alpha^2 + (l_0 - \alpha t)^2\dot{\theta}^2] + mg(l_0 - \alpha t)\cos\theta$$
$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l_0 - \alpha t)^2\dot{\theta}$$
$$H = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_\theta^2}{2m(l_0 - \alpha t)^2} - \frac{1}{2}m\alpha^2 - mg(l_0 - \alpha t)\cos\theta$$

因为 $T=T_2+T_1+T_0$(其中 T_2、T_1、T_0 分别是广义速度的二次、一次和零次函数),
$$H = T_2 - T_0 + V \neq T + V$$
故 H 不是总能量.因为$\frac{\partial H}{\partial t}\neq 0$,$H$ 也不是运动常数.

11.1.8　一个处于均匀重力场中质量为 m 的质点被约束在一个球面上运动,球的半径 r 随时间变化,$r=r(t)$.选球心为原点,竖直向上的轴为极轴,以球坐标 θ、φ 为广义坐标,写出系统的哈密顿函数和运动微分方程,哈密顿函数是否是总能量?

解
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$
$$V = mgz = mgr\cos\theta$$
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2) - mgr\cos\theta$$
$$\begin{aligned} H &= p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L \\ &= \frac{1}{2mr^2}p_\theta^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}p_\varphi^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\cos\theta \end{aligned}$$

其中
$$r=r(t),\quad \dot{r}=\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$$

由哈密顿正则方程,
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{mr^2}p_\theta \tag{1}$$
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}p_\varphi \tag{2}$$
$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}p_\varphi^2 + mgr\sin\theta \tag{3}$$
$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

所以
$$p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \text{常量} \tag{4}$$
用式(1)消去式(3)中的p_θ，得
$$mr^2\,\ddot{\theta} + 2mr\,\dot{r}\,\dot{\theta} = \frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}p_\varphi^2 + mgr\sin\theta \tag{5}$$
(4)、(5)两式为运动微分方程，其中$r=r(t)$是已知的，式(4)中的常量由初始条件确定.

因为T中含有T_0($T_0=\frac{1}{2}m\,\dot{r}^2$，是$t$的已知函数)，$H=T_2-T_0+V\neq T+V$，哈密顿函数不是总能量.

11.1.9　一个质量为m的质点，在力$f=\frac{k}{x^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$(其中$k$、$\tau$都是正值常量)作用下做一维运动，写出它的拉格朗日函数和哈密顿函数，哈密顿函数是否系统的总能量？是否运动常数？

解
$$V=\frac{k}{x}e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - \frac{k}{x}e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{k}{x}e^{-\frac{t}{\tau}}$$
因为$\frac{\partial H}{\partial t}\neq 0$，$H$不是运动常数，
$$H = T + V$$
哈密顿函数是系统的总能量.

11.1.10　一个单位质量的质点在广义势场$U=\frac{1+\dot{r}^2}{r}$(r是质点离原点的距离)中在一个平面上运动，用极坐标写出哈密顿函数，并找出两个运动积分.

解
$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\varphi}^2)$$
$$U = \frac{1+\dot{r}^2}{r}$$
$$L = T - U = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2) - \frac{1+\dot{r}^2}{r}$$
$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r} - \frac{2\,\dot{r}}{r},\qquad \dot{r} = \frac{r}{r-2}p_r$$
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\,\dot{\varphi},\qquad \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}p_\varphi$$
$$H = p_r\,\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{r}{2(r-2)}p_r^2 + \frac{1}{2r^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{r}$$
$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,\qquad p_\varphi = r^2\,\dot{\varphi} = h(\text{常量})$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$H = \frac{r}{2(r-2)}p_r^2 + \frac{1}{2r^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{r} = E(\text{常量})$$

后一运动积分也可写成

$$r(r-2)\dot{r}^2 + h^2 + 2r = 2r^2E$$

11.1.11 质量为 m 的粒子在半径为 R 的球面上运动,粒子未受其他外力作用.

(1) 此题需要几个广义坐标?

(2) 选择一组广义坐标,写出系统的拉格朗日函数;

(3) 写出系统的哈密顿函数,它是否守恒?

(4) 证明粒子沿球的一个大圆运动.

解 (1) 由于粒子被限制在一个球面上运动,描述它的运动需要两个广义坐标.

(2) 选球坐标 θ、φ 为广义坐标,

$$L = T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

(3)
$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mR^2}p_\theta$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{mR^2\sin^2\theta}p_\varphi$$

$$H = p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)$$

因为$\frac{\partial H}{\partial t}=0$,$H$ 是守恒的.

(4) 因为$\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0$,所以 $p_\varphi=$常量,

$$\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = \text{常量}$$

总可以选取 θ、φ,使 $t=0$ 时,$\dot{\varphi}=0$

$$\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = 0$$

所以
$$\dot{\varphi}=0, \qquad \varphi=\text{常量}$$

故质点沿球面上一个大圆运动.

11.1.12 一个粒子在重力作用下,在光滑的、对称轴是竖直的旋转抛物面内侧面运动,用离轴的距离 r 和方位角 φ 作为广义坐标,求:

(1) 系统的拉格朗日函数、广义动量和哈密顿函数;

(2) r 作为时间的函数满足的运动微分方程;

(3) 如$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0$,证明粒子能围绕抛物面最低点做小振动,并求小振动的角频率.

解 设旋转抛物面的方程为

$$z = Ar^2 \quad (A\text{ 为常量})$$

(1) $$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}m\dot{z}^2=\frac{1}{2}m(1+4A^2r^2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$V=mgz=mgAr^2$$

$$L=\frac{1}{2}m(1+4A^2r^2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2-mgAr^2$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m(1+4A^2r^2)\dot{r}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}$$

$$H=p_r\dot{r}+p_\varphi\dot{\varphi}-L=\frac{1}{2m(1+4A^2r^2)}p_r^2+\frac{1}{2mr^2}p_\varphi^2+mgAr^2$$

(2) 由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$得

$$(1+4A^2r^2)\ddot{r}+4A^2r\dot{r}^2-r\dot{\varphi}^2+2gAr=0$$

$$r^2\dot{\varphi}=h\quad（常量）$$

用第二个式子消去第一式中的$\dot{\varphi}$，得

$$(1+4A^2r^2)r^3\ddot{r}+4A^2r^4\dot{r}^2+2gAr^4=h^2$$

(3) 如$\dot{\varphi}=0$，且在抛物面最低点附近做小振动，r、$\dot{r}$、$\ddot{r}$均为一级小量，只保留微分方程中的一级小量，得

$$\ddot{r}+2gAr=0$$

小振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{2gA}$$

11.1.13 两个质量均为m的质点用一根长为L的轻绳连接，绳子穿过一个半角为α、直立的圆锥顶端的小孔. 一个质点悬挂在圆锥内，另一个被限制在圆锥的表面上运动，如图 11.1 所示，不计摩擦.

(1) 选适当的广义坐标，写出系统的拉格朗日函数和哈密顿函数；

(2) 各广义坐标满足的微分方程；

(3) 求在圆锥面上运动的质点做圆轨道运动的角频率.

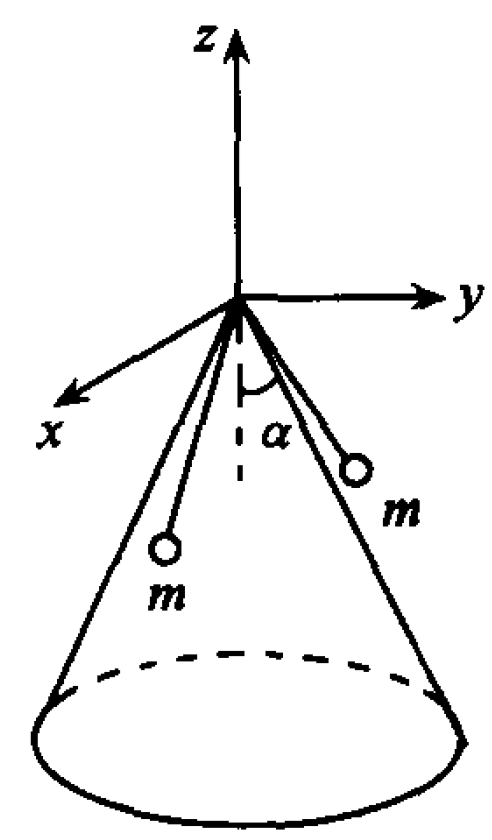


图 11.1

解 (1) 此系统共有 4 个自由度，描述悬挂在圆锥内的质点用三个球坐标r、θ、φ，描述在圆锥面上运动的三个球坐标为$L-r$、$\pi-\alpha$、β，其中只有方位角β是独立的. 取r、θ、φ和β为广义坐标，

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(L-r)^2\sin^2(\pi-\alpha)\,\dot{\beta}^2]$$

$$=\frac{1}{2}m[2\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2+(L-r)^2\sin^2\alpha\,\dot{\beta}^2]$$

$$V=mgr\cos\theta+mg(L-r)\cos(\pi-\alpha)=mgr(\cos\theta+\cos\alpha)-mgL\cos\alpha$$

$$L=\frac{1}{2}m[2\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2+(L-r)^2\sin^2\alpha\cdot\dot{\beta}^2]-mgr(\cos\theta+\cos\alpha)$$

$$+mgL\cos\alpha$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot r}=2m\dot r,\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}=mr^2\dot\theta$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}=mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi$$

$$p_\beta=\frac{\partial L}{\partial \dot\beta}=m(L-r)^2\sin^2\alpha\cdot\dot\beta$$

$$H=p_r\dot r+p_\theta\dot\theta+p_\varphi\dot\varphi+p_\beta\dot\beta-L$$
$$=\frac{1}{4m}p_r^2+\frac{1}{2mr^2}p_\theta^2+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}p_\varphi^2+\frac{1}{2m(L-r)^2\sin^2\alpha}p_\beta^2$$
$$+mgr(\cos\theta+\cos\alpha)-mgL\cos\alpha$$

(2) 因为$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$，　$\frac{\partial L}{\partial \beta}=0$

$$p_\varphi=mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi=C_1(\text{常量})$$

$$p_\beta=m(L-r)^2\sin^2\alpha\cdot\dot\beta=C_2(\text{常量})$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$和$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$可得另两个微分方程为

$$2\ddot r-r(\dot\theta^2+\sin^2\theta\,\dot\varphi^2)+(L-r)\sin^2\alpha\cdot\dot\beta^2+g(\cos\theta+\cos\alpha)=0$$

$$r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2-g\sin\theta=0$$

(3) 在圆锥面上运动的质点做圆轨道运动时，绳子张力大小不变，可见悬在圆锥内的质点或保持不动或做匀速率圆周运动，前者可以看做后者的一种特殊情况，因此我们这里考虑后者，此时，r 为常量，$\dot r=0$，$\ddot r=0$，θ 为常量，$\dot\theta=0$，$\ddot\theta=0$，$\dot\varphi$和$\dot\beta$均为常量.

代入后两个微分方程得

$$-r\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2+(L-r)\sin^2\alpha\cdot\dot\beta^2+g(\cos\theta+\cos\alpha)=0$$
$$-r\cos\theta\cdot\dot\varphi^2-g=0$$

两式中消去$\dot\varphi^2$，可得

$$g\left(\frac{1}{\cos\theta}+\cos\alpha\right)+(L-r)\sin^2\alpha\cdot\dot\beta^2=0$$

在圆锥面上运动的质点做圆轨道运动的角频率为

$$\dot\beta=\sqrt{\frac{g\left(-\frac{1}{\cos\theta}-\cos\alpha\right)}{(L-r)\sin^2\alpha}}$$

注意：θ 在第二象限，故$-\cos\theta>0$，$-\frac{1}{\cos\theta}>0$，又有$-\frac{1}{\cos\theta}>\cos\alpha$[因为 $1>\cos\alpha(-\cos\theta)$成立].

前者是后者在 $\theta=\pi$ 时的特殊情况，此时

$$\dot\beta=\sqrt{\frac{g(1-\cos\alpha)}{(L-r)\sin^2\alpha}}$$

11.1.14　一轻的、粗细均匀的细 U 形管部分地注入水银(总质量为 M、单位长度的质量为 ρ)，如图 11.2 所示. 管子能绕一根竖直臂转动，忽略摩擦、玻璃管的质量和转动惯量以及转轴处水银柱的转动惯量.

(1) 计算管子不转时水银柱的势能，并描述它可能的运动.

(2) 管子以初角速度 ω_0 旋转，水银柱在偏离不转动时平衡的竖直位移 z_0 处静止开始运动：

(a) 写出系统的拉格朗日函数和哈密顿函数；

(b) 写出运动微分方程；

(c) 运动中有哪些守恒量，写出它们的表达式；

(d) 尽可能完全地对运动作定性描述.

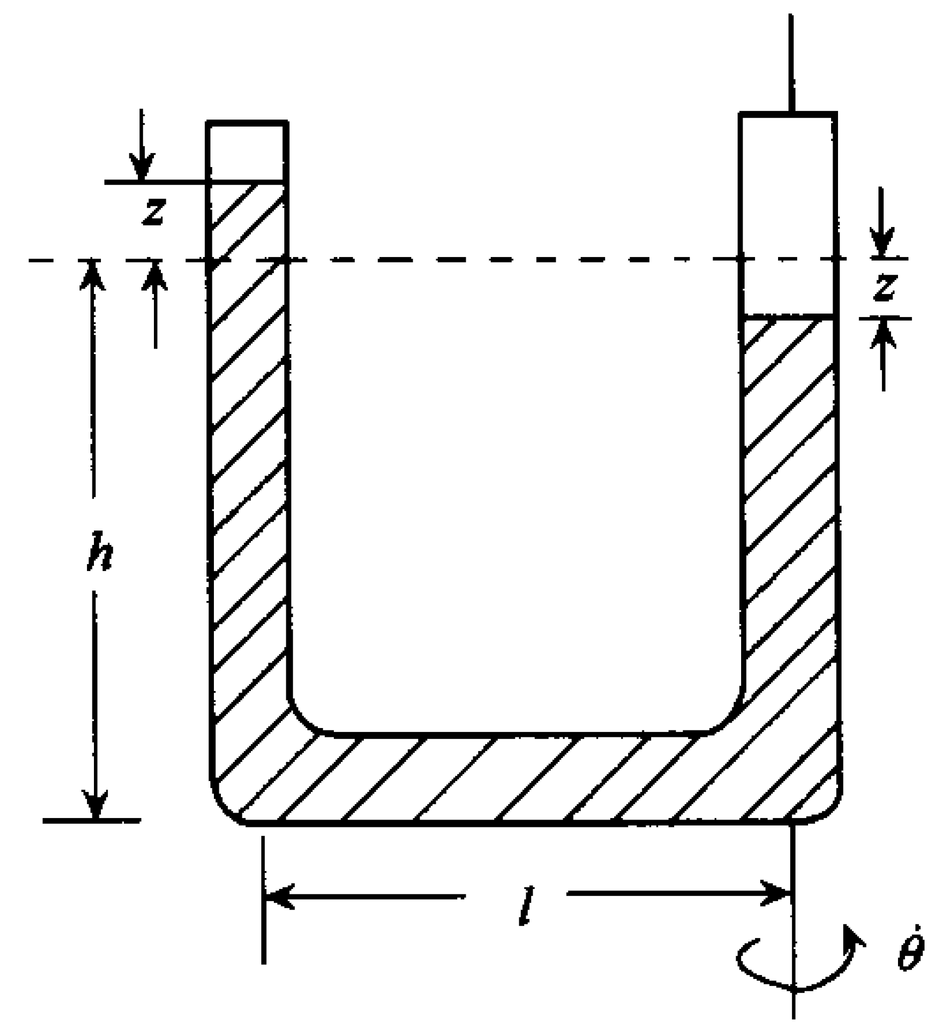


图 11.2

解　(1) 设水银柱两表面偏离平衡位置的距离为 z，使系统再缓慢偏离 $\mathrm{d}z$，外力做的功为 $\mathrm{d}W=2\rho gz\mathrm{d}z$，保守力做的功为 $-\mathrm{d}W$，故保守力势能的增量为

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}W=2\rho gz\mathrm{d}z$$

$$V=\int_0^z 2\rho gz\mathrm{d}z=\rho gz^2$$

$$L=\frac{1}{2}M\dot{z}^2-\rho gz^2$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$ 得

$$M\ddot{z}+2\rho gz=0$$

$$z=A\cos\left(\sqrt{\frac{2\rho g}{M}}t+\alpha\right)$$

水银柱将围绕平衡位置($z=0$)做角频率为 $\sqrt{\frac{2\rho g}{M}}$ 的振动，其振幅 A 和初相位 α 由初始条件确定.

(2) U 形管可自由转动时，系统有两个自由度. 取水银柱面偏离不转动时的位移 z (如图 11.2 所示)和转角 θ 为广义坐标.

(a) $T=\frac{1}{2}\rho(h+z)\dot{z}^2+\frac{1}{2}\cdot\rho(h+z)l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\rho l\dot{z}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\rho l\cdot l^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\rho(h-z)\dot{z}^2$

$$=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}\rho(h+z)L^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{6}\rho l^3\dot{\theta}^2$$

$$V=\rho gz^2$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}\rho\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)l^2\dot{\theta}^2-\rho g\dot{z}^2$$

$$H=\frac{1}{2M}p_z^2+\frac{1}{2\rho\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)l^2}p_\theta^2+\rho gz^2$$

(b) 由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 得

$$M\ddot{z}-\frac{1}{2}\rho l^2\dot{\theta}^2+2\rho gz=0$$

$$\rho\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)l^2\ddot{\theta}+\rho l^2\dot{z}\dot{\theta}=0$$

或

$$\rho\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)l^2\dot{\theta}=C(\text{常量})$$

代入初始条件:$t=0$ 时,$z=z_0,\dot{\theta}=\omega_0$,

$$\rho\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)l^2\dot{\theta}=\rho\left(h+z_0+\frac{1}{3}l\right)l^2\omega_0$$

$$\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)\dot{\theta}=\left(h+z_0+\frac{1}{3}l\right)\omega_0$$

(c) 因为$\frac{\partial H}{\partial\theta}=0$,所以 p_θ 是守恒量. 因为 $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}$,即

$$\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)\dot{\theta}=\left(h+z_0+\frac{1}{3}l\right)\omega_0$$

因为$\frac{\partial H}{\partial t}=0$,$H$ 是守恒量,其表达式为

$$\frac{1}{2M}p_z^2+\frac{1}{2\rho\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)l^2}p_\theta^2+\rho gz^2$$

$$=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}\rho\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)l^2\dot{\theta}^2+\rho g\dot{z}^2$$

$$=\frac{1}{2}\rho\left(h+z_0+\frac{1}{3}l\right)l^2\omega_0^2+\rho g\dot{z}_0^2$$

(d) 水银柱的运动由两部分组成:一是跟随 U 形管一起转动,转动角速度与水银柱面的升降有关,z 增大时,转动角速度减小,z 减小时,角速度加大,对转轴的角动量保持为常量;另一部分是液柱在管中的运动,由于 z 的方程可改写为

$$M\ddot{z}+2\rho gz=\frac{A}{\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)^2}$$

其中 $A=\frac{1}{2}\rho l^2\left(h+z_0+\frac{1}{3}l\right)^2\omega_0^2$ 或$\frac{p_\theta^2}{2\rho l^2}$为常量,其平衡位置由下列方程给出:

$$2\rho gz=\frac{A}{\left(h+z+\frac{1}{3}l\right)^2}$$

它是 z 的三次方程,有三个根,用作图法不难看出:方程只有一个实根,因其系数均为实数,另两个根必为共轭复数,只有一个实根,故只有一个平衡位置,设此实根为 $z=z_1$,

$$2\rho gz_1=\frac{A}{\left(h+\frac{1}{3}l+z_1\right)^2}$$

如 $|z_0-z_1|$ 是小量,则令 $z=z_1+z'$,微分方程可化为

$$M\ddot{z}'+2\rho gz'=-\frac{2A}{\left(h+\frac{1}{3}l+z_1\right)^3}z'$$

$$M\ddot{z}' + \left[2\rho g + \frac{2A}{\left(h+\frac{1}{3}l+z_1\right)^3}\right]z' = 0$$

水银柱在管中将围绕平衡位置 $z=z_1$ 做小振动，角频率为 $\sqrt{\frac{2\rho g}{M}+\frac{2A}{M\left(h+\frac{1}{3}l+z_1\right)^3}}$.

如 $|z_0-z_1|$ 不是小量，则微分方程不能作上述简化，水银柱在管中的运动比较复杂.

11.1.15　图 11.3 中的系统由一个质量为 m 的粒子和一个质量为 M 的转子组成，转子是一个密度均匀、有一个旋转对称轴的刚体，粒子和转子的每一体元间有万有引力或库仑力互相吸引，粒子和转子的运动是自由的.讨论这个系统的运动，在讨论中回答以下问题：

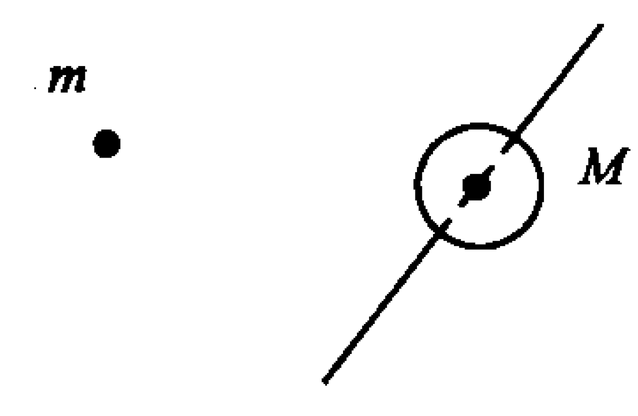


图 11.3

(1) 这个系统有几个自由度；

(2) 取一组适当的坐标，写出拉格朗日函数或哈密顿函数，说明如何写亦可；

(3) 粒子和转子间的相互作用与哪些坐标有关；

(4) 能给出多少运动常数，它们有何物理意义？

(5) 这个系统的什么轨道十分类似于两个点质量的轨道？说明它们之间有(小的)差别的原因，什么原因使转子相对于其质心有运动？

解　(1) 这个系统共有 9 个自由度，粒子需 3 个坐标，转子需 6 个坐标.

(2) 可选取如下的一组广义坐标：x、y、z 表示粒子的位置，X、Y、Z 表示转子质心的位置，三个欧拉角 ψ、φ、θ 描述转子相对于其质心平动参考系中的定点转动，取转子的旋转对称轴为固连于转子的 z' 轴.

系统的动能包括粒子的动能 T_1、转子的平动动能 T_2 和转子相对于其质心平动参考系的(转动)动能 T_3，

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

其中

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

I_1、I_2、I_3 是转子的三个主转动惯量，$I_1 = I_2$.

系统的势能可计算如下：以粒子为球心，设转子位于半径 $r \sim r+\mathrm{d}r$ 的球壳内的质元为 $\mathrm{d}M$，如引力为万有引力，粒子与此质元的势能为

$$dV = -\frac{Gm}{r}dM$$

系统的势能为

$$V = -Gm\int\frac{dM}{r}$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V$$

(3) 粒子与转子间的相互作用与 $X-x$、$Y-y$、$Z-z$、φ、θ 有关.

(4) 从上面选取的一组广义坐标及由此写出的拉格朗日函数,可以看出有两个运动常数. 因为 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, $\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L=$ 常量,又因动能是广义速度的二次齐次函数,势能不显含 t,所以 $H=\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$ 是系统的机械能.

因为$\frac{\partial L}{\partial \psi}=0$,$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}=$常量,其物理意义是转子在其质心平动参考系中对其旋转对称轴的角动量守恒.

如(2)中选取的一组广义坐标是系统质心的坐标 x、y、z,粒子在系统质心平动参考系中的球坐标为 r_m、θ_m、φ_m,以及转子在其质心平动参考系中的定点转动所用的三个欧拉角为 ψ、φ、θ,再将 r_m 改成粒子与转子质心间的距离 r,则系统的动能可写作

$$T = \frac{1}{2}(m+M)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{mM}{m+M}\right)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_m^2 + r^2\sin^2\theta_m \cdot \dot{\varphi}_m^2) + T_3$$

其中 T_3 就是前面给出的 T_3.

V 的式子仍如前述的积分式子,它与 r、φ、θ 三个坐标有关.

除有上述两个运动积分以外,还因有$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=0$,$\frac{\partial L}{\partial \varphi_m}=0$,有运动积分

$$\dot{x}=\text{常量},\qquad \dot{y}=\text{常量},\quad \dot{z}=\text{常量}$$

其物理意义是系统的动量守恒,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_m}=\text{常量}$$

因为系统质心平动参考系中的三个坐标方向可以随意规定,因此$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_m}=$常量的物理意义是系在对其质心平动参考系中对质心的角动量守恒.

(5) 当粒子与转子相距较远,说得更确切些,当粒子与转子质心的距离比转子的线度大得多时,粒子和转子质心的轨道十分近似于两个点质量的轨道,它们之间有(小的)差别的原因在于转子的质心和引力中心不重合. 反之,与此有关,粒子对转子各质元的引力对转子质心的力矩之和不等于零,这是转子相对于其质心有转动的原因.

11.1.16 地球以恒定的角速度$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ 相对于惯性参考系运动,$\boldsymbol{k}$ 是固连于地球的 z 轴的单位矢量,用固连于地球的笛卡儿坐标 x、y、z 为广义坐标,写出质量为 m 的质点在

势场 $V(x,y,z)$ 中运动的哈密顿函数，证明 H 不是总能量，但是一个守恒量.

解　$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}+\omega\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=(\dot{x}-\omega y)\boldsymbol{i}+(\dot{y}+\omega x)\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$

$$T=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}m[(\dot{x}-\omega y)^2+(\dot{y}+\omega x)^2+\dot{z}^2]$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2-2\omega\dot{x}y+2\omega x\dot{y}+\omega^2x^2+\omega^2y^2)$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2-2\omega\dot{x}y+2\omega x\dot{y}+\omega^2x^2+\omega^2y^2)-V(x,y,z)$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}-m\omega y$$

$$\dot{x}=\frac{1}{m}(p_x+m\omega y)$$

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y}+m\omega x$$

$$\dot{y}=\frac{1}{m}(p_y-m\omega x)$$

$$H=\frac{1}{m}p_x(p_x+m\omega y)+\frac{1}{m}p_y(p_y-m\omega x)+\frac{1}{m}p_z^2-\frac{1}{2}m\Big[\frac{1}{m^2}(p_x+m\omega y)^2$$

$$+\frac{1}{m^2}(p_y-m\omega x)^2+\frac{1}{m^2}p_z^2-2\omega y\cdot\frac{1}{m}(p_x+m\omega y)+2\omega x\cdot\frac{1}{m}(p_y-m\omega x)$$

$$+\omega^2x^2+\omega^2y^2\Big]+V(x,y,z)$$

$$=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+p_x\omega y-p_y\omega x+V(x,y,z)$$

因为 $T\neq T_2$（不是广义速度的二次齐次函数），H 不是总能量. 又因为 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，所以 H 是守恒量.

11.1.17　质量为 m 的质点作一维运动的拉格朗日函数 $L=\frac{1}{2}me^{\gamma t}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)$，其中 m、γ 和 ω 都是正实数.

(1) 求运动微分方程，根据作用在质点上的力的类型对运动微分方程作些说明；

(2) 求广义动量，由此构造哈密顿函数；

(3) 该哈密顿函数是否是运动常数？机械能是否守恒？

(4) 若初始条件为 $x(0)=0,\dot{x}(0)=v_0$，问当 $t\to\infty$ 时，$x(t)$ 渐近地等于什么？

解　(1)

$$L=\frac{1}{2}me^{\gamma t}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=me^{\gamma t}\dot{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=me^{\gamma t}\ddot{x}+m\gamma e^{\gamma t}\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-me^{\gamma t}\omega^2x$$

运动微分方程为

$$m\ddot{x}+m\gamma\dot{x}+m\omega^2x=0$$

或

$$m\ddot{x}=-m\gamma\dot{x}-m\omega^2x$$

质点受两个力:一个是$-m\gamma\dot{x}$为与速率成正比的阻力;一个是弹性力,是与偏离平衡位置的位移成正比的恢复力,微分方程是有阻尼的振动所遵循的方程.

(2)

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=me^{\gamma t}\dot{x},\quad \dot{x}=\frac{1}{m}e^{-\gamma t}p$$

$$\begin{aligned}H&=p\dot{x}-L\\&=p\cdot\frac{1}{m}e^{-\gamma t}p-\frac{1}{2}me^{\gamma t}\left[\left(\frac{1}{m}e^{-\gamma t}p\right)^2-\omega^2x^2\right]\\&=\frac{1}{2m}e^{-\gamma t}p^2+\frac{1}{2}me^{\gamma t}\omega^2x^2\end{aligned}$$

(3) $\frac{\partial H}{\partial t}\neq 0$,$H$不是运动常数,机械能也不守恒.弹性力是保守力,可引入势能,但阻力是非保守力,且总做负功,机械能是不断减少的.

(4)

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega^2x=0$$

特征方程为

$$r^2+\gamma r+\omega^2=0$$

$$\gamma=\frac{1}{2}(-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\omega^2})$$

如$\gamma^2<4\omega^2$,即$\frac{\gamma}{2}<\omega$时,通解为

$$x=Ae^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos(\omega_\gamma t+\alpha)$$

其中

$$\omega_r=\sqrt{\omega^2-\frac{1}{4}\gamma^2}$$

如$\gamma^2>4\omega^2$,即$\frac{\gamma}{2}>\omega$时,通解为

$$x=C_1e^{\frac{1}{2}\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}\right)t}+C_2e^{\frac{1}{2}\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}\right)t}$$

如$\gamma^2=4\omega^2$,即$\frac{\gamma}{2}=\omega$时,通解为

$$x=(B_1+B_2t)e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$$

不论$\frac{\gamma}{2}$与ω的大小关系是上述哪种情况,也不论初始条件如何,$t\to\infty$时,均有$x\to 0$.

11.1.18 一个自由度数为1的系统的哈密顿函数为$H=\frac{p^2}{2\alpha}-bqpe^{-\alpha t}+\frac{1}{2}bae^{-\alpha t}(\alpha+be^{-\alpha t})+\frac{1}{2}kq^2$,式中$a$、$b$、$\alpha$和$k$都是常量,求此系统的拉格朗日函数.

解

$$H=\frac{p^2}{2\alpha}-bqpe^{-\alpha t}+\frac{1}{2}bae^{-\alpha t}(\alpha+be^{-\alpha t})+\frac{1}{2}kq^2$$

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{\alpha}-bqe^{-\alpha t}$$

$$p=\alpha(\dot{q}+bqe^{-\alpha t})$$

$$H=p\dot{q}-L$$

$$L=p\dot{q}-H=\alpha(\dot{q}+bqe^{-\alpha t})\dot{q}-\frac{1}{2\alpha}[\alpha(\dot{q}+bqe^{-\alpha t})]^2$$

$$+bq\alpha(\dot{q}+bqe^{-\alpha t})e^{-\alpha t}-\frac{1}{2}bae^{-\alpha t}(\alpha+be^{-\alpha t})-\frac{1}{2}kq^2$$

$$=\frac{1}{2}\alpha(\dot{q}+bqe^{-\alpha t})^2-\frac{1}{2}bae^{-\alpha t}(\alpha+be^{-\alpha t})-\frac{1}{2}kq^2$$

11.1.19　两个惰性气体原子，每一个质量都是m，它们之间的经典相互作用势能为

$$V(r)=-\frac{2A}{r^6}+\frac{B}{r^{12}}$$

A、$B>0$，且为常量，r为两原子间的距离.

(1) 写出这两个原子构成的系统的哈密顿函数(取适当的广义坐标)；

(2) 求出这个系统的能量最低的经典态；

(3) 若能量稍高于(2)所求的最低能态，求这个系统的振动频率.

解　(1) 取系统的质心坐标x、y、z和一个原子相对于另一个原子的球坐标r、θ、φ为广义坐标.

$$L=\frac{1}{2}\times2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+2\times\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\dot{r}}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\dot{\theta}^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right]+\frac{2A}{r^6}-\frac{B}{r^{12}}$$

$$=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{4}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)+\frac{2A}{r^6}-\frac{B}{r^{12}}$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=2m\dot{x}$$

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=2m\dot{y}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=2m\dot{z}$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=\frac{1}{2}m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{1}{2}mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

$$H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}+p_\varphi\dot{\varphi}-L$$

$$=\frac{1}{4m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^2\theta}\right)-\frac{2A}{r^6}+\frac{B}{r^{12}}$$

(2) 最低的经典态，$T=0$，V取最小值，

$$\frac{d}{dr}\left(-\frac{2A}{r^6}+\frac{B}{r^{12}}\right)=0$$

$$\frac{12A}{r^7}-\frac{12B}{r^{13}}=0$$

$$r = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$E_{\min} = V_{\min} = \left(-\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}\right)\Bigg|_{r=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{6}}} = -\frac{A^2}{B}$$

(3) 将 $V(r)$ 在 $r=r_0=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{6}}$ 处作泰勒展开，或令 $r'=r-r_0$，在 $r'=0$ 处作泰勒展开，只保留二级小量，

$$\begin{aligned} V(r') &\approx V(r_0) + \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\Bigg|_{r=r_0} r'^2 \\ &= -\frac{A^2}{B} + \frac{1}{2}\left(-84\frac{A}{r^8} + 156\frac{B}{r^{14}}\right)\Bigg|_{r=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{6}}} r'^2 \\ &= -\frac{A^2}{B} + 36\frac{A^{7/3}}{B^{4/3}}r'^2 \end{aligned}$$

在最低能态附近，

$$\begin{aligned} L = &\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{4}m\left[\dot{r}'^2 + (r_0 + r')^2\dot{\theta}^2\right. \\ &\left. + (r_0 + r')^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right] - 36\frac{A^{7/3}}{B^{4/3}}r'^2 + \frac{A^2}{B} \end{aligned}$$

注意：r'、$\dot{r}'$、$\ddot{r}'$、$\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$、$\ddot{\theta}$、$\ddot{\varphi}$ 均为小量，由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ 得运动微分方程，只保留微分方程中的一级小量，可见只有关于 r' 的微分方程是振动的方程. 可得

$$\frac{1}{2}m\,\ddot{r}' + 72\frac{A^{7/3}}{B^{4/3}}r' = 0$$

在最低能态附近做小振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{72\frac{A^{7/3}}{B^{4/3}}\Big/\frac{1}{2}m} = 12m^{-1/2}A^{7/6}B^{-2/3}$$

11.1.20　一个质量为 m、带电荷量为 $-e$ 的非相对论电子在圆柱形磁控管内运动，磁控管由一个半径为 a、电势为 $-\phi_0$（$\phi_0>0$，为常量）的导线和电势为零的半径为 R 的同轴圆柱面组成. 磁控管内有一平行其轴的匀强磁场 B，选用柱坐标 r、φ、z 为广义坐标，标势 $\phi = -\phi_0\ln\left(\frac{r}{R}\right)\Big/\ln\left(\frac{a}{R}\right)$、矢势 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}Br\boldsymbol{e}_\varphi$（其中 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 是沿 φ 增大方向的单位矢量）.

(1) 写出哈密顿函数；

(2) 证明存在三个运动常数，并讨论可能出现的运动类型；

(3) 假定某电子以等于零的初始速度离开里面的那根导线，则存在某个磁场值 B_c，当 $B\leqslant B_c$ 时，该电子能到达外面的圆柱面，当 $B>B_c$ 时，它不能到达外面的圆柱面，求出 B_c 的值.

解　(1)
$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}Br\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} V &= (-e)\phi - (-e)\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} \\ &= e\phi_0\frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} + e(\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\,\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\,\boldsymbol{k})\cdot\frac{1}{2}Br\boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$= e\phi_0 \frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} + \frac{1}{2}eBr^2\dot{\varphi}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - e\phi_0 \frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} - \frac{1}{2}eBr^2\dot{\varphi}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} - \frac{1}{2}eBr^2$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L \\ &= \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\varphi + \frac{1}{2}eBr^2\right)^2 + p_z^2\right] + e\phi_0\frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} \end{aligned}$$

(2)
$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,\ p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} - \frac{1}{2}eBr^2 = \text{常量}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0,\ p_z = m\dot{z} = \text{常量},\ \dot{z} = \text{常量}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,\ H = \text{常量}$$

即
$$\frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\varphi + \frac{1}{2}eBr^2\right)^2 + p_z^2\right] + e\phi_0\frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} = \text{常量}$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + e\phi_0\frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} = \text{常量}$$

可能的运动类型有：

(i) 在 z 方向做匀速直线运动(r=常量,$\dot{\varphi}=0$)；

(ii) 在 z 保持不变的平面上做以 z 轴为圆心的匀速率圆周运动(z=常量,r=常量,$\dot{\varphi}$=常量)；

(iii) 在 z 保持不变的平面上做螺旋运动(z=常量,r 增大时,$\dot{\varphi}$减小)；

(iv) (i)、(ii)两种运动的叠加运动；

(v) (i)、(iii)两种运动的叠加运动.

(3) 用初始条件：$t=0$ 时,$r=a$,$\dot{r}=0$,$\dot{\varphi}=0$,$\dot{z}=0$. 确定三个运动常数：

$$\dot{z} = 0 \tag{1}$$

$$mr^2\dot{\varphi} - \frac{1}{2}eBr^2 = -\frac{1}{2}eBa^2 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + e\phi_0\frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} = e\phi_0 \tag{3}$$

将式(1)、(2)代入式(3). 得

$$\frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + r^2\left[\frac{\frac{1}{2}eB(r^2 - a^2)}{mr^2}\right]^2\right\} + e\phi_0\frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)} = e\phi_0 \tag{4}$$

将 $B=B_c$、$r=R$ 时，$\dot{r}=0$ 代入上式，

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{1}{m^2R^4}\frac{1}{4}e^2B_c^2(R^2-a^2)^2=e\phi_0$$

解出
$$B_c=\frac{2R}{R^2-a^2}\sqrt{\frac{2m\phi_0}{e}}$$

由式(4)可见，当 $B<B_c$ 时，在 $r=R$ 处，$\dot{r}^2>0$；在 $r<R$ 时，$\dot{r}>0$. 随着 r 增大，$\dot{r}^2$减小. 可见，在 $r=R$ 时，$\dot{r}>0$，说明电子能到达外面的圆柱面.

当 $B>B_c$ 时，在 $r=R$ 处，由式(4)得$\dot{r}^2<0$，这是不可能的，说明电子不可能到达 $r=R$ 处，在 $r<R$ 的某处，就变成$\dot{r}=0$ 了.

作出上述结论时，用了$\frac{(r^2-a^2)^2}{r^2}$是 r 的单调递增函数，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2-a^2}{r}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)=1+\frac{a^2}{r^2}>0$$

11.1.21 对于处在重力场中的对称陀螺，使用劳斯方程获得非循环坐标满足的运动微分方程，已知质心离固定点的距离为 h，对固定点的三个主转动惯量为 I_1、I_1、I_3.

解
$$T=\frac{1}{2}(I_1\omega_x^2+I_1\omega_y^2+I_3\omega_z^2)$$

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

$$T=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$$

$$V=mgh\cos\theta$$

$$L=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2-mgh\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,\quad\frac{\partial L}{\partial\psi}=0$$

φ、ψ 均为循环坐标，选取劳斯函数 R 为

$$R=p_\varphi\dot{\varphi}+p_\psi\dot{\psi}-L$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3\cos\theta(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\tag{1}$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\tag{2}$$

由上述两式$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$，得

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{I_1\sin^2\theta}(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)$$

$$\dot{\psi}=\frac{p_\psi}{I_3}-\frac{\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)$$

$$R=-\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2+\frac{p_\psi^2}{2I_3}+mgh\cos\theta$$

劳斯方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial R}{\partial\theta}=0 \tag{3}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial R}{\partial p_\varphi},\quad \dot{\psi}=\frac{\partial R}{\partial p_\psi} \tag{4}$$

$$\dot{p}_\varphi=-\frac{\partial R}{\partial\varphi},\quad \dot{p}_\psi=-\frac{\partial R}{\partial\psi} \tag{5}$$

代入劳斯函数,式(3)可表示为

$$-I_1\ddot{\theta}+\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2\cos\theta}{I_1\sin^3\theta}-\frac{p_\psi(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)}{I_1\sin\theta}+mgh\sin\theta=0$$

由式(1)、(2)、(5)得

$$p_\varphi=I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3\cos\theta(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=C_1$$

$$p_\psi=I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=C_2$$

用上述两个运动积分,非循环坐标 θ 满足的运动微分方程可改写为

$$\ddot{\theta}=\frac{mgh\sin\theta}{I_1}+\frac{(\alpha-\beta\cos\theta)^2\cos\theta}{\sin^3\theta}-\frac{\beta(\alpha-\beta\cos\theta)}{\sin\theta}$$

其中 $\alpha=\frac{C_1}{I_1}$,$\beta=\frac{C_2}{I_1}$,C_1、C_2 由初始条件确定.

11.1.22　一个质量为 m 的质点在重力作用下,在 $z=x^2+y^2$ 面内滑动,z 轴竖直向上,采用柱坐标,用劳斯方程推导出非循环坐标满足的运动微分方程.

解

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

$$z=\rho^2,\qquad \dot{z}=2\rho\dot{\rho}$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+4\rho^2\dot{\rho}^2)-mg\rho^2$$

因为$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$,$\varphi$ 为循环坐标,

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=m\rho^2\dot{\varphi}=mC(C\text{ 为常量})$$

$$R=p_\varphi\dot{\varphi}-L=\frac{1}{2m\rho^2}p_\varphi^2-\frac{1}{2}m(1+4\rho^2)\dot{\rho}^2+mg\rho^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial\dot{\rho}}=-m(1+4\rho^2)\dot{\rho}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\rho}}\right)=-m(1+4\rho^2)\ddot{\rho}-8m\rho\dot{\rho}^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial\rho}=-\frac{1}{m\rho^3}p_\varphi^2-4m\rho\dot{\rho}^2+2mg\rho$$

代入 $p_\varphi=mC$,

$$\frac{\partial R}{\partial \rho}=-mC^2\rho^{-3}-4m\rho\dot{\rho}^2+2mg\rho$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial R}{\partial \rho}=0$,可得

$$(1+4\rho^2)\ddot{\rho}+4\rho\dot{\rho}^2-C^2\rho^{-3}+2g\rho=0$$

其中　$C=\rho^2\dot{\varphi}$为常量,由初始条件确定.

注意:不能直接用循环积分 $m\rho^2\dot{\varphi}=mC$ 消去拉格朗日函数中的循环坐标,再用拉格朗日方程得到非循环坐标满足的运动微分方程.原因是循环积分是一个非完整约束,不减少系统的自由度数.在这里,用 $m\rho^2\dot{\varphi}=mC$ 消去拉格朗日函数中的$\dot{\varphi}$,将使$\frac{\partial L}{\partial \rho}$的计算出现错误.

11.1.23　一个力学系统具有动能 $T=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\frac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2}\right)$,势能 $V=\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)$,式中 a、b、k_1 和 k_2 均为常量,写出劳斯函数和劳斯方程.

解

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\frac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2}\right)$$

$$V=\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)$$

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\frac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2}\right)-\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)$$

$$p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\frac{\dot{q}_2}{a+bq_1^2}$$

$$\dot{q}_2=(a+bq_1^2)p_2$$

$$R=p_2\dot{q}_2-L=\frac{1}{2}(a+bq_1^2)p_2^2-\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2)$$

劳斯方程为

$$\dot{q}_2=\frac{\partial R}{\partial p_2}=(a+bq_1^2)p_2$$

$$\dot{p}_2=-\frac{\partial R}{\partial q_2}=0$$

$$\ddot{q}_1+(p_2^2b+k_1)q_1=0$$

其中 $p_2=\frac{\dot{q}_2}{a+bq_1^2}=C$ 为常量,由初始条件确定.

11.1.24　一个质量为 m 的质点在势能 $V(r)$表示的有心力 $f(r)$作用下做圆周运动.采用极坐标,用劳斯方程讨论质点做圆周运动的稳定性条件.

解

$$L=\frac{1}{3}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r)$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}$$

$$R=p_\varphi\dot{\varphi}-L=\frac{1}{2mr^2}p_\varphi^2-\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V(r)$$

因为
$$\frac{\partial R}{\partial \varphi}=0,\quad p_\varphi=C(\text{常量})$$
$$R=\frac{C^2}{2mr^2}-\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V(r)$$

稳态运动条件为
$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\bigg|_{r=r_0}=0$$

即
$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)\bigg|_{r=r_0}-\frac{C^2}{mr_0^3}=0$$

将劳斯函数在稳态运动，在 $r=r_0$ 处作泰勒展开，令 $\rho=r-r_0$，略去对微分方程毫无影响的常数项，只保留二级小量项，得
$$R=-\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3C^2}{mr_0^4}+\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=r_0}\right)\rho^2=0$$

得到上式的过程中用了稳态运动条件.

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\right)-\frac{\partial R}{\partial \rho}=0$，得
$$\ddot{\rho}+\frac{1}{m}\left(\frac{3C^2}{mr_0^4}+\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=r_0}\right)\rho=0$$

稳态运动稳定性条件为
$$\frac{3C^2}{mr_0^4}+\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=r_0}>0$$

如把 C 改写为 mh，稳定性条件也可改写为
$$\frac{3mh^2}{r_0^4}-\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=r_0}>0$$

11.2　泊松括号和泊松定理

11.2.1　(1) 若哈密顿函数 H 和某正则变量和时间的函数 F 都是运动常数，证明 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 也是一个运动常数；

(2) 一个自由粒子的一维运动，哈密顿函数 H 是运动常数，直接计算说明 $F=x-\frac{p}{m}t$ 是运动常数，$\frac{\partial F}{\partial t}$ 也是运动常数.

证明　(1) H 是运动常数，
$$H=C$$

F 是运动常数，则
$$\frac{\partial F}{\partial t}+[F,H]=0$$

上式两边对 t 求偏导，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}[F,H]=\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\left[\frac{\partial F}{\partial t},H\right]+\left[F,\frac{\partial H}{\partial t}\right]=0$$

因为
$$\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

故
$$\left[F,\frac{\partial H}{\partial t}\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)+\left[\frac{\partial F}{\partial t},H\right]=0$$

所以
$$\frac{\partial F}{\partial t}=\text{常量}$$

(2) 自由粒子做一维运动,粒子质量为 m,

$$H=\frac{1}{2m}p^2$$

$$F=x-\frac{p}{m}t$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}+[F,H]&=-\frac{p}{m}+\left[x-\frac{p}{m}t,\frac{1}{2m}p^2\right]\\&=-\frac{p}{m}+\frac{\partial}{\partial x}\left(x-\frac{p}{m}t\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2m}p^2\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(x-\frac{p}{m}t\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2m}p^2\right)\\&=-\frac{p}{m}+1\cdot\frac{p}{m}-\left(-\frac{1}{m}t\right)\cdot 0=0\end{aligned}$$

所以 $F=x-\frac{p}{m}t$ 为运动常数,

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-\frac{p}{m}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)+\left[\frac{\partial F}{\partial t},H\right]\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{p}{m}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{p}{m}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2m}p^2\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{p}{m}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2m}p^2\right)\\&=0\end{aligned}$$

所以$\frac{\partial F}{\partial t}\left(=-\frac{p}{m}\right)$是运动常数.

11.2.2　如正则方程的解已经获得,p_i、q_i($i=1,2,\cdots,s$)均为 t 和 $2s$ 个积分常数 C_1、C_2、…、C_{2s}的函数,则拉格朗日括号

$$(C_\alpha,C_\beta)=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial C_\beta}-\frac{\partial q_i}{\partial C_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha}\right)$$

也是运动常数.

证明　已获得正则方程的解,

$$q_\alpha=q_\alpha(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2s})$$

$$p_\alpha=p_\alpha(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2s})$$

则$\dot{p}_\alpha$、$\dot{q}_\alpha$ 以及 $H(p_\alpha,q_\alpha,t)$都是 t、C_1、C_2、…、C_{2s}的已知函数,且 q_α、p_α 满足正则方程

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\qquad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_\alpha,C_\beta) &= \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C_\alpha}\right)\frac{\partial p_i}{\partial C_\beta}+\frac{\partial q_i}{\partial C_\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial p_i}{\partial C_\beta}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial C_\beta}\right)\frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha}-\frac{\partial q_i}{\partial C_\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial \dot q_i}{\partial C_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial C_\beta}+\frac{\partial q_i}{\partial C_\alpha}\frac{\partial \dot p_i}{\partial C_\beta}-\frac{\partial \dot q_i}{\partial C_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha}-\frac{\partial q_i}{\partial C_\beta}\frac{\partial \dot p_i}{\partial C_\alpha}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial}{\partial C_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_i}{\partial C_\beta}+\frac{\partial q_i}{\partial C_\alpha}\frac{\partial}{\partial C_\beta}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial}{\partial C_\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha}-\frac{\partial q_i}{\partial C_\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial C_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial}{\partial C_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial C_\beta}\right)-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 p_i}{\partial C_\alpha\partial C_\beta}-\frac{\partial}{\partial C_\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial C_\alpha}\right)+\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial^2 q_i}{\partial C_\beta\partial C_\alpha}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial C_\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha}\right)+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 p_i}{\partial C_\beta\partial C_\alpha}+\frac{\partial}{\partial C_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial C_\beta}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial^2 q_i}{\partial C_\alpha\partial C_\beta}\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial C_\alpha}\left[\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial C_\beta}+\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial C_\beta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial C_\beta}\left[\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial C_\alpha}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha}\right)\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial C_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial C_\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial C_\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial C_\alpha}\right)\\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial C_\alpha\partial C_\beta}-\frac{\partial^2 H}{\partial C_\beta\partial C_\alpha}=0
\end{aligned}$$

所以$(C_\alpha,C_\beta)=$常量.

11.2.3　若φ是坐标和动量的任意标量函数,试证$[\varphi,J_z]=0$.

证明　φ是坐标和动量的任意标量函数,意味着φ是宗量r^2、p^2、$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$的任意函数,

$$\varphi=\varphi(r^2、p^2、\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})$$

$$J_z=xp_y-yp_x$$

$$[\varphi,J_z]=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial J_z}{\partial p_x}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_x}\frac{\partial J_z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial J_z}{\partial p_y}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_y}\frac{\partial J_z}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial J_z}{\partial p_z}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_z}\frac{\partial J_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r^2}\frac{\partial r^2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}\cdot\frac{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}{\partial x}=2x\frac{\partial\varphi}{\partial r^2}+p_x\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y\frac{\partial\varphi}{\partial r^2}+p_y\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_x}=\frac{\partial\varphi}{\partial p^2}\frac{\partial p^2}{\partial p_x}+\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}\frac{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}{\partial p_x}=2p_x\frac{\partial\varphi}{\partial p^2}+x\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_y}=2p_y\frac{\partial\varphi}{\partial p^2}+y\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial p_x}=-y,\qquad\frac{\partial J_z}{\partial p_y}=x,\qquad\frac{\partial J_z}{\partial p_z}=0$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial x}=p_y,\qquad\frac{\partial J_z}{\partial y}=-p_x,\qquad\frac{\partial J_z}{\partial z}=0$$

所以
$$\begin{aligned}
[\varphi,J_z]&=\left(2x\frac{\partial\varphi}{\partial r^2}+p_x\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}\right)(-y)\\
&\quad-\left(2p_x\frac{\partial\varphi}{\partial p^2}+x\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}\right)p_y+\left(2y\frac{\partial\varphi}{\partial r^2}+p_y\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}\right)x\\
&\quad-\left(2p_y\frac{\partial\varphi}{\partial p^2}+y\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}\right)(-p_x)=0
\end{aligned}$$

11.2.4　试用泊松定理证明系统的角动量和动量的笛卡儿坐标分量 J_x、J_y、J_z、p_x、p_y、p_z 中角动量的任何两个分量和动量的第三个分量(例如 J_x、J_z 和 p_y 或 J_x、J_y 和 p_z)为运动常数,则 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 都是运动常数.

证明　$J_x=C_1$,　$J_z=C_2$,　$p_y=C_3$

$$
\begin{aligned}
[J_z,J_x]= & \left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i}),\sum_i (y_i p_{z_i}-z_i p_{y_i})\right] \\
= & \sum_j \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\frac{\partial}{\partial p_{x_j}}\left[\sum_i (y_i p_{z_i}-z_i p_{y_i})\right]\right. \\
& -\frac{\partial}{\partial p_{x_j}}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_i (y_i p_{z_i}-z_i p_{y_i})\right] \\
& +\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\frac{\partial}{\partial p_{y_j}}\left[\sum_i (y_i p_{z_i}-z_i p_{y_i})\right] \\
& -\frac{\partial}{\partial p_{y_j}}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\sum_i (y_i p_{z_i}-z_i p_{y_i})\right] \\
& +\frac{\partial}{\partial z_j}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\frac{\partial}{\partial p_{z_j}}\left[\sum_i (y_i p_{z_i}-z_i p_{y_i})\right] \\
& \left.-\frac{\partial}{\partial p_{z_j}}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\frac{\partial}{\partial z_j}\left[\sum_i (y_i p_{z_i}-z_i p_{y_i})\right]\right\} \\
= & \sum_j \left[(-p_{x_j})(-z_j)-x_j p_{z_j}\right] \\
= & \sum_j (z_j p_{x_j}-x_j p_{z_j})=J_y
\end{aligned}
$$

由泊松定理,因为 J_z、J_x 都是运动常数,它们构成的泊松括号

$$J_y=[J_z,J_x]$$

也是运动常数.

$$
\begin{aligned}
[p_y,J_z]= & \left[\sum_i p_{y_i},\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right] \\
= & \sum_j \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i p_{y_i}\right)\frac{\partial}{\partial p_{x_j}}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\right. \\
& -\frac{\partial}{\partial p_{x_j}}\left(\sum_i p_{y_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right] \\
& +\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_i p_{y_i}\right)\frac{\partial}{\partial p_{y_j}}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right] \\
& -\frac{\partial}{\partial p_{y_j}}\left(\sum_i p_{y_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right] \\
& +\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_i p_{y_i}\right)\frac{\partial}{\partial p_{z_j}}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right] \\
& \left.-\frac{\partial}{\partial p_{z_j}}\left(\sum_i p_{y_i}\right)\frac{\partial}{\partial z_j}\left[\sum_i (x_i p_{y_i}-y_i p_{x_i})\right]\right\} \\
= & \sum_j \left[-1\cdot(-p_{x_j})\right]=\sum_j p_{x_j}=p_x
\end{aligned}
$$

由泊松定理，因为 p_y、J_z 都是运动常数，则 $p_x=[p_y,J_z]$也是运动常数.

同样可得，因为 p_x、J_y 是运动常数，$p_z=[p_x,J_y]$也是运动常数，$\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的所有分量都是运动常数，所以 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 都是运动常数.

11.2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是平方反比律力作用下的有心运动中的拉普拉斯-龙格-楞次矢量，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J}-m^2\alpha\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是关于力心的角动量，α 是有心力中的系数，$\boldsymbol{F}=-\frac{m\alpha}{r^2}\boldsymbol{e}_r$. 利用泊松括号的性质，求以下各泊松括号：$[A_\alpha,J_\beta]$，$[A_\alpha,H]$(脚标 α、β 表示笛卡儿坐标的分量)，并证明它们都是守恒量.

解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J}-m^2\alpha\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=(xp_y-yp_x)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A}=(p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j})\times(xp_y-yp_x)\boldsymbol{k}-m^2\alpha\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$=\left[xp_y^2-yp_xp_y-m^2\alpha\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]\boldsymbol{i}+\left[yp_x^2-xp_xp_y-m^2\alpha\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]\boldsymbol{j}$$

$$[A_x,J_x]=[A_x,J_y]=[A_y,J_x]=[A_y,J_y]=0$$

$$[A_z,J_x]=[A_z,J_y]=[A_z,J_z]=0$$

$$\begin{aligned}
[A_x,J_z]&=\left[xp_y^2-yp_xp_y-m^2\alpha\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},xp_y-yp_x\right]\\
&=p_y[xp_y-yp_x,xp_y-yp_x]+[p_y,xp_y-yp_x](xp_y-yp_x)\\
&\quad-m^2\alpha\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},xp_y\right]+m^2\alpha\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},yp_x\right]\\
&=[p_y,-y]p_x(xp_y-yp_x)-m^2\alpha x\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},p_y\right]\\
&\quad+m^2\alpha y\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},p_x\right]\\
&=p_x(xp_y-yp_x)+\frac{m^2\alpha x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}+m^2\alpha y\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]\\
&=xp_xp_y-yp_x^2+m^2\alpha\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}=-A_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[A_y,J_z]&=\left[p_x(yp_x-xp_y)-m^2\alpha\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}},xp_y-yp_x\right]\\
&=p_x[yp_x-xp_y,xp_y-yp_x]+[p_x,xp_y-yp_x](yp_x-xp_y)\\
&\quad-m^2\alpha\left[\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}},xp_y\right]+m^2\alpha\left[\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}},yp_x\right]\\
&=[p_x,x]p_y(yp_x-xp_y)-m^2\alpha x\left[\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}},p_y\right]\\
&\quad+m^2\alpha y^2\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}},p_x\right]
\end{aligned}$$

$$= (xp_y - yp_x)p_y - m^2\alpha x\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

$$+ m^2\alpha y^2 \frac{(-x)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= (xp_y - yp_x)p_y - m^2\alpha \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} = A_x$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$[A_x, H] = \left[p_y(xp_y - yp_x) - m^2\alpha \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2) - \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \left[xp_y^2, \frac{1}{2m}p_x^2\right] - \left[yp_xp_y, \frac{1}{2m}p_y^2\right]$$

$$+ \left[xp_y^2, -\frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right] + \left[yp_xp_y, \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

$$- m^2\alpha\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{1}{2m}p_x^2\right] - m^2\alpha\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{1}{2m}p_y^2\right]$$

$$= \frac{1}{2m}p_y^2[x, p_x^2] - \frac{1}{2m}p_xp_y[y, p_y^2]$$

$$+ m\alpha x\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}, p_y^2\right] + yp_y\left[p_x, \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

$$+ yp_x\left[p_y, \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right] - \frac{1}{2}m\alpha\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, p_x^2\right]$$

$$- \frac{1}{2}m\alpha\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, p_y^2\right]$$

$$= \frac{1}{m}p_y^2p_x - \frac{1}{m}p_xp_y^2 - m\alpha x \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot 2p_y$$

$$+ m\alpha y p_y \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + yp_x \cdot m\alpha \cdot \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$- \frac{1}{2}m\alpha\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right] \cdot 2p_x$$

$$- \frac{1}{2}m\alpha x\left[-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]2p_y = 0$$

$$[A_y, H] = \left[yp_x^2 - xp_xp_y - m^2\alpha \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2) - \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \left[yp_x^2, \frac{1}{2m}p_y^2\right] - \left[xp_xp_y, \frac{1}{2m}p_x^2\right] + \left[yp_x^2, -\frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

$$+ \left[xp_xp_y, \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right] - m^2\alpha\left[\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2m}p_x^2[y, p_y^2] - \frac{1}{2m}p_xp_y[x, p_x^2] - m\alpha y\left[p_x^2, \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

$$+ xp_x\left[p_y, \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right] + xp_y\left[p_x, \frac{m\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

$$-\frac{1}{2}m\alpha\left[\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}},p_x^2\right]-\frac{1}{2}m\alpha\left[\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}},p_y^2\right]$$

$$=\frac{1}{m}p_x^2p_y-\frac{1}{m}p_x^2p_y-m\alpha y\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot 2p_x$$

$$+xp_x\cdot m\alpha\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}+xp_y\cdot m\alpha\cdot\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{2}m\alpha\left[-\frac{yx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]\cdot 2p_x-\frac{1}{2}m\alpha\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}-\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]2p_y=0$$

$$[A_z,H]=0\quad(\text{因为 }A_z=0)$$

H 是运动常数.是守恒量,$[A_\alpha,H]=0$,A_α 也是守恒量.

$$[[A_x,J_z],H]=[-A_y,H]=0$$

$$[[A_y,J_z],H]=[A_x,H]=0$$

其余$[A_\alpha,J_\beta]=0$(α 不等于 x、y,β 不等于 z).

所以
$$[[A_\alpha,J_\beta],H]=0$$

这就证明了$[A_\alpha,J_\beta]$、$[A_\alpha,H]$都是守恒量.但不少都是零,不为零的$[A_x,J_z]$、$[A_y,J_z]$也没有给出新的守恒量.

注意:**A** 和 **J** 都是守恒量,但 A_r、A_φ 不是守恒量,因此,$[A_r,J_z]$、$[A_\varphi,J_z]$都不是守恒量,$[A_r,H]$、$[A_\varphi,H]$也不等于零.

11.2.6 已知某系统的哈密顿函数

$$H=q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2$$

式中 a、b 均为常量(这个哈密顿函数并不来自拉格朗日函数,是假想的),证明 $F_1=q_1q_2$,$F_2=q_1\mathrm{e}^{-t}$,$F_3=\dfrac{p_2-bq_2}{q_1}$都是运动常量,讨论它们的独立性,能否由它们找出新的独立的运动常量.

证明
$$H=q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2$$

$$[F_1,H]=[q_1q_2,q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2]$$
$$=q_2[q_1,q_1p_1]-q_1[q_2,q_2p_2]=q_2q_1-q_1q_2=0$$

$$[F_2,H]=[q_1\mathrm{e}^{-t},q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2]$$
$$=q_1\mathrm{e}^{-t}[q_1,p_1]=q_1\mathrm{e}^{-t}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+[F_2,H]=\frac{\partial(q_1\mathrm{e}^{-t})}{\partial t}+q_1\mathrm{e}^{-t}=-q_1\mathrm{e}^{-t}+q_1\mathrm{e}^{-t}=0$$

$$[F_3,H]=\left[\frac{p_2-bq_2}{q_1},q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2\right]$$

$$=q_1(p_2-bq_2)\left[\frac{1}{q_1},p_1\right]-\frac{1}{q_1}[p_2-bq_2,q_2p_2]+\frac{1}{q_1}[p_2-bq_2,bq_2^2]$$

$$=-\frac{p_2-bq_2}{q_1}+\frac{bq_2+p_2}{q_1}-\frac{2bq_2}{q_1}=0$$

F_i 均满足$\dfrac{\partial F_i}{\partial t}+[F_i,H]=0(i=1,2,3)$.所以它们都是运动常量.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial q_1} & \frac{\partial F_3}{\partial q_2} & \frac{\partial F_3}{\partial p_1} & \frac{\partial F_3}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 & q_1 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_2 - bq_2}{q_1^2} & -\frac{b}{q_1} & 0 & \frac{1}{q_1} \end{pmatrix}$$

有
$$\begin{vmatrix} q_2 & q_1 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 \\ -\frac{p_2-bq_2}{q_1^2} & -\frac{b}{q_1} & \frac{1}{q_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{q_1}(0-q_1e^{-t}) = -e^{-t} \neq 0$$

可见三个运动积分是相互独立的，

$$[F_1,F_2] = [q_1q_2,q_1e^{-t}] = 0$$

$$[F_1,F_3] = \left[q_1q_2,\frac{p_2 - bq_2}{q_1}\right] = q_1 \cdot \frac{1}{q_1}[q_2,p_2] = 1$$

$$[F_2,F_3] = \left[q_1e^{-t},\frac{p_2 - bq_2}{q_1}\right] = 0$$

由 F_1、F_2、F_3 不能用泊松定理找出新的运动积分.

11.2.7　找出各向同性的三维谐振子尽可能多的运动积分，其拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

解　$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

因为$\frac{\partial H}{\partial t}=0$，$H$ 是守恒量.

$$F_1 = H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = C_1$$

为运动积分.

改用柱坐标

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(r^2 + z^2)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}k(r^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,\quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = C_2$$

为运动积分，改用直角坐标. 可写为

$$F_2 = J_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = xp_y - yp_x = C_2$$

根据对称性，可写出 F_3、F_4 两个运动积分：

$$F_3 = yp_z - zp_y = C_3$$

$$F_4 = zp_x - xp_z = C_4$$

$F_1=H$，显然有$[F_1,F_i]=0(i=2,3,4)$不能得到新的运动积分，

$$
\begin{aligned}
[F_2,F_3] &= [xp_y - yp_x, yp_z - zp_y] \\
&= [xp_y, yp_z] + [yp_x - zp_y] \\
&= -xp_z + zp_x = F_4
\end{aligned}
$$

同样，$[F_2,F_4]$，$[F_3,F_4]$均不能得到新的运动积分，

$$H = H_1 + H_2 + H_3$$

其中

$$H_1=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}kx^2,\quad H_2=\frac{1}{2m}p_y^2+\frac{1}{2}ky^2$$

$$H_3=\frac{1}{2m}p_z^2+\frac{1}{2}kz^2$$

$$
\begin{aligned}
[H_1,H] &= \left[\frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2, H\right] \\
&= \left[\frac{1}{2m}p_x^2, \frac{1}{2}kx^2\right] + \left[\frac{1}{2}kx^2, \frac{1}{2m}p_x^2\right] = 0
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = 0,\quad \frac{\partial H_1}{\partial t} + [H_1,H] = 0$$

所以

$$F_5=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}kx^2=C_5$$

为运动积分.

同样可得

$$F_6=\frac{1}{2m}p_y^2+\frac{1}{2}ky^2=C_6$$

$$F_7=\frac{1}{2m}p_z^2+\frac{1}{2}kz^2=C_7$$

均为运动积分，显然，F_1、F_5、F_6、F_7 中只有三个是独立的.

由泊松定理，可得

$$F_8= [F_2,F_5] = \left[xp_y - yp_x, \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right] = \frac{1}{2m}p_y[x,p_x^2] - \frac{1}{2}ky[p_x,x^2]$$

$$= \frac{1}{m}p_yp_x - \frac{1}{2}ky(-2x) = \frac{1}{m}p_xp_y + kxy = C_8$$

由对称性或同样用泊松定理可得

$$F_9 = \frac{1}{m}p_yp_z + kyz = C_9$$

$$F_{10} = \frac{1}{m}p_xp_z + kxz = C_{10}$$

用泊松定理，再不能用这些运动积分得到新的运动积分.

11.2.8 (1) 对于任何正则变量和时间的函数 $a(q_1,q_2,\cdots,q_s,p_1,p_2,\cdots,p_s,t)$，证明

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial a}{\partial t} + [a,H]$$

(2) 某个两维振子，动能、势能分别为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + cxy$$

其中 c 和 k 是常量.

(a) 用坐标变换证明该振子是一个各向异性的谐振子;

(b) 找出两个运动常数,并用(1)的结论证明;

(c) 若 $c=0$,找出第三个运动常数;

(d) 对于各向同性的振子,证明对称矩阵

$$A_{ij}=\frac{1}{2m}p_ip_j+\frac{1}{2}kx_ix_j$$

是运动常数,证明方法是设法将此矩阵的每一矩阵元用已知的运动常数表示出来.

解　(1)

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial a}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial a}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial a}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)$$

$$=\frac{\partial a}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial a}{\partial t}+[a,H]$$

(2)

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k(x^2+y^2)-cxy$$

(a) 作坐标变换,使 x,y 变为简正坐标 ξ、η.

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k & c\\ c & k\end{pmatrix}$$

特征矩阵为

$$\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}k-m\omega^2 & c\\ c & k-m\omega^2\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=0$$

$$m^2\omega^4-2mk\omega^2+(k^2-c^2)=0$$

$$[m\omega^2-(k+c)][m\omega^2-(k-c)]=0$$

$$\omega_1^2=\frac{k+c}{m},\quad \omega_2^2=\frac{k-c}{m}$$

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{K}-\omega_1^2\boldsymbol{M})=\begin{pmatrix}-c & c\\ c & -c\end{pmatrix}$$

取归一化了的列矢量$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{K}-\omega_2^2\boldsymbol{M})=\begin{pmatrix}c & c\\ c & c\end{pmatrix}$$

取归一化了的列矢量$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}u_1^{(1)} & u_1^{(2)}\\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$G^{-1}=G^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

即作坐标变换 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)$，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta-\xi)$，

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)$$

$$V=\frac{1}{2}(k-c)\xi^2+\frac{1}{2}(k+c)\eta^2$$

这是一个各向异性的谐振子，在 ξ、η 两方向的谐振动的角频率分别为$\sqrt{\frac{k-c}{m}}$和$\sqrt{\frac{k+c}{m}}$.

(b)

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)-\frac{1}{2}(k-c)\xi^2-\frac{1}{2}(k+c)\eta^2$$

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2m}(p_\xi^2+p_\eta^2)+\frac{1}{2}(k-c)\xi^2+\frac{1}{2}(k+c)\eta^2\\&=H_1+H_2\end{aligned}$$

其中

$$H_1=\frac{1}{2m}p_\xi^2+\frac{1}{2}(k-c)\xi^2$$

$$H_2=\frac{1}{2m}p_\eta^2+\frac{1}{2}(k+c)\eta^2$$

$$\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H_1}{\partial t}+[H_1,H]=[H_1,H_1+H_2]=[H_1,H_2]=0$$

同样

$$\frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}t}=[H_2,H_1+H_2]=[H_2,H_1]=0$$

所以

$$H_1=\frac{1}{2m}p_\xi^2+\frac{1}{2}(k-c)\xi^2=C_1$$

$$H_2=\frac{1}{2m}p_\eta^2+\frac{1}{2}(k+c)\eta^2=C_2$$

为运动常数，

$$p_\xi=m\dot{\xi}=m\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{x}-\dot{y})=\frac{1}{\sqrt{2}}(p_x-p_y)$$

$$p_\eta=m\dot{\eta}=\frac{1}{\sqrt{2}}(p_x+p_y)$$

上述两个运动常数也可写成

$$\frac{1}{4m}(p_x - p_y)^2 + \frac{1}{4}(k-c)(x-y)^2 = C_1$$

$$\frac{1}{4m}(p_x + p_y)^2 + \frac{1}{4}(k+c)(x+y)^2 = C_2$$

(c) 若 $c=0$,二维振子是各向同性的,

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

可找到

$$J = m(xp_y - yp_x) = C_3$$

为第三个运动积分. 证明如下:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial J}{\partial t} + [J,H] = [m(xp_y - yp_x),H] \\ &= \left[mxp_y, \frac{1}{2m}p_x^2\right] + \left[mxp_y, \frac{1}{2}ky^2\right] \\ &\quad - \left[myp_x, \frac{1}{2m}p_y^2\right] - \left[myp_x, \frac{1}{2}kx^2\right] \\ &= mp_y \cdot \frac{1}{2m} \cdot 2p_x + mx \cdot \frac{1}{2}k(-2y) \\ &\quad - mp_x \cdot \frac{1}{2m} \cdot 2p_y - my \cdot \frac{1}{2}k(-2x) \\ &= 0\end{aligned}$$

(d)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 & \frac{1}{2m}p_xp_y + \frac{1}{2}kxy \\ \frac{1}{2m}p_xp_y + \frac{1}{2}kxy & \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}ky^2 \end{pmatrix}$$

对于各向同性的振子,已证明了 A_{11}、A_{22}都是运动常数,

$$\frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_1$$

$$\frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}ky^2 = E_2$$

由$[A_{12},H]=0$ 很容易证明 A_{12}也是运动常数,但题目要求将 A_{12}表示成 E_1、E_2 和

$$m(xp_y - yp_x) = J$$

的函数. 不难看出:

$$\begin{aligned}E_1E_2 - \frac{kJ^2}{4m} &= \left(\frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)\left(\frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}ky^2\right) - \frac{1}{4m}[m(xp_y - yp_x)]^2 \\ &= \frac{1}{4m^2}p_x^2p_y^2 + \frac{1}{4}k^2x^2y^2 + \frac{k}{4m}(y^2p_x^2 + x^2p_y^2) \\ &\quad - \frac{k}{4m}m^2(x^2p_y^2 + y^2p_x^2 - 2xyp_xp_y) \\ &= \frac{1}{4m^2}p_x^2p_y^2 + \frac{1}{4}k^2x^2y^2 + \frac{k}{2m}xyp_xp_y\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2m}p_x p_y + \frac{1}{2}kxy\right)^2 = (A_{12})^2$$

所以
$$A_{12}=A_{21}=\frac{1}{2m}p_x p_y+\frac{1}{2}kxy=\pm\sqrt{E_1E_2-\frac{k}{4m}J^2}$$
为运动常数.矩阵的所有元素均为运动常数,该矩阵当然是运动常数.

11.2.9 已知
$$\varphi=f_1(q_1,p_1)f_2(q_2,p_2)$$
$$\psi=f_3(q_1,p_1)f_4(q_2,p_2)$$
计算泊松括号[φ,ψ].

解
$$\varphi=f_1(q_1,p_1)f_2(q_2,p_2)$$
$$\psi=f_3(q_1,p_1)f_4(q_2,p_2)$$
$$[\varphi,\psi]=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}$$
这是用泊松括号的定义进行直接计算,更方便的办法是利用泊松括号运算的性质,
$$\begin{aligned}[\varphi,\psi]&=[f_1(q_1,p_1)f_2(q_2,p_2),f_3(q_1,p_1)f_4(q_2,p_2)]\\&=f_2(q_2,p_2)[f_1(q_1,p_1),f_3(q_1,p_1)]f_4(q_2,p_2)\\&\quad+f_1(q_1,p_1)[f_2(q_2,p_2),f_4(q_2,p_2)]f_3(q_1,p_1)\\&=f_2f_4[f_1,f_3]+f_1f_3[f_2,f_4]\end{aligned}$$

11.2.10 若系统的哈密顿函数可写成下列形式:
$$H=H[f(q_1,q_2,\cdots,q_m,p_1,p_2,\cdots,p_m),q_{m+1},\cdots,q_s,p_{m+1},\cdots,p_s,t]$$
则 $f(q_1,q_2,\cdots,q_m,p_1,p_2,\cdots,p_m)$是守恒量.

证明 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\sum_{i=m+1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)=0$$
所以 $f(q_1,q_2,\cdots,q_m,p_1,p_2,\cdots,p_m)$是守恒量.

11.2.11 若两个已知函数 $\varphi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$、$\psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$有下列恒等式:
$$\varphi\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+[\varphi,H]\right\}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t}+[\psi,H]$$
其中 H 是哈密顿函数,[φ,H]、[ψ,H]均为泊松括号,找出此正则方程的一个运动积分.

解
$$\varphi\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+[\varphi,H]\right\}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t}+[\psi,H]$$
$$\varphi\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+[\varphi,H]\right\}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi^2\right)+\left[\frac{1}{2}\varphi^2,H\right]\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t}+[\psi,H]$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi^2-\psi\right)+\left[\frac{1}{2}\varphi^2-\psi,H\right]=0$$

所以$\frac{1}{2}\varphi^2-\psi$ 为运动常数.

11.3 哈密顿原理

11.3.1 求在 xy 平面内经过两个固定点的一条曲线;绕 z 轴的转动惯量为极小值,用平面极坐标写出该曲线必须满足的微分方程.

解 曲线的微元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\varphi)^2}=\sqrt{1+r^2\varphi'^2}\mathrm{d}r$$

其中

$$\varphi'=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

设线密度为 η,微元绕 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I=\eta r^2\mathrm{d}s=\eta r^2\sqrt{1+r^2\varphi'^2}\mathrm{d}r$$

曲线绕 z 轴的转动惯量为

$$I=\int_{r_0}^{r_1}\eta r^2\sqrt{1+r^2\varphi'^2}\mathrm{d}r$$

I 为极小值要求

$$\delta I=\delta\int_{r_0}^{r_1}\eta r^2\sqrt{1+r^2\varphi'^2}\mathrm{d}r=0$$

设

$$F=r^2\sqrt{1+r^2\varphi'^2}$$

由欧拉方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)-\frac{\partial F}{\partial\varphi}=0$$

今 $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}=0$,有 $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi'}=C$($C$ 为常量)

即

$$r^2\frac{2r^2\varphi'}{2\sqrt{1+r^2\varphi'^2}}=C$$

$$\frac{r^4}{\sqrt{1+r^2\varphi'^2}}\varphi'=C$$

这就是所要求的微分方程.解此方程又有一个积分常数,两个积分常数由曲线经过的两个固定点确定.

11.3.2 试用哈密顿原理求复摆做微振动的周期.

解

$$L=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$S[\theta(t)]=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2\right)\mathrm{d}t$$

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}(I\dot{\theta}\delta\dot{\theta}-mgl\theta\delta\theta)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(I\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\theta-mgl\theta\delta\theta\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\,\dot\theta\,\delta\theta) - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\,\dot\theta) + mgl\theta\right]\delta\theta \right\}\mathrm{d}t$$

$$= I\,\dot\theta\,\delta\theta \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}(I\,\ddot\theta + mgl\theta)\delta\theta\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}(I\,\ddot\theta + mgl\theta)\delta\theta\mathrm{d}t = 0$$

这里用了在 $t=t_0$ 和 $t=t_1$，$\delta\theta=0$，

$$I\,\ddot\theta + mgl\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}},\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

11.3.3　试用哈密顿原理求解 7.4.30 题.

解　取 O_1A、O_2B 偏离平衡位置的转角 φ 为广义坐标，用 7.4.30 题已得出的动能和势能，

$$T = \left[\frac{1}{2}m(a-b)^2 + 2Ma^2\right]\dot\varphi^2$$

$$V = \frac{1}{2}(mgb + ka^2)\varphi^2$$

$$L = T - V = \left[\frac{1}{2}m(a-b)^2 + 2Ma^2\right]\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}(mgb + ka^2)\varphi^2$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{1}{2}m(a-b)^2 + 2Ma^2\right]\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}(mgb + ka^2)\varphi^2\right\}\mathrm{d}t$$

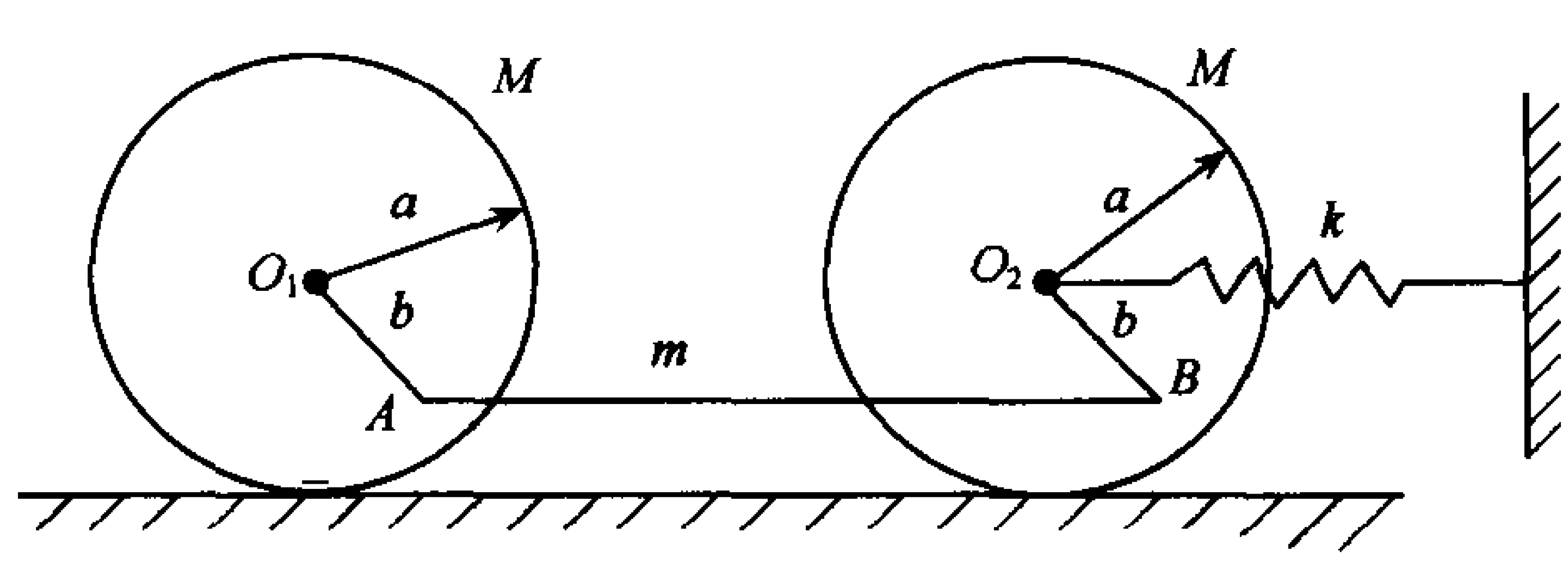


图 11.4

$\delta S=0$ 要求被积函数 $F(\varphi,\dot\varphi)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial F}{\partial\varphi} = 0$$

得

$$[(4M+m)a^2 + mb(b-2a)]\,\ddot\varphi + (mgb + ka^2)\varphi = 0$$

$$\omega = \left[\frac{mgb + ka^2}{(4M+m)a^2 + mb(b-2a)}\right]^{1/2}$$

周期为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left[\frac{(4M+m)a^2 + mb(b-2a)}{mgb + ka^2}\right]^{1/2}$$

11.3.4　在 xy 平面上的一条通过 P_1、P_2 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 的一条曲线

$y=y(x)$绕 x 轴转动时扫出的一个曲面,问 $y(x)$为何函数时该曲面面积最小?

解　在曲线上取线元 $\mathrm{d}S$,它绕 x 轴一周扫出的面积为

$$\mathrm{d}A = 2\pi y\mathrm{d}S$$

通过 P_1、P_2 两点的曲线绕 x 轴一周扫出的面积

$$A = \int_{P_1}^{P_2} 2\pi y\mathrm{d}S = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

A 最小,要求 $\delta A=0$,即

$$\int_{x_1}^{x_2}\delta\left[y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\right]\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{aligned}\delta\left[y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\right]\mathrm{d}x &= \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\delta y\mathrm{d}x + y\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta(\mathrm{d}y)\\ &= \sqrt{1+y'^2}\delta y\mathrm{d}x + yy'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\delta y)\\ &= \sqrt{1+y'^2}\delta y\mathrm{d}x + \mathrm{d}[yy'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\delta y]\\ &\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[yy'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}]\delta y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_2}\delta[y\sqrt{1+y'^2}]\mathrm{d}x\\ &= [yy'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\delta y]\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left\{\sqrt{1+y'^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[yy'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}]\right\}\delta y\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

在 $x=x_1,x_2$,$\delta y=0$,在别处,δy 任意.

$$\sqrt{1+y'^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[yy'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}] = 0$$

考虑到 $1+y'^2\neq 0$,上式经计算可得

$$1+y'^2-yy''=0$$

因为

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}y'=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y'^2}{\mathrm{d}y}$$

代入上式,

$$1+y'^2-\frac{1}{2}y\frac{\mathrm{d}y'^2}{\mathrm{d}y}=0$$

$$2\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}y'^2}{1+y'^2}$$

$$1+y'^2=C_1^2y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{arccosh}C_1y = x+C_2'$$

$$y = \frac{1}{C_1}\cosh(C_1 x + C_2)$$

其中 C_1、C_2 均为积分常数，由 $y_1 = y(x_1)$、$y_2 = y(x_2)$ 确定.

11.3.5　一个系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$$

(1) 直接验证对路径 $x = A\sin t$ 有

$$\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}} L\mathrm{d}t = 0$$

(2) 比较在 $t=0$ 和 $t=\frac{\pi}{8}$ 均有同样的 x 值的路径族 $x = A(\sin t + c\sin 8t)$（c 可取各种值），证明当 $c=0$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{8}} L\mathrm{d}t$ 有最小值.

解　(1)

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{8}}\delta\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}}(\dot{x}\,\delta\dot{x} - x\delta x)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x - x\delta x\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\,\delta x) - \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}\delta x - x\delta x\right]\mathrm{d}t$$

$$= \dot{x}\,\delta x\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{8}} - \int_0^{\frac{\pi}{8}}(\ddot{x} + x)\delta x\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\ddot{x} + x)\delta x\mathrm{d}t$$

代入 $x = A\sin t$，

因为

$$\ddot{x} + x = -A\sin t + A\sin t = 0$$

所以

$$\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}} L\mathrm{d}t = 0$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} L\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}t$$

将 $x = A(\sin t + c\sin 8t)$ 代入

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[\frac{1}{2}A^2(\cos t + 8c\cos 8t)^2 - \frac{1}{2}A^2(\sin t + c\sin 8t)^2\right]\mathrm{d}t$$

经计算可得

$$J = \frac{1}{4}A^2\left(\sin\frac{\pi}{4} + \frac{63}{8}\pi c^2\right)$$

由 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}c} = 0$ 得 $c=0$，所以 $c=0$ 时 J 最小.

11.3.6　一个质点在竖直平面内从一点无初速地沿某一条光滑曲线滑到给定的另一点，要所需时间最短，求此光滑曲线满足的微分方程.

解

$$J = \int\frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=0$$

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+y'^2}},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{1+y'^2}\,\frac{1}{2y^{3/2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{y''}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+y'^2}}-\frac{y'}{\sqrt{y}}\frac{y'\cdot y''}{(1+y'^2)^{3/2}}-\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{y'}{2y^{3/2}}$$

$$=\frac{y''}{y^{1/2}(1+y'^2)^{3/2}}-\frac{y'^2}{2y^{3/2}(1+y'^2)^{1/2}}$$

由欧拉方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$可得

$$\frac{y''}{y^{1/2}(1+y'^2)^{3/2}}+\frac{1}{2y^{3/2}(1+y'^2)^{1/2}}=0$$

两边乘一不为零的因子 $2y^{3/2}(1+y'^2)^{3/2}$,微分方程可写为

$$2yy''+y'^2+1=0$$

11.3.7 证明在圆柱面上任何两点间最短曲线是螺旋线

$$z=Ar\varphi+B$$

r、φ、z 是柱坐标,z 轴沿圆柱的对称轴,r 为圆柱的半径,A、B 由所给两点的 z、φ 值确定.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{(r\mathrm{d}\varphi)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{r^2+z'^2}\mathrm{d}\varphi$

其中 $z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}$,$r$ 为常量.

$$S[z(\varphi)]=\int\sqrt{r^2+z'^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$F=\sqrt{r^2+z'^2}$$

最短曲线满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

因为
$$\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

所以
$$\frac{z'}{\sqrt{r^2+z'^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\text{为常量}$$

$$cz'^2=r^2+z'^2$$

令 $A^2=\frac{1}{c-1}$,上式可改写为

$$z'^2=\frac{1}{c-1}r^2=A^2r^2,\qquad z'=Ar$$

$$z=Ar\varphi+B$$

11.3.8 分别用哈密顿原理和变形的哈密顿原理得到 9.3.27 题得到的运动微分方程.

解 用 9.3.27 题已得到的拉格朗日函数,

$$L=\frac{1}{2}M\left[\dot{s}^2+\frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2-l\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha)\right]$$
$$+Mg\left(s\sin\alpha+\frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

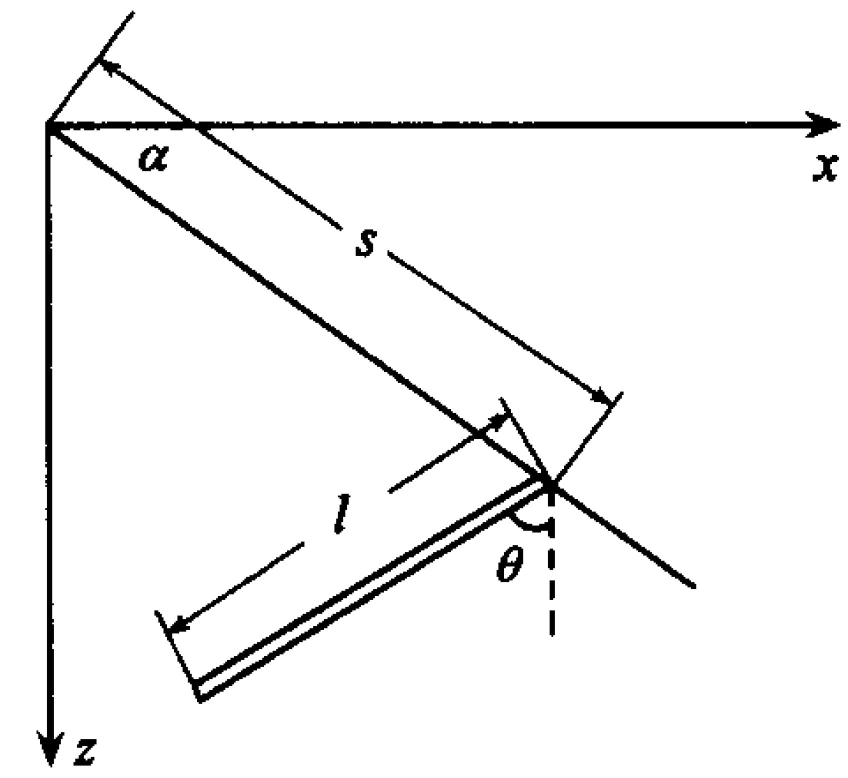


图 11.5

用哈密顿原理，

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1}{2}M\left[\dot{s}^2+\frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2-l\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha)\right]+Mg\left(s\sin\alpha+\frac{l}{2}\cos\theta\right)\right\}\mathrm{d}t=0$$

直接作变分运算或用欧拉方程也就是拉格朗日方程，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{s}}\right)-\frac{\partial L}{\partial s}=0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

即得 9.3.27 题得到的运动微分方程，以下略.

下面用变形的哈密顿原理：

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{s}}=M\dot{s}-\frac{1}{2}Ml\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha)$$
$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}-\frac{1}{2}Ml\dot{s}\cos(\theta-\alpha)$$

从上述两式解出 $\dot{s}$、$\dot{\theta}$，得

$$\dot{s}=\frac{1}{Ml\left[2-\frac{3}{2}\cos^2(\theta-\alpha)\right]}\left[2lp_s+3p_\theta\cos(\theta-\alpha)\right]$$

$$\dot{\theta}=\frac{1}{Ml^2\left[2-\frac{3}{2}\cos^2(\theta-\alpha)\right]}\left[3lp_s\cos(\theta-\alpha)+6p_\theta\right]$$

$$\begin{aligned}H&=p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-L\\&=\frac{1}{Ml^2\left[2-\frac{3}{2}\cos^2(\theta-\alpha)\right]}\Big[2l^2p_s^2-\frac{3}{2}l^2p_s^2\cos^2(\theta-\alpha)\\&\quad+6lp_sp_\theta\cos(\theta-\alpha)-\frac{9}{2}lp_sp_\theta\cos^3(\theta-\alpha)+6p_\theta^2\\&\quad-\frac{9}{2}p_\theta^2\cos^2(\theta-\alpha)\Big]-Mg\left(s\sin\alpha+\frac{l}{2}\cos\theta\right)\end{aligned}$$

由变形的哈密顿原理

$$\delta\int\left[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H\right]\mathrm{d}t=0$$

需满足欧拉方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial q_i}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{p}_i}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial p_i}=0\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

其中 $F=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-H$. 在这里 $F=p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{s}}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]\right\}-\frac{\partial}{\partial s}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]\right\}-\frac{\partial}{\partial \theta}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]=0$$

实际上得到的运动微分方程就是哈密顿方程

$$\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial s}$$

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]\right\}-\frac{\partial}{\partial p_s}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{p}_\theta}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]\right\}-\frac{\partial}{\partial p_\theta}[p_s\dot{s}+p_\theta\dot{\theta}-H]=0$$

得到的运动微分方程就是哈密顿方程.

$$\dot{s}=\frac{\partial H}{\partial p_s}$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}$$

由 11.1 节的各题可知,由哈密顿正则方程得到的运动微分方程,和用拉格朗日方程得到的运动微分方程是完全相同的(用同样的广义坐标)以下略.

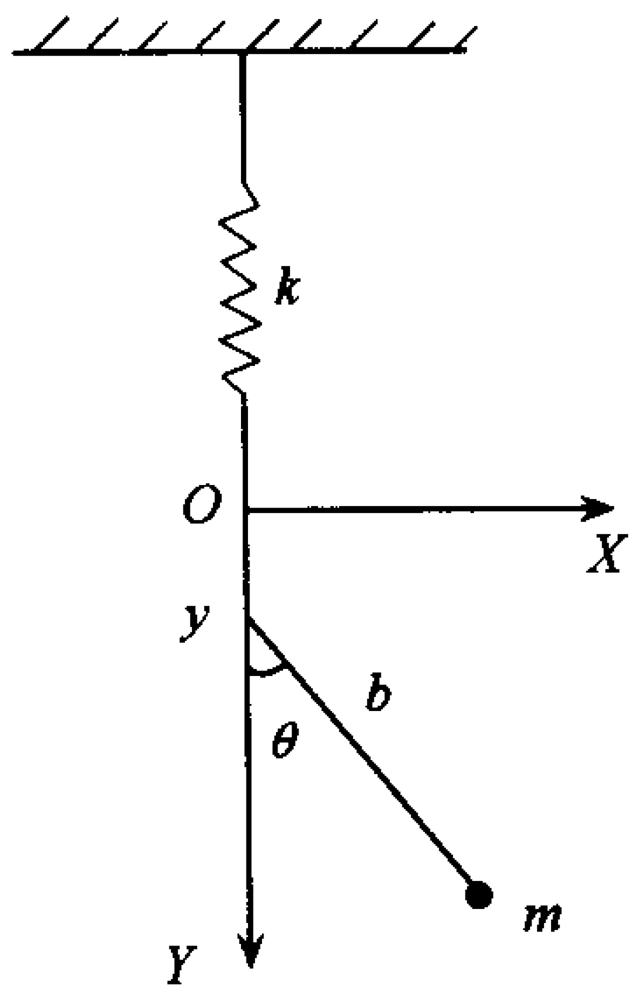


图 11.6

11.3.9 用哈密顿原理求 9.3.13 题所述系统的运动微分方程.

解 9.3.13 题已得到拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(b^2\dot{\theta}^2+\dot{y}^2-2b\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta)-\frac{1}{2}ky^2-mgb(1-\cos\theta)$$

广义力为

$$Q_\theta=-\gamma b^2\dot{\theta}-\gamma b\dot{y}\sin\theta$$

$$Q_y=-\gamma(\dot{y}-b\dot{\theta}\sin\theta)$$

用非有势系统的哈密顿原理

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L+\sum_{i=1}^{s}Q_i\delta q_i)\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left[\frac{1}{2}m(b^2\dot{\theta}^2+\dot{y}^2-2b\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta)-\frac{1}{2}ky^2-mgb(1-\cos\theta)\right]\right.$$
$$\left.+(-\gamma b^2\dot{\theta}+\gamma b\dot{y}\sin\theta)\delta\theta+(-\gamma\dot{y}+\gamma b\dot{\theta}\sin\theta)\delta y\right\}\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\{mb^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+m\dot{y}\delta\dot{y}-mb\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta\delta\theta-mb\dot{\theta}\sin\theta\delta\dot{y}$$
$$-mb\dot{y}\sin\theta\delta\dot{\theta}-ky\delta y-mgb\sin\theta\delta\theta+(-\gamma b^2\dot{\theta}+\gamma b\dot{y}\sin\theta)\delta\theta$$
$$+(-\gamma\dot{y}+\gamma b\dot{\theta}\sin\theta)\delta y\}\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb^2\dot{\theta}\delta\theta)-mb^2\ddot{\theta}\delta\theta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}\delta y)-m\ddot{y}\delta y-mb\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta\delta\theta\right.$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{\theta}\sin\theta\delta y)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{\theta}\sin\theta)\delta y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{y}\sin\theta\delta\theta)$$
$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{y}\sin\theta)\delta\theta-ky\delta y-mgb\sin\theta\delta\theta+(-\gamma b^2\dot{\theta}$$
$$\left.+\gamma b\dot{y}\sin\theta)\delta\theta+(-\gamma\dot{y}+\gamma b\dot{\theta}\sin\theta)\delta y\right\}\mathrm{d}t=0$$

$$(mb^2\dot{\theta}\delta\theta+m\dot{y}\delta y-mb\dot{\theta}\sin\theta\delta y-mb\dot{y}\sin\theta\delta\theta)\Big|_{t_0}^{t_1}$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[-mb^2\ddot{\theta}-mb\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{y}\sin\theta)-mgb\sin\theta\right.\right.$$
$$\left.+(-\gamma b^2\dot{\theta}+\gamma b\dot{y}\sin\theta)\right]\delta\theta+\left[-m\ddot{y}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{\theta}\sin\theta)-ky\right.$$
$$\left.\left.+(-\gamma\dot{y}+\gamma b\dot{\theta}\sin\theta)\right]\delta y\right\}\mathrm{d}t=0$$

在 $t=t_0$ 和 $t=t_1$，$\delta\theta=0$，$\delta y=0$，积分号中被积函数中 $\delta\theta$、δy 的系数分别为零，

$$-mb^2\ddot{\theta}-mb\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{y}\sin\theta)-mgb\sin\theta-\gamma b^2\dot{\theta}+\gamma b\dot{y}\sin\theta=0$$
$$-m\ddot{y}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mb\dot{\theta}\sin\theta)-ky-\gamma\dot{y}+\gamma b\dot{\theta}\sin\theta=0$$

整理后得

$$mb\ddot{\theta}-m\ddot{y}\sin\theta+mg\sin\theta+\gamma b\dot{\theta}-\gamma\dot{y}\sin\theta=0$$
$$m\ddot{y}-mb\ddot{\theta}\sin\theta-mb\dot{\theta}^2\cos\theta+ky+\gamma\dot{y}-\gamma b\dot{\theta}\sin\theta=0$$

与 9.3.13 题所得结果完全一样.

11.3.10　图 11.7 中质量为 m 的质点通过一个劲度系数为 k 的弹簧连在动坐标系 $x=0$ 处，动系沿 x 正方向以 $s=vt+\frac{1}{3}at^3$（其中 v、a 均为常量）做直线运动，减震器对质点的作用力与相对速率的立方成正比，比例系数为 b，由哈密顿原理导出质点的运动微分方程.

解　设弹簧原长为 l_0，取静参考系，x 为广义坐标.

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{s}+\dot{x})^2=\frac{1}{2}m(v+at^2+\dot{x})^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

$$f = -b\dot{x}^3, \qquad \delta W = f\mathrm{d}x$$

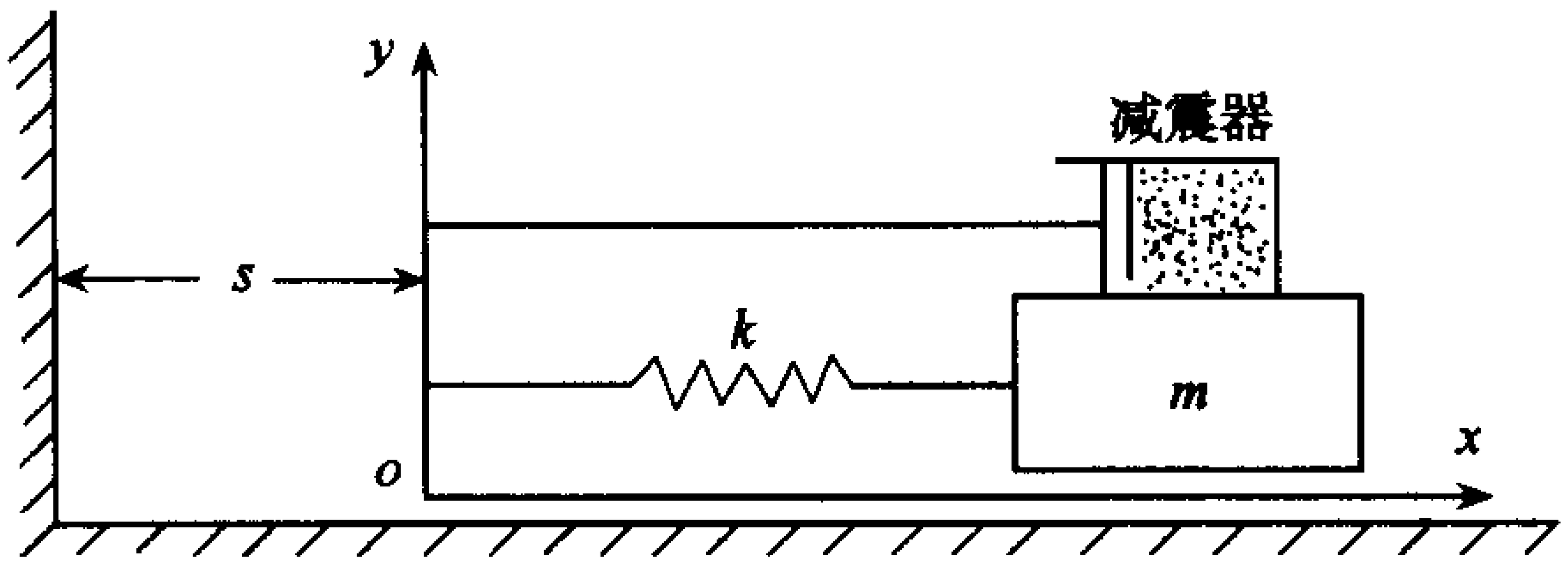


图 11.7

用非有势系统的哈密顿原理，

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L + \delta W)\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left[\frac{1}{2}m(v + at^2 + \dot{x})^2 - \frac{1}{2}k(x - l_0)^2\right] - b\dot{x}^3\delta x\right\}\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}[m(v + at^2 + \dot{x})\delta\dot{x} - k(x - l_0)\delta x - b\dot{x}^3\delta x]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(v + at^2 + \dot{x})\delta x] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(v + at^2 + \dot{x})]\delta x - k(x - l_0)\delta x - b\dot{x}^3\delta x\right\}\mathrm{d}t$$

$$= m(v + at^2 + \dot{x})\delta x\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}[m(2at + \ddot{x}) + k(x - l_0) + b\dot{x}^3]\delta x\mathrm{d}t = 0$$

在 $t=t_0$ 和 $t=t_1$，$\delta x=0$，积分中被积函数 δx 的系数为零，即得运动微分方程

$$m(2at + \ddot{x}) + k(x - l_0) + b\dot{x}^3 = 0$$

11.3.11　一个具有单位质量的质点在外力 $F=-(x+t)$ 作用下沿 x 轴运动，在 $t=0$ 及 $t=1$ 时均位于 $x=0$ 处，用里茨法求出此问题的近似解，并与准确解作比较，比较 $t=0.5$ 时的结果.

提示：近似解可用 $x(t)=t(1-t)(\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n)$ 的形式，仅要求对 $n=0$ 作计算，求精确解可作变换 $y=x+t$.

解

$$T=\frac{1}{2}\dot{x}^2, \qquad V=-\frac{1}{2}(x+t)^2$$

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}(x+t)^2$$

由哈密顿原理或用拉格朗日方程可得运动微分方程为

$$\ddot{x}=-(x+t)$$

先求精确解，令 $y=x+t$，则 $x=y-t$，

$$\dot{x}=\dot{y}-1, \qquad \ddot{x}=\ddot{y}$$

$$\ddot{y}=-y$$

$$y=c_1\sin(t+c_2)$$

所以

$$x=c_1\sin(t+c_2)-t$$

用 $t=0$ 及 $t=1$ 时 $x=0$ 定出 c_1、c_2，可得

$$c_1=\frac{1}{\sin 1},\qquad c_2=0$$

所以精确解为
$$x=\frac{\sin t}{\sin 1}-t$$

下面用里茨法求近似解：

$$\int L\mathrm{d}t=\int\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}(x+t)^2\right]\mathrm{d}t$$

设
$$x(t)=\alpha_0 t(1-t)$$
$$\dot{x}=\alpha_0-2\alpha_0 t$$

$$\phi(\alpha_0)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(\alpha_0-2\alpha_0 t)^2-\frac{1}{2}(\alpha_0 t-\alpha_0 t^2+t)^2\right]\mathrm{d}t$$

经计算得

$$\phi(\alpha_0)=\frac{3}{20}\alpha_0^2-\frac{1}{12}\alpha_0-\frac{1}{6}$$

由求 $\phi(\alpha_0)$ 的极值确定 α_0 值，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\alpha_0}=\frac{3}{10}\alpha_0-\frac{1}{12}=0$$

$$\alpha_0=\frac{5}{18}$$

近似解为
$$x=\frac{5}{18}t(1-t)$$

$t=0.5$ 时，精确解为 $x=0.0697$，近似解为 $x=0.0694$.

11.3.12　质点运动的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

已知 $t=0$ 时，$r=2,\varphi=0$；$t=2$ 时，$r=3,\varphi=1$. 试用里茨法求 $t=1$ 时的质点位置的近似值，并与精确值作比较.

提示：可采用图 11.8(a)、(b) 的折线所示的 $r(t)$ 和 $\varphi(t)$ 计算 $s=\int_0^2 L\mathrm{d}t$，由 $\frac{\partial s}{\partial\alpha}=0$，$\frac{\partial s}{\partial\beta}=0$ 决定待定的 α、β 值. 这样确定的 $r(t)$、$\varphi(t)$，在 $t\neq 0$、1、2 时，不能得到好的近似

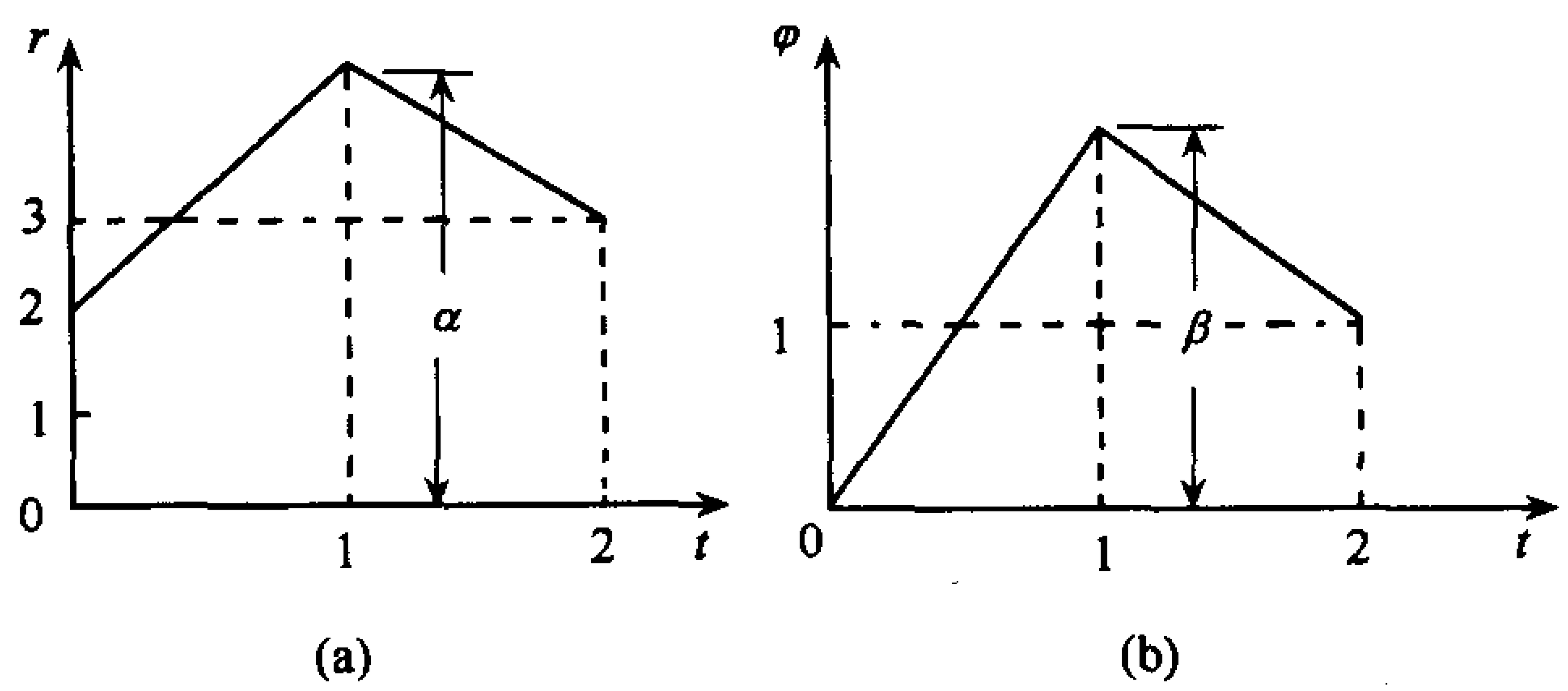


图 11.8

值.多考虑几点,可得更好一点的近似.

解　采用提示的近似解,

$$r(t)=\begin{cases}(\alpha-2)t+2 & 0\leqslant t\leqslant 1\\ (3-\alpha)(t-1)+\alpha & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$$

$$\varphi(t)=\begin{cases}\beta t & 0\leqslant t\leqslant 1\\ (1-\beta)(t-1)+\beta & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$$

$$\dot r(t)=\begin{cases}\alpha-2 & 0\leqslant t<1\\ 3-\alpha & 1<t<2\end{cases}$$

$$\dot\varphi(t)=\begin{cases}\beta & 0<t<1\\ 1-\beta & 1<t<2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}S&=\int_0^2 L\mathrm{d}t=\int_0^1 L\mathrm{d}t+\int_1^2 L\mathrm{d}t\\ &=\int_0^1\frac{1}{2}\{(\alpha-2)^2+[(\alpha-2)t+2]^2\beta^2\}\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_1^2\frac{1}{2}\{(3-\alpha)^2+[(3-\alpha)(t-1)+\alpha]^2(1-\beta)^2\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

经计算可得

$$S=\frac{1}{2}\left\{16-9\alpha+\frac{7}{3}\alpha^2-2\left(3+\alpha+\frac{1}{3}\alpha^2\right)\beta+\left(\frac{13}{3}+\frac{5}{3}\alpha+\frac{2}{3}\alpha^2\right)\beta^2\right\}$$

由　$\dfrac{\partial S}{\partial\alpha}=0,\dfrac{\partial S}{\partial\beta}=0$,得

$$-27+14\alpha-6\beta-4\alpha\beta+5\beta^2+4\alpha\beta^2=0$$

$$-9-3\alpha-\alpha^2+13\beta+5\alpha\beta+2\alpha^2\beta=0$$

由叠代法解得

$$\alpha=2.2076,\qquad \beta=0.6067$$

即在 $t=1$ 时,$r=2.2076$,$\varphi=0.6067$.

下面求精确解.从所给的拉格朗日函数可以看出,质点未受外力,做匀速直线运动,

$t=0$ 时,　$x=r(0)\cos\varphi(0)=2$

$y=r(0)\sin\varphi(0)=0$

$t=2$ 时,$x=r(2)\cos\varphi(2)=3\cos 1=1.6209$

$y=r(2)\sin\varphi(2)=3\sin 1=2.5244$

$t=1$ 时,$x=\dfrac{1}{2}[x(2)+x(0)]=1.8105$

$$y=\frac{1}{2}[y(2)+y(0)]=1.2622$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=2.2070$$

$$\varphi=\arctan\frac{y}{x}=0.6088$$

11.3.13　用莫培督原理重解 11.3.2 题.

解　用莫培督原理的雅可比形式

$$\Delta W=\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{2(E-V)}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{s}a_{ij}q_i'q_j'}\mathrm{d}\tau=0$$

其中 a_{ij}是采用广义坐标 q_i 时的惯性矩阵的元素，τ 为参量，可取时间、弧长等.

应满足欧拉方程或称雅可比方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial F}{\partial q_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

其中

$$F=\sqrt{2(E-V)}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{s}a_{ij}q_i'q_j'}$$

今

$$V=mgl(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$F=\sqrt{2\left(E-\frac{1}{2}mgl\theta^2\right)}\cdot\sqrt{I\dot{\theta}^2}=\sqrt{2I}\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}\,\dot{\theta}$$

今取 $\tau=t$，

$$\frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}}=\sqrt{2I}\cdot\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}=\sqrt{2I}\sqrt{T}=I\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\theta}=\sqrt{2I}\,\dot{\theta}\frac{\left(-\frac{1}{2}mgl\right)\cdot2\theta}{2\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}}=-\sqrt{2I}\,\dot{\theta}\frac{mgl\theta}{2\sqrt{\frac{1}{2}\mp\dot{\theta}^2}}=-mgl\theta$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial F}{\partial\theta}=0$，得

$$I\ddot{\theta}+mgl\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

周期为

$$\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

11.3.14　用莫培督原理重解 7.4.30 题.

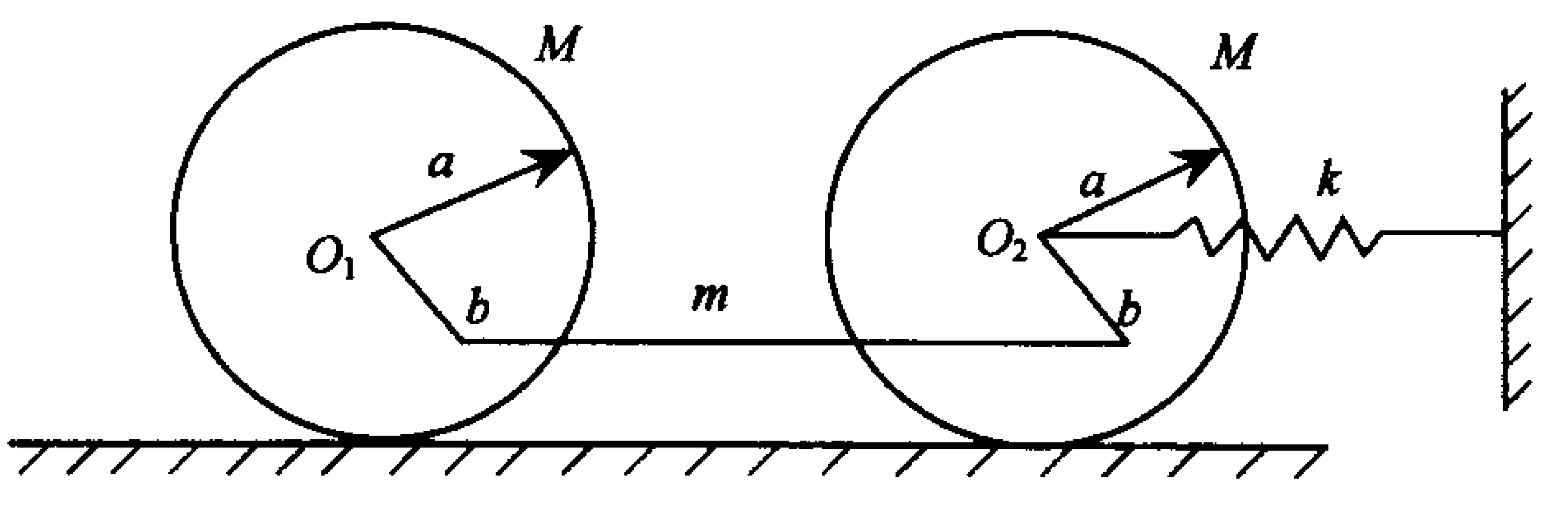


图 11.9

解　用 7.4.30 题已得到的动能和势能，

$$T = \left[\frac{1}{2}m(a-b)^2 + 2Ma^2\right]\dot{\varphi}^2$$

$$V = \frac{1}{2}(mgb + ka^2)\varphi^2$$

用上题做法,用莫培督原理的雅可比形式和雅可比方程,

$$\Delta W = \delta W = \delta\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{2(E-V)}\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^{s}a_{ij}q_i'q_j'}\mathrm{d}\tau = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,s)$$

令

$$F = \sqrt{2\left(E-\frac{1}{2}(mgb+ka^2)\varphi^2\right)}\cdot\sqrt{[m(a-b)^2+4Ma^2]\dot{\varphi}^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}} = \sqrt{2E-(mgb+ka^2)\varphi^2}\cdot\sqrt{m(a-b)^2+4Ma^2}$$

$$= \sqrt{[m(a-b)^2+4Ma^2]\dot{\varphi}^2}\cdot\sqrt{m(a-b)^2+4Ma^2}$$

$$= [m(a-b)^2+4Ma^2]\dot{\varphi}$$

其中用了 $T+V=E$,

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = \sqrt{m(a-b)^2+4Ma^2}\,\dot{\varphi}\frac{-(mgb+ka^2)\cdot 2\varphi}{2\sqrt{2E-(mgb+ka^2)\varphi^2}}$$

$$= -\sqrt{m(a-b)^2+4Ma^2}\,\dot{\varphi}\frac{mgb+ka^2}{\sqrt{m(a-b)^2+4Ma^2}\,\dot{\varphi}}\varphi$$

$$= -(mgb+ka^2)\varphi$$

所以

$$[m(a-b)^2+4Ma^2]\ddot{\varphi}+(mgb+ka^2)\varphi=0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgb+ka^2}{m(a-b)^2+4Ma^2}}$$

周期为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m(a-b)^2+4Ma^2}{mgb+ka^2}}$$

$$\text{或 } 2\pi\sqrt{\frac{(4M+m)a^2+mb(b-2a)}{mgb+ka^2}}$$

11.3.15 用莫培督原理的雅可比形式推导有心运动的运动微分方程.

解

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$V = V(r)$$

$$F = \sqrt{2(E-V)}\cdot\sqrt{m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\dot{r}} = \sqrt{2(E-V)}\cdot\frac{m\dot{r}}{\sqrt{m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}} = m\dot{r}$$

这里用了

$$E-V = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\sqrt{m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}\frac{2}{2\sqrt{2(E-V)}}\left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$+\sqrt{2(E-V)}\cdot\frac{2mr\dot{\varphi}^2}{2\sqrt{m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}$$

$$=-\frac{\partial V}{\partial r}+mr\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}=\sqrt{2(E-V)}\frac{2mr^2\dot{\varphi}}{2\sqrt{m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}=mr^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}\right)=mr^2\ddot{\varphi}+2m\dot{r}\dot{\varphi}$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial F}{\partial r}=0$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial F}{\partial\varphi}=0$，可得运动微分方程为

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-\frac{\partial V}{\partial r}=f(r)$$

$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=0$$

后式也可写成　　$mr^2\dot{\varphi}=$常量.

11.4 正则变换

11.4.1 试证

$$Q=\ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right)$$

$$P=-q\omega t p$$

为一正则变换.

证明 用 p、Q 为自变量的正则变换条件

$$-\sum_{i=1}^{s}q_i\mathrm{d}p_i-c\sum_{i=1}^{s}P_i\mathrm{d}Q_i=\mathrm{d}S(\boldsymbol{p},\boldsymbol{Q},t_0)$$

$$Q=\ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right)$$

$$\frac{1}{q}\sin p=\mathrm{e}^{Q}$$

$$q=\sin p\,\mathrm{e}^{-Q}$$

$$P=-q\cot p=-\sin p\,\mathrm{e}^{-Q}\cot p=-\cos p\,\mathrm{e}^{-Q}$$

$$-q\mathrm{d}p-cP\mathrm{d}Q=-\sin p\,\mathrm{e}^{-Q}\mathrm{d}p+c\cos p\,\mathrm{e}^{-Q}\mathrm{d}Q$$

是恰当微分，因为

$$\frac{\partial}{\partial Q}(-\sin p\,\mathrm{e}^{-Q})=\sin p\,\mathrm{e}^{-Q}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(c\cos p\,\mathrm{e}^{-Q})=-c\sin p\,\mathrm{e}^{-Q}$$

选 $c=-1$,有 $$\frac{\partial}{\partial Q}(-\sin p e^{-Q})=\frac{\partial}{\partial p}(-\cos p e^{-Q})$$
正则变换条件成立,所给变换是正则变换.

11.4.2 证明下列变换都是正则变换:

(1) $Q=q^2+\frac{p^2}{n^2},P=\frac{n}{2}\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)$,式中 n 是一个常数;

(2) $$Q_1=q_1^2+p_1^2,\quad Q_2=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+p_1^2+p_2^2)$$
$$P_1=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_1}{p_1}\right)$$
$$P_2=-\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right)$$

证明 (1) $$Q=q^2+\frac{p^2}{n^2},P=\frac{n}{2}\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)$$
用正则变换条件, $$p\mathrm{d}q-cP\mathrm{d}Q=\mathrm{d}S$$
$$p=n\sqrt{Q-q^2},\quad P=\frac{n}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{Q-q^2}}{q}\right)$$
$$\frac{\partial p}{\partial Q}=\frac{n}{2\sqrt{Q-q^2}}$$
$$\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{n}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{Q-q^2}}{q}\right)^2}\left(\frac{1}{q}\frac{-2q}{2\sqrt{Q-q^2}}-\frac{\sqrt{Q-q^2}}{q^2}\right)=-\frac{n}{2\sqrt{Q-q^2}}$$
选 $c=1$,满足 $p\mathrm{d}q-P\mathrm{d}Q=\mathrm{d}S$,所给变换是正则变换.

(2) $$Q_1=q_1^2+p_1^2,\qquad Q_2=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+p_1^2+p_2^2)$$
$$P_1=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_1}{p_1}\right)$$
$$P_2=-\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right)$$
用正则变换条件:
$$-\sum_i q_i\mathrm{d}p_i-c\sum_i P_i\mathrm{d}Q_i=\mathrm{d}S$$
$$q_1=\sqrt{Q_1-p_1^2}$$
$$q_2=\sqrt{2Q_2-q_1^2-p_1^2-p_2^2}=\sqrt{2Q_2-(Q-p_1^2)-p_1^2-p_2^2}=\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}$$
$$P_1=\frac{1}{2}\arctan\left[\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right]-\frac{1}{2}\arctan\left[\frac{\sqrt{Q_1-p_1^2}}{p_1}\right]$$
$$P_2=-\arctan\left[\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right]$$
$$q_1\mathrm{d}p_1+q_2\mathrm{d}p_2+cP_1\mathrm{d}Q_1+cP_2\mathrm{d}Q_2$$
$$=\sqrt{Q_1-p_1^2}\mathrm{d}p_1+\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}\mathrm{d}p_2$$

$$+c\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{Q_1-p_1^2}}{p_1}\right)\right]\mathrm{d}Q_1$$

$$-c\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)\mathrm{d}Q_2$$

可得

$$\frac{\partial\sqrt{Q_1-p_1^2}}{\partial p_2}=\frac{\partial\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{\partial p_1}=0$$

$$\frac{\partial\sqrt{Q_1-p_1^2}}{\partial Q_1}=\frac{\partial}{\partial p_1}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{Q_1-p_1^2}}{p_1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{Q_1-p_1^2}}$$

$$\frac{\partial\sqrt{Q_1-p_1^2}}{\partial Q_2}=\frac{\partial}{\partial p_1}\left[-\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{\partial Q_1}=\frac{\partial}{\partial p_2}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{Q_1-p_1^2}}{p_1}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}$$

$$\frac{\partial\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{\partial Q_2}=\frac{\partial}{\partial p_2}\left[-\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_2}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{Q_1-p_1^2}}{p_1}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial Q_1}\left[-\arctan\left(\frac{\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}{p_2}\right)\right]=\frac{p_2^2}{2(2Q_2-Q_1)\sqrt{2Q_2-Q_1-p_2^2}}$$

可见，$c=1$，

$$-\sum_{i=1}^{2}q_i\mathrm{d}p_i-\sum_{i=1}^{2}P_i\mathrm{d}Q_i=\mathrm{d}S$$

成立，所给变换为正则变换.

11.4.3　证明 $Q=q+te^p, P=p$ 是一正则变换，找出 $S(q,Q,t)$.

解　方法一：

$$Q=q+te^p, P=p$$

用

$$p\mathrm{d}q-cP\mathrm{d}Q=\mathrm{d}S(q,Q,t)$$

证明

$$p=\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right),\quad P=p=\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)$$

$$p\mathrm{d}q-cP\mathrm{d}Q=\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}q-c\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}Q$$

$$\frac{\partial}{\partial Q}\left[\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\right]=\frac{t}{Q-q}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{Q-q}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[-c\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\right]=-c\frac{t}{Q-q}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{Q-q}$$

$c=1$,两偏导数相等,

$$\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}q-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}Q=\mathrm{d}S(q,Q,t)$$

成立,变换为正则变换得到证明.

$$\frac{\partial S}{\partial q}=\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right),\quad \frac{\partial S}{\partial Q}=-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)$$

对前式积分,

$$\begin{aligned}S&=\int\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}q+f(Q)\\&=q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)-\int q\mathrm{d}\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)+f(Q)\\&=q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)-\int q\cdot\frac{1}{Q-q}(-\mathrm{d}q)+f(Q)\\&=q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)+\int\frac{-Q+q}{Q-q}\mathrm{d}q+Q\int\frac{1}{Q-q}\mathrm{d}q+f(Q)\\&=q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)-q-Q\ln(Q-q)+f(Q)\end{aligned}$$

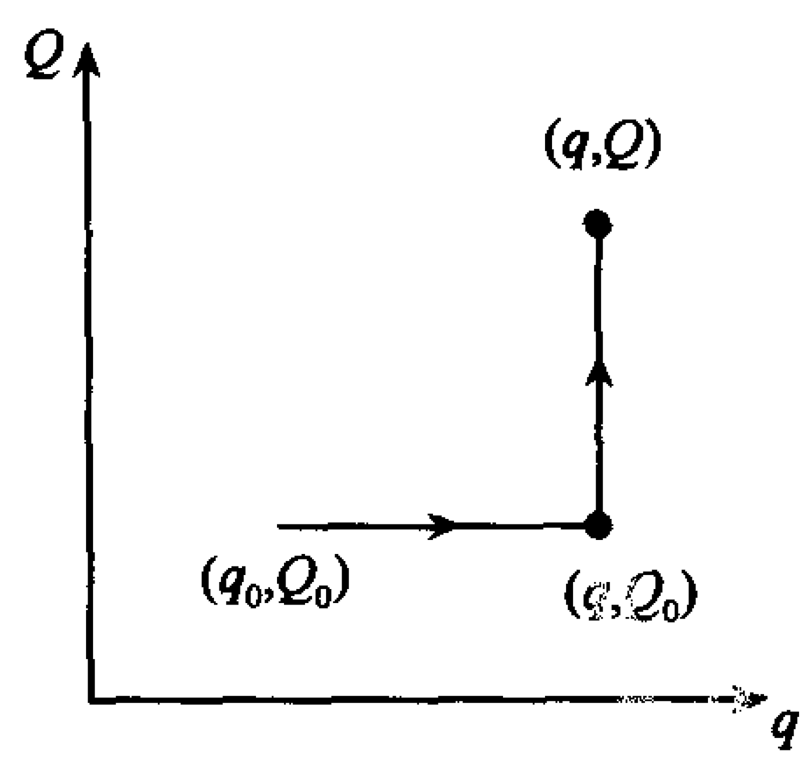


图 11.10

上式对 Q 求偏导,与后式的$\frac{\partial S}{\partial Q}$相等,

$$\frac{q}{Q-q}-\ln(Q-q)-\frac{Q}{Q-q}+\frac{\mathrm{d}f(Q)}{\mathrm{d}Q}=-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(Q)}{\mathrm{d}Q}=1+\ln t$$

$$f(Q)=\int(1+\ln t)\mathrm{d}Q=Q(1+\ln t)$$

所以

$$\begin{aligned}S&=q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)-q-Q\ln(Q-q)+Q(1+\ln t)\\&=(Q-q)\left[1-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\right]\end{aligned}$$

方法二:对于恰当微分,可在由自变量张成的空间内取便于积分的路径积出全微分的函数.取图 11.10 所示的积分路线,

$$S=\int\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}q-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}Q$$

$$\begin{aligned}&=\int_{q_0}^{q}\ln\left(\frac{Q_0-q}{t}\right)\mathrm{d}q-\int_{Q_0}^{Q}\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\mathrm{d}Q\\&=q\ln\left(\frac{Q_0-q}{t}\right)\Big|_{q_0}^{q}-\int_{q_0}^{q}\frac{q}{Q_0-q}(-\mathrm{d}q)-Q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\Big|_{Q_0}^{Q}+\int_{Q_0}^{Q}\frac{Q}{Q-q}\mathrm{d}Q\\&=q\ln\left(\frac{Q_0-q}{t}\right)-q_0\ln\left(\frac{Q_0-q_0}{t}\right)-(q-q_0)-Q_0\ln\left(\frac{Q_0-q}{Q_0-q_0}\right)\\&\quad-Q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)+Q_0\ln\left(\frac{Q_0-q}{t}\right)+(Q-Q_0)+q\ln\left(\frac{Q-q}{Q_0-q}\right)\end{aligned}$$

$$= q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right) - Q\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right) + (Q-q) - q_0\ln\left(\frac{Q_0-q_0}{t}\right)$$

$$+ Q_0\ln\left(\frac{Q_0-q_0}{t}\right) - (Q_0-q_0)$$

$$= (Q-q)\left[1-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\right] + F(q_0,Q_0,t)$$

在作上述积分时，t 是视为常量的，因此上式中的 $F(q_0,Q_0,t)$ 是常量，可以去掉，但与 Q 或 q 不能分离的 t 为参量，不能去掉，所以

$$S = (Q-q)\left[1-\ln\left(\frac{Q-q}{t}\right)\right]$$

11.4.4 证明

$$Q=\ln(1+q^{1/2}\cos p)$$

$$P = 2(1+q^{1/2}\cos p)q^{1/2}\sin p$$

是正则变换，证明产生这正则变换的母函数为

$$S = -(e^Q-1)^2\tan p$$

证明 我们用满足

$$[Q_i,Q_j]=0,\quad [p_i,p_j]=0\qquad [Q_i,P_j]=c\delta_{ij}$$

(c 可为任一非零常数)的为正则变换来证明.

$$[Q,Q]=0,\quad [P,P]=0$$

$$[Q,P]=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{\frac{1}{2}q^{-1/2}\cos p}{1+q^{1/2}\cos p}\cdot(-2q\sin^2 p+2q\cos^2 p+2q^{1/2}\cos p)$$

$$+\frac{q^{1/2}\sin p}{1+q^{1/2}\cos p}(2\sin p\cos p+q^{-1/2}\sin p)=1$$

变换是正则变换已得到证明.

因为母函数是以 Q、p 为独立变量，相应的正则变换条件为

$$-q\mathrm{d}p - P\mathrm{d}Q = \mathrm{d}S(p,Q)$$

$$q=-\frac{\partial S}{\partial p}=(e^Q-1)^2\sec^2 p \tag{1}$$

$$P=-\frac{\partial S}{\partial Q}=2e^Q(e^Q-1)\tan p \tag{2}$$

母函数产生的上述正则变换，正是题目要证明的那个正则变换，从式(1)解出 Q，得

$$Q=\ln(1+q^{1/2}\cos p)$$

将它代入式(2)得

$$P=2(1+q^{1/2}\cos p)q^{1/2}\sin p$$

就是题目所给的变换.

11.4.5 用拉格朗日括号检验 11.4.2 题的变换是正则变换.

解 用拉格朗日括号表述的正则变换条件为

$$(q_i,q_j)=0,\qquad (p_i,p_j)=0$$

$$(q_i,p_j)=c\delta_{ij}\qquad c\text{ 为非零常数.}$$

其中 $(r_i,r_j)=\sum_k\left[\frac{\partial Q_k(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial r_i}\cdot\frac{\partial P_k(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial r_j}-\frac{\partial Q_k(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial r_j}\cdot\frac{\partial P_k(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial r_i}\right]$

令
$$Q=q^2+\frac{p^2}{n^2},\ P=\frac{n}{2}\arctan\left(\frac{p}{nq}\right)$$
$$(q,q)=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial q}-\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial q}=0$$
同样$(p,p)=0$,
$$(q,p)=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$
$$=2q\cdot\frac{n}{2}\frac{\frac{1}{nq}}{1+\left(\frac{p}{nq}\right)^2}-\frac{2p}{n^2}\cdot\frac{n}{2}\frac{\left(-\frac{p}{nq^2}\right)}{1+\left(\frac{p}{nq}\right)^2}=1$$
证毕.

11. 4. 6　α、β为何值时,变换
$$Q=q^\alpha\cos\beta p,\quad P=q^\alpha\sin\beta p$$
为一正则变换.

解　方法一:用正则变换条件:
$$p\mathrm{d}q+cQ\mathrm{d}P=\mathrm{d}S$$
从
$$Q=q^\alpha\cos\beta p,\quad P=q^\alpha\sin\beta p$$
得
$$P=\frac{1}{\beta}\arcsin(Pq^{-\alpha})$$
$$Q=q^\alpha\sqrt{1-P^2q^{-2\alpha}}$$
$$p\mathrm{d}q+cQ\mathrm{d}P=\frac{1}{\beta}\arcsin(Pq^{-\alpha})\mathrm{d}q+cq^\alpha\sqrt{1-P^2q^{-2\alpha}}\mathrm{d}P$$
$$\frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{1}{\beta}\arcsin(Pq^{-\alpha})\right]=\frac{1}{\beta}\frac{1}{\sqrt{q^{2\alpha}-P^2}}$$
$$\frac{\partial}{\partial q}\left[cq^\alpha\sqrt{1-P^2q^{-2\alpha}}\right]=\frac{c\alpha q^{2\alpha-1}}{\sqrt{q^{2\alpha}-P^2}}$$
变换为正则变换,必须两偏导数相等,
$$\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{q^{2\alpha}-P^2}}=\frac{c\alpha q^{2\alpha-1}}{\sqrt{q^{2\alpha}-P^2}}$$
即
$$\frac{1}{\beta}=c\alpha q^{2\alpha-1}$$
$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{c\alpha}=\frac{2}{c}=c'$　(c'为任何非零常数均可).

方法二:用 11.4.4 题采用的方法.
$$[Q,P]=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$
$$=\alpha q^{\alpha-1}\cos\beta p\cdot\beta q^\alpha\cos\beta p-q^\alpha(-\beta\sin\beta p)\cdot\alpha q^{\alpha-1}\sin\beta p$$
$$=\alpha\beta q^{2\alpha-1}$$
正则变换要求$[Q,P]=C$(C为非零常数)也得到$\alpha=\frac{1}{2}$,β为任意非零常数的结论.

11. 4. 7　证明变换

$$Q_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2, \quad Q_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2$$
$$P_1 = b_{11}p_1 + b_{12}p_2, \quad P_2 = b_{21}p_1 + b_{22}p_2$$

在 $b_{ij}=|A_{ij}|/|A|$ 对所有 i、j 均成立，其中 $|A|$ 是矩阵 (a_{ij}) 的行列式，$|A_{ij}|$ 是矩阵元 a_{ij} 的代数余子式，且所有 a_{ij} 和 b_{ij} 都是常数这些条件下是正则变换.

证明
$$b_{11}=\frac{a_{22}}{|A|}, \quad b_{12}=-\frac{a_{21}}{|A|}$$
$$b_{21}=-\frac{a_{12}}{|A|}, \quad b_{22}=\frac{a_{11}}{|A|}$$
$$P_1=\frac{a_{22}}{|A|}p_1-\frac{a_{21}}{|A|}p_2, \quad P_2=-\frac{a_{12}}{|A|}p_1+\frac{a_{11}}{|A|}p_2$$

显然有
$$[Q_i,Q_j]=0, \qquad [P_i,P_j]=0$$
$$[Q_1,P_1]=\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2}$$
$$=a_{11}\frac{a_{22}}{|A|}+a_{12}\left(-\frac{a_{21}}{|A|}\right)=1$$
$$[Q_1,P_2]=\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}$$
$$=a_{11}\left(-\frac{a_{12}}{|A|}\right)+a_{12}\frac{a_{11}}{|A|}=0$$
$$[Q_2,P_1]=\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2}$$
$$=a_{21}\frac{a_{22}}{|A|}+a_{22}\left(-\frac{a_{21}}{|A|}\right)=0$$
$$[Q_2,P_2]=\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}$$
$$=a_{21}\left(-\frac{a_{12}}{|A|}\right)+a_{22}\frac{a_{11}}{|A|}=1$$

证毕.

11.4.8 (1) 要使
$$Q_1=q_1^2, Q_2=q_1+q_2$$
$$P_1=P_1(q_1,q_2,p_1,p_2), \quad P_2=P_2(q_1,q_2,p_1,p_2)$$

为一正则变换，找出 P_1、P_2 最一般的函数形式.

提示：可用拉格朗日括号表述的正则变换条件给出的偏微分方程组求解.

(2) 对上述正则变换，作何种特别的选择，可将
$$H=\left(\frac{p_1-p_2}{2q_1}\right)^2+p_2+(q_1+q_2)^2$$

变换为
$$H^*=P_1^2+P_2$$

并用此题验证
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_i}\right)-\frac{\partial L^*}{\partial Q_i}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{P}_i}\right)-\frac{\partial L^*}{\partial P_i}=0$$

成立.

解　(1) 用拉格朗日括号表述的正则变换条件：$(q_i,q_j)=0$，$(p_i,p_j)=0$，$(q_i,p_j)=c\delta_{ij}$.

$$Q_1=q_1^2,\quad Q_2=q_1+q_2,$$
$$P_1=P_1(q_1,q_2,p_1,p_2),\quad P_2=P_2(q_1,q_2,p_1,p_2)$$

由

$$(q_1,q_2)=\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_2}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}-\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_1}$$
$$=2q_1\frac{\partial P_1}{\partial q_2}+\frac{\partial P_2}{\partial q_2}-\frac{\partial P_2}{\partial q_1}=0 \tag{1}$$

$$(p_1,p_2)=\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2}+\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_1}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}=0$$

因$\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}=\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}=\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}=\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}=0$，此式没对$\frac{\partial P_1}{\partial p_1}$、$\frac{\partial P_1}{\partial p_2}$、$\frac{\partial P_2}{\partial p_1}$、$\frac{\partial P_2}{\partial p_2}$间给出任何关系.

$$(q_1,p_1)=\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1}$$
$$=2q_1\frac{\partial P_1}{\partial p_1}+\frac{\partial P_2}{\partial p_1}=C \tag{2}$$

$$(q_1,p_2)=\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_1}$$
$$=2q_1\frac{\partial P_1}{\partial p_2}+\frac{\partial P_2}{\partial p_2}=0 \tag{3}$$

$$(q_2,p_1)=\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_2}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}$$
$$=\frac{\partial P_2}{\partial p_1}=0 \tag{4}$$

$$(q_2,p_2)=\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}$$
$$=\frac{\partial P_2}{\partial p_2}=C \tag{5}$$

由(4)、(5)两式，得

$$P_2=Cp_2+f(q_1,q_2) \tag{6}$$

将式(6)代入式(1)，

$$2q_1\frac{\partial P_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f}{\partial q_2}-\frac{\partial f}{\partial q_1}=0 \tag{7}$$

将式(4)代入式(2)，

$$2q_1\frac{\partial P_1}{\partial p_1}=C \tag{8}$$

将式(5)代入式(3)，

$$2q_1\frac{\partial P_1}{\partial p_2}=-C \tag{9}$$

由式(7)、(8)、(9)，dP_1 可写成

$$\begin{aligned} dP_1 &= \frac{\partial P_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial P_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial P_1}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial P_2}{\partial p_2}dp_2 \\ &= \frac{\partial P_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{1}{2q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\right)dq_2 + \frac{C}{2q_1}dp_1 - \frac{C}{2q_2}dp_2 \end{aligned} \tag{10}$$

根据式(10)，设想 P_1 为

$$P_1 = \frac{C(p_1 - p_2)}{2q_1} + \frac{1}{2q_1}\int\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\right)dq_2 + h(q_1) \tag{11}$$

它显然满足式(10). 如能满足恰当微分条件，又满足式(1)，则设想的 P_1 是对的.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} = &-\frac{C(p_1 - p_2)}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_1^2}\int\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\right)dq_2 \\ &+ \frac{1}{2q_1}\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}\right)dq_2 + \frac{dh}{dq_1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\right) = -\frac{1}{2q_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{1}{2q_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}\right)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = \frac{1}{2q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\right) = -\frac{1}{2q_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{1}{2q_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}\right)$$

有

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\right) = -\frac{C}{2q_1^2}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = \frac{C}{2q_1}, \quad \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial p_1}\right) = -\frac{C}{2q_1^2}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial p_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\right) = \frac{C}{2q_1^2}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial p_2} = -\frac{C}{2q_1}, \quad \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial p_2}\right) = \frac{C}{2q_1^2}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial p_2}\right)$$

其余应相等的偏导数都是 0=0 的恒等式.

式(11)和式(6)也满足式(1)的要求，

$$2q_1\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2} - \frac{\partial P_2}{\partial q_1} = 2q_1 \cdot \frac{1}{2q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

所以 P_1、P_2 的最一般表达式分别为式(11)和式(6). 其中 C 是任意的非零常数，f 是 q_1、q_2 的任意函数，h 是 q_1 的任意函数.

(2)　　$p_1dq_1 + p_2dq_2 - P_1dQ_1 - P_2dQ_2 = dS(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q})$

因为正则变换中不显含 t，故 S 中也不显含 t. 又取 $C=1$，正则变换后的哈密顿函数 H^* 与原哈密顿函数 H 相等，

$$H^* = H$$

变换后要求

$$H^* = P_1^2 + P_2$$

$$P_1^2 + P_2 = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

将式(11)、式(6)的 P_1、P_2 代入上式，

$$C = 1,\ h(q_1) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0,\ f = (q_1 + q_2)^2$$

这个 $f=(q_1+q_2)^2$，确有 $\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial f}{\partial q_2}=0$.

因此要使变换后 $H^*=P_1^2+P_2$，用的正则变换为

$$P_1 = \frac{p_1 - p_2}{2q_1},\quad P_2 = p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

$$H^* = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - L^*$$

$$L^* = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - H^* = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - P_1^2 - P_2$$

由正则方程得

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H^*}{\partial P_1} = 2P_1,\quad \dot{Q}_2 = \frac{\partial H^*}{\partial P_2} = 1$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_1} = 0,\quad \dot{P}_2 = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_2} = 0$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial Q_i} = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{P}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial P_i} = 0\quad (i=1,2)$$

得

$$\dot{P}_1 = 0,\qquad \dot{P}_2 = 0$$

$$\dot{Q}_1 - 2P_1 = 0,\qquad \dot{Q}_2 - 1 = 0$$

两组方程结果相同，正则方程成立，可见要验证的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_i}\right)-\frac{\partial L^*}{\partial Q_i}=0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{P}_i}\right)-\frac{\partial L^*}{\partial P_i}=0$ 成立.

11.4.9 求出下列母函数产生的正则变换：

(1) $S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t) = \sum_{i=1}^{s} q_i Q_i$；

(2) $S_2(p,Q,t) = -\tan p(\mathrm{e}^Q - 1)$；

(3) $S_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i$；

(4) $S_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P},t) = \sum_{i=1}^{s} p_i P_i$.

解 (1)

$$S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)=\sum_{i=1}^{s} q_i Q_i$$

由 $\sum_{i=1}^{s} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \mathrm{d}Q_i = \mathrm{d}S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q})$ 得

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S_1}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i = -\dfrac{\partial S_1}{\partial Q_i} = -q_i \end{cases} \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$$

(2) $S_2(p,Q,t)=-\tan p(e^Q-1)$

$$q = -\frac{\partial S_2}{\partial p} = \sec^2 p(e^Q - 1)$$

$$P = -\frac{\partial S_2}{\partial Q} = e^Q \tan p$$

也可把变换写成

$$Q = \ln(1 + q\cos^2 p)$$

$$P = (1 + q\cos^2 p)\tan p$$

(3) $S_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t) = \sum\limits_{i=1}^{s} q_i P_i$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S_3}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial S_3}{\partial P_i} = q_i \end{cases} \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$$

为恒等变换.

(4) $S_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P},t) = \sum\limits_{i=1}^{s} p_i P_i$

$$\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial S_4}{\partial p_i} = -P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial S_4}{\partial P_i} = p_i \end{cases} \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$$

11.4.10　证明 $Q_1=p_1^2, Q_2=p_2^2+q_2, P_1=-\dfrac{q_1}{2p_1}+t, P_2=p_2+t$ 是正则变换,并求出产生该正则变换的 $S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$、$S_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$ 两种形式的母函数.

解　只要能找到母函数,也就证明了变换是正则变换.

先找 $S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$ 形式的母函数:

$$\begin{aligned} & p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - P_1 dQ_1 - P_2 dQ_2 \\ &= p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - \left(-\frac{q_1}{2p_1} + t\right) 2p_1 dp_1 - (p_2 + t)(2p_2 dp_2 + dq_2) \\ &= p_1 dq_1 - t dq_2 + (q_1 - 2p_1 t) dp_1 - 2p_2(p_2 + t) dp_2 \\ &= d(p_1 q_1 - p_1^2 t) + d(-q_2 t) + d\left(-\frac{2}{3}p_2^3 - p_2^2 t\right) \end{aligned}$$

在上述演算中,t 视为常量.

再用变换关系,将 p_1、p_2 表示成 q_1、q_2、Q_1、Q_2 和 t 的函数,将

$$p_1 = Q_1^{1/2}, \quad p_2 = (Q_2 - q_2)^{1/2}$$

代入法甫式,即得

$$S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)=Q_1^{1/2}q_1-Q_1t-q_2t-\frac{2}{3}(Q_2-q_2)^{3/2}-(Q_2-q_2)t$$
$$=Q_1^{1/2}q_1-\frac{2}{3}(Q_2-q_2)^{3/2}-(Q_1+Q_2)t$$

现找 $S_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$,

$$p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2+Q_1\mathrm{d}P_1+Q_2\mathrm{d}P_2$$
$$=p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2+p_1^2\left(\frac{q_1}{2p_1^2}\mathrm{d}p_1-\frac{1}{2p_1}\mathrm{d}q_1\right)+(p_2^2+q_2)\mathrm{d}p_2$$
$$=\frac{1}{2}p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2+\frac{1}{2}q_1\mathrm{d}p_1+(p_2^2+q_2)\mathrm{d}p_2$$
$$=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}p_1q_1+p_2q_2+\frac{1}{3}p_2^3\right)$$

也用变换关系将上式中的 p_1、p_2 表成 q_1、q_2、P_1、P_2 和 t 的函数,代入

$$p_1=-\frac{q_1}{2(P_1-t)},\quad p_2=P_2-t$$

$$S_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)=\frac{1}{2}q_1\left[-\frac{q_1}{2(P_1-t)}\right]+(P_2-t)q_2+\frac{1}{3}(P_2-t)^3$$
$$=-\frac{q_1^2}{4(P_1-t)}+(P_2-t)q_2+\frac{1}{3}(P_2-t)^3$$

注意:获得 $S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$后,不能用它将其中 Q_1、Q_2 用变换关系换成 $Q_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$、$Q_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$得到 $S_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$,原因是 $S_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$与 $S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$间并不存在下列偏导数关系:

$$\frac{\partial S_3}{\partial P_1}=\frac{\partial S_1}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial P_1}+\frac{\partial S_1}{\partial Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}$$

11.4.11　证明

$$Q=\ln\left(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p\right)$$
$$P=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p\right)q^{\frac{1}{2}}\sin p$$

为正则变换,并求出产生它的母函数.

提示:用 $\mathrm{d}S=-q\mathrm{d}p-cP\mathrm{d}Q$ 时需令 $c=2$.

解

$$Q=\ln\left(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p\right)$$
$$P=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p\right)q^{\frac{1}{2}}\sin p$$
$$\mathrm{d}S=-q\mathrm{d}p-2P\mathrm{d}Q$$

需将式中的 q、P 均表成 p、Q 的函数(这里变换关系中不显含 t),

$$q=(\mathrm{e}^Q-1)^2\sec^2p$$
$$P=\mathrm{e}^Q(\mathrm{e}^Q-1)\tan p$$
$$\mathrm{d}S=-(\mathrm{e}^Q-1)^2\sec^2p\mathrm{d}p-2\mathrm{e}^Q(\mathrm{e}^Q-1)\tan p\mathrm{d}Q$$
$$=\mathrm{d}[-(\mathrm{e}^Q-1)^2\tan p]$$

所以

$$S(p,Q)=-(\mathrm{e}^Q-1)^2\tan p$$

注意:此题与 11.4.4 题就差一个 2 的因子,母函数也与 11.4.4 题相同,说明一般讲

采用正则变换条件时应考虑不为零的常数 C 不一定总等于 1.

11.4.12　用母函数 $S_1=Q_1^{1/2}q_1-\frac{2}{3}(Q_2-q_2)^{3/2}-(Q_1+Q_2)t$ 产生的正则变换来求解哈密顿函数为 $H=p_1^2+p_2^2+q_2$ 的系统的运动.

解
$$S_1=Q_1^{1/2}q_1-\frac{2}{3}(Q_2-q_2)^{3/2}-(Q_1+Q_2)t$$

由 $\sum_{i=1}^{s}p_i\mathrm{d}q_i-c\sum_{i=1}^{s}P_i\mathrm{d}Q_i+(cH^*-H)\mathrm{d}t=\mathrm{d}S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$ 取 $c=1$,

$$p_1=\frac{\partial S_1}{\partial q_1}=Q_1^{1/2}$$

$$p_2=\frac{\partial S_1}{\partial q_2}=(Q_2-q_2)^{1/2}$$

$$P_1=-\frac{\partial S_1}{\partial Q_1}=\frac{1}{2}Q_1^{-1/2}q_1+t$$

$$P_2=-\frac{\partial S_1}{\partial Q_2}=(Q_2-q_2)^{1/2}+t$$

$$H=p_1^2+p_2^2+q_2$$

$$q_2=Q_2-(P_2-t)^2$$

$$H^*=H+\frac{\partial S_1}{\partial t}=p_1^2+p_2^2+q_2-(Q_1+Q_2)$$

$$=Q_1+(Q_2-q_2)+q_2-(Q_1+Q_2)=0$$

由
$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H^*}{\partial P_i},\ \dot{P}_i=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_i}\quad(i=1,2)$$

得
$$Q_1=\text{常量},\qquad Q_2=\text{常量}$$
$$P_1=\text{常量},\qquad P_2=\text{常量}$$
$$q_1=2Q^{1/2}(P_1-t)=At+B$$
$$q_2=Q_2-(P_2-t)^2=-t^2+Ct+D$$

其中 A、B、C、D 均为常量,由初条件确定.

11.4.13　一质量为 m 的质点在势场 $V(q)$ 中做一维运动,质点受到正比于其速度的阻力 $-2m\gamma\dot{q}$.

(1) 证明可由拉格朗日函数 $L=\mathrm{e}^{2\gamma t}\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)\right]$ 得到运动微分方程;

(2) 用母函数 $S_3(q,P,t)=\mathrm{e}^{\gamma t}qP$,求正则变换后的哈密顿函数 $H^*(Q,P,t)$,对于 $V(q)=\frac{1}{2}m\omega^2q^2$,证明变换后的哈密顿函数

$$H^*=\frac{1}{2m}P^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2+\gamma QP$$

为运动常数;

(3) 对于弱阻尼情况 $\gamma<\omega$,由(2)问中的运动常数求阻尼振子的解 $q(t)$.

解　(1) 系统的运动微分方程为

$$m\ddot{q}=-\frac{\partial V}{\partial q}-2m\gamma\dot{q}$$

若令
$$L=e^{2\gamma t}\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)\right]$$
由$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$可得
$$\frac{d}{dt}(e^{2\gamma t}m\dot{q})+e^{2\gamma t}\frac{\partial V}{\partial q}=0$$
$$e^{2\gamma t}m\ddot{q}+2\gamma me^{2\gamma t}\dot{q}+e^{2\gamma t}\frac{\partial V}{\partial q}=0$$
$$m\ddot{q}=-\frac{\partial V}{\partial q}-2m\gamma\dot{q}$$
证明了由所给的拉格朗日函数可导出运动微分方程.

(2) 先由拉格朗日函数求出正则变换前的哈密顿函数$H(q,p,t)$,
$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=me^{2\gamma t}\dot{q},\quad \dot{q}=\frac{1}{m}e^{-2\gamma t}p$$
$$H=p\dot{q}-L=\frac{1}{m}e^{-2\gamma t}p^2-e^{2\gamma t}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{m}e^{-2\gamma t}p\right)^2-V(q)\right]$$
$$=\frac{1}{2m}e^{-2\gamma t}p^2+e^{2\gamma t}V(q)$$
$$p\mathrm{d}q+Q\mathrm{d}P+(H^*-H)\mathrm{d}t=\mathrm{d}S_3(q,P,t)$$
$$p=\frac{\partial S_3}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}(e^{\gamma t}qP)=e^{\gamma t}P$$
$$Q=\frac{\partial S_3}{\partial P}=\frac{\partial}{\partial P}(e^{\gamma t}qP)=e^{\gamma t}q$$
$$q=e^{-\gamma t}Q$$
$$H^*=H+\frac{\partial S_3}{\partial t}=\frac{1}{2m}e^{-2\gamma t}p^2+e^{2\gamma t}V(q)+\gamma e^{\gamma t}qP$$
$$=\frac{1}{2m}P^2+e^{2\gamma t}V(e^{-\gamma t}Q)+\gamma QP$$
对于$V(q)=\frac{1}{2}m\omega^2q^2$,
$$H^*=\frac{1}{2m}P^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\cdot e^{2\gamma t}+\gamma QP=\frac{1}{2m}P^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2+\gamma QP$$
因为$\frac{\partial H^*}{\partial t}=0$,所以$H^*$为运动常数.

(3) 对于(2)问的$V(q)=\frac{1}{2}m\omega^2q^2$,
$$H^*=\frac{1}{2m}P^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2+\gamma QP$$
$$\dot{P}=-\frac{\partial H^*}{\partial Q}=-m\omega^2Q-\gamma P \tag{1}$$
$$\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial P}=\frac{1}{m}P+\gamma Q \tag{2}$$
$$P=m(\dot{Q}-\gamma Q)$$

将式(2)两边对 t 求导,用式(1)消去$\dot{P}$,用式(2)消去 P,可得

$$\ddot{Q}+(\omega^2-\gamma^2)Q=0$$

对于弱阻尼情况,$\gamma<\omega$,

$$Q=A\sin(\omega_\gamma t+\alpha)$$

其中 $\omega_\gamma=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$,$A$、$\alpha$ 为积分常数,

$$\begin{aligned}P&=m(\dot{Q}-\gamma Q)\\&=m[A\omega_\gamma\cos(\omega_\gamma t+\alpha)-\gamma A\sin(\omega_\gamma t+\alpha)]\end{aligned}$$

可得 $H^*=\frac{1}{2m}P^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2+\gamma QP=\frac{1}{2}m\omega_\gamma^2A^2$

$$A=\frac{1}{\omega_\gamma}\sqrt{\frac{2H^*}{m}}$$

$$q=\mathrm{e}^{-\gamma t}Q=\frac{1}{\omega_\gamma}\sqrt{\frac{2H^*}{m}}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega_\gamma t+\alpha)$$

其中 $\omega_\gamma=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$,$H^*$、$\alpha$ 为常数由初条件确定.

11.5　哈密顿-雅可比方程

11.5.1　一个质量为 m 的质点以初速 v、对水平线仰角为 α 的方向,在不计阻力的空气中抛射,用哈密顿-雅可比方程求其运动规律.

解　取抛射点为坐标原点,x 轴沿水平方向,y 轴竖直向上,质点在 xy 平面内运动,

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+mgy$$

H 中不显含 x,它是循环坐标,$p_x=\alpha'$,H 不显含 t,有能量积分,积分常数为 h,

$$S=-ht+W$$

特性函数 W 满足的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\alpha'^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]+mgy=h$$

可令 $W=W'(y)+\alpha'x$,$W'(y)$满足的方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\alpha'^2+\left(\frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]+mgy=h$$

$$\frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}y}=\sqrt{2m}\sqrt{h-\frac{\alpha'^2}{2m}-mgy}$$

$$W'(y)=\sqrt{2m}\int\sqrt{h-\frac{\alpha'^2}{2m}-mgy}\,\mathrm{d}y=-\frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(h-\frac{\alpha'^2}{2m}-mgy\right)^{3/2}$$

$$W=-\frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(h-\frac{\alpha'^2}{2m}-mgy\right)^{3/2}+\alpha'x$$

$$\beta=t-\frac{\partial W}{\partial h}=t+\frac{\sqrt{2m}}{mg}\left(h-\frac{\alpha'^2}{2m}-mgy\right)^{1/2}$$

$$h - \frac{\alpha'^2}{2m} - mgy = \left[\frac{mg}{\sqrt{2m}}(\beta - t)\right]^2 = \frac{1}{2}mg^2(\beta - t)^2 \tag{1}$$

代入初条件定常量 h 和 α'，

$$h = \frac{1}{2m}(p_{x0}^2 + p_{y0}^2) = \frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\alpha' = p_{x0} = mv\cos\alpha$$

代入式(1)，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2m}(mv\cos\alpha)^2 - mgy = \frac{1}{2}mg^2(\beta - t)^2 \tag{2}$$

由 $t=0$ 时 $y=0$，可定出 $\beta = \frac{1}{g}v\sin\alpha$，代入式(2)，解出

$$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

$$p_x = \alpha' = mv\cos\alpha$$

$$\dot{x} = v\sin\alpha$$

$$x = \int_0^t v\sin\alpha \mathrm{d}t = vt\sin\alpha$$

11.5.2　求对称陀螺在重力作用下绕固定点转动时的哈密顿主函数.

解　取固定点为坐标原点，取固连于刚体的惯量主轴为 x、y、z 轴，z 轴为旋转对称轴，I_1、$I_2=I_1$、I_3 为相应的主转动惯量，以静坐标系为参考系，

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_1\omega_y^2 + I_3\omega_z^2)$$

$$V = mgl\cos\theta$$

用欧拉角 ψ、φ、θ 为广义坐标，

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}[I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2] - mgl\cos\theta$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3\dot{\varphi}\cos^2\theta + I_3\dot{\psi}\cos\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I_1}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{I_1\sin^2\theta}(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)$$

$$\dot{\psi}=\frac{p_\psi}{I_3}-\frac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta$$

动能是广义速度的齐二次函数，

$$H=T+V=\frac{1}{2}\left[\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{I_1\sin^2\theta}+\frac{p_\theta^2}{I_1}+\frac{p_\psi^2}{I_3}\right]+mgl\cos\theta$$

用机械能守恒的哈密顿-雅可比方程

$$H\left(\psi,\varphi,\theta,\frac{\partial W}{\partial\psi},\frac{\partial W}{\partial\varphi},\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)=h$$

$$\frac{1}{2I_1\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}-\frac{\partial W}{\partial\psi}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2I_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{2I_3}\left(\frac{\partial W}{\partial\psi}\right)^2+mgl\cos\theta=h$$

因为$\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0,\frac{\partial H}{\partial\psi}=0$，$\varphi$、$\psi$均是循环坐标，

$$\frac{\partial W}{\partial\varphi}=p_\varphi=\alpha_2,\quad \frac{\partial W}{\partial\psi}=p_\psi=\alpha_3$$

$$W=\alpha_2\varphi+\alpha_3\psi+W'(\theta)$$

$W'(\theta)$满足的微分方程为

$$\frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(\alpha_2-\alpha_3\cos\theta)^2+\frac{1}{2I_1}\left(\frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{2I_3}\alpha_3^2+mgl\cos\theta=h$$

$$\frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}\theta}=\left[2I_1h-\frac{1}{\sin^2\theta}(\alpha_2-\alpha_3\cos\theta)^2-\frac{I_1}{I_3}\alpha_3^2-2I_1mgl\cos\theta\right]^{1/2}$$

$$W'=\int\left[2I_1h-\frac{1}{\sin^2\theta}(\alpha_2-\alpha_3\cos\theta)^2-\frac{I_1}{I_3}\alpha_3^2-2I_1mgl\cos\theta\right]^{1/2}\mathrm{d}\theta$$

哈密顿主函数为

$$\begin{aligned}S&=-ht+W=-ht+\alpha_2\varphi+\alpha_3\psi+W'\\&=-ht+\alpha_2\varphi+\alpha_3\psi+\int\Big[2I_1h-\frac{1}{\sin^2\theta}(\alpha_2-\alpha_3\cos\theta)^2\\&\quad-\frac{I_1}{I_3}\alpha_3^2-2I_1mgl\cos\theta\Big]^{1/2}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

其中h是总机械能，α_2为进动角动量，α_3为自转角动量，l是质心在固定点上方离固定点的距离，也是质心的z坐标.

11.5.3　用哈密顿-雅可比方程求二维势场$V=\frac{k}{r}$（k为常量）中运动的质点的轨道方程，可采用$u=r+x$和$v=r-x$为广义坐标.

解

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{k}{r}$$

改用u、v为广义坐标，

$$u=r+x=r(1+\cos\varphi)$$

$$v=r-x=r(1-\cos\varphi)$$

$$r=\frac{1}{2}(u+v),\quad \dot{r}=\frac{1}{2}(\dot{u}+\dot{v})$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{u}{r}-1=\frac{2u}{u+v}-1=\frac{u-v}{u+v}$$

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^2}=\frac{2}{u+v}\sqrt{uv}$$

$$-\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)=\frac{2}{(u+v)^2}(\dot{u}\,v-u\,\dot{v})$$

$$\dot{\varphi}=\frac{u\,\dot{v}-\dot{u}\,v}{(u+v)\sqrt{uv}}$$

$$L=\frac{1}{8}m\left[\dot{u}^2+2\,\dot{u}\,\dot{v}+\dot{v}^2+\frac{(u\,\dot{v}-\dot{u}\,v)^2}{uv}\right]-\frac{2k}{u+v}$$

$$p_u=\frac{\partial L}{\partial\dot{u}}=\frac{m(u+v)}{4u}\dot{u},\quad \dot{u}=\frac{4u}{m(u+v)}p_u$$

$$p_v=\frac{\partial L}{\partial\dot{v}}=\frac{m(u+v)}{4v}\dot{v},\quad \dot{v}=\frac{4v}{m(u+v)}p_v$$

$$H=\frac{2}{m(u+v)}(up_u^2+vp_v^2)+\frac{2k}{u+v}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{2}{m(u+v)}\left[u\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2+v\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{2k}{u+v}=0$$

可令

$$S=-ht+W$$

W 满足的偏微分方程为

$$\frac{2}{m(u+v)}\left[u\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+v\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{2k}{u+v}=h$$

$$\frac{2}{m}\left[u\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+v\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right]-h(u+v)+2k=0$$

可令

$$W=W_1(u)+W_2(v)$$

$$\frac{2}{m}\left[u\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]-hu+k+\frac{2}{m}\left[v\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}v}\right)^2\right]-hv+k=0$$

令

$$\frac{2}{m}\left[u\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]-hu+k=\alpha$$

则

$$\frac{2}{m}\left[v\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}v}\right)^2\right]-hv+k=-\alpha$$

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}u}\right)^2-\frac{mh}{2}\right]u=\frac{m(\alpha-k)}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}u}=\sqrt{\frac{m}{2u}(\alpha-k)+\frac{mh}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}v}=\sqrt{\frac{mh}{2}-\frac{m}{2v}(\alpha+k)}$$

$$W_1=\int\sqrt{\frac{1}{2}mh+\frac{m(\alpha-k)}{2u}}\mathrm{d}u$$

$$W_2=\int\sqrt{\frac{1}{2}mh-\frac{m(\alpha+k)}{2v}}\mathrm{d}v$$

$$S=-ht+\int\left[\frac{1}{2}mh+\frac{m(\alpha-k)}{2u}\right]^{1/2}\mathrm{d}u+\int\left[\frac{1}{2}mh-\frac{m(\alpha+k)}{2v}\right]^{1/2}\mathrm{d}v$$

由$\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}=\beta$即得轨道方程.

11.5.4　某系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}p_1^2+\frac{1}{2m}(p_2-kq_1)^2$$

其中m、k均为常量.用哈密顿正则方程和哈密顿-雅可比方程解此系统的运动轨道.

解

$$H=\frac{1}{2m}p_1^2+\frac{1}{2m}(p_2-kq_1)^2$$

用哈密顿正则方程求解,

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m}$$

$$\dot{q}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{1}{m}(p_2-kq_1)$$

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{k}{m}(p_2-kq_1)$$

$$\dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=0$$

$$p_2=\alpha$$

$$\dot{p}_1=\frac{k}{m}(\alpha-kq_1)$$

$$\ddot{q}_1=\frac{1}{m}\dot{p}_1=\frac{k}{m^2}(\alpha-kq_1)=\frac{k^2}{m^2}\left(\frac{\alpha}{k}-q_1\right)$$

令

$$q_1'=q_1-\frac{\alpha}{k}$$

$$\ddot{q}_1'+\frac{k^2}{m^2}q_1'=0$$

$$q_1'=A\cos\left(\frac{k}{m}t+\varphi\right)$$

$$q_1=\frac{\alpha}{k}+A\cos\left(\frac{k}{m}t+\varphi\right)$$

$$\dot{q}_2=\frac{1}{m}(\alpha-kq_1)=-\frac{k}{m}A\cos\left(\frac{k}{m}t+\varphi\right)$$

$$q_2=-A\sin\left(\frac{k}{m}t+\varphi\right)+\beta$$

消去t得轨道方程

$$\left(q_1-\frac{\alpha}{k}\right)^2+(q_2-\beta)^2=A^2$$

若用系统的能量h来表示振幅A,则

$$h=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)=\frac{A^2k^2}{2m}$$

$$A^2=\frac{2mh^2}{k^2}$$

轨道方程可表为

$$\left(q_1 - \frac{\alpha}{k}\right)^2 + (q_2 - \beta)^2 = \frac{2mh}{k^2}$$

用哈密顿-雅可比方程求解,

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$$

因为
$$\frac{\partial H}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial H}{\partial q_2}=0$$

可令
$$S=-ht+\alpha q_2+W(q_1)$$

W 满足约化的哈密顿-雅可比方程,

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q_1}\right)^2 + (\alpha - kq_1)^2\right]= h$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q_1} = \sqrt{2mh - (\alpha - kq_1)^2}$$

$$W = \int\sqrt{2mh - (\alpha - kq_1)^2}\mathrm{d}q_1$$

$$S =- ht + \alpha q_2 + \int\sqrt{2mh - (\alpha - kq_1)^2}\mathrm{d}q_1$$

轨道方程为

$$\beta= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = q_2 - \frac{1}{2k}\int\frac{-2(\alpha - kq_1)}{\sqrt{2mh - (\alpha - kq_1)^2}}\mathrm{d}(\alpha - kq_1)$$

$$= q_2 - \frac{1}{k}\sqrt{2mh - (\alpha - kq_1)^2}$$

$$\left(q_1 - \frac{\alpha}{k}\right)^2 + (q_2 - \beta)^2 = \frac{2mh}{k^2}$$

两种方法得到同样的结果.

11.5.5　用哈密顿-雅可比方程求哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)^{-1} + (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$$

的质点的轨道.

解
$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)(q_1^2+q_2^2)^{-1}+(q_1^2+q_2^2)^{-1}$$

$$S=-ht+W$$

W 满足约化了的哈密顿-雅可比方程,

$$\frac{1}{2(q_1^2 + q_2^2)}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\right]+ \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} = h$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\right]- h(q_1^2 + q_2^2) + 1 = 0$$

令
$$W=W_1(q_1)+W_2(q_2)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\,W_1}{\mathrm{d}\,q_1}\right)^2 - hq_1^2 + \frac{1}{2} = \alpha$$

则
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2-hq_2^2+\frac{1}{2}=-\alpha$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2=2\left(hq_1^2+\alpha-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2=2\left(hq_2^2-\alpha-\frac{1}{2}\right)$$

$$W_1=\int\sqrt{2\left(hq_1^2+\alpha-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}q_1$$

$$W_2=\int\sqrt{2\left(hq_2^2-\alpha-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}q_2$$

$$S=-ht+\int\sqrt{2\left(hq_1^2+\alpha-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}q_1+\int\sqrt{2\left(hq_2^2-\alpha-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}q_2$$

$$\beta'=\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}q_1}{\sqrt{hq_1^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}}-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}q_2}{\sqrt{hq_2^2-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}}$$

用积分公式：
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

$$\beta'=\sqrt{\frac{2}{h}}\left[\ln\left(\sqrt{h}\,q_1+\sqrt{hq_1^2+\alpha-\frac{1}{2}}\right)-\ln\left(\sqrt{h}\,q_2+\sqrt{hq_2^2-\alpha-\frac{1}{2}}\right)\right.$$

引入另一个常数 $\beta=\exp\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\beta'\right)$，轨道方程可写为
$$\sqrt{h}\,q_1+\sqrt{hq_1^2+\alpha-\frac{1}{2}}=\beta\left(\sqrt{h}\,q_2+\sqrt{hq_2^2-\alpha-\frac{1}{2}}\right)$$

11.5.6　用哈密顿-雅可比方程求哈密顿函数为 $H=p^2-q$ 的系统的运动.

解　方法一：用
$$H\left(\boldsymbol{x},\pm\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{x}}\right)=h$$

现取 $x=p$，则 $y=-q$，上式中$\frac{\partial W}{\partial x}$前取负号.
$$p^2+\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p}=h$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p}=h-p^2,\qquad W=hp-\frac{1}{3}p^3$$

$$S=-ht+W=-ht+hp-\frac{1}{3}p^3$$

$$-q=\frac{\partial S}{\partial p}=h-p^2$$

$$\beta=\frac{\partial S}{\partial h}=-t+p$$

$$p = t + \beta$$

$$q = p^2 - h = (t + \beta)^2 - h$$

方法二：用 $H\left(x, \pm\frac{\partial W}{\partial x}\right) = h$ 时，取 $x = q$，则 $y = p$，$\frac{\partial W}{\partial x}$前取正号，

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 - q = h$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} = \sqrt{q + h}$$

$$W = \int \sqrt{q + h}\mathrm{d}q = \frac{2}{3}(q + h)^{3/2}$$

$$S = -ht + W = -ht + \frac{2}{3}(q + h)^{3/2}$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial h} = -t + (q + h)^{1/2}$$

$$q + h = (t + \beta)^2, \qquad q = (t + \beta)^2 - h$$

11.5.7　(1) 对于一个哈密顿函数为 $H = \frac{1}{2}p^2$ 的粒子的运动，求解母函数 $S(q, \alpha, t)$ 的哈密顿-雅可比方程，求出正则变换 $q = q(\beta, \alpha)$，$p = p(\beta, \alpha)$，其中 β 和 α 分别是变换后的坐标和动量.说明所得的结果；

(2) 若存在一扰动，哈密顿函数变为 $H = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$，仍用(1)所得的正则变换，用 α、β、t 表示变换后的哈密顿函数 H^*，求解 $\beta(t)$和 $\alpha(t)$，并证明扰动后的解是简谐的.

解　(1)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$$

今要求 $S(q, \alpha, t)$，其中 α 是变换后的动量 P，则

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$Q = \beta = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

今 $H = \frac{1}{2}p^2$，哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0$$

因为$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$，可令 $S = -ht + W$，

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} = \sqrt{2h}, \qquad W = \sqrt{2h}q$$

$$S = -ht + \sqrt{2h}q$$

因为$\frac{\partial H}{\partial x} = 0$，可令

$$S = -ht + \alpha q$$

比较两个 S 的式子，可得 $\alpha = \sqrt{2h}$，$h = \frac{1}{2}\alpha^2$，

所以
$$S=-\frac{1}{2}\alpha^2 t+\alpha q$$
$$p=\frac{\partial S}{\partial q}=\alpha=P$$
$$\beta=Q=\frac{\partial S}{\partial P}=\frac{\partial S}{\partial \alpha}=-\alpha t+q$$
所以
$$q=\beta+\alpha t$$
β、α 均为常量，在原参考系中以恒定速度 α 做匀速运动.

正则变换关系为
$$q=\beta+\alpha t,\ p=\alpha$$

(2)
$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2$$
用(1)问中解得的母函数产生的正则变换，
$$H^*=H+\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{2}\alpha^2$$
$$=\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}(\beta+\alpha t)^2-\frac{1}{2}\alpha^2=\frac{1}{2}(\beta+\alpha t)^2$$
由哈密顿正则方程. 注意到 $Q=\beta, P=\alpha$，则
$$\dot{\beta}=\frac{\partial H^*}{\partial \alpha}=(\beta+\alpha t)t$$
$$\dot{\alpha}=-\frac{\partial H^*}{\partial \beta}=-(\beta+\alpha t)$$

注意：这里用的正则变换不是解哈密顿-雅可比方程得到的母函数产生的，因此变换后的哈密顿函数 $H^*\neq 0$，自然，新正则变量均不再是常数.
$$\ddot{\alpha}=-(\dot{\beta}+\alpha+\dot{\alpha}t)$$
$$=-[(\beta+\alpha t)t+\alpha-(\beta+\alpha t)t]=-\alpha$$
所以
$$\alpha=\alpha_0\sin(t+\varphi)$$
其中 α_0、φ 为常量，
$$\beta=-\dot{\alpha}-\alpha t=-\alpha_0[\cos(t+\varphi)+t\sin(t+\varphi)]$$
由坐标变换关系，
$$p=\alpha=\alpha_0\sin(t+\varphi)$$
$$q=\beta+\alpha t=-\dot{\alpha}=-\alpha_0\cos(t+\varphi)$$
这就证明了扰动后的解是简谐振动.

11.5.8　一个质量为 m 的质点在 xy 平面内运动，受到力心位于(1,0)和(−1,0)，势能为 $V=A_1r_1^{-1}+A_2r_2^{-1}$(其中 r_1、r_2 分别是到两个力心的距离，A_1 和 A_2 是常数)的力场作用，用椭圆坐标 ξ、η，它与 x、y 的变换关系为
$$x=\mathrm{ch}\xi\cos\eta,\qquad y=\mathrm{sh}\xi\sin\eta$$
用哈密顿-雅可比方程求质点的运动轨道(用 ξ、η 表达即可).

解
$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$
$$V=\frac{A_1}{r_1}+\frac{A_2}{r_2}$$

$$r_1 = [(x-1)^2 + y^2]^{1/2}, \qquad r_2 = [(x+1)^2 + y^2]^{1/2}$$

作坐标变换，

$$x = \mathrm{ch}\xi\cos\eta, \qquad y = \mathrm{sh}\xi\sin\eta$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}\,\mathrm{sh}\xi\cos\eta - \dot{\eta}\,\mathrm{ch}\xi\sin\eta$$

$$\dot{y} = \dot{\xi}\,\mathrm{ch}\xi\sin\eta + \dot{\eta}\,\mathrm{sh}\xi\cos\eta$$

可得

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)$$

$$r_1 = [(\mathrm{ch}\xi\cos\eta - 1)^2 + (\mathrm{sh}\xi\sin\eta)^2]^{1/2} = \mathrm{ch}\xi - \cos\eta$$

$$r_2 = [(\mathrm{ch}\xi\cos\eta + 1)^2 + (\mathrm{sh}\xi\sin\eta)^2]^{1/2} = \mathrm{ch}\xi + \cos\eta$$

$$V = \frac{A_1}{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta} + \frac{A_2}{\mathrm{ch}\xi + \cos\eta}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta) - \frac{A_1}{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta} - \frac{A_2}{\mathrm{ch}\xi + \cos\eta}$$

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi}\,(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)$$

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m\dot{\eta}\,(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)$$

$$\dot{\xi} = \frac{p_\xi}{m(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)}, \qquad \dot{\eta} = \frac{p_\eta}{m(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)}$$

$$H = T + V = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{2m(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)} + \frac{A_1}{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta} + \frac{A_2}{\mathrm{ch}\xi + \cos\eta}$$

哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2\right] + \frac{A_1}{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta} + \frac{A_2}{\mathrm{ch}\xi + \cos\eta} = 0$$

$$S = -ht + W_1(\xi) + W_2(\eta)$$

$$\frac{1}{2m(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\right] + \frac{A_1}{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta} + \frac{A_2}{\mathrm{ch}\xi + \cos\eta} = h$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\right] + A_1(\mathrm{ch}\xi + \cos\eta) + A_2(\mathrm{ch}\xi - \cos\eta) = h(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + (A_1 + A_2)\mathrm{ch}\xi - h\mathrm{ch}^2\xi + \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 + (A_1 - A_2)\cos\eta + h\cos^2\eta = 0$$

令

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + (A_1 + A_2)\mathrm{ch}\xi - h\mathrm{ch}^2\xi = \frac{1}{2m}\alpha$$

则

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 + (A_1 - A_2)\cos\eta + h\cos^2\eta = -\frac{1}{2m}\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi} = [\alpha + 2mh\mathrm{ch}^2\xi - 2m(A_1 + A_2)\mathrm{ch}\xi]^{1/2}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\eta} = [-\alpha - 2mh\cos^2\eta - 2m(A_1 - A_2)\cos\eta]^{1/2}$$

$$W_1 = \int[\alpha + 2mh\mathrm{ch}^2\xi - 2m(A_1 + A_2)\mathrm{ch}\xi]^{1/2}\mathrm{d}\xi$$

$$W_2=\int[-\alpha-2mh\cos^2\eta-2m(A_1-A_2)\cos\eta]^{1/2}\mathrm{d}\eta$$

$$S=-ht+\int[\alpha+2mh\mathrm{ch}^2\xi-2m(A_1+A_2)\mathrm{ch}\xi]^{1/2}\mathrm{d}\xi$$
$$+\int[-\alpha-2mh\cos^2\eta-2m(A_1-A_2)\cos\eta]^{1/2}\mathrm{d}\eta$$

由$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\beta$可得轨道方程.

$$\beta=\int\frac{1}{2}[\alpha+2mh\mathrm{ch}^2\xi-2m(A_1+A_2)\mathrm{ch}\xi]^{-1/2}\mathrm{d}\xi$$
$$-\int\frac{1}{2}[-\alpha-2mh\cos^2\eta-2m(A_1-A_2)\cos\eta]^{-1/2}\mathrm{d}\eta$$

11.5.9　一个质量为m的质点在球坐标表达的势场中运动,$V=f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)$,其中$f(r)$、$g(\theta)$是已知的函数,求轨道的一般解.

解

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)-f(r)-\frac{1}{r^2}g(\theta)$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\qquad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)$$

$$S=-ht+\alpha_\varphi\varphi+W$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\alpha_\varphi^2\right]+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)=h$$

$$r^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+2mr^2f(r)-2mhr^2+\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}+2mg(\theta)=0$$

$$W(r,\theta)=W_1(\theta)+W_2(r)$$

令

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}+2mg(\theta)=\alpha_\theta$$

则

$$r^2\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}r}\right)^2+2mr^2f(r)-2mhr^2=-\alpha_\theta$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}r}\right)^2+2mf(r)-2mh=-\frac{\alpha_\theta}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{\alpha_\theta-2mg(\theta)-\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}r}=\sqrt{2m[h-f(r)]-\frac{\alpha_\theta}{r^2}}$$

$$W_1=\int\sqrt{\alpha_\theta-2mg(\theta)-\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$W_2=\int\sqrt{2m[h-f(r)]-\frac{\alpha_\theta}{r^2}}\mathrm{d}r$$

$$S=-ht+\alpha_\varphi\varphi+\int\sqrt{\alpha_\theta-2mg(\theta)-\frac{\alpha_\theta}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta+\int\sqrt{2m[h-f(r)]-\frac{\alpha_\theta}{r^2}}\mathrm{d}r$$

由$\dfrac{\partial S}{\partial\alpha_\varphi}=\beta_\varphi,\dfrac{\partial S}{\partial\alpha_\theta}=\beta_\theta$给出轨道方程.

11.5.10　一个质量为 m 的粒子在一个恒力及一个与力心的距离平方成反比的力场中运动,其势能为 $V=\dfrac{A}{r}-Bz$(A、B 均为常量,r 为球坐标),求其运动学方程.

提示:可采用抛物线坐标 ξ、η、θ,它与柱坐标 ρ、φ、z 的关系为

$$\xi=r+z,\quad \eta=r-z,\quad \theta=\varphi,\quad r^2=\rho^2+z^2$$

解　将 r、ρ、φ、z 表成 ξ、η、θ 的函数,

$$r=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\qquad z=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$$

$$\rho^2=r^2-z^2=\xi\eta,\qquad \varphi=\theta$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2)-\frac{A}{r}+Bz$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\frac{(\xi\dot\eta+\dot\xi\eta)^2}{4\xi\eta}+\xi\eta\dot\theta^2+\frac{1}{4}(\dot\xi-\dot\eta)^2\right]-\frac{2A}{\xi+\eta}+\frac{1}{2}B(\xi-\eta)$$

$$p_\xi=\frac{\partial L}{\partial\dot\xi}=\frac{m(\xi+\eta)}{4\xi}\dot\xi,\qquad p_\eta=\frac{m(\xi+\eta)}{4\eta}\dot\eta,\qquad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=m\xi\eta\dot\theta$$

$$H=\frac{2}{m(\xi+\eta)}(\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2)+\frac{1}{2m\xi\eta}-p_\theta^2+\frac{2A}{\xi+\eta}-\frac{1}{2}B(\xi-\eta)$$

哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2+\frac{2A}{\xi+\eta}-\frac{1}{2}B(\xi-\eta)=0$$

因为
$$\frac{\partial H}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial H}{\partial\theta}=0$$

可令
$$S=-ht+\alpha_\theta\theta+W(\xi,\eta)$$

W 满足的偏微分方程为

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\alpha_\theta^2+\frac{2A}{\xi+\eta}-\frac{1}{2}B(\xi-\eta)=h$$

$$\xi\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)^2+\frac{\xi+\eta}{4\xi\eta}\alpha_\theta^2+mA-\frac{1}{4}m(\xi^2-\eta^2)=\frac{1}{2}m(\xi+\eta)h$$

$$\xi\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2+\frac{1}{4\xi}\alpha_\theta^2-\frac{1}{4}mB\xi^2-\frac{1}{2}mh\xi+\frac{1}{2}mA$$

$$+\eta\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)^2+\frac{1}{4\eta}\alpha_\theta^2+\frac{1}{4}mB\eta^2-\frac{1}{2}mh\eta+\frac{1}{2}mA=0$$

可将 W 分离为
$$W(\xi,\eta)=W_1(\xi)+W_2(\eta)$$

令
$$\xi\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+\frac{1}{4\xi}\alpha_\theta^2-\frac{1}{4}mB\xi^2-\frac{1}{2}mh\xi+\frac{1}{2}mA=\frac{1}{2}m\alpha$$

则
$$\eta\left(\frac{\mathrm{d}\,W_2}{\mathrm{d}\,\eta}\right)^2+\frac{1}{4\eta}\alpha_\theta^2+\frac{1}{4}mB\eta^2-\frac{1}{2}mh\eta+\frac{1}{2}mA=-\frac{1}{2}m\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}=\left[\frac{1}{2}mh+\frac{1}{4}mB\xi+\frac{m(\alpha-A)}{2\xi}-\frac{\alpha_\theta^2}{4\xi^2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\eta}=\left[\frac{1}{2}mh-\frac{1}{4}mB\eta-\frac{m(\alpha+A)}{2\eta}-\frac{\alpha_\theta^2}{4\eta^2}\right]^{1/2}$$

$$W_1(\xi)=\int\left[\frac{1}{2}mh+\frac{1}{4}mB\xi+\frac{m(\alpha-A)}{2\xi}-\frac{\alpha_\theta^2}{4\xi^2}\right]^{1/2}\mathrm{d}\xi$$

$$W_2(\eta)=\int\left[\frac{1}{2}mh-\frac{1}{4}mB\eta-\frac{m(\alpha+A)}{2\eta}-\frac{\alpha_\theta^2}{4\eta^2}\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta$$

$$S=-ht+\alpha_\theta\theta+\int\left[\frac{1}{2}mh+\frac{1}{4}mB\xi+\frac{m(\alpha-A)}{2\xi}-\frac{\alpha_\theta^2}{4\xi^2}\right]^{1/2}\mathrm{d}\xi$$
$$+\int\left[\frac{1}{2}mh-\frac{1}{4}mB\eta-\frac{m(\alpha+A)}{2\eta}-\frac{\alpha_\theta^2}{4\eta^2}\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta$$

运动学方程由

$$\frac{\partial S}{\partial h}=-t_0,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta}=\beta_\theta,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha}=\beta$$

获得，h、α_θ、α、t_0、β_θ、β 由初始条件确定.

11.5.11　一个质量为 m 的粒子在下列势场中运动

$$V=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\left[f\left(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\right)+g\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right],$$

其中 r_1、r_2 分别为粒子距两个固定点 P_1、P_2 的距离，σ 是一个常数，$f(x)$、$g(x)$ 是给定的任意函数. 求用椭圆坐标 ξ、η、θ 表达的哈密顿主函数. ξ、η、θ 和柱坐标的关系为

$$\rho=\sigma[(\xi^2-1)(1-\eta^2)]^{1/2}$$
$$z=\sigma\xi\eta,\qquad \varphi=\theta$$

选坐标轴 z 和 σ 时使 P_1、P_2 在 z 轴上且分别处在 $z=\sigma$ 和 $z=-\sigma$ 两点.

解
$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-V$$

$$\rho=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\quad z=\sigma\xi\eta,\quad \varphi=\theta$$

$$\dot{\rho}=\frac{\sigma}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}[(1-\eta^2)\xi\dot{\xi}-(\xi^2-1)\eta\dot{\eta}]$$

$$\dot{z}=\sigma(\dot{\xi}\eta+\xi\dot{\eta}),\qquad \dot{\varphi}=\dot{\theta}$$

$$r_1=\sqrt{\rho^2+(z-\sigma)^2}=\sigma(\xi-\eta)$$

$$r_2=\sigma(\xi+\eta)$$

$$\frac{r_1+r_2}{2\sigma}=\xi,\qquad \frac{r_2-r_1}{2\sigma}=\eta$$

$$T=\frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)+\frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\theta}^2$$

$$V=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\left[f\left(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\right)+g\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right]=\frac{1}{\xi^2-\eta^2}[f(\xi)+g(\eta)]$$

$$L=\frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)+\frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\theta}^2$$

$$-\frac{1}{\xi^2-\eta^2}[f(\xi)+g(\eta)]$$

$$p_\xi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}}=m\sigma^2\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}\dot{\xi}$$

$$p_\eta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}}=m\sigma^2\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}\dot{\eta}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\theta}$$

$$H=\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\left[(\xi^2-1)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2+\left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)p_\theta^2\right]$$

$$+\frac{1}{\xi^2-\eta^2}[f(\xi)+g(\eta)]$$

因为$\frac{\partial H}{\partial t}=0,\frac{\partial H}{\partial\theta}=0$,哈密顿主函数可写成

$$S=-ht+\alpha_\theta\theta+W(\xi,\eta)$$

W 满足的偏微分方程为

$$\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\left[(\xi^2-1)\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2+(1-\eta^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)\alpha_\theta^2\right]+\frac{1}{\xi^2-\eta^2}[f(\xi)+g(\eta)]=h$$

$$W(\xi,\eta)=W_1(\xi)+W_2(\eta)$$

$$(\xi^2-1)\left(\frac{dW_1}{d\xi}\right)^2+\frac{\alpha_\theta^2}{\xi^2-1}+2m\sigma^2f(\xi)-2m\sigma^2h\xi^2$$

$$+(1-\eta^2)\left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)^2+\frac{\alpha_\theta^2}{1-\eta^2}+2m\sigma^2g(\eta)+2m\sigma^2h\eta^2=0$$

令

$$(\xi^2-1)\left(\frac{dW_1}{d\xi}\right)^2+\frac{\alpha_\theta^2}{\xi^2-1}+2m\sigma^2f(\xi)-2m\sigma^2h\xi^2=\alpha'$$

则

$$(1-\eta^2)\left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)^2+\frac{\alpha_\theta^2}{1-\eta^2}+2m\sigma^2g(\eta)+2m\sigma^2h\eta^2=-\alpha'$$

$$\frac{dW_1}{d\xi}=\left[\frac{2m\sigma^2h\xi^2}{\xi^2-1}+\frac{\alpha'-2m\sigma^2f(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{\alpha_\theta^2}{(\xi^2-1)^2}\right]^{1/2}$$

$$=\left[2m\sigma^2h+\frac{\alpha-2m\sigma^2f(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{\alpha_\theta^2}{(\xi^2-1)^2}\right]^{1/2}$$

其中 $\alpha=\alpha'+2m\sigma^2h$,也是常数,

$$\frac{dW_2}{d\eta}=\left[-\frac{2m\sigma^2h\eta^2}{1-\eta^2}-\frac{\alpha'+2m\sigma^2g(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{\alpha_\theta^2}{(1-\eta^2)^2}\right]^{1/2}$$

$$=\left[2m\sigma^2h-\frac{\alpha+2m\sigma^2g(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{\alpha_\theta^2}{(1-\eta^2)^2}\right]^{1/2}$$

$$S=-ht+\alpha_\theta\theta+\int\left[2m\sigma^2h+\frac{\alpha-2m\sigma^2f(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{\alpha_\theta^2}{(\xi^2-1)^2}\right]^{1/2}d\xi$$

$$+\int\left[2m\sigma^2h-\frac{\alpha+2m\sigma^2g(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{\alpha_\theta^2}{(1-\eta^2)^2}\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta$$

11.5.12　用拉格朗日-沙比方法重解 11.5.4 题.

解　方法一：

$$H=\frac{1}{2m}p_1^2+\frac{1}{2m}(p_2-kq_1)^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial H}{\partial q_2}=0$$

可令

$$S=-ht+\alpha q_2+W(q_1)$$

W 满足的(偏)微分方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q_1}\right)^2+\frac{1}{2m}(\alpha-kq_1)^2=h$$

令 $q_1=x$，则 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q_1}=p$，

$$F=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2m}(\alpha-kx)^2-h$$

$$P=\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{1}{m}p$$

$$X=\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{k}{m}(\alpha-kx)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=-\frac{\mathrm{d}p}{X}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{m}p}=-\frac{\mathrm{d}p}{-\frac{k}{m}(\alpha-kx)}$$

$$p\,\mathrm{d}p=k(\alpha-kx)\mathrm{d}x$$

$$p^2=-(\alpha-kx)^2+\alpha'$$

由 $\frac{\partial H}{\partial t}=0, H=h$，

$$\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2m}(\alpha-kx)^2=h$$

可见

$$\alpha'=2mh$$

又

$$p=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q_1}$$

所以

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q_1}\right)^2=2mh-(\alpha-kq_1)^2$$

$$W=\int\sqrt{2mh-(\alpha-kq_1)^2}\,\mathrm{d}q_1$$

$$S=-ht+\alpha q_2+\int\sqrt{2mh-(\alpha-kq_1)^2}\,\mathrm{d}q_1$$

与 11.5.4 题求得的哈密顿主函数完全相同，以下同 11.5.4 题.

方法二：仍用拉格朗日-沙比方法，不考虑 q_2 是循环坐标，考虑到 $\frac{\partial H}{\partial t}=0, H=h$，

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}-kq_1\right)^2=h$$

令 $q_1=x, q_2=y$,则$\frac{\partial W}{\partial q_1}=p, \frac{\partial W}{\partial q_2}=q$,

$$F=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2m}(q-kx)^2-h$$

$$X=\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{k}{m}(q-kx)$$

$$Y=\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$P=\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{1}{m}p$$

$$Q=\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{1}{m}(q-kx)$$

由
$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=-\frac{dP}{X}=-\frac{dq}{Y}\text{得}$$

$$\frac{dx}{\frac{1}{m}p}=\frac{dy}{\frac{1}{m}(q-kx)}=\frac{dp}{\frac{k}{m}(q-kx)}=-\frac{dq}{0}$$

由最后一个等号可见,$dq=0, q=\alpha$,

$$\frac{dx}{\frac{1}{m}p}=\frac{dp}{\frac{k}{m}(\alpha-kx)}$$

$$p\mathrm{d}p=k(\alpha-kx)\mathrm{d}x$$

$$p^2=-(\alpha-kx)^2+\alpha'$$

由 $H=\frac{1}{2m}p_1^2+\frac{1}{2m}(p_2-kq_1)^2=h$ 以及 $p=p_1, q=p_2=\alpha$ 可见,$\alpha'=2mh$,

所以
$$p^2=2mh-(\alpha-kx)^2$$

$$p=\sqrt{2mh-(\alpha-kx)^2}$$

$$\frac{dx}{\frac{1}{m}\sqrt{2mh-(\alpha-kx)^2}}=\frac{dy}{\frac{1}{m}(\alpha-kx)}$$

$$y=\int\frac{\alpha-kx}{\sqrt{2mh-(\alpha-kx)^2}}\mathrm{d}x+\beta$$

$$=\frac{1}{k}\sqrt{2mh-(\alpha-kx)^2}+\beta$$

$$(y-\beta)^2=\frac{1}{k^2}[2mh-(\alpha-kx)^2]$$

即
$$\left(q_1-\frac{\alpha}{k}\right)^2+(q_2-\beta)^2=\frac{2mh}{k^2}$$

11.5.13 质量为 m 的粒子在势场 $V(r)=\frac{k}{r^2}$($k>0$)且为常量)中运动,用拉格朗日-沙比方法求轨道方程.

解
$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right)+\frac{k}{r^2}$$

因为$\frac{\partial H}{\partial t}=0$,可令

$$S=-ht+W(r,\varphi)$$

W 满足的偏微分方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)\right]+\frac{k}{r^2}=h$$

用拉格朗日-沙比方法,取 $r=x,\varphi=y$,

则
$$\frac{\partial W}{\partial r}=p,\quad \frac{\partial W}{\partial \varphi}=q$$

$$F=\frac{1}{2m}\left(p^2+\frac{1}{x^2}q^2\right)+\frac{k}{x^2}-h$$

$$X=\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{q^2}{mx^3}-\frac{2k}{x^3}$$

$$Y=\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$P=\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{1}{m}p$$

$$Q=\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{1}{mx^2}q$$

由
$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=-\frac{\mathrm{d}p}{X}=-\frac{\mathrm{d}q}{Y}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{m}p}=\frac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{mx^2}q}=\frac{\mathrm{d}p}{\frac{q^2}{mx^3}+\frac{2k}{x^3}}=-\frac{\mathrm{d}q}{0}$$

$$\mathrm{d}q=0$$

所以
$$q=\alpha$$

$$\frac{1}{m}p\mathrm{d}p=\left(\frac{\alpha^2}{mx^3}+\frac{2k}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{\alpha^2}{m}+2k\right)\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2m}p^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{m}+2k\right)\frac{1}{x^2}+h$$

$$p=\frac{1}{x}\sqrt{2mhx^2-(\alpha^2+2mk)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{x}\sqrt{2mhx^2-(\alpha^2+2mk)}}=\frac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{mx^2}\alpha}$$

$$\mathrm{d}y=\frac{\alpha}{x\sqrt{2mhx^2-(\alpha^2+2mk)}}\mathrm{d}x$$

令 $x=\frac{1}{u}$,$\mathrm{d}x=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$,

$$\mathrm{d}y=-\frac{\alpha}{\sqrt{2mh}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2+2mk}{2mh}u^2}}$$

$$\varphi = y = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2mk}}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2mk}{2mh}}u\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

选择适当的极轴,可得上述的积分常数,

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2mk}{2mh}}u = \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2mk}{\alpha}}\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 + 2mk}{\alpha}}\varphi\right)$$

$$r = \frac{1}{u} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + 2mk}{2mh}}\csc\left(\sqrt{1 + \frac{2mk}{\alpha^2}}\varphi\right)$$

11.5.14 一个电机使一根竖直轴随之旋转,轴的下端挂一个长度为 l、质量为 m 的单摆,单摆被限制在一个平面内运动,这个平面由电动机带动以恒定的角速度 ω 旋转,如图 11.11 所示.

(1) 用拉格朗日-沙比方法得到质点的运动微分方程;

(2) 求出在转动参考系中的平衡位置及绕平衡位置做小振动的频率,说明平衡的稳定条件.

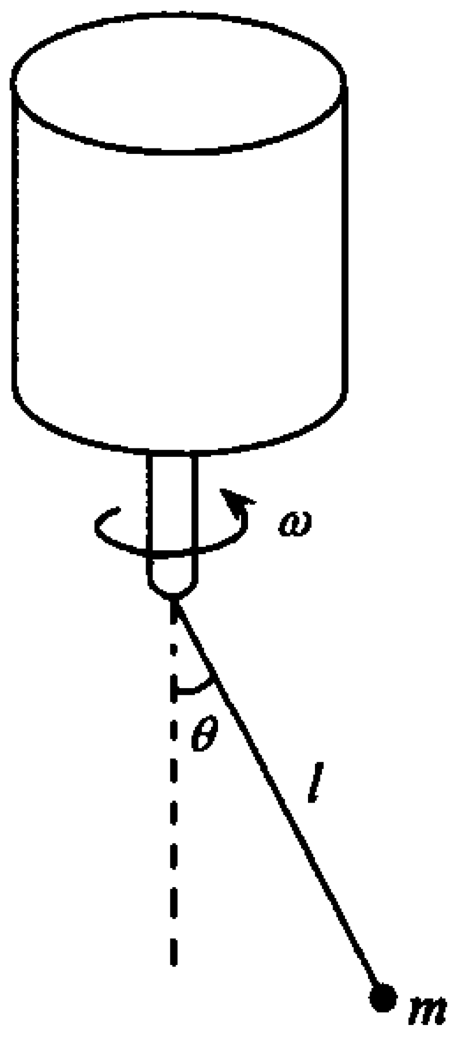


图 11.11

解 (1)
$$T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\omega^2)$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\omega^2\sin^2\theta) - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$H = \frac{1}{2ml^2}p_\theta^2 - \frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2\theta + mgl(1 - \cos\theta)$$

哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2\theta + mgl(1 - \cos\theta) = 0$$

用拉格朗日-沙比方法,令 $\theta = x, t = y$,则

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = p,\quad \frac{\partial S}{\partial t} = q$$

$$F = q + \frac{1}{2ml^2}p^2 - \frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2 x + mgl(1 - \cos x)$$

$$X = \frac{\partial F}{\partial x} = -ml^2\omega^2\sin x\cos x + mgl\sin x$$

$$Y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$P = \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{ml^2}p$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial q} = 1$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = -\frac{\mathrm{d}p}{X} = -\frac{\mathrm{d}q}{Y}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{ml^2}p}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=-\frac{\mathrm{d}q}{0}=\frac{\mathrm{d}p}{ml^2\omega^2\sin x\cos x-mgl\sin x}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=ml^2\omega^2\sin x\cos x-mgl\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{ml^2}p$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{1}{ml^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{ml^2}(ml^2\omega^2\sin x\cos x-mgl\sin x)=\left(\omega^2\cos x-\frac{g}{l}\right)\sin x$$

将 x、y 分别换回 θ、t，上式为

$$\ddot{\theta}-\left(\omega^2\cos\theta-\frac{g}{l}\right)\sin\theta=0$$

(2) 平衡位置由

$$\left(\omega^2\cos\theta-\frac{g}{l}\right)\sin\theta=0$$

确定，可能有两个平衡位置，它们是 $\theta=\theta_{10}=0$，$\theta=\theta_{20}=\arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$ $\left(当\frac{g}{l\omega^2}<1 时\right)$.

在 $\theta=\theta_{10}=0$ 附近，运动微分方程可近似为

$$\dot{\theta}-\left(\omega^2-\frac{g}{l}\right)\theta=0$$

当 $\omega^2<\frac{g}{l}$ 时，可在 $\theta=0$ 附近做小振动，小振动的角频率为 $\Omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}-\omega^2}$，$\theta=0$ 是稳定平衡位置；当 $\omega^2\geqslant\frac{g}{l}$ 时，运动不可能限在 $\theta=0$ 附近，不能围绕 $\theta=0$ 做小振动，$\theta=0$ 是不稳定平衡位置.

在 $\theta=\theta_{20}=\arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$ 附近 $\left(只有在\frac{g}{l\omega^2}<1 时才存在这个平衡位置\right)$，将 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 在 θ_{20} 附近作泰勒展开，

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos\theta_{20}-\sin\theta_{20}(\theta-\theta_{20})+\cdots\\&\approx\frac{g}{l\omega^2}-\sqrt{1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}}(\theta-\theta_{20})\\\sin\theta&=\sin\theta_{20}+\cos\theta_{20}(\theta-\theta_{20})+\cdots\\&\approx\sqrt{1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}}+\frac{g}{l\omega^2}(\theta-\theta_{20})\end{aligned}$$

令 $\theta'=\theta-\theta_{20}$，在 $\theta=\theta_{20}$ 附近的运动微分方程为

$$\ddot{\theta}'-\left[\omega^2\left(\frac{g}{l\omega^2}-\sqrt{1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}}\theta'\right)-\frac{g}{l}\right]\left[\sqrt{1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}}+\frac{g}{l\omega^2}\theta'\right]=0$$

只保留一级小量，

$$\ddot{\theta}'+\omega^2\left(1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}\right)\theta'=0$$

当 $1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}>0$，即当 $\omega^2>\frac{g}{l}$ 时，存在着第二个平衡位置，而且是稳定平衡位置，可围绕它做

小振动,小振动的角频率为

$$\Omega_2 = \omega\sqrt{1-\frac{g^2}{l^2\omega^4}}$$

11.5.15 一个质量为 m 的质点在随时间变化的势场中沿直线运动,$V=mAxt^2$,A 为常数. 用拉格朗日-沙比方法求此质点运动的一般解.

解

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mAxt^2$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

$$H=\frac{p^2}{2m}+mAxt^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+mAxt^2=0$$

用拉格朗日-沙比方法. 令 $\alpha=x, t=y$,则$\dfrac{\partial S}{\partial x}=p, \dfrac{\partial S}{\partial t}=q$,

$$F=q+\frac{1}{2m}p^2+mAxy^2$$

$$X=\frac{\partial F}{\partial x}=mAy^2$$

$$Y=\frac{\partial F}{\partial y}=2mAxy$$

$$P=\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{p}{m}$$

$$Q=\frac{\partial F}{\partial q}=1$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=-\frac{\mathrm{d}p}{X}=-\frac{\mathrm{d}q}{Y}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{p}{m}}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=-\frac{\mathrm{d}p}{mAy^2}=-\frac{\mathrm{d}q}{2mAxy}$$

$$\mathrm{d}p=-mAy^2\mathrm{d}y$$

$$p=-\frac{1}{3}mAy^3+\alpha m$$

$$\mathrm{d}x=\frac{p}{m}\mathrm{d}y=\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{3}mAy^3+\alpha m\right)\mathrm{d}y$$

$$x=-\frac{1}{12}Ay^4+\alpha y+\beta$$

也即

$$x=-\frac{1}{12}Ay^4+\alpha t+\beta$$

11.6 作用变量、角变量及其应用

11.6.1 用作用变量和角变量分析一个粒在下列有心力作用下的运动,这个有心力

的势能为

$$V(r) = -\frac{k}{r} - \frac{\beta}{r^2}$$

其中 r 是粒子离力心的距离，k 和 β 是正的常量. 设 $-\frac{mk^2}{2h^2-4m\beta}<E<0$，其中 E 是粒子的机械能，h 是粒子对力心的角动量. 在粒子运动所跨越的 r 的范围内有 $\beta \ll kr$.

解

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}-\frac{k}{r}-\frac{\beta}{r^2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

特性函数 W 满足的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{k}{r} - \frac{\beta}{r^2} = E$$

可作变量分离，

$$W = W_r(r,E,h) + W_\varphi(\varphi,E,h)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - \frac{k}{r} - \frac{\beta}{r^2} = E$$

因为

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0, \quad p_\varphi=h(h\text{ 为常量})$$

$$\frac{\mathrm{d}W_\varphi}{\mathrm{d}\,\varphi} = h$$

$$W_\varphi = h\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r} = \sqrt{2m}\left(E + \frac{k}{r} + \frac{\beta}{r^2} - \frac{h^2}{2mr^2}\right)^{1/2}$$

$$W_r = \pm\sqrt{2m}\int\left(E + \frac{k}{r} + \frac{2m\beta - h^2}{2mr^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}r$$

在 r-p_r 子相空间中的轨道方程为

$$p_r = \frac{\partial W_r}{\partial r} = \sqrt{2m}\left(E + \frac{k}{r} + \frac{2m\beta - h^2}{2mr^2}\right)^{1/2}$$

在 φ-p_φ 子相空间中的轨道方程为

$$p_\varphi = \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = h$$

在子相空间中如要做周期运动，在 r-p_r 子相空间中必须在 $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ 范围内运动，r_1、r_2 是

$$E + \frac{k}{r} + \frac{2m\beta - h^2}{2mr^2} = 0$$

或

$$2mr^2E+2kmr+2m\beta-h^2=0$$

的两个根. $r_1 \neq r_2$，且均为正实数，要求

$$r=\frac{-2km \pm \sqrt{4k^2m^2 - 4\cdot 2mE(2m\beta - h^2)}}{4mE}$$

$$=\frac{-km \pm \sqrt{k^2m^2 - 2mE(2m\beta - h^2)}}{2mE}$$

中

(1) $-\frac{km}{2mE}>0$,要求 $E<0$;

(2) $k^2m^2-2mE(2m\beta-h^2)>0$,由此要求 $k^2m>2E(2m\beta-h^2)$,如 $E<0,2m\beta-h^2>0$,r_1、r_2 均为实根,但有一个为负值,如 $E<0,2m\beta-h^2<0,|E|<\frac{k^2m}{2h^2-4m\beta}$,则 r_1、r_2 均为正实根,题设条件正是这种情况.

在 φ-p_φ 子相空间中轨道也是闭合的,φ 运动在 $0\sim2\pi$(p_φ 不变)间.

系统是一个可分离的周期系统,可定义一组作用变量和角变量,

$$J_r(E,h)=\oint\frac{\partial W_r(r,E,h)}{\partial r}\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2m}\oint\left(E+\frac{k}{r}+\frac{2m\beta-h^2}{2mr^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}r$$

$$=2\sqrt{2m}\int_{r_1}^{r_2}\left(E+\frac{k}{r}+\frac{2m\beta-h^2}{2mr^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}r$$

这里用了 $p_r(r,E,h)$对 r 轴是对称的. 作变换,令

$$r=\frac{1}{u},\qquad \mathrm{d}r=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$

$$J_r(E,h)=-2\sqrt{2m}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{u^2}\left(E+ku+\frac{2m\beta-h^2}{2m}u^2\right)^{1/2}\mathrm{d}u$$

用积分公式

$$\int\sqrt{\frac{X}{x^2}}\mathrm{d}x=-\sqrt{\frac{X}{x}}+\frac{b}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{X}}+c\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

其中

$$X=a+bx+cx^2$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{bx+2a}{x\sqrt{-q}}\right)\quad (当\ a<0,q<0\ 时)$$

其中

$$q=4ac-b^2$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}=-\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{-q}}\right)\quad (当\ c<0,q<0\ 时)$$

令

$$a=E<0,\ b=k,\qquad c=\frac{2m\beta-h^2}{2m}<0$$

$$q=4E\frac{2m\beta-h^2}{2m}-k^2=\frac{2E(2m\beta-h^2)-mk^2}{m}<0$$

可用上述三个积分公式,经计算可得

$$J_r(E,h)=2\pi(h^2-2m\beta)^{1/2}-\pi k\left(-\frac{2m}{E}\right)^{1/2}$$

$$J_\varphi(E,h)=\oint\frac{\partial W_\varphi(\varphi,E,h)}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\oint h\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}h\mathrm{d}\varphi=2\pi h$$

从上述两式解出 E、h,

$$E=-\frac{2m\pi^2k^2}{[(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}-J_r]^2}$$

$$h=\frac{J_\varphi}{2\pi}$$

$$H^*(J_r,J_\varphi)=E=-\frac{2m\pi^2k^2}{[(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}-J_r]^2}$$

由哈密顿正则方程

$$\dot{J}_r=-\frac{\partial H^*}{\partial w_r}=0$$

$$\dot{J}_\varphi=-\frac{\partial H^*}{\partial w_\varphi}=0$$

$$\dot{w}_r=\nu_r=\frac{\partial H^*}{\partial J_r}=\frac{4m\pi^2k^2}{[(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}-J_r]^3}=\frac{(-2mE)^{3/2}}{2m^2\pi k}$$

这里用了$(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}-J_r=\left(\frac{2m\pi^2k^2}{-E}\right)^{1/2}=\frac{2m\pi k}{(-2mE)^{1/2}}$

$$\dot{w}_\varphi=\nu_\varphi=\frac{\partial H^*}{\partial J_\varphi}$$

$$=\frac{4m\pi^2k^2}{[(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}-J_r]^3}\cdot\frac{2J_\varphi}{2(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}}$$

$$=\frac{J_\varphi}{(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}}\nu_r$$

由
$$w_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial W_k(q_k,J)}{\partial J_i}$$

$$w_r=\frac{\partial W_r}{\partial J_r}+\frac{\partial W_\varphi}{\partial J_r}$$

$$=\frac{\partial W_r}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J_r}+\frac{\partial W_r}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial J_r}+\frac{\partial W_\varphi}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J_r}+\frac{\partial W_\varphi}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial J_r}$$

$$=\frac{\partial W_r}{\partial E}\nu_r=\nu_rF(r)\tag{1}$$

其中
$$F(r)=\frac{\partial W_r(r,E,h)}{\partial E}=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\left(E+\frac{k}{r}+\frac{2m\beta-h^2}{2mr^2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}r$$

$$w_\varphi=\frac{\partial W_r}{\partial J_\varphi}+\frac{\partial W_\varphi}{\partial J_\varphi}$$

$$=\frac{\partial W_r}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J_\varphi}+\frac{\partial W_r}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial J_\varphi}+\frac{\partial W_\varphi}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J_\varphi}+\frac{\partial W_\varphi}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial J_\varphi}$$

$$=\nu_\varphi F(r)-G(r)+\frac{\varphi}{2\pi}\tag{2}$$

其中
$$G(r)=-\frac{\partial W_r}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial J_\varphi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{2}}\int\left(E+\frac{k}{r}+\frac{2m\beta-h^2}{2mr^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{h}{mr^2}\right)\mathrm{d}r$$

从(1)式原则上可以得到

$$r=r(w_r)\tag{3}$$

r是w_r的周期函数，周期为1，

$$w_r=\nu_rt+\lambda_r\tag{4}$$

$$w_\varphi = \nu_\varphi t + \lambda_\varphi \tag{5}$$

r 是 t 的周期函数，周期为$\frac{1}{\nu_r}$.

将式(3)代入式(2)，解出 φ，可得

$$\varphi = \varphi(w_r, w_\varphi) \tag{6}$$

φ是(w_r, w_φ)的双重周期函数，周期单元为(1,0)、(0,1)，时间上改变$\frac{1}{\nu_r}$，w_r 改变 1，时间上改变$\frac{1}{\nu_\varphi}$，w_φ 改变 1. 一般讲，φ 不是时间的周期函数，只有存在一对整数 K_r、K_φ，有$\frac{K_r}{\nu_r}=\frac{K_\varphi}{\nu_\varphi}$时，$\varphi$ 才是时间的周期函数.

如能获得 $r=r(w_r)$和 $\varphi=\varphi(w_r,w_\varphi)$，就能由式(4)、(5)得到 $r(t)$和 $\varphi(t)$.

如势能函数中的 $\beta=0$，质点在平方反比律有心力场中运动，

$$\nu_r = \nu_\varphi = \nu = \frac{(-2mE)^{3/2}}{2m^2\pi k}$$

$r(t)$和 $\varphi(t)$都是时间的周期函数，周期为$\frac{1}{\nu}$. 在这种情况下，在空间的轨道是闭合的，是一个椭圆.

如 β 是非零小量，轨道虽不闭合，但近似一个椭圆，近心点围绕力心缓慢进动，不需求出 $r(t)$和 $\varphi(t)$，就能知道进动的速率. 比较式(2)和式(5)，

$$\nu_\varphi F(r) - G(r) + \frac{\varphi}{2\pi} = \nu_\varphi t + \lambda_\varphi$$

$$\varphi = 2\pi\nu_\varphi t - 2\pi\nu_\varphi F(r) + 2\pi G(r) + 2\pi\lambda_\varphi$$

因 $r(t)$是 t 的周期函数，周期为$\frac{1}{\nu_r}$，在此期间，φ 的改变量

$$\Delta\varphi = 2\pi\nu_\varphi \frac{1}{\nu_r} = 2\pi\left(\frac{\nu_\varphi}{\nu_r}\right)$$

这里用了 $r\left(t+\frac{1}{\nu_r}\right)=r(t)$，

故

$$F\left[r\left(t+\frac{1}{\nu_r}\right)\right] = F[r(t)]$$

$$G\left[r\left(t+\frac{1}{\nu_r}\right)\right] = G[r(t)]$$

如 $\nu_\varphi=\nu_r$，$\Delta\varphi=2\pi$，没有进动；如 $\nu_\varphi\neq\nu_r$，$\Delta\varphi\neq 2\pi$，进动角为

$$2\pi(\nu_\varphi/\nu_r) - 2\pi$$

进动速率为

$$\frac{2\pi(\nu_\varphi/\nu_r) - 2\pi}{1/\nu_r} = 2\pi(\nu_\varphi - \nu_r)$$

如对 β 这个小量作一级近似，

$$\nu_\varphi = \frac{J_\varphi}{(J_\varphi^2 - 8\pi^2 m\beta)^{1/2}}\nu_r \approx \left(1 + \frac{4\pi^2 m\beta}{J_\varphi^2}\right)\nu_r$$

J_φ 用 $\beta=0$ 时的值作近似，

$$J_\varphi = 2\pi h \approx 2\pi m \cdot \frac{\pi ab}{T}$$

其中 T 是椭圆运动的周期，a、b 分别是椭圆轨道的长半轴和短半轴，

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

$$J_\varphi^2 \approx \pi^2 m b^2 k/a$$

$$\nu_\varphi \approx \left(1 + \frac{4\beta a}{kb^2}\right)\nu_r$$

进动速率近似为$\frac{8\pi\beta a}{kb^2}\nu_r$，其中 a、b 是 $\beta=0$ 时椭圆轨道的长半轴和短半轴.

11.6.2　一质量为 m 的质点在势能 $V(x)=F|x|$（F 是一正值常量）作用下做一维运动，利用作用变量、角变量把运动的周期表达成能量的函数.

解

$$H=\frac{1}{2m}p^2+F|x|$$

即

$$H=\begin{cases}\frac{1}{2m}p^2+Fx & 0\leqslant x\leqslant\frac{E}{F}\\ \frac{1}{2m}p^2-Fx & -\frac{E}{F}\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

关于质点的运动范围为$\left[-\frac{E}{F},\frac{E}{F}\right]$（$E$ 为总能量）作如下说明：因为质点的机械能守恒，

$$\frac{1}{2m}p^2 + F|x| = E$$

在 x 的最大值，$p=0$，$x_{\max}=\frac{E}{F}$. 同样，在 x 的最小值，$p=0$，$F(-x_{\min})=E$，$x_{\min}=-\frac{E}{F}$，

$$\begin{aligned}J &= \oint p\mathrm{d}x = 2\int_{-\frac{E}{F}}^{\frac{E}{F}}\sqrt{2m(E-V)}\mathrm{d}x\\ &= 2\left[\int_{-\frac{E}{F}}^{0}\sqrt{2m(E+Fx)}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{E}{F}}\sqrt{2m(E-Fx)}\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{8\sqrt{2m}}{3F}E^{3/2}\end{aligned}$$

$$E = \left(\frac{3FJ}{8\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$$

$$H^*(J) = E = \left(\frac{3FJ}{8\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$$

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\partial H^*}{\partial J} = \left(\frac{3F}{8\sqrt{2m}}\right)^{2/3}\cdot\frac{2}{3}J^{-1/3}\\ &= \left(\frac{3F}{8\sqrt{2m}}\right)^{2/3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{8\sqrt{2m}}{3F}E^{3/2}\right)^{-1/3} = \frac{F}{4\sqrt{2mE}}\end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{4\sqrt{2mE}}{F}$$

11.6.3　一质量为 m 的质点在势能 $V=-\frac{k}{|x|}$（k 为正值常量）作用下做一维运动，

能量为负值时,运动是有界的和振荡的.用作用变量、角变量把运动的周期表达成能量的函数.

解
$$H=\frac{1}{2m}p^2-\frac{k}{|x|}$$

即
$$H=\begin{cases}\dfrac{1}{2m}p^2-\dfrac{k}{x} & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{k}{E}\\[2mm]\dfrac{1}{2m}p^2+\dfrac{k}{x} & \dfrac{k}{E}\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

注意 $E<0$,

$$p=\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{|x|}\right)}$$

$$J=\oint p\mathrm{d}x=2\left[\int_{\frac{k}{E}}^{0}\sqrt{2m\left(E-\frac{k}{x}\right)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{-\frac{k}{E}}\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{x}\right)}\mathrm{d}x\right]$$

对于第一个积分,令 $x'=-x,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x'$,

$$\int_{\frac{k}{E}}^{0}\sqrt{2m\left(E-\frac{k}{x}\right)}\mathrm{d}x=-\int_{-\frac{k}{E}}^{0}\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{x'}\right)}\mathrm{d}x'=\int_{0}^{-\frac{k}{E}}\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{x}\right)}\mathrm{d}x$$

所以
$$J=4\int_{0}^{-\frac{k}{E}}\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{x}\right)}\mathrm{d}x$$

作变换,令 $x=u^2,\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$,

$$J=4\int_{0}^{\sqrt{-\frac{k}{E}}}\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{u^2}\right)}\cdot 2u\mathrm{d}u$$

$$=8\sqrt{2m}\int_{0}^{\sqrt{-\frac{k}{E}}}\sqrt{k-\sqrt{-E}u)^2}\mathrm{d}u$$

用积分公式:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$J=\frac{2\pi\sqrt{2m}}{\sqrt{-E}}k$$

$$E=-\frac{8\pi^2mk^2}{J^2}$$

$$H^*(J)=E=-\frac{8\pi^2mk^2}{J^2}$$

$$\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}=16\pi^2mk^2J^{-3}=\frac{(-E)^{3/2}}{\pi k\sqrt{2m}}$$

$$T=\frac{1}{\nu}=\pi k\sqrt{2m}(-E)^{-3/2}$$

11.6.4　利用作用变量、角变量求力常数各不相同的三维谐振子的频率,并求出笛卡儿坐标以及与之共轭的动量表成作用变量、角变量的函数.

解

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2y^2+\frac{1}{2}k_3z^2$$

$$\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2m}p_y^2+\frac{1}{2}k_2y^2+\frac{1}{2m}p_z^2+\frac{1}{2}k_3z^2=E$$

设

$$\frac{1}{2m}p_y^2+\frac{1}{2}k_2y^2=\alpha_2 \quad (\alpha_2 \text{ 为常量})$$

$$\frac{1}{2m}p_z^2+\frac{1}{2}k_3z^2=\alpha_3 \quad (\alpha_3 \text{ 为常量})$$

则

$$\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}k_1x^2=E-\alpha_2-\alpha_3$$

$$\frac{p_y^2}{2m\alpha_2}+\frac{y^2}{\frac{2\alpha_2}{k_2}}=1$$

在 y-p_y 子相空间，$p_y=p_y(y)$是一个椭圆方程，椭圆的长、短半轴分别为$\sqrt{2m\alpha_2}$和$\sqrt{\frac{2\alpha_2}{k_2}}$

$$J_2=\oint p_y\mathrm{d}y=\pi\sqrt{2m\alpha_2}\cdot\sqrt{\frac{2\alpha_2}{k_2}}=2\pi\alpha_2\sqrt{\frac{m}{k_2}}$$

同理，

$$J_3=2\pi\alpha_3\sqrt{\frac{m}{k_3}}$$

$$J_1=2\pi(E-\alpha_2-\alpha_3)\sqrt{\frac{m}{k_1}}$$

$$H^*(J_1,J_2,J_3)=E=\frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}+\alpha_2+\alpha_3$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(J_1\sqrt{\frac{k_1}{m}}+J_2\sqrt{\frac{k_2}{m}}+J_3\sqrt{\frac{k_3}{m}}\right)$$

$$\nu_1=\frac{\partial H^*}{\partial J_1}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

同理

$$\nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}},\quad \nu_3=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

要求新旧正则变量间的变换关系，需找出母函数.

$$W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{J})=\sum_{i=1}^{3}W_i(q_i,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}))=\sum_{i=1}^{3}W_i(q_i,\boldsymbol{J})$$

W_i 满足的微分方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{1}{2}k_1x^2+\alpha_2+\alpha_3=E$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}\right)^2+\frac{1}{2}k_2y^2=\alpha_2$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}z}\right)^2+\frac{1}{2}k_3z^2=\alpha_3$$

$$W_1=\int\sqrt{2m\left[(E-\alpha_2-\alpha_3)-\frac{1}{2}k_1x^2\right]}\mathrm{d}x=\int\sqrt{2m\left[\left(\frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}\right)-\frac{1}{2}k_1x^2\right]}\mathrm{d}x$$

$$W_2=\int\sqrt{2m\left[\left(\frac{J_2}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}\right)-\frac{1}{2}k_2y^2\right]}\mathrm{d}y$$

$$W_3=\int\sqrt{2m\left[\left(\frac{J_3}{2\pi}\sqrt{\frac{k_3}{m}}\right)-\frac{1}{2}k_3z^2\right]}\mathrm{d}z$$

由

$$w_i=\frac{\partial W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{J})}{\partial J_i}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial W_k(q_k,\boldsymbol{J})}{\partial J_i}$$

$$w_1=\frac{\partial W_1}{\partial J_1}+\frac{\partial W_2}{\partial J_1}+\frac{\partial W_3}{\partial J_1}=\frac{\partial W_1}{\partial J_1}$$

$$=\sqrt{2m}\int\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}}{2\left(\sqrt{\frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}-\frac{1}{2}kx^2}\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{\pi}{J_1}\sqrt{k_1m}x}\right)$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{J_1}\sqrt{mk_1}}}\sin(2\pi w_1)$$

同样可得

$$y=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{J_2}\sqrt{mk_2}}}\sin(2\pi w_2)$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{J_3}\sqrt{mk_3}}}\sin(2\pi w_3)$$

$$p_x=\frac{\partial W_1}{\partial x}=\sqrt{2m\left(\frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}-\frac{1}{2}k_1x^2\right)}=\sqrt{\frac{J_1}{\pi}\sqrt{mk_1}}\cos(2\pi w_1)$$

同样可得

$$p_y=\sqrt{\frac{J_2}{\pi}\sqrt{mk_2}}\cos(2\pi w_2)$$

$$p_z=\sqrt{\frac{J_3}{\pi}\sqrt{mk_3}}\cos(2\pi w_3)$$

如将 $w_1=\nu_1t+\varphi_1$，$w_2=\nu_2t+\varphi_2$，$w_3=\nu_3t+\varphi_3$ 代入，可得 x、y、z、p_x、p_y、p_z 与 t 的函数关系，其中 φ_1、φ_2、φ_3、E、α_2、α_3 六个积分常数由初始条件确定.

11.6.5 一个力常数为 k 的线性谐振子，它的质量突然增加一个小量 ε，用正则微扰论求振子的频率增量 $\nu-\nu^0$，算到 ε 的二次方为止. 证明在 ε 的同级近似下所得结果与增量的严格预期值是一致的.

解

$$H=\frac{1}{2(m+\varepsilon)}p^2+\frac{1}{2}kq^2=\frac{1}{2m\left(1+\frac{\varepsilon}{m}\right)}p^2+\frac{1}{2}kq^2$$

$$=\frac{1}{2m}\left(1-\frac{\varepsilon}{m}+\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)p^2+\frac{1}{2}kq^2=H_0+\varepsilon H_1+\varepsilon^2 H_2 \tag{1}$$

$$H_0=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kq^2,\quad H_1=-\frac{1}{2m^2}p^2,\quad H_2=\frac{1}{2m^3}p^2$$

方法一：用作用量、角变量求精确解.

$$\frac{1}{2(m+\varepsilon)}p^2+\frac{1}{2}kq^2=E$$

$$\frac{p^2}{2(m+\varepsilon)E}+\frac{q^2}{2E/k}=1$$

$$J=\oint p\mathrm{d}q=\pi\sqrt{2(m+\varepsilon)E}\cdot\sqrt{\frac{2E}{k}}=2\pi E\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{k}}$$

$$H^*=E=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\varepsilon}}J$$

$$\nu=\dot{w}=\frac{\partial H^*}{\partial J}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\varepsilon}}$$

$$\dot{J}=-\frac{\partial H^*}{\partial w}=0$$

$$w=\nu t+\beta$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\varepsilon}}$$

展开到 ε 的二次方项

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2m}+\frac{3\varepsilon^2}{8m^2}\right)$$

零级近似

$$\nu^0=\nu|_{\varepsilon=0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\nu-\nu^0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\frac{\varepsilon}{2m}+\frac{3\varepsilon^2}{8m^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\varepsilon k^{1/2}m^{-3/2}+\frac{3}{16\pi}\varepsilon^2k^{1/2}m^{-5/2}$$

方法二：用正则微扰论解.

先求 $\varepsilon=0$ 的情况，

$$H(q,p,0)=H_0(q,p)$$

特征函数 W^0 满足的方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W^0}{\mathrm{d}q}\right)^2+\frac{1}{2}kq^2=E$$

$$W^0=\int\sqrt{2m\left(E-\frac{1}{2}kq^2\right)}\mathrm{d}q$$

用方法一得到的 E 和 J 的函数关系，令 $\varepsilon=0$，即得这里 E 和 J^0 的函数关系，

$$J^0 = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$E = \frac{J^0}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$w^0 = \frac{\partial W^0}{\partial J^0} = \frac{\partial W^0}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J^0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\int\frac{\sqrt{2E}}{2\sqrt{E-\frac{1}{2}kq^2}}\mathrm{d}q = \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{\pi\sqrt{km}}{J^0}}q\right)$$

$$q = \sqrt{\frac{J^0}{\pi\sqrt{km}}}\sin(2\pi w^0)$$

$$H_0^* = E = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}J^0$$

$$\dot{w}^0 = \nu^0 = \frac{\partial H_0^*}{\partial J^0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{J^0}{\pi\sqrt{km}}} = \sqrt{\frac{2J^0}{k}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{2J^0\nu^0}{k}}$$

所以

$$q = \sqrt{\frac{2J^0\nu^0}{k}}\sin(2\pi w^0)$$

$$p = m\dot{q} = m\sqrt{\frac{2J^0\nu^0}{k}}2\pi\dot{w}^0\cos(2\pi w^0)$$

$$= 2\pi m\nu^0\sqrt{\frac{2J^0\nu^0}{k}}\cos(2\pi w^0)$$

将上述 q、p 代入式(1)，即得 $H^*(w^0,J^0,\varepsilon)$，

$$H^*(w^0,J^0,\varepsilon) = \frac{1}{2m}\left(1-\frac{\varepsilon}{m}+\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)4\pi^2m^2(\nu^0)^2\frac{2J^0\nu^0}{k}\cos^2(2\pi w^0)$$

$$+\frac{1}{2}k\frac{2J^0\nu^0}{k}\sin^2(2\pi w^0)$$

$$= J^0\nu^0 + J^0\nu^0\left(-\frac{\varepsilon}{m}+\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)\cos^2(2\pi w^0)$$

可见

$$\begin{cases} H_0^*(J^0) = \nu^0J^0 \\ H_1^*(w^0,J^0) = -\dfrac{J^0\nu^0}{m}\cos^2(2\pi w^0) = -\dfrac{J^0\nu^0}{2m}[1-\cos(4\pi w^0)] \\ H_2^*(w^0,J^0) = \dfrac{J^0\nu^0}{2m^2}[1-\cos(4\pi w^0)] \end{cases} \tag{2}$$

由(2)式，可直接写出

$$H_0^*(J) = \nu^0 J \tag{3}$$

$$H_1^*(w^0,J)=-\frac{J\nu^0}{2m}[1-\cos(4\pi w^0)]$$

$$H_2^*(w^0,J)=\frac{J\nu^0}{2m^2}[1-\cos(4\pi w^0)]$$

$$H_1^*(J)=\overline{H_1^*(w^0,J)}=\int_0^1\left(-\frac{J\nu^0}{2m}\right)[1-\cos(4\pi w^0)]\mathrm{d}w^0=-\frac{1}{2m}\nu^0 J \tag{4}$$

$$\overline{H_2^*}=\overline{H_2^*(w^0,J)}=\int_0^1 H_2^*(w^0,J)\mathrm{d}w^0=\frac{J\nu^0}{2m^2}$$

$$\overline{\frac{\partial H_1^*}{\partial J}}=\overline{\frac{\partial H_1^*(w^0,J)}{\partial J}}=\int_0^1\left(-\frac{1}{2m}\nu^0\right)[1-\cos(4\pi w^0)]\mathrm{d}w^0=-\frac{\nu^0}{2m}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial J}H_1^*\right)}&=\overline{\left[\frac{\partial H_1^*(w^0,J)}{\partial J}H_1^*(w^0,J)\right]}\\&=\int_0^1\left(-\frac{\nu^0}{2m}\right)[1-\cos(4\pi w^0)]\left(-\frac{J\nu^0}{2m}\right)[1-\cos(4\pi w^0)]\mathrm{d}w^0\\&=\frac{3J(\nu^0)^2}{8m^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\nu^0}{\partial J}=0$$

$$\begin{aligned}H_2^*(J)&=\overline{H_2^*}+\frac{1}{\nu^0(J)}\left[\overline{\frac{\partial H_1^*}{\partial J}}\cdot\overline{H_1^*}-\overline{\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial J}H_1^*\right)}\right]\\&\quad+\frac{1}{2\nu^{0^2}}\frac{\partial\nu^0}{\partial J}[\overline{(H_1^*)^2}-(\overline{H_1^*})^2]\\&=\frac{J\nu^0}{2m^2}+\frac{1}{\nu^0}\left[\left(-\frac{\nu^0}{2m}\right)\left(-\frac{1}{2m}\nu^0 J\right)-\frac{3J\nu^{0^2}}{8m^2}\right]\\&=\frac{3J(\nu^0)^2}{8m^2}\end{aligned} \tag{5}$$

由(1)、(3)、(4)、(5)式，

$$\begin{aligned}H^*(J)&=H_0^*(J)+\varepsilon H_1^*(J)+\varepsilon^2 H_2^*(J)\\&=\nu^0 J-\frac{\varepsilon}{2m}\nu^0 J+\varepsilon^2\frac{3\nu^0 J}{8m^2}\end{aligned}$$

由哈密顿正则方程，

$$\nu=\dot{w}=\frac{\partial H^*(J,\varepsilon)}{\partial J}=\nu^0-\frac{\varepsilon}{2m}\nu^0+\frac{3\varepsilon^2\nu^0}{8m^2}$$

$$\nu-\nu^0=-\frac{\varepsilon}{2m}\nu^0+\frac{3\varepsilon^2}{8m^2}\nu^0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\frac{\varepsilon}{2m}+\frac{3\varepsilon^2}{8m^2}\right)$$

在同级近似下，两种方法所得结果完全相同.

11.6.6 用正则微扰论求有限振幅振动的单摆运动，设总能量 $E\ll mgl$，求振子较之小振幅振动的频率增量，只考虑一级近似.

提示：
$$H=\frac{1}{2ml^2}p^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2-\frac{1}{24}mgl\theta^4$$
前两项为 H_0，最后一项为 H_1.

解

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V=mgl(1-\cos\theta)=mgl\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}mgl\theta^2-\frac{1}{24}mgl\theta^4$$

$$H=\frac{1}{2ml^2}p^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2-\frac{\lambda}{24}mgl\theta^4 \tag{1}$$

(以后令 $\lambda=1$)

$$H_0=\frac{1}{2ml^2}p^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$H_1=-\frac{1}{24}mgl\theta^4$$

$$\frac{1}{2ml^2}p^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=E$$

$$\frac{p^2}{2ml^2E}+\frac{\theta^2}{(2E/mgl)}=1$$

$$J^0=\oint p\mathrm{d}\theta=\pi\sqrt{2ml^2E}\cdot\sqrt{\frac{2E}{mgl}}=2\pi E\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$H_0^*=E=\frac{J^0}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\nu^0=\dot{w}^0=\frac{\partial H_0^*}{\partial J^0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W^0}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=E$$

$$W^0=\int\sqrt{2ml^2}\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}\mathrm{d}\theta$$

$$w^0=\frac{\partial W^0}{\partial J^0}=\frac{\partial W^0}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J^0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\int\sqrt{2ml^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{mgl}{2E}}\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{\pi ml\sqrt{gl}}{J^0}}\theta\right)$$

得最后一个等式时用了 $E=\frac{J^0}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\theta=\sqrt{\frac{J^0}{\pi ml\sqrt{gl}}}\sin(2\pi w^0)$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{J^0}{\pi ml\sqrt{gl}}}2\pi\nu^0\cos(2\pi w^0)=\sqrt{\frac{J^0}{\pi ml^2}\sqrt{\frac{g}{l}}}\cos(2\pi w^0)$$

或
$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2J^0\nu^0}{ml^2}}\cos(2\pi w^0)$$
$$p=ml^2\dot{\theta}=\sqrt{2ml^2J^0\nu^0}\cos(2\pi w^0)$$

将 θ、p 代入式(1)，得
$$H^*(w^0,J^0,\lambda)=J^0\nu^0-\frac{\lambda J^{0^2}\nu^{0^2}}{6mgl}\sin^4(2\pi w^0)$$

在上述计算中用了 $\nu^0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{l}}$，
$$H_0^*(J^0)=J^0\nu^0$$
$$\begin{aligned}H_1^*(w^0,J^0)&=-\frac{J^{0^2}\nu^{0^2}}{6mgl}\sin^4(2\pi w^0)\\&=-\frac{J^{0^2}\nu^{0^2}}{6mgl}\left[\frac{1-\cos(4\pi w^0)}{2}\right]^2\\&=-\frac{J^{0^2}\nu^{0^2}}{24mgl}\left[\frac{3}{2}-2\cos(4\pi w^0)+\frac{1}{2}\cos(8\pi w^0)\right]\end{aligned}$$
$$H_1^*(J)=\overline{H_1^*(w^0,J)}=\overline{H_1^*(w^0,J^0)}\big|_{J^0\to J}=-\frac{1}{16mgl}J^2\nu^{0^2}$$
$$H^*(J,\lambda)=H_0^*(J)+\lambda H_1^*(J)=J\nu^0-\frac{\lambda}{16mgl}J^2\nu^{0^2}$$
$$\nu=\frac{\partial H^*(J,\lambda)}{\partial J}\bigg|_{\lambda=1}=\nu^0-\frac{J\nu^{0^2}}{8mgl}$$
$$\nu-\nu^0=-\frac{J\nu^{0^2}}{8mgl}$$

其中 $\nu^0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$.
$$\begin{aligned}S_1(w^0,J)&=\int\frac{\overline{H_1^*(w^0,J)}-H_1^*(w^0,J)}{\nu^0(J)}\mathrm{d}w^0\\&=\int\left\{-\frac{J^2\nu^0}{16mgl}+\frac{J^2\nu^0}{24mgl}\left[\frac{3}{2}-2\cos(4\pi w^0)+\frac{1}{2}\cos(8\pi w^0)\right]\right\}\mathrm{d}w^0\\&=\frac{J^2\nu^0}{24mgl}\left[-\frac{1}{2\pi}\sin(4\pi w^0)+\frac{1}{16\pi}\sin(8\pi w^0)\right]\end{aligned}$$
$$S_0(w^0,J)=w^0J$$
$$\begin{aligned}S(w^0,J,\lambda)&=S_0(w^0,J)+\lambda S_1(w^0,J)\\&=w^0J+\lambda\frac{J^2\nu^0}{24mgl}\left[-\frac{1}{2\pi}\sin(4\pi w^0)+\frac{1}{16\pi}\sin(8\pi w^0)\right]\end{aligned}$$

由正则变换条件
$$p_i=\frac{\partial S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)}{\partial P_i}$$
$$J^0=\frac{\partial S}{\partial w^0}\bigg|_{\lambda=1}=J-\frac{J^2\nu^0}{12mgl}\left[\cos(4\pi w^0)-\frac{1}{4}\cos(8\pi w^0)\right]$$

$$w=\frac{\partial S}{\partial J}\bigg|_{\lambda=1}=w^0+\frac{J\nu^0}{12mgl}\left[-\frac{1}{2\pi}\sin(4\pi w^0)+\frac{1}{16\pi}\sin(8\pi w^0)\right]$$

$$=w^0-\frac{J\nu^0}{192\pi mgl}[8\sin(4\pi w^0)-\sin(8\pi w^0)]$$

由 $H^*(J,\lambda)$用哈密顿正则方程，

$$\dot{J}=-\frac{\partial H^*}{\partial w}\bigg|_{\lambda=1}=0,\quad J=C_1$$

$$\dot{w}=\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}\bigg|_{\lambda=1}=\nu^0-\frac{J\nu^{0^2}}{8mgl}$$

$$w=vt+C_2$$

θ,p 与 w^0,J^0 的变换关系前已求得，

$$\theta=\sqrt{\frac{J^0}{\pi ml\sqrt{gl}}}\sin(2\pi w^0)$$

或

$$\theta=\sqrt{\frac{2J^0\nu^0}{mgl}}\sin(2\pi w^0)$$

$$p=\sqrt{2ml^2J^0\nu^0}\cos(2\pi w^0)$$

或

$$p=2\pi ml^2\nu^0\sqrt{\frac{2J^0\nu^0}{mgl}}\cos(2\pi w^0)$$

11.6.7 如图 11.12 所示，一质量为 m 的质点被约束在一直线上运动，并被系于劲度系数均为 k、原长为 b 的两弹簧的端点，另一端固定. 质点运动轨道离弹簧的固定端点的最短距离为 a，$a>b$. 由正则微扰论，考虑一级微扰，求有限振幅的振荡频率的最低级修正.

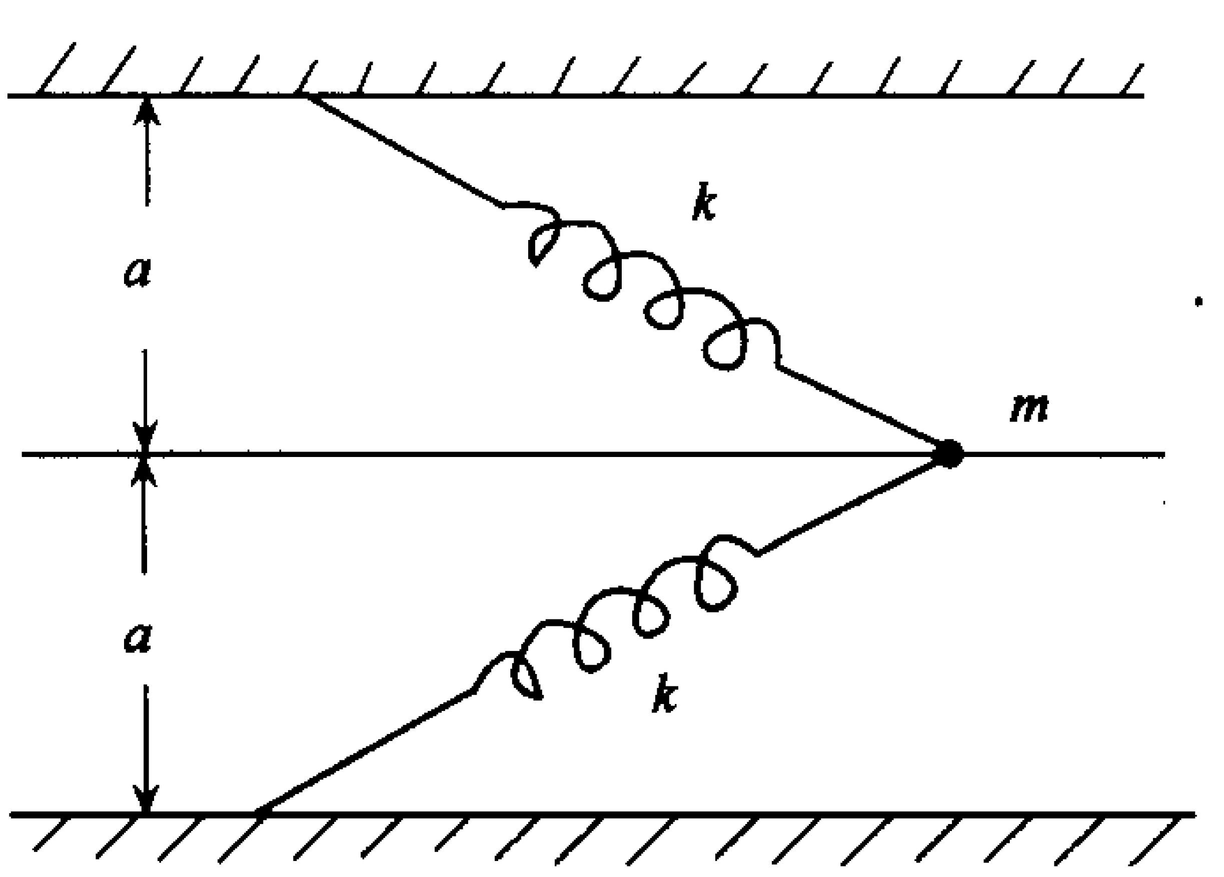


图 11.12

解

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V=2\times\frac{1}{2}k(\sqrt{a^2+x^2}-b)^2-2\times\frac{1}{2}k(a-b)^2$$

$$=kx^2+2kab\left(1-\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)$$

$$= kx^2 + 2kab\left[1 - \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{8a^4}\right)\right]$$

$$= k\left(1 - \frac{b}{a}\right)x^2 + \frac{kb}{4a^3}x^4$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + k\left(1 - \frac{b}{a}\right)x^2 + \lambda\frac{kb}{4a^3}x^4 \tag{1}$$

以后令 $\lambda=1$，

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + k\left(1 - \frac{b}{a}\right)x^2$$

$$H_1 = \frac{kb}{4a^3}x^4$$

$$\frac{p^2}{2m} + k\left(1 - \frac{b}{a}\right)x^2 = E$$

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\dfrac{E}{k\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)}} = 1$$

$$J^0 = \oint p\mathrm{d}x = \pi\sqrt{2mE}\cdot\sqrt{\frac{E}{k\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)}} = \pi E\sqrt{\frac{2ma}{k(a-b)}}$$

$$H_0^* = E = \frac{J^0}{\pi}\sqrt{\frac{k(a-b)}{2ma}}$$

特征函数 W^0 满足的方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W^0}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{k(a-b)}{a}x^2 = E$$

$$W^0 = \int\sqrt{2m\left[E - \frac{k(a-b)}{a}x^2\right]}\mathrm{d}x$$

$$\nu^0 = \dot{w}^0 = \frac{\partial H_0^*}{\partial J^0} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k(a-b)}{2ma}} \tag{2}$$

$$w^0 = \frac{\partial W^0}{\partial J^0} = \frac{\partial W^0}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J^0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k(a-b)}{2ma}}\cdot\sqrt{2m}\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{E - \dfrac{k(a-b)}{a}x^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k(a-b)}{aJ^0\nu^0}}x\right)$$

得最后一步用了

$$E = \frac{J^0}{\pi}\sqrt{\frac{k(a-b)}{2ma}} = J^0\nu^0$$

所以
$$x=\sqrt{\frac{J^0\nu^0 a}{k(a-b)}}\sin(2\pi w^0)$$
$$p=m\dot{x}=\sqrt{2mJ^0\nu^0}\cos(2\pi w^0)$$
将 x,p 代入式(1),得
$$H^*(w^0,J^0,\lambda)=J^0\nu^0+\lambda\frac{kb}{4a}\left[\frac{J^0\nu^0 a}{k(a-b)}\right]^2\sin^4(2\pi w^0)$$
$$H_0^*(J^0)=J^0\nu^0$$
$$H_1^*(w^0,J^0)=\frac{kb}{4a(a-b)^2}\left(\frac{J^0\nu^0}{k}\right)^2\sin^4(2\pi w^0)$$
$$=\frac{kb}{4a(a-b)^2}\left(\frac{J^0\nu^0}{k}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}-2\cos(4\pi w^0)+\frac{1}{2}\cos(8\pi w^0)\right]$$
$$H_0^*(J)=J\nu^0$$
$$H_1^*(w^0,J)=\frac{kb}{16a(a-b)^2}\left(\frac{J\nu^0}{k}\right)^2\left[\frac{3}{2}-2\cos(4\pi w^0)+\frac{1}{2}\cos(8\pi w^0)\right]\tag{3}$$
$$H_1^*(J)=\overline{H_1^*(w^0,J)}=\int_0^1 H_1^*(w^0,J)\mathrm{d}w^0=\frac{3kb}{32a(a-b)^2}\left(\frac{J\nu^0}{k}\right)^2\tag{4}$$
$$H^*(J)=H_0^*(J)+H_1^*(J)=J\nu^0+\frac{3kb}{32a(a-b)^2}\left(\frac{J\nu^0}{k}\right)^2$$
$$\nu=\frac{\partial H^*(J)}{\partial J}=\nu^0+\frac{3kb}{16a(a-b)^2}\frac{J\nu^{0^2}}{k^2}$$
$$\nu-\nu^0=\frac{3bJ\nu^{0^2}}{16a(a-b)^2k}=\frac{3bJ}{32\pi^2ma^2(a-b)}$$
$$\dot{J}=-\frac{\partial H^*}{\partial w}=0$$
$$J=C_1\quad(\text{常量})$$
$$\dot{w}=\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}$$
$$w=\nu t+C_2,C_2\text{ 为常量}$$
为求 J^0、w^0 与 J、ω 间的变换关系,需求出母函数 $S(w^0,J)$,
$$S_0(w^0,J)=w^0J$$
$$S_1(w^0,J)=\int\frac{H_1^*(J)-H_1^*(w^0,J)}{\nu^0(J)}\mathrm{d}w^0$$
代入式(2)、(3)、(4),经计算可得
$$S_1(w^0,J)=\frac{bJ^2\nu^0}{256\pi ka(a-b)^2}[8\sin(4\pi w^0)-\sin(8\pi w^0)]$$
$$S(w^0,J=S_0(w^0,J)+S_1(w^0,J)=w^0J+\frac{bJ^2\nu^0}{256\pi ka(a-b)^2}[8\sin(4\pi w^0)-\sin(8\pi w^0)]$$
$$J^0=\frac{\partial S}{\partial w^0}=J+\frac{bJ^2\nu^0}{32ka(a-b)^2}[4\cos(4\pi w^0)-\cos(8\pi w^0)]$$
$$w=\frac{\partial S}{\partial J}=w^0+\frac{bJ\nu^0}{128\pi ka(a-b)^2}[8\sin(4\pi w^0)-\sin(8\pi w^0)]$$

x、p 与 w^0、J^0 的变换关系前面已经得到，不再重述.

11.6.8 一个非线性谐振子的势能为

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{3}m\lambda x^3$$

其中 λ 是个小量，求受扰的作用、角变量与未受扰的线性谐振子的作用、角变量间的变换关系.

解

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{3}m\lambda x^3 \tag{1}$$

$$H_0=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$H_1=-\frac{1}{3}m\lambda x^3$$

$$\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

$$\frac{p^2}{2mE}+\frac{x^2}{\frac{2E}{k}}=1$$

$$J^0=\oint p\mathrm{d}q=\pi\sqrt{2mE}\cdot\sqrt{\frac{2E}{k}}=2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$H_0^*(J^0)=E=\frac{J^0}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\nu^0=\dot{w}^0=\frac{\partial H_0^*}{\partial J^0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$H_0^*(J^0)=\nu^0J^0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W^0}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

$$W^0=\int\sqrt{2m}\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}\mathrm{d}x$$

$$w^0=\frac{\partial W^0}{\partial J^0}=\frac{\partial W^0}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J^0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{2m}\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}}=\frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)$$

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin(2\pi w^0)=\sqrt{\frac{2\nu^0J^0}{k}}\sin(2\pi w^0)$$

$$p=m\dot{x}=m\sqrt{\frac{2\nu^0J^0}{k}}\cdot 2\pi\nu^0\cos(2\pi w^0)=\sqrt{2m\nu^0J^0}\cos(2\pi w^0)$$

将 x、p 代入(1)式，得

$$H^*(w^0,J^0,\lambda)=J^0\nu^0-\frac{1}{3}m\lambda\left(\frac{2\nu^0J^0}{k}\right)^{3/2}\sin^3(2\pi w^0)$$

$$H_0^*(J^0)=J^0\nu^0$$

$$H_1^0(w^0,J^0) = -\frac{1}{3}m\lambda\left(\frac{2\nu^0 J^0}{k}\right)^{3/2}\sin^3(2\pi w^0)$$

$$H_1^*(J) = \overline{H_1^*(w^0,J)} = \overline{H_1^*(w^0,J^0)|_{J^0\to J}}$$

$$= -\frac{1}{3}m\lambda\left(\frac{2\nu^0 J}{k}\right)^{3/2}\int_0^1 \sin^3(2\pi w^0)\mathrm{d}w^0 = 0$$

$$H_0^*(J) = \nu^0 J$$

$$H^*(J,\lambda) = H_0^*(J) + H_1^*(J) = \nu^0 J$$

$$\dot{w} = \nu = \frac{\partial H^*(J,\lambda)}{\partial J} = \nu^0$$

$$S_1(w^0,J) = \int \frac{H_1^*(J) - H_1^*(w^0,J)}{\nu^0(J)}\mathrm{d}w^0$$

$$= \frac{\lambda}{3}m\nu^{0\,1/2}\left(\frac{2J}{k}\right)^{3/2}\int \sin^3(2\pi w^0)\mathrm{d}w^0$$

$$= -\frac{\lambda}{18\pi}m\nu^{0\,1/2}\left(\frac{2J}{k}\right)^{3/2}[3\cos(2\pi w^0) - \cos^3(2\pi w^0)]$$

$$S_0(w^0,J) = w^0 J$$

$$S(w^0,J) = S_0(w^0,J) + S_1(w^0,J)$$

$$= w^0 J - \frac{\lambda}{18\pi}m\nu^{0\,1/2}\left(\frac{2J}{k}\right)^{3/2}[3\cos(2\pi w^0) - \cos^3(2\pi w^0)]$$

$$w = \frac{\partial S}{\partial J} = w^0 - \frac{\lambda}{18\pi}m\nu^{0\,1/2}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{2J}{k}\right)^{1/2}\cdot\frac{2}{k}[3\cos(2\pi w^0) - \cos^3(2\pi w^0)]$$

$$= w^0 - \frac{\lambda m}{6\pi k}\left(\frac{2J\nu^0}{k}\right)^{1/2}[3\cos(2\pi w^0) - \cos^3(2\pi w^0)]$$

$$J^0 = \frac{\partial S}{\partial w^0} = J + \frac{\lambda}{3}m\nu^{0\,1/2}\left(\frac{2J}{k}\right)^{3/2}\sin^3(2\pi w^0)$$

其中 $\nu^0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

11.6.9　如图 11.13 所示，一个质量为 m、绳长为 l 的平面摆被约束在一斜面上做小振动，当平面的倾角 α 缓慢变化时，它的振幅和能量将如何变化？如 $\alpha=\alpha_1$ 时，振幅为 A_1，缓慢变到 $\alpha=\alpha_2$ 时，振动的振幅 A_2 多大？在此过程中，对系统做了多少功？

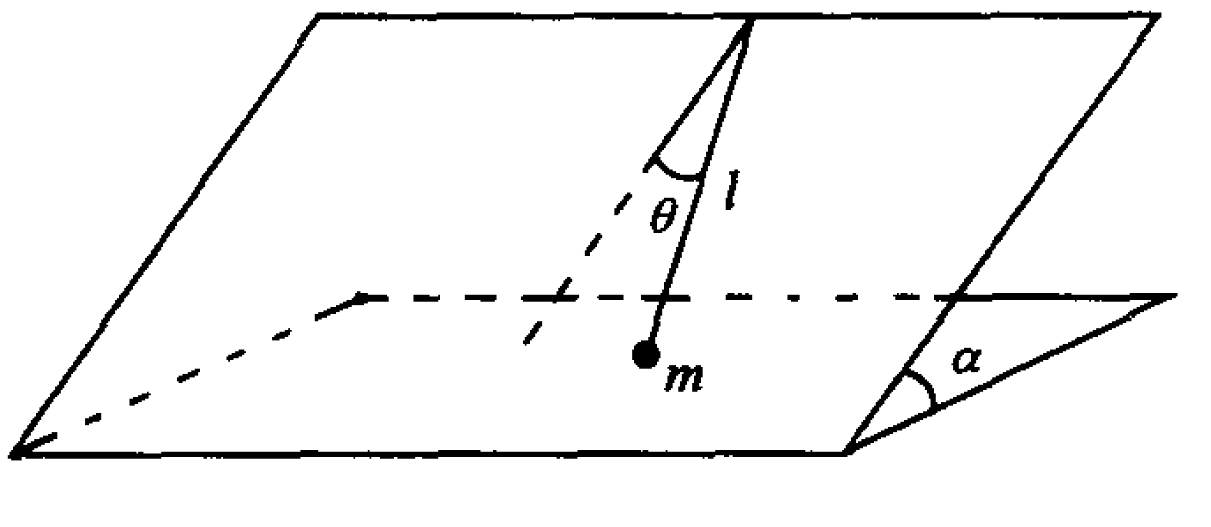


图 11.13

解

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1-\cos\theta)\sin\alpha \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2\sin\alpha$$

$$H=\frac{1}{2ml^2}p^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2\sin\alpha=E$$

$$\frac{p^2}{2ml^2E}+\frac{\theta^2}{\dfrac{2E}{mgl\sin\alpha}}=1$$

$$J=\oint p\mathrm{d}\theta=\pi\sqrt{2ml^2E}\cdot\sqrt{\frac{2E}{mgl\sin\alpha}}=2\pi E\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$$

$$E=\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{l}}$$

$$H^*=E=\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{l}}$$

$$\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{l}}$$

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2\sin\alpha=E$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{2ml^2}\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2\sin\alpha}$$

$$W=\sqrt{2ml^2}\int\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2\sin\alpha\mathrm{d}\theta}$$

$$w=\frac{\partial W}{\partial J}=\frac{\partial W}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J}=\frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{mgl\sin\alpha}{2E}}\theta\right)$$

$$\theta=\sqrt{\frac{2E}{mgl\sin\alpha}}\sin(2\pi w)$$

$$A=\sqrt{\frac{2E}{mgl\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{2}{mgl\sin\alpha}\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{l}}}$$

因为 J 是不变量，

$$A\propto(\sin\alpha)^{-1/4},\qquad \frac{A_2}{A_1}=\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\right)^{1/4}$$

所以

$$A_2=\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\right)^{1/4}A_1$$

前已求得

$$E=\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{l}}$$

在倾角 α 从 α_1 缓慢变到 α_2 的过程中，需对系统做的功为

$$W=E_2-E_1=\frac{J}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{g\sin\alpha_2}{l}}-\sqrt{\frac{g\sin\alpha_1}{l}}\right)$$

$$=E_1\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha_1}}\sqrt{\frac{g}{l}}(\sqrt{\sin\alpha_2}-\sqrt{\sin\alpha_1})$$

$$= \frac{E_1}{\sqrt{\sin\alpha_1}}(\sqrt{\sin\alpha_2} - \sqrt{\sin\alpha_1})$$

$$A_1^2 = \frac{2E_1}{mgl\sin\alpha_1}, \quad E_1 = \frac{1}{2}mglA_1^2\sin\alpha_1$$

$$W = \frac{1}{2}mglA_1^2\sqrt{\sin\alpha_1}(\sqrt{\sin\alpha_2} - \sqrt{\sin\alpha_1})$$

11.6.10 考虑 11.6.2 题所述系统,假定参量 F 从初始值缓慢变化,质点的能量、振动周期和振动振幅将如何变化?

解 11.6.2 题所述系统是一质量为 m 的质点,在势能 $V(x)=F|x|$(F 是正值常量)的力作用下做一维运动.

方法一:用 11.6.2 题已得的一些式子,

$$J = \frac{8\sqrt{2m}}{3F}E^{3/2}$$

$$H^*(J) = E = \left(\frac{3FJ}{8\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$$

$$\nu = \frac{\partial H^*}{\partial J} = \left(\frac{3F}{8\sqrt{2m}}\right)^{2/3} \cdot \frac{2}{3}J^{-1/3}$$

周期
$$T = \frac{1}{\nu} = \left(\frac{3F}{8\sqrt{2m}}\right)^{-2/3} \cdot \frac{3}{2}J^{1/3}$$

J 是绝热不变量,从 $E(F)$ 的函数关系可见,$E \propto F^{2/3}$

从 $T(F)$ 的函数关系可见,

$$T \propto F^{-2/3}$$

特征函数 W 满足的方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right)^2 + F|x| = E$$

$$W = \int \sqrt{2m(E - F|x|)}\mathrm{d}x$$

$$w = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial W}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J} = \nu\frac{\partial W}{\partial E}$$

$$= \nu\int\frac{\sqrt{2m}\mathrm{d}x}{2\sqrt{E - F|x|}}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2m}\,\dfrac{\nu}{F}(\sqrt{E} - \sqrt{E - Fx}) & x \geqslant 0 \\ \sqrt{2m}\,\dfrac{\nu}{F}(\sqrt{E + Fx} - \sqrt{E}) & x \leqslant 0 \end{cases}$$

注意:积分常数可以任取,这里取 $w(0)=0$,

$$\dot{w} = \nu = \frac{\partial H^*}{\partial J}$$

$$w = \nu t + C$$

从 $x \geqslant 0$ 的 $w(x) = \nu t + C$ 解出 x,得

$$x=\frac{1}{F}\left[E-\frac{F^2}{2m\nu^2}\left(\nu t+C-\frac{\nu}{F}\sqrt{2mE}\right)^2\right]$$

从 $x\leqslant 0$ 的 $w(x)=\nu t+C$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{F}\left[-E+\frac{F^2}{2m\nu^2}\left(\nu t+C+\frac{\nu}{F}\sqrt{2mE}\right)^2\right]$$

$$x_{\max}=\frac{E}{F},\qquad x_{\min}=-\frac{E}{F}$$

振幅
$$A=\frac{1}{2}(x_{\max}-x_{\min})=\frac{E}{F}$$

因为
$$E\propto F^{2/3}$$

所以
$$A\propto F^{2/3-1}\quad 即\ A\propto F^{-1/3}$$

方法二：用矢量力学的方法讨论 $A\propto F^{-1/3}$ 的问题：

$$V(x)=F|x|=\begin{cases}Fx & x\geqslant 0\\ -Fx & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$f(x)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}-F & x>0\\ F & x<0\end{cases}$$

$$m\ddot{x}=\begin{cases}-F & x>0\\ F & x<0\end{cases}$$

设质点运动的初始条件为

$$t=0\text{ 时},\ x=x_0>0,\ \dot{x}=v_0>0$$

在 $x\geqslant 0$ 的区域内，

$$\dot{x}=v_0-\frac{F}{m}t$$

$$\begin{aligned}x&=x_0+v_0t-\frac{F}{2m}t^2\\&=x_0+\frac{mv_0^2}{2F}-\left(\frac{mv_0^2}{2F}-v_0t+\frac{F}{2m}t^2\right)\\&=x_0+\frac{mv_0^2}{2F}-\left(\frac{F}{2m}t-\sqrt{\frac{m}{2F}}v_0\right)^2\end{aligned}$$

$$x_{\max}=x_0+\frac{mv_0^2}{2F}$$

为求 $x_{\min}$，先求出 $x=0$ 时的 $\dot{x}$，$x=0$ 时的 t_1 满足

$$x_0+v_0t_1-\frac{F}{2m}t_1^2=0$$

$$t_1=\frac{m}{F}\left(v_0+\sqrt{v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}}\right)$$

因为 $t_1>0$，另一个 $t_1<0$ 的根已舍去.

$$\dot{x}=v_0-\frac{F}{m}t_1=-\sqrt{v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}}$$

$$m\ddot{x}=F\qquad(x<0)$$

令 $t'=t-t_1$，则仍有
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t'^2}=F \quad (x<0)$$

初始条件：
$$t'=0, x=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}=-\sqrt{v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}=-\sqrt{v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}}+\frac{F}{m}t'$$

$$x=-\sqrt{v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}}t'+\frac{F}{2m}t'^2$$

$$=-\frac{m}{2F}\left(v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}\right)+\frac{m}{2F}\left(v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}\right)-\sqrt{v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}}t'+\frac{F}{2m}t'^2$$

$$=-\frac{m}{2F}\left(v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}\right)+\left[\sqrt{\frac{F}{2m}}t'-\sqrt{\frac{m}{2F}\left(v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}\right)}\right]^2$$

$$x_{\min}=-\frac{m}{2F}\left(v_0^2+\frac{2Fx_0}{m}\right)=-\left(x_0+\frac{mv_0^2}{2F}\right)$$

$$E=T+V=(T+V)|_{t=0}=\frac{1}{2}mv_0^2+Fx_0$$

所以
$$x_{\max}=\frac{E}{F}, \qquad x_{\min}=-\frac{E}{F}$$
$$A=\frac{1}{2}(x_{\max}-x_{\min})=\frac{E}{F}$$

仔细比较两种方法，可以看出结果是相同的.

说明：此系统并不做简谐振动，但是周期运动，最大值与平衡位置间的距离仍等于最小值与平衡位置间的距离，从画势能 V-x 图可以看出这一点，且 $x=0$ 为平衡位置，所以 $A=x_{\max}$.

11.6.11　考虑 11.6.3 题所述系统，假定参量 k 从初始值开始缓慢变化，质点的能量、振动周期和振动振幅将如何变化？

解　11.6.3 题所述系统是一个质量为 m 的质点，在势能 $V=-\frac{k}{|x|}$（k 为正值常量）的力作用下做一维运动，能量为负值.

解　11.6.3 题已得

$$J=\frac{2\pi\sqrt{2mk}}{\sqrt{-E}}$$
$$-E=\frac{8\pi^2mk^2}{J^2}$$
$$H^*=E=-\frac{8\pi^2mk^2}{J^2}$$
$$\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}=16\pi^2mk^2J^{-3}$$

周期
$$T=\nu^{-1}=\frac{J^3}{16\pi^2mk^2}$$

因为 J 是绝热不变量，由 $E(k)$ 及 $T(k)$ 的函数关系可知，

$$-E \propto k^2, \qquad T \propto k^{-2}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{k}{|x|} = E$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \sqrt{2m}\sqrt{E + \frac{k}{|x|}}$$

$$W = \int \sqrt{2m}\sqrt{E + \frac{k}{|x|}}\mathrm{d}x$$

$$w = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial W}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J} = \nu \cdot \sqrt{2m}\int \frac{1}{2\sqrt{E + \frac{k}{|x|}}}\mathrm{d}x$$

先考虑 $x \geqslant 0$ 部分的运动，

$$w = \nu\sqrt{2m}\int \frac{1}{2\sqrt{E + \frac{k}{x}}}\mathrm{d}x$$

令 $x=u^2$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$，则

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\nu\sqrt{2m}\int \frac{u}{\sqrt{k+Eu^2}} \cdot 2u\mathrm{d}u \\ &= \frac{\nu\sqrt{2m}}{E}\left[\int \frac{k+Eu^2}{\sqrt{k+Eu^2}}\mathrm{d}u - k\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k+Eu^2}}\right] \\ &= \frac{\nu\sqrt{2m}}{E\sqrt{-E}}\left[\int \sqrt{k-(\sqrt{-E}u)^2}\mathrm{d}(\sqrt{-E}u) - k\frac{\mathrm{d}(\sqrt{-E}u)}{\sqrt{k-(\sqrt{-E}u)^2}}\right] \end{aligned}$$

用积分公式

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

则
$$w = -\frac{\nu\sqrt{2m}}{2(-E)^{3/2}}\left[\sqrt{-Ex}\sqrt{x+Ex} - k\arcsin\sqrt{\frac{-Ex}{k}}\right]$$

经计算可得

$$\dot{w} = \frac{\nu\sqrt{2m}}{2\sqrt{k+Ex}}\sqrt{x}\,\dot{x}$$

又有
$$\dot{w} = \frac{\partial H^*}{\partial J} = \nu$$

所以
$$\nu = \frac{\nu\sqrt{2m}}{2\sqrt{k+Ex}}\sqrt{x}\,\dot{x}$$

$$\dot{x} = \frac{2\sqrt{k+Ex}}{\sqrt{2mx}}$$

$x=x_{\max}$时，$\dot{x}=0$，$k+Ex_{\max}=0$，

$$x_{\max} = \frac{k}{-E}$$

再考虑 $x<0$ 部分的运动.

$$w = \nu\sqrt{2m}\int \frac{1}{2\sqrt{E-\frac{k}{x}}}\mathrm{d}x$$

令 $x=u^2$,和上面的计算相仿,可得

$$w=\frac{\nu\sqrt{2m}}{2(-E)^{3/2}}\left[\sqrt{Ex}\sqrt{x-Ex}-k\arcsin\sqrt{\frac{Ex}{k}}\right]$$

$$\dot{w}=-\frac{\nu\sqrt{2m}}{2\sqrt{k-Ex}}\sqrt{-x}\,\dot{x}=\nu$$

$$\dot{x}=-\frac{2\sqrt{k-Ex}}{\sqrt{2m}\sqrt{-x}}$$

$x=x_{\min}$时,$\dot{x}=0$,由此得到

$$x_{\min}=\frac{k}{E}$$

振幅
$$A=\frac{1}{2}(x_{\max}-x_{\min})=\frac{k}{-E}$$

因为
$$-E\propto k^2$$

所以
$$A\propto k^{-1}$$

说明:(1) 上题所作的说明也适用于本题,因此,$x_{\min}$可以不作计算,$A=x_{\max}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{2m}\sqrt{E+\frac{k}{|x|}}$,不是只能取正号,因此在 $x>0$ 的区域,$\dot{x}>0$、$\dot{x}<0$ 均是可能的;在 $x<0$ 的区域,$\dot{x}>0$,$\dot{x}<0$ 也均是可能的.

11.6.12 一个完全弹性的球在两个平行的墙之间做一维运动,设两墙相距为 l,问:

(1) 当一个墙缓慢地移动时;

(2) 当球的质量缓慢变化时,球的能量、振动周期将如何变化?

解
$$J=\oint p\mathrm{d}x=2pl$$

$$E=\frac{1}{2m}p^2,\qquad p=\sqrt{2mE}$$

$$J=2\sqrt{2mE}l$$

$$H^*=E=\frac{1}{2m}\left(\frac{J}{2l}\right)^2=\frac{1}{8ml^2}J^2$$

$$\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}=\frac{1}{4ml^2}J$$

$$T=\nu^{-1}=\frac{4ml^2}{J}$$

由 $E=\frac{1}{2ml^2}J^2$, $T=\frac{4ml^2}{J}$可见:

(1) l 缓慢变化时,$E\propto l^{-2}$, $T\propto l^2$;

(2) m 缓慢变化时,$E\propto m^{-1}$, $T\propto m$.

11.6.13 在小振动极限下,考虑一个质量为 m 的单摆,假定长为 l 的摆线非常缓慢

地被缩短(通过在支承点处一个无摩擦小孔向上拉摆线,如图 11.14 所示),使 l 在一个周期内的相对变化很小. 问振动幅度怎样随 l 改变?

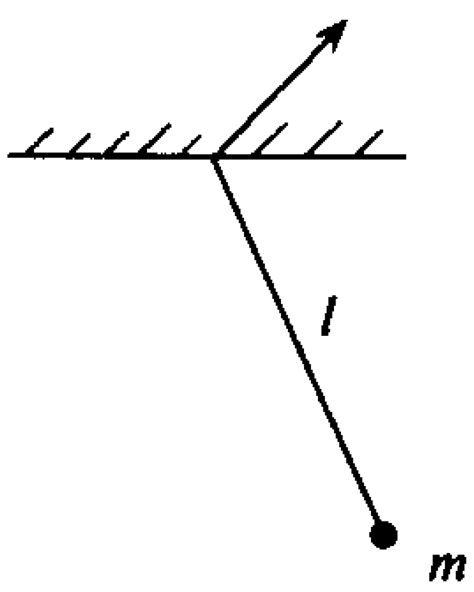


图 11.14

解
$$H=\frac{1}{2ml^2}p^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=E$$
$$\frac{p^2}{2ml^2}+\frac{\theta^2}{\frac{2E}{mgl}}=1$$
$$J=\oint p\mathrm{d}\theta=\pi\sqrt{2ml^2E}\cdot\sqrt{\frac{2E}{mgl}}=2\pi E\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$H^*=E=\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=E$$
$$W=\sqrt{2ml^2}\int\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}\mathrm{d}\theta$$
$$w=\frac{\partial W}{\partial J}=\frac{\partial W}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J}=\nu\cdot\sqrt{2ml^2}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{2ml^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}mgl}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{1}{2}mgl}\theta\right)}{\sqrt{E-\frac{1}{2}mgl\theta^2}}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{mgl}{2E}}\theta\right)$$
$$\theta=\sqrt{\frac{2E}{mgl}}\sin(2\pi w)$$

振幅
$$A=\sqrt{\frac{2E}{mgl}}=\sqrt{\frac{2}{mgl}\cdot\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}}=\sqrt{\frac{J}{\pi m\sqrt{g}}}l^{-3/4}$$

所以
$$A\propto l^{-3/4}.$$

11.6.14　一个质量为 m 的粒子,被限制在一个盒子里仅能沿 x 轴运动,盒子的两端的面以比粒子的速率小得多的速率 v 向中心移动,如图 11.15 所示.

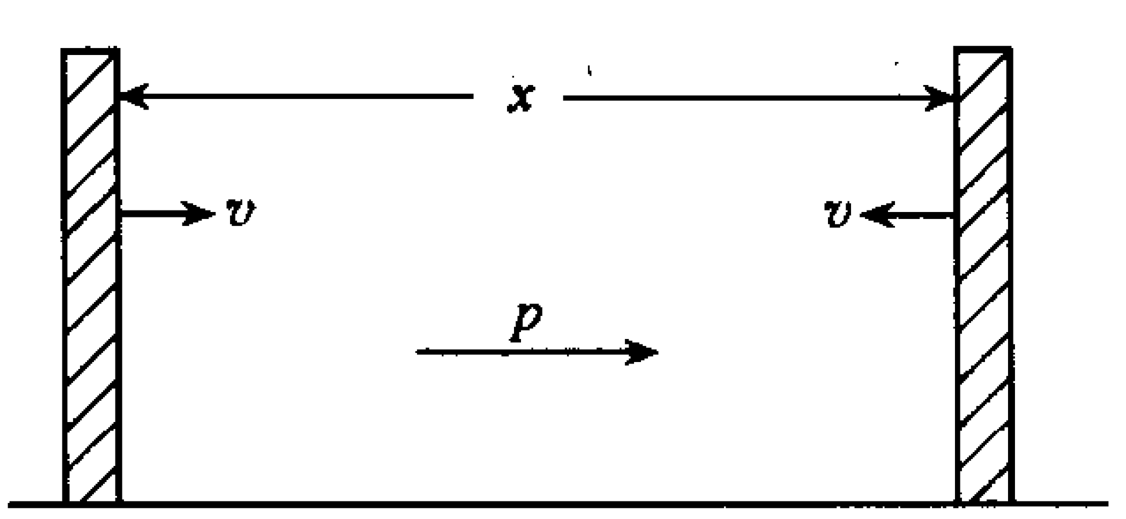


图 11.15

(1) 若盒壁相距 x_0 时粒子的动量为 p_0,求出以后任何时候粒子的动量(粒子和盒壁的碰撞是完全弹性的,并设在所考虑的时间内粒子的速率都远小

于光速);

(2) 当盒壁相距 x 时,为使两壁以恒定速率 v 运动,必须施加在每一盒壁平均外力多大?

解　因为两壁的速率 v 比粒子的速率小得多,可认为两壁间的距离缓慢地变小,对粒子而言,是一个绝热不变量问题.

(1) 粒子的作用变量 J 为不变量,

$$J=\oint p\mathrm{d}x = p\cdot 2x = p_0\cdot 2x_0$$

$$p=\frac{p_0x_0}{x}$$

取两壁相距为 x_0 时为 $t=0$,则 $x=x_0-2vt$

$$p=\frac{p_0x_0}{x_0-2vt}$$

(2) 粒子对两壁的作用只在发生碰撞时存在. 现考虑平均作用力,可以视为连续作用. 以两盒壁与粒子为系统,设作用于两壁的平均外力大小均为 $\overline{F}$,方向均与其速度相同.

方法一:对系统用动能定理,注意两壁动能不变,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2m}p^2\right)=2\overline{F}v$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2m}\frac{p_0^2x_0^2}{(x_0-2vt)^2}\right]=2\overline{F}v$$

$$\frac{1}{2m}p_0^2x_0^2(-2)\frac{(-2v)}{(x_0-2vt)^3}=2\overline{F}v$$

所以

$$\overline{F}=\frac{p_0^2x_0^2}{m(x_0-2vt)^3}=\frac{p_0^2x_0^2}{mx^3}$$

方法二:考虑粒子与盒壁发生碰撞时动量的增量. 以盒壁为参考系,在两壁相距为 x 时,粒子对静参考系的速率为 $\frac{p}{m}$,对盒壁参考系,速率为 $\frac{p}{m}+v$,做弹性碰撞,碰撞使粒子动量的增量(绝对值)为

$$\Delta p = m\left(\frac{p}{m}+v\right)-\left[-m\left(\frac{p}{m}+v\right)\right]=2(p+mv)$$

做这样一次碰撞经历的时间为

$$\Delta t=\frac{2x}{\frac{p}{m}}=\frac{2mx}{p}$$

粒子所受的平均作用力的大小也就是一个盒壁所受的平均作用力的大小,

$$\overline{F}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{2(p+mv)}{\frac{2mx}{p}}\approx\frac{p^2}{mx}$$

这里用了 $p\gg mv$. 代入 $p=\frac{p_0x_0}{x}$,即得

$$\overline{F}=\frac{p_0^2x_0^2}{mx^3}$$

11.6.15　一摆由一根长为 L、质量为 M 均质刚性杆和一个质量为 $\frac{1}{3}M$ 沿杆爬动的昆虫组成，如图 11.16 所示. 杆的一端安上轴，在竖直平面内摆动. 当 $t=0$ 时，杆偏离铅垂线的角度为 θ_0，处于静止，昆虫爬在杆上有轴的那一端以固定速率 v 慢慢爬向杆的底端，假设 $\theta_0 \ll$ 1rad.

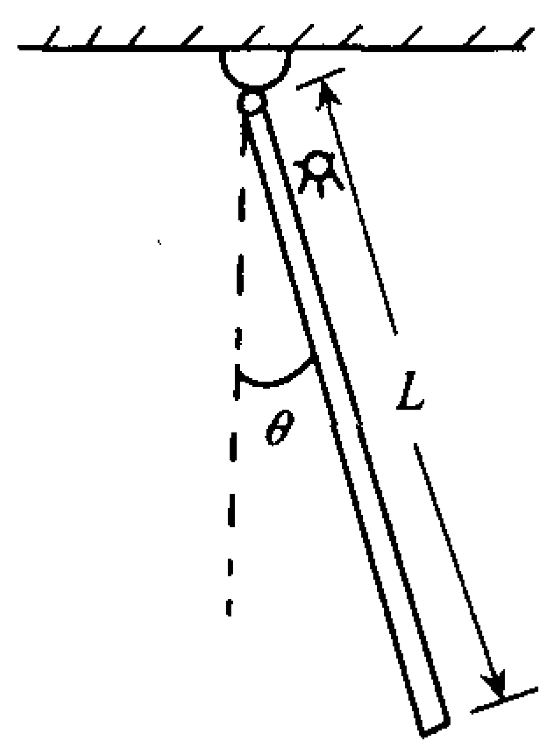


图 11.16

(1) 求当昆虫沿杆爬了 l 时摆的摆动频率；

(2) 求当昆虫爬到杆的底端时摆的振幅；

(3) 为了使(1)、(2)中的结论有效，昆虫的爬动应该多慢？

解　(1)

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2+\frac{1}{3}Ml^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}Mv^2$$

$$\approx\frac{1}{6}M(L^2+l^2)\dot{\theta}^2$$

$$\nu=\left(\frac{1}{2}MgL+\frac{1}{3}Mgl\right)(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2$$

$$L=\frac{1}{6}M(L^2+l^2)\dot{\theta}^2-\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{3}M(L^2+l^2)\dot{\theta}$$

$$H=p\dot{\theta}-L=\frac{3p^2}{2M(L^2+l^2)}+\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2=E$$

$$\frac{p^2}{\frac{2}{3}M(L^2+l^2)E}+\frac{\theta^2}{\frac{12E}{Mg(3L+2l)}}=1$$

$$J=\oint p\mathrm{d}\theta=\pi\sqrt{\frac{2M(L^2+l^2)E}{3}}\cdot\sqrt{\frac{12E}{Mg(3L+2l)}}$$

$$=2\pi E\sqrt{\frac{2(L^2+l^2)}{(3L+2l)g}}$$

$$H^*=E=\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{(3L+2l)g}{2(L^2+l^2)}}$$

$$\nu=\frac{\partial H^*}{\partial J}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(3L+2l)g}{2(L^2+l^2)}}$$

(2)

$$\frac{3}{2M(L^2+l^2)}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2=E$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{\frac{2M(L^2+l^2)}{3}\left[E-\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2\right]}$$

$$W=\sqrt{\frac{2M(L^2+l^2)}{3}}\int\sqrt{E-\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2}\mathrm{d}\theta$$

$$w=\frac{\partial W}{\partial J}=\frac{\partial W}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(3L+2l)g}{2(L^2+l^2)}}\cdot\sqrt{\frac{2M(L^2+l^2)}{3}}\int\frac{d\theta}{2\sqrt{E-\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{\sqrt{E-\frac{1}{12}Mg(3L+2l)\theta^2}}d\left(\sqrt{\frac{1}{12}Mg(3L+2l)}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{Mg(3L+2l)}{12E}}\theta\right)$$

$$\theta = \sqrt{\frac{12E}{Mg(3L+2l)}}\sin(2\pi w)$$

振幅
$$A=\sqrt{\frac{12E}{Mg(3L+2l)}}=\sqrt{\frac{12}{Mg(3L+2l)}\sqrt{\frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{(3L+2l)g}{2(L^2+l^2)}}}}$$

对于一个缓变系统,作用变量 J 非常近似为常量,所以振幅 A 与参量 l 的关系为

$$A\propto[(3L+2l)(L^2+l^2)]^{-1/4}$$

在 $l=0$ 时,$A=\theta_0$. 设 $l=L$ 时,$A=\theta_1$,则

$$\frac{\theta_1}{\theta_0}=\left[\frac{3L\cdot L^2}{(3L+2L)(L^2+L^2)}\right]^{1/4}=\left(\frac{3}{10}\right)^{1/4}$$

所以
$$\theta_1=\left(\frac{3}{10}\right)^{1/4}\theta_0.$$

(3) 为使(1)、(2)的结果有效,必须满足绝热不变量要求的条件,要求昆虫的爬动速率 $v=\dot{l}$ 很慢,要求.

$$\frac{\dot{l}}{l}\ll\nu\qquad 即\frac{v}{l}\ll\nu$$

$$v\ll\frac{1}{2\pi}l\sqrt{\frac{(3L+2l)g}{2(L^2+l^2)}}\quad 或\, v\ll\frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

l 可以很小,但不能严格等于零. 上式才有可能满足.

第十二章　狭义相对论力学

12.1　洛伦兹变换

12.1.1　简单叙述一下需要狭义相对论来解决的难题；叙述一种可能不需要狭义相对论的早期理论，并举出一个证明这种理论是错误的实验；叙述一个证明狭义相对论可信的近代实验.

解　牛顿力学遇到的困难主要是：根据麦克斯韦的电磁场理论，电磁波在真空中的传播速度恒为 c，与辐射源的速度无关，这与惯性系间的伽利略变换相矛盾，真空中的光速不遵从经典力学的速度合成法则.

早期人们提出以太理论，认为以太既在介质中存在又在真空中存在，是电磁波的荷载者. 麦克斯韦的电磁理论仅对以太或对以太为静止的参考系才成立. 测量地球相对于以太的运动速度的迈克耳孙实验证明以太理论是错误的. 实验结果是地球相对于以太是静止的，这显然与认为只有以太是绝对静止的参考系相抵触. 既然不能说明以太的存在，以太理论必须放弃.

赫特的实验可以证明狭义相讨论可信. 高速飞行的正电子在湮没时发出两个 γ 光子，实验发现两个光子能同时到达在距湮没发生的地点等距离的探测器，表明从高速飞行的辐射源向不同方向发射的光有恒定的速率.

12.1.2　菲佐实验所用的装置如图 12.1 所示. 光源发出的、在真空中波长为 λ 的光，经镀有半透膜的玻璃片 M 分成两束相干光，一束透射，经 M_1、M_2、M_3，再在 M 处透射，射入望远镜 T；另一束经 M 反射，经 M_3、M_2、M_1，再在 M 处反射，射入望远镜 T，前者顺水

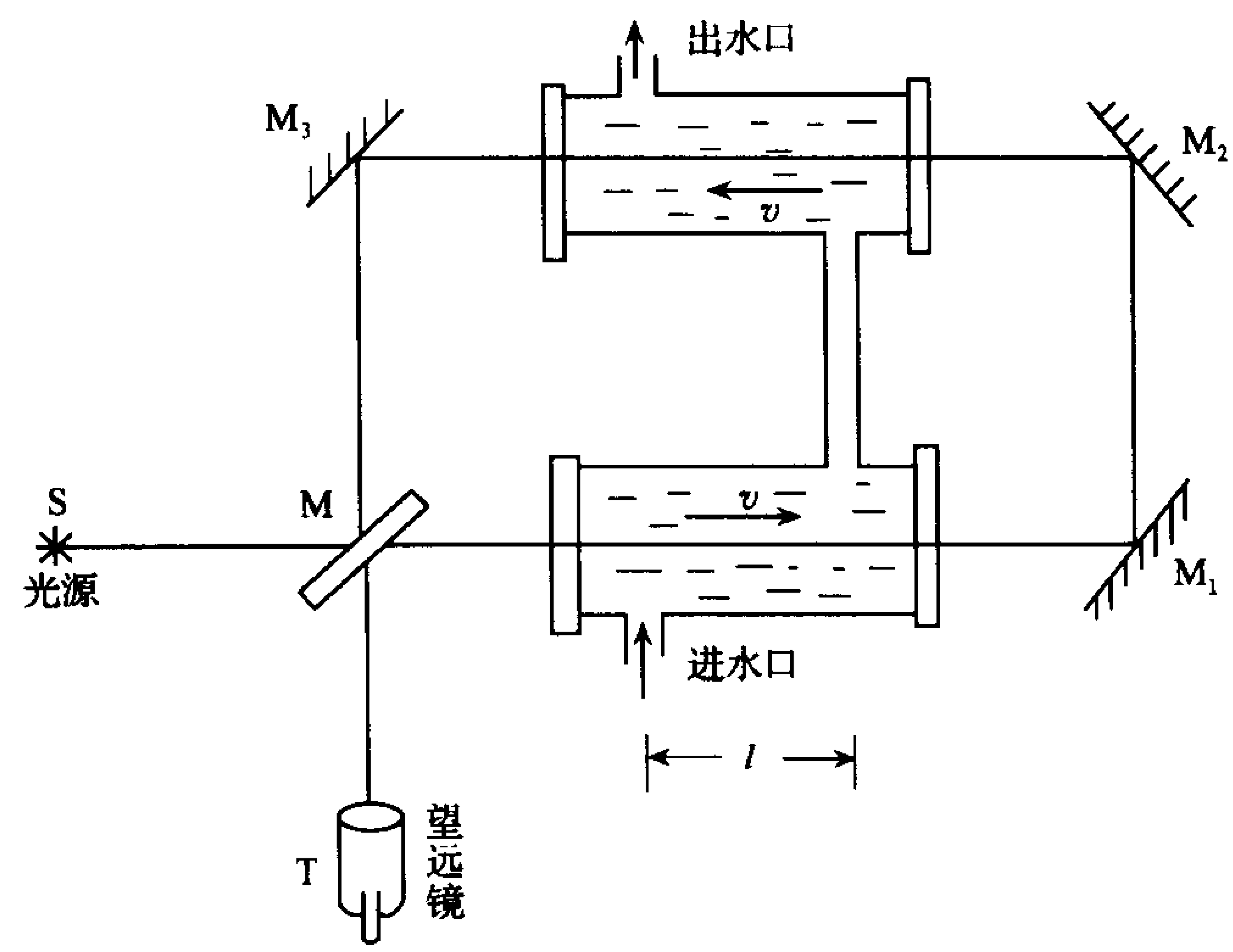


图 12.1

速而行,后者逆水速而行. 设水速为 v,水的折射率为 n,若光相对于静止水中以太的速率为$\frac{c}{n}$,以 v 的速率运动的水带动以太的速率为 kv,用钠黄光作光源,$\lambda=5893\times10^{-10}\text{m}$,$l=1.5\text{m}$,$v=7.0\text{m/s}$,$n=1.33$,观察到与 $v=0$ 的情况相比,测得移动的干涉条纹为 $\delta=0.19$,根据以太存在的假设,k 应取何值?

解 顺水而行的光束在水中相对于以太的速率为$\frac{c}{n}-kv$,逆水而行的光束在水中相对于以太的速率为$\frac{c}{n}+kv$,两束光从光源出发到达望远镜的光程差为

$$\left(\frac{2l}{\frac{c}{n}-kv}-\frac{2l}{\frac{c}{n}+kv}\right)c$$

两束光由于此光程差引起移动的干涉条纹数为

$$\delta=\left(\frac{2l}{\frac{c}{n}-kv}-\frac{2l}{\frac{c}{n}+kv}\right)\frac{c}{\lambda}$$

解出

$$k=\frac{\delta\lambda c}{4lvn^2}=\frac{0.19\times5893\times10^{-10}\times3\times10^8}{4\times1.5\times7.0\times(1.33)^2}=0.45$$

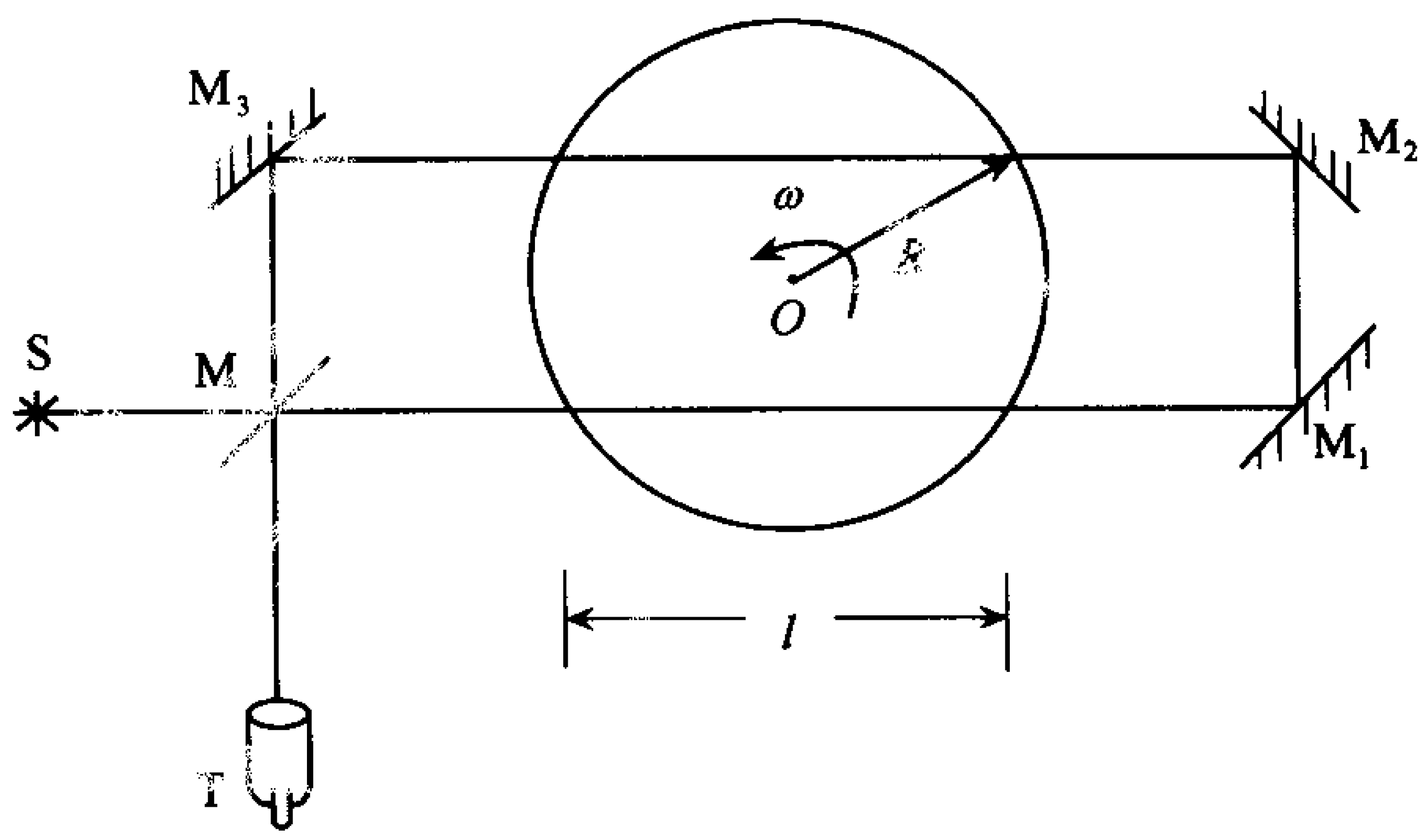


图 12.2

12.1.3 改用本题图的实验装置做上述菲佐实验,半径为 R、折射率为 n 的玻璃圆柱绕固定的 O 点以恒定角速度 ω 转动. 两束光通过玻璃的距离均为 $2l$,求射入望远镜 T 的两束光的光程差,设圆柱拖动以太的系数为 k.

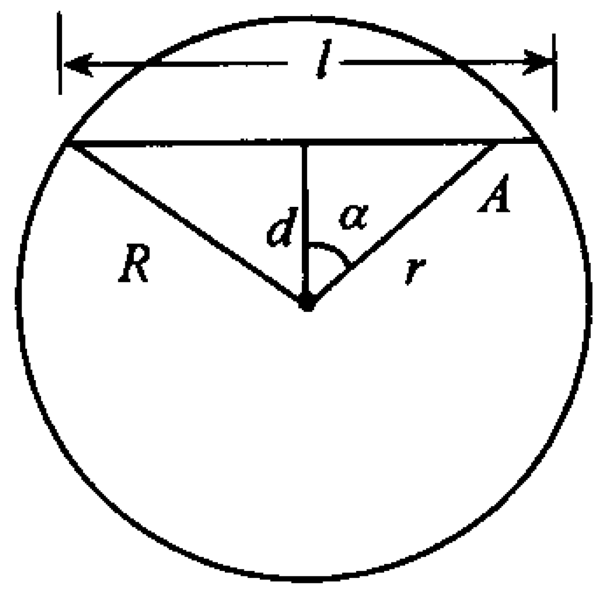


图 12.3

解 考虑图 12.3 中 A 点处以太的速度在光的运行方向的分量为

$$\pm k\omega r\cos\alpha=\pm k\omega d=\pm k\omega\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\pm\frac{1}{2}k\omega\sqrt{4R^2-l^2}$$

与 α 无关.

两束光的光程差为

$$\left(\frac{2l}{\frac{c}{n}-\frac{1}{2}k\omega\sqrt{4R^2-l^2}}-\frac{2l}{\frac{c}{n}+\frac{1}{2}k\omega\sqrt{4R^2-l^2}}\right)c$$

$$=\frac{8lck\omega n^2\sqrt{4R^2-l^2}}{4c^2-k^2\omega^2n^2(4R^2-l^2)}$$

12.1.4　一个速度为 v 的航天旅行者和他的地球上的朋友，在出发时对好了钟的时刻分别为 $t'=0$（旅行者的钟）和 $t=0$（地球上的钟）. 地球上的朋友同时观察两个钟，直接观察 t，用望远镜观察 t'，试问，当 t' 读数为 1 小时时，t 的读数为多少？

解　用洛伦兹变换公式，在动坐标系 $x'=0$，$t'=1$ 小时时相应于地球坐标系中的位置和时间分别为

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_1=\frac{t'+v\frac{x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{（小时）}$$

注意：上述写法所用的单位为：长度以米计，时间以小时计.

动钟为 $t'=1$ 小时的信号传到地球上的朋友处（$x=0$），需时（地球上钟的示数）

$$t_2=\frac{x}{c}=\frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{（小时）}$$

因此收到 $t'=1$ 小时的信号时，地球上的钟的读数为

$$t=t_1+t_2=\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\text{（小时）}$$

12.1.5　在地球上某地发生的一个过程经历的时间为 Δt，问在以每小时 1800km 的恒定速度飞行的飞机上的观察者测得的此过程经历的时间为多大？若过程开始时两钟读数相同，经过多长时间飞机上的钟的读数又和地球上的钟的读数相同.

解　方法一：用洛伦兹变换公式

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

因为过程发生在地球上同一地点，过程的开始和结束的 x 坐标相同，故 $\Delta x=0$，所以

$$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

今 $v=1800\times10^3/3600=500(\mathrm{m/s})$，所以

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{500}{3\times10^8}\right)^2}}$$

当 $\Delta t=1\mathrm{s}$ 时，$\Delta t'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{500}{3\times10^8}\right)^2}}$，飞机上的钟走快的时间为 $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{500}{3\times10^8}\right)^2}}-1$ (s).

当飞机上的钟走快 24h 时，飞机上的钟的读数又和地球上的钟的读数相同，在地球上的人看来需经历的时间为

$$\frac{24\times3600}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{500}{3\times10^8}\right)^2}}-1} = \frac{24\times3600}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{500}{3\times10^8}\right)^2-1} = 48\times3600\times\left(\frac{3\times10^8}{500}\right)^2$$

$$= \frac{2}{365}\left(\frac{3\times10^8}{500}\right)^2(\text{年}) = 1.97\times10^9\ \text{年}$$

方法二：直接用动钟变慢效应，在飞机上的观察者看，地球上的钟是动钟，变慢了

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{500}{3\times10^8}\right)^2}}$$

当然，在地球上的观察者看来，飞机上的钟是动钟，也是变慢的，但是过程的起始和终结时处于 S' 系(固连于飞机)的不同位置. 地球上的观察者看到的是 $x'=0$ 和 $x'=-v\Delta t$ 的两个钟. 两个钟的读数差既要考虑动钟变慢后的时间又得加上拨快量，

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{(-v)}{c^2}(-v\Delta t' - 0)$$

后一项是 $x'=-v\Delta t$ 处的钟较之 $x'=0$ 处的钟拨快的时间，

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

以下同方法一.

12.1.6 静止时 μ 子的平均寿命为 $2.197\times10^{-6}\mathrm{s}$，在宇宙射线中，$\mu$ 子的速度可达 $0.99c$(c 为真空中的光速)，在地球上的观察者看来，平均来讲，这种高速的 μ 子能运动多大距离？

解 方法一：用洛伦兹变换公式，取地球为 S 系，固连于 μ 子的坐标系为 S' 系，

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

今 $\Delta x'=0,\Delta t'=\tau_0,\Delta t=\tau$. 其中 τ_0 是静止 μ 子的平均寿命，τ 是地球上的观察者看到的高速 μ 子的平均寿命.

在地球上的观察者看来，高速 μ 子平均讲能运动的距离为

$$l = v\tau = 0.99\times 3.0\times 10^8 \cdot \frac{2.197\times 10^{-6}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.99c}{c}\right)^2}} = 4.6\times 10^3(\mathrm{m})$$

方法二：用动钟变慢效应. 在 S' 系中，μ 子蜕变发生在同一地点，S' 系中的钟是动钟，

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2},\qquad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

以下同方法一.

12.1.7　在离观测者距离为 L 的位置上有一只时钟 B，说明怎样能使这只钟与观测者身边的时钟 A 时间上一致？

答　让时钟 B 的读数停在 $t_B=\dfrac{L}{C}$ 上，在 $t_A=0$（时钟 A 的读数）时从 A 钟处向 B 钟发出一个光信号，在信号到达 B 钟时立即开动 B 钟. 这样 B 钟就已校准，与 A 钟一致.

12.1.8　设 S' 系以速度 v 相对于 S 系运动，在两个坐标原点重合的时刻，放在两个坐标原点的时钟指示同一时刻，$t=t'=0$. 试问：在 S 系和 S' 系中以后都有 $t=t'$ 的点 (x,y,z) 和 (x',y',z') 将分别随 t 和 t' 如何变化？

解　取 x、x' 轴沿有相对运动的方向，正向一致，S' 系以 v 的速度沿 x 轴向正方向运动，

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad t=t'$$

两式中消去 t，得

$$x' = \frac{c^2}{v}\left[\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}-1\right]t'$$

在满足上述关系的 (x',t')（y'、z' 任意）处均有 $t=t'$.

同样，由

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad t'=t$$

可得

$$x=-\frac{c^2}{v}\left[\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}-1\right]t$$

在满足上述关系的(x,t)(y、z任意)处,均有$t'=t$.

12.1.9 假如一艘宇宙飞船以恒定速度$v=\sqrt{0.9999}c$飞行,试问飞船飞到距地球4光年远的半人马星座并返回地球的旅行中应储备够用多少时间的粮食及其他装备?

解 取S系、S'系分别固连于地球和宇宙飞船,在此旅行中需时

$$\Delta t=8(年)$$

在飞船上的钟(动钟)经历的时间为

$$\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=0.08\ 年=29.2\ 天$$

往返途中应储备30天的粮食和其他装备.

12.1.10 一列车以$v=0.6c$(c为真空中的光速)的恒定速度运动,经过地面上A、B两点所用的时间为40min(以列车上静止的钟计时).求:

(1) 地面上的人测得的A、B间的距离;

(2) 列车上的人测得的A、B间的距离;

(3) 在列车上的人看来,地面上B处的钟比A处的钟拨快了多少?

解 (1) 地面上的人看列车由A到B经历的时间为

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

A、B间的距离为

$$\Delta L=v\Delta t=0.6c\cdot\frac{40\times 60}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}=5.4\times 10^{11}(\text{m})$$

(2) 列车上的人测得的A、B间距离为

$$\Delta L'=v\Delta t'=0.6\times 3\times 10^8\times 40\times 60=4.32\times 10^{-11}(\text{m})$$

(3) 方法一:在S系中历时Δt,而在S'系中的观察者看来,S系的钟是动钟,由动钟变慢效应,应历时为$\Delta t'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$.故在他看来,$B$处的钟比$A$处的钟拨快的时间为

$$\delta=\Delta t-\Delta t'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\Delta t'\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{\Delta t'\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=18(\text{min})$$

方法二:直接用拨快量公式

$$\delta=\frac{v}{c^2}\Delta x=\frac{v}{c^2}\Delta l=\frac{0.6c}{c^2}\times 5.4\times 10^{11}=1.06\times 10^3(\text{s})=18\text{min}$$

12.1.11　在惯性系 S' 中的同一地点先后发生两个事件，时间间隔为 $\Delta t'=300\text{s}$，在另一惯性系 S 中测得这两个事件的时间间隔为 $\Delta t=500\text{s}$. 求在惯性系 S 中测得的这两个事件发生的地点相距多远？

解　设 S' 系以 v 的速度对 S 系沿 x 轴正向运动，在 S' 系中两事件发生在同一地点，$\Delta x'=0$.

两事件在 S 系经历的时间

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

解出

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2}$$

在 S 系中两事件发生地点相距

$$\Delta x=v\Delta t=c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta t}\right)^2}\Delta t=c\sqrt{(\Delta t)^2-(\Delta t')^2}$$

$$=3\times 10^8\sqrt{(500)^2-(300)^2}=1.2\times 10^{11}(\text{m})$$

12.1.12　静长为 L 的车厢以 v 的恒定速度运动，在车厢的后端 A 沿运动方向发出一光信号，经前端 B 的平面镜反射回到后端 A. 求：

(1) 在车厢里的人看来，光信号从发出到到达 B 端所需的时间 $\Delta t_1'$ 以及从 A 端发出到返回 A 端所需的时间 $\Delta t_2'$；

(2) 在地面上的人看来，与 $\Delta t_1'$、$\Delta t_2'$ 相应的时间.

解　(1) $\Delta t_1'=\dfrac{L}{c}$，　$\Delta t_2'=\dfrac{2L}{c}$.

(2) 方法一：在 S 系(固连于地面)中光从后端 A 到前端 B，经历的时间为 Δt，光信号运动的距离为 $c\Delta t$，等于车厢运动的距离 $v\Delta t$，加上车厢的长度，但车厢是高速运动的，其长度不是静长，而是由动尺收缩效应得出的长度 $L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，

$$c\Delta t_1=v\Delta t_1+L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

所以

$$\Delta t_1=\frac{L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c-v}=\frac{L}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

同样考虑从 A 端发出光信号到返回 A 端经历的时间 Δt_2 内，有如下关系：

$$c\Delta t_2=v\Delta t_1+2L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}-v(\Delta t_2-\Delta t_1)$$

其中最后一项 $v(\Delta t_2-\Delta t_1)$是在光信号从前端 B 返回后端 A 期间，车厢后端也即车厢向前运行的距离

$$\Delta t_2=\frac{1}{c+v}\left[2L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}+2v\Delta t_1\right]$$

代入 Δt_1，经计算可得

$$\Delta t_2=\frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

方法二：用洛伦兹变换公式，

$$\Delta t_1=\frac{\Delta t_1'-\frac{v}{c^2}\Delta x_1'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

代入 $\Delta t_1'=\frac{L}{c}$，$\Delta x_1'=L$，可得

$$\Delta t_1=\frac{L}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}},\Delta t_2=\frac{\Delta t_2'-\frac{v}{c^2}\Delta x_2'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

代入 $\Delta t_2'=\frac{2L}{c}$，$\Delta x_2'=0$，即得

$$\Delta t_2=\frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

12.1.13　两条静止长度均为 L_0 的宇宙飞船 A、B 沿平行的轨道以恒定的相对速率相向而行，A 船上的观察者看到自己的船头先与对方的船尾相遇，Δt 时间后，自己的船尾再与对方的船头相遇，试问：

（1）B 船上的观察者看到两船相遇的次序是怎样的？

（2）两船的相对速度多大？

（3）看到两船以大小相等、方向相反的速度运动的观察者看到两船两端相遇的次序如何？

解　（1）A 船上的观察者看自己的船长为 L_0，B 船长为 $L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$（$v$ 是两船的相对速率），B 船上的观察者看自己的船长为 L_0，A 船长为 $L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$.

A 船上的观察者看两船相遇的次序是 A 船的船头先与 B 船尾相遇，Δt 时间后，自己的船尾再与 B 船头相遇.

B 船上的观察者看到的次序正好相反，先是自己的船头与 A 船尾相遇，$\Delta t'$时间后，自己的船尾再与 A 船头相遇.

(2) 根据 A 船上的观察者看到的情况，可得

$$L_0 - L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = v\Delta t$$

解出

$$v = \frac{2L_0\Delta t}{\left[\frac{L_0^2}{c^2}+(\Delta t)^2\right]} = \frac{2c^2L_0\Delta t}{L_0^2+c^2(\Delta t)^2}$$

(3) 看到两船以大小相等、方向相反的速度运动的观察者，看两船的长度相同，两船相遇的次序是 A 船头与 B 船尾相遇时，A 船尾与 B 船头也相遇.

12.1.14　一艘火箭飞船以 $v=0.8c$ 的速度飞经地球，相遇时都把时间调整到 12 点整.

(1) 飞船上的时钟 12 点半时飞经一相对于地球静止、它的钟也与地球同步的宇航站，此时宇航站的指示何时？

(2) 地球上的人测得的宇航站离地球多远？

(3) 飞船经宇航站时，向地球发一信号，地球上的人何时收到这个信号？

(4) 地球上的人收到信号后立即发回信号，飞船上的人何时接到信号？

解　(1) 方法一：S' 系固连于飞船，S 系固连于地球，$t=t'=12$ 点时，原坐标系原点重合，x、x' 轴正向沿飞船的速度方向，

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad \Delta x' = 0$$

当 $\Delta t'=30\text{min}$ 时，

$$\Delta t = \frac{30}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = 50(\text{min})$$

飞船经宇航站时，宇航站的钟指示为 12 点 50 分.

方法二：用动钟变慢效应，

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2},\quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

(2) 地球上的人测出宇航站离地球的距离为

$$\Delta x = v\Delta t = 0.8\times 3\times 10^8\times 50\times 60 = 7.2\times 10^{11}(\text{m}) = 40\text{ 光分}$$

(3) 飞船经宇航站向地球发信号时，地球上的钟指示 12 点 50 分，宇航站离地球 40 光分，信号到达地球需时 40min，故收到的时间为

$$12\text{ 点 }50\text{ 分} + 40\text{ 分} = 13\text{ 点 }30\text{ 分}$$

(4) 地球向飞船回发信号时，地球上的钟指示 13 点 30 分，用动钟变慢效应，地球上的钟较之 12 点历时 90 分钟，飞船上的钟在此期间历时

$$90\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 90\sqrt{1-(0.8)^2} = 54(\text{min})$$

故地球回发信号时,飞船上的钟指示 12 点 54 分.

设飞船上的钟再经 $\Delta t'$(min),收到地球发回的信号,刚发此信号时,飞船距地球 $0.8c\times 54$(写光速时,时间以分为单位),发信号到收到信号,飞船又远离地球 $0.8c\cdot\Delta t'$. 两段距离之和应等于在此期间光信号通过的距离,

$$54\times 0.8c+0.8c\times\Delta t'=c\Delta t'$$

$$\Delta t'=\frac{54\times 0.8c}{0.2c}=216\text{min}$$

收到信号时,飞船上的钟指示

$$12\text{ 点 }54\text{ 分}+216\text{ 分}=16\text{ 点 }30\text{ 分}$$

12.1.15 一根米尺相对于 S' 系静止,与 $o'x'$ 轴的夹角为 30°,如 S' 系相对于 S 系沿 x 轴(与 x' 轴平行)方向运动,在 S 系中测得米尺与 x 轴的夹角为 45°,求:

(1) S 系中测得的米尺的长度;

(2) S' 系相对于 S 系的速度.

解 (1) S' 系沿 S 系 x 轴运动,米尺在 y 方向的投影与在 y' 方向的投影相等,

$$l\sin\alpha=l'\sin\alpha'=1\cdot\sin 30°=0.5\text{m}$$

$$l=\frac{0.5}{\sin\alpha}=\frac{0.5}{\sin 45°}=0.707\text{m}$$

(2) 用尺缩效应,

$$l\cos\alpha=l'\cos\alpha'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

代入 $\cos\alpha=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha'=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $l=0.707\text{m}$. 可得

$$v=\sqrt{\frac{2}{3}}c=0.816c$$

12.1.16 一短跑选手在地球上以 10s 的时间跑完 100m,在沿跑的方向以 $0.98c$ 的速度相对于地球飞行的飞船中的观察者看到的选手跑了多少时间和多长距离?

解 用洛伦兹变换公式,设 S 系固连于地球,S' 系固连于飞船,x、x' 轴平行,沿跑的方向为正向,

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{10-\frac{0.98c}{c^2}\times 100}{\sqrt{1-(0.98)^2}}=50\text{s}$$

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-v\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{100-0.98c\times 10}{\sqrt{1-(0.98)^2}}=-49\text{ 光秒}$$

看到选手向相反的方向倒退约 49 光秒的距离.

12.1.17 若 12.1.11 题 S' 系中先后发生的两个事件并不发生在同一地点,在有相对运动的方向上相距 $\Delta x'=10$ 光分,$\Delta t'$、Δt 仍和 12.1.11 题相同. 求:

(1) S' 系相对于 S 系的速度 v;

(2) 在 S 系中测得的两事件发生的地点间的距离 Δx.

解　(1)

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

代入 $\Delta t=500\text{s}$，$\Delta t'=300\text{s}$，$\Delta x'=10\cdot 60c$，可得 $\frac{v}{c}$ 满足的方程为

$$61\left(\frac{v}{c}\right)^2+36\left(\frac{v}{c}\right)-16=0$$

按题意，S' 系沿 x 轴向正向运动，$\frac{v}{c}>0$，所以

$$\frac{v}{c}=\frac{-36+\sqrt{(36)^2+4\times 61\times 16}}{2\times 61}=0.296$$

$$v=0.296c$$

(2) $\Delta x=\dfrac{\Delta x'+v\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\dfrac{10\times 60c+0.296c\times 300}{\sqrt{1-(0.296)^2}}=721$ 光秒 $=12$ 光分

12.1.18　一根杆自左向右运动，当这杆的左端经过一架照相机时，这根杆和一根静止的标有刻度的米尺一起拍摄在一张照片上，照片显示：杆的左端与米尺上的 0 标记重合，右端与米尺的 0.9m 标记重合. 如果杆是以 $v=0.8c$ 的速度相对于照相机运动的，求杆的实际长度.

解　注意照相机摄到的杆的右端的光信号是和左端的光信号同时进入照相机镜头的，左端与照相机没有距离，右端离相机有距离，发出时距照相机 0.9m，光信号经过这段距离需时 $\Delta t=\frac{0.9}{3\times 10^8}=3\times 10^{-9}(\text{s})$，因此杆的右端的光信号是在早 $3\times 10^{-9}\text{s}$ 从 0.9m 标记发出的. 杆的右端发出这个信号时，杆的左端位于 0 标记的左方 $v\Delta t=0.8\times 3\times 10^8\times 3\times 10^{-9}=0.72\text{m}$. 因此杆的实际长度

$$L=0.9+0.72=1.62(\text{m})$$

12.1.19　像上题那样，在一根 1m 长的杆的中点经过照相机的瞬间，打开照相机快门，连同一根静止的有刻度的米尺拍下照片，如果杆相对于照相机的速度 $v=0.8c$，照片上记录下来的运动杆的长度该是多少？

解　杆的前端发的光信号进入快门的是在打开快门前 Δt_1 时发出的，

$$c\Delta t_1=0.5-v\Delta t_1$$

$$\Delta t_1=\frac{0.5}{c+v}$$

同样，杆的后端发出的进入快门的光信号是在打开快门前 Δt_2 时发出的，

$$c\Delta t_2=0.5+v\Delta t_2$$

$$\Delta t_2=\frac{0.5}{c-v}$$

杆的前后端离照相机的距离分别为 $c\Delta t_1$ 和 $c\Delta t_2$. 故照相机拍出的照片显示动杆的长度为

$$L=c(\Delta t_1+\Delta t_2)=c\left(\frac{0.5}{c+v}+\frac{0.5}{c-v}\right)=\frac{c^2}{c^2-v^2}=2.778\text{m}$$

12.1.20 一个粒子在 $x'y'$ 平面内以 $v=\frac{c}{2}$ 的恒定速度在 $t'=0$ 时离开 O' 点，$\boldsymbol{v}$ 与 x' 轴的夹角为 60°，O' 点沿 x' 亦沿 x 轴相对于 O 的速度为 0.6c. $t=0$ 时，O'、O 点重合，试求由 O 所确定的粒子的运动方程.

解
$$x'=\frac{1}{2}c(\cos60°)t'$$
$$y'=\frac{1}{2}c(\sin60°)t'$$

将下列三式及 $v=0.6c$ 代入上述两式，

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad y'=y,\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{x-0.6ct}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=\frac{1}{2}c\cdot\frac{1}{2}\frac{t-\frac{0.6c}{c^2}x}{\sqrt{1-(0.6)^2}}$$

$$y=\frac{1}{2}c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{t-\frac{0.6c}{c^2}x}{\sqrt{1-(0.6)^2}}$$

得
$$1.15x=0.85ct,\quad x=0.74ct$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4}c\frac{1}{0.8}\left(t-\frac{0.6}{c}\times0.74ct\right)=0.30ct$$

12.1.21 观测者 O 和 O' 以 0.6c 的相对速度互相接近，如果 O 测得 O' 离他的初始距离为 20m，按 O 的测定，多长时间后与 O' 相遇？按 O' 的测定，多长时间后与 O 相遇？

解 方法一：20m 是 O 测得的初始距离. 按 O 的测定，Δt 后与 O' 相遇，

$$\Delta t=\frac{20}{0.6\times3\times10^8}=1.11\times10^{-7}\text{s}$$

考虑两个事件：事件 A，O 进行测试测量，$x_A=0$，$t_A=0$；事件 B，O 与 O' 相遇，$x_B=20\text{m}$，$t_B=1.11\times10^{-7}\text{s}$，

$$\Delta t'=t'_B-t'_A=\frac{t_B-t_A-\frac{v}{c^2}(x_B-x_A)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$=\frac{1.11\times10^{-7}-\frac{0.6}{3\times10^8}\cdot20}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=8.9\times10^{-8}\text{s}$$

方法二：O 测出的初始距离是固连于 O 的一杆“尺”，在 O' 看来，这杆“尺”是运动的，用动尺收缩效应，在 O' 看来，这个距离为

$$L'=L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=20\sqrt{1-(0.6)^2}=16\text{m}$$

这杆"尺"以 v 的速度向 O'运动，另一端到达 O'的时间为

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{16}{0.6 \times 3 \times 10^8} = 8.9 \times 10^{-8}\text{s}$$

12.1.22 一个还能活 60 年的人打算访问距离我们 160000 光年的遥远星系，他的恒定速度必须多大？

解 方法一：考虑两个事件：事件 A，此人出发；事件 B，此人到达遥远星系. 地球与遥远星系为 S 系，宇宙飞船为 S'系，

$$x_B - x_A = \frac{x'_B - x'_A + v(t'_B - t'_A)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{1}$$

$x'_B - x'_A = 0$，$t'_B - t'_A = 60$(年)(考虑在他有生之年刚能到达遥远星系).

$$(\Delta x)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = v^2(\Delta t')^2$$

$$v = \frac{\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 + (\Delta t')^2}}$$

代入 $\Delta x = 160000c \cdot 1$(时间以年为单位)

$$v = \frac{160000c \cdot 1}{\sqrt{(160000)^2 + (60)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{60}{160000}\right)^2}}$$

$$= c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{160000}\right)^2\right] = (1 - 7.03 \times 10^{-8})c$$

方法二：用尺缩效应，把地球至遥远星系间的距离看作一杆尺. 在飞船上的人看来，他是运动的，尺长

$$L' = L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

尺以 v 的速度运动，当尺的那一端(遥远星系)经他身旁时，需时

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{L}{v}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

此式就是式(1)，式(1)中 $x_B - x_A = L$.

12.1.23 一枚火箭飞船相对于地球的速度为 $0.8c$(c 为真空中的光速)，O'和 O 分别是飞船和地球上的观测者，$x = x' = 0$ 时 $t = t' = 0$. O 用望远镜看 O'的时候，他自己的钟读数为 30s，问他看到 O'的时钟读数是多少？

解 设 O'发射光信号为事件 A，O 收到这一信号时也即他用望远镜看 O'的时钟时为事件 B. 已知：$x_B = 0$，$t_B = 30\text{s}$，要求 t'_A.

对事件 A 用洛伦兹变换关系，

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{0 + 0.8 \times 3 \times 10^8 \cdot t'_A}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 4 \times 10^8 t'_A$$

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t'_A}{0.6}$$

以上用了 $x' = 0$

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-(0.5)^2}=0.866$$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{0-\frac{0.866}{3\times10^8}\times1}{0.5}=-5.77\times10^{-9}(\mathrm{s})$$

$\Delta t'<0$,说明事件 B 先发生,时间间隔为 5.77×10^{-9}s.

12.1.26　A、B 两钟相对于某惯性系的一条直线上做方向相同、速率不同的匀速运动.在相遇时两钟均拨到零点,A 钟在时刻 T_A 向 B 的方向发出一光信号,B 钟收到该信号的时间为 T_B.证明:B 钟相对于 A 钟的运动速率为

$$v=\frac{c(T_B^2-T_A^2)}{(T_A^2+T_B^2)}$$

证明　方法一:设 A 钟为 S 系,B 钟为 S' 系:A 钟发出光信号为事件 1,B 钟收到光信号为事件 2,已知:$x_1=0,t_1=T_A,x_2'=0,t_2'=T_B$.

对事件 1:写洛伦兹变换关系,

$$x_1'=\frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=-\frac{vT_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{T_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

按 B 钟测量,光信号以 c 的速度在 t_1' 到 $t_2'=T_B$ 期间,从 x_1' 传播到 $x_2'=0$,

$$x_2'-x_1'=c(t_2'-t_1')$$

即

$$-x_1'=c(T_B-t_1')$$

将前两式代入上式,

$$\frac{vT_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=c\left[T_B-\frac{T_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right]$$

$$(c+v)T_A=cT_B\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=T_B\sqrt{c^2-v^2}$$

$$\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}=\frac{T_B}{T_A},\quad \frac{c+v}{c-v}=\frac{T_B^2}{T_A^2}$$

$$\frac{(c+v)-(c-v)}{(c+v)+(c-v)}=\frac{T_B^2-T_A^2}{T_B^2+T_A^2}$$

$$v=\frac{c(T_B^2-T_A^2)}{(T_A^2+T_B^2)}$$

方法二：A 钟 T_A 时发出信号时，A 测得 B 钟离 A 钟的距离为 vT_A.

B 收到信号时，B 钟时刻为 T_B，A 钟时刻为

$$t_2=\frac{T_B+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{T_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\qquad(\text{因为 } x_2'=0)$$

A 测得，在 T_A 至 $\frac{T_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 期间，B 离 A 增加的距离为 $v\left[\frac{T_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-T_A\right]$，$B$ 离 A 的距离为 $vT_A+v\left[\frac{T_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-T_A\right]=\frac{vT_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$，它应等于在此期间光传播的距离，

$$\frac{vT_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=c\left[\frac{T_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-T_A\right]$$

此式与方法一中的式子相同，以下同方法一.

12.1.27　一质点在惯性系 S' 中做匀速率圆周运动，轨迹方程为

$$x'^2+y'^2=r^2,\quad z'=0$$

S' 系以速度 v 沿 x 轴向正向运动，在 $t=t'=0$ 时，x、x'，y、y'，z、z' 轴分别重合. 试证明：在惯性系 S 中测得的轨道为一椭圆，椭圆的中心以速度 v 移动.

证明　用洛伦兹变换公式

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad y'=y,\quad z'=z$$

代入

$$x'^2+y'^2=r^2,\quad z'=0$$

得

$$\frac{(x-vt)^2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}+y^2=r^2,\quad z=0$$

为一椭圆，椭圆的中心位于$(vt,0,0)$，在 x 轴上以速度 v 向正方向移动.

12.1.28　在 O 的参考系中有一个静止的正方形，其面积为 100m^2，观察者 O' 以 0.8c 的速度沿正方形的对角线运动. O' 测得的面积多大?

解　取图 12.4 所示的坐标，正方形在 $x>0$、$y>0$ 的部分的三条边线的方程为

$$x=0,\quad y=0,\quad x+y=\sqrt{50}$$

$\sqrt{50}$是由面积为 100m^2 计算出来的，边长为 10m，对角线长为 $10\sqrt{2}$ m，它的一半是

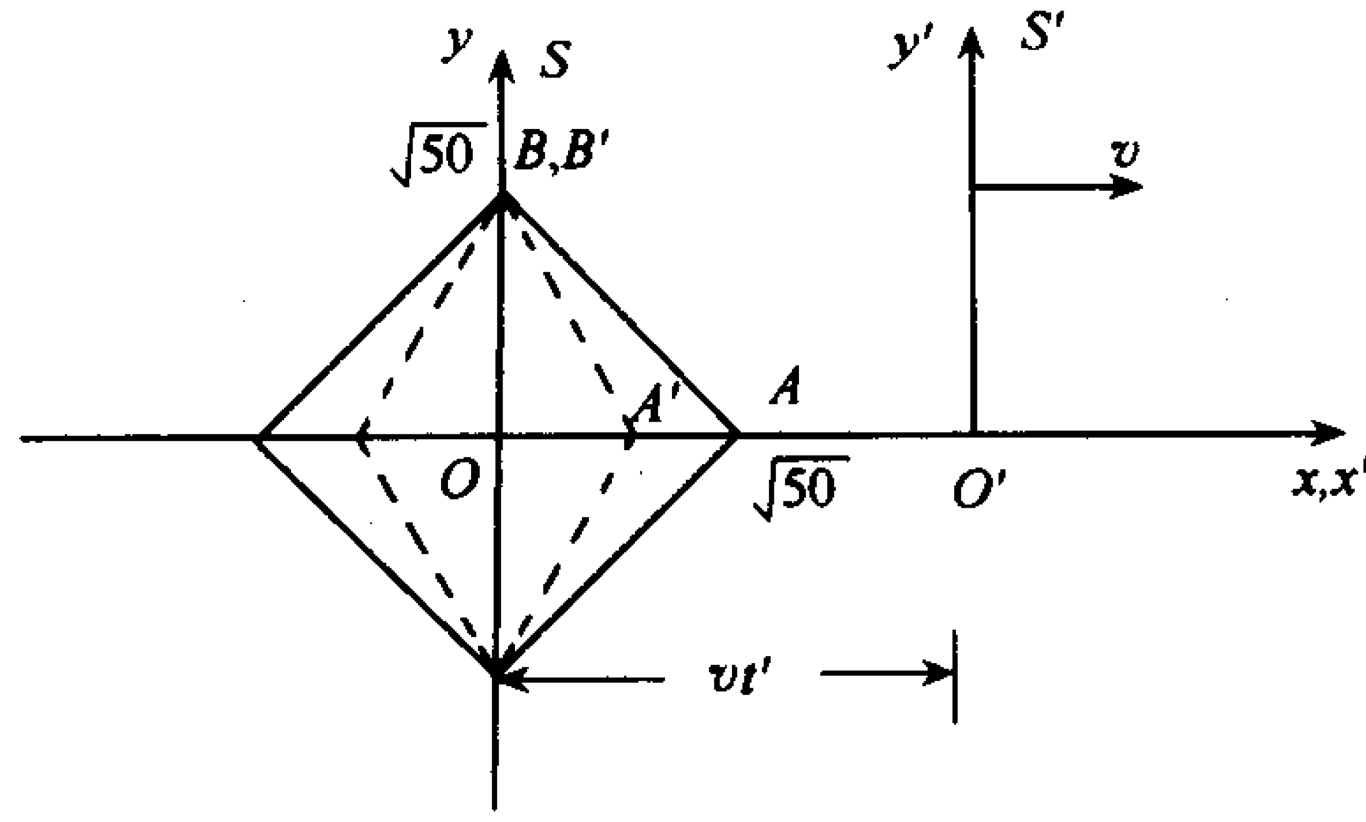


图 12.4

$5\sqrt{2}$或$\sqrt{50}$m.

用洛伦兹变换公式，

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad y=y'$$

S 系中的上述三条直线在 S' 系中的方程分别为

$$x'=-vt',\quad y'=0,\quad \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}+y'=\sqrt{50}$$

仍是三条直线，仍围成一个直角三角形，如图中虚线所示.

在 S' 系中，t' 时刻，O 点的坐标为$(-vt',0)$，A' 点的坐标为$\left(-vt'+\sqrt{50}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},0\right)$，$B'$ 点的坐标为$\left(-vt'+\sqrt{50}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\sqrt{50}\right)$.

O' 看到的是一个菱形，其面积是上述三角形的 4 倍，面积为

$$4\times\frac{1}{2}\left[-vt'+\sqrt{50}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-(-vt')\right]\sqrt{50}=100\sqrt{1-(0.8)^2}=60(\mathrm{m}^2)$$

12.1.29　在 12.1.27 题中所述的对 S' 系静止的圆，在 S 系中的观测者测得其图形面积多大？

解　12.1.27 题已得出图形是一个椭圆，方程为

$$\frac{(x-vt)^2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}+y^2=r^2,\quad z=0$$

其面积为

$$\pi\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}r\cdot r=\pi r^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

12.1.30　静止长度为 l_0 的两根尺，平行于 x 轴相向做匀速运动，与一根尺相连结的

观察者发现，两根尺的左端和右端两次重合的时间间隔为 Δt，试问两根尺的相对速度 v 多大？

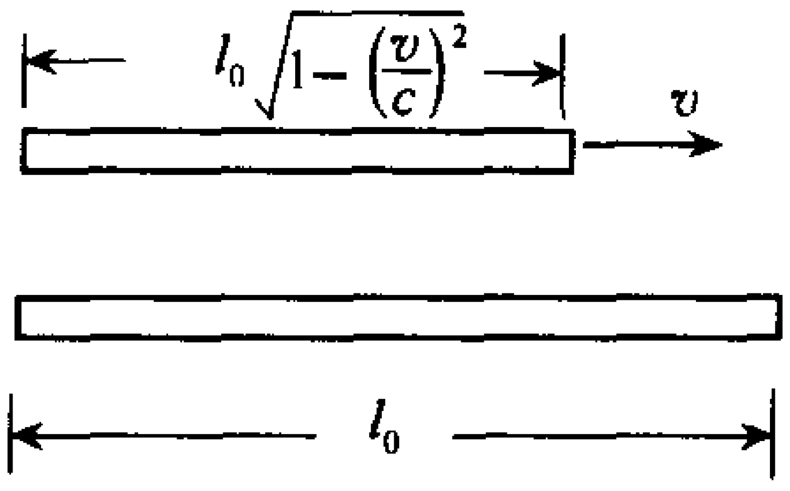


图 12.5

解 与尺 B 相连结的观察者看尺 A 是动尺，若尺 A 自左向右运动，由于尺缩效应，他看到尺 A 的长度为 $l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，先看到左端相重合，再看到两尺右端相重合，如图 12.5 所示，

$$v\Delta t = l_0 - l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$(l_0 - v\Delta t)^2 = \left[l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]^2 = l_0^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

解出

$$v = \frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + \frac{l_0^2}{c^2}}$$

12.1.31 静止半径为 R_0 的球，相对于远处的观察者以速度 v 运动，球上有明显的标记，当观察者看到球速正好与他和球的连线垂直时，拍了张照片，当他冲洗胶片时看到了什么？

解 照片拍下的不是当时球所处位置的图像，因为光信号传到照相机需要时间，拍下的是比开启快门早些时候球处于这个位置的图像，在球运动的方向上，由洛伦兹收缩，前后的距离为 $2R_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，在与之垂直的方向上长度不变，仍为 $2R_0$，由于观察者很远，球的线度比起球与观察者的距离小得多，可以忽略球的各部分发出的光子到达观察者的时间差别，这样观察者看到的即照相机摄下的照片上的图像，就和在静系中测得的图像无多大区别. 这样，照片上的图像将是一个椭圆，在球的运动方向有短半轴，其长度为 $R_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，在与之垂直的方向(上下方向)有长半轴，长度为 R_0. 严格地讲，考虑球的轮廓上各点到照相机的距离有差异，由于洛伦兹收缩，前后两个端点到照相机的距离略小于上下两个端点到照相机的距离. 因此上下两个端点摄进照片将是较前后两个端点早些时候发出的光子，在照片上，上下两端点的位置将向运动的后方稍有偏移，图形将偏离图 12.6 中虚线所示的椭圆，图形的示意图如图中实线所示.

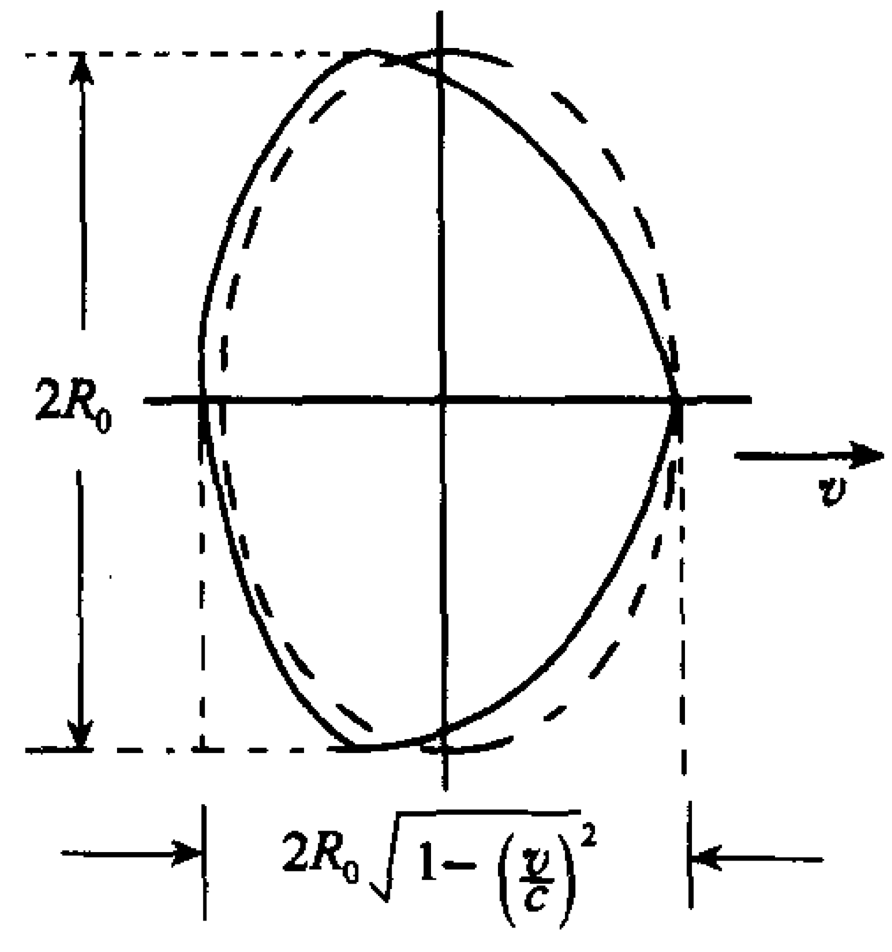


图 12.6

12.1.32 一个原子钟被喷气式飞机带着绕地球一周后，与没有动的精确同步的同样的钟比较，适当近似，狭义相对论预言有多大的不一致？

解 设飞机以 v 的速率绕地球做圆周运动，飞机参考系为 S'，地球参考系为 S，把 S'

系也近似视为惯性系，由洛伦兹变换公式，

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

因为 $\Delta x' = 0$

所以

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\Delta t'$$

因为 $\frac{v}{c} \ll 1$

所以

$$\Delta t \approx \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)\Delta t'$$

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{v^2}{2c^2}\Delta t'$$

设地球半径为 R，飞机上的钟 $\Delta t' = \frac{2\pi R}{v}$，飞机绕地球一周，在此期间，

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{v^2}{2c^2} \cdot \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi R v}{c^2}$$

这是飞机上的钟较之地球上没动的钟走慢的时间，如飞机的速度 $v = 1000\text{m/s}$（约 3 倍声速）代入地球半径 $R = 6400 \times 10^3\text{m}$，

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{\pi \cdot 6400 \times 10^3 \times 1000}{(3 \times 10^8)^2} = 2.2 \times 10^{-7}(\text{s})$$

12.1.33　设 S' 系以速度 v 沿 x 轴正方向相对于 S 系运动，固定在 S' 系内 (x_0', y_0', z_0') 点的时钟，在 t'_0 时刻从 S 系内 (x_0, y_0, z_0) 点旁边经过，这时 S 系内的时钟指示 t_0 时刻，写出在这种情况下的洛伦兹变换公式.

解

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + C_1, \quad y' = y + C_2, \quad z' = z + C_3, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + C_4$$

代入 $x = x_0, y = y_0, z = z_0, t = t_0$ 与 $x' = x_0', y' = y_0', z' = z_0', t' = t_0'$，

$$x_0' = \frac{x_0 - vt_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + C_1, \quad y_0' = y_0 + C_2, \quad z_0' = z_0 + C_3, \quad t_0' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + C_4$$

可定出

$$C_1 = x_0' - \frac{x_0 - vt_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad C_2 = y_0' - y_0, \quad C_3 = z_0' - z_0, \quad C_4 = t_0' - \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

所以这情况下的洛伦兹变换公式为

$$x' - x'_0 = \frac{x - x_0 - v(t - t_0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$y' - y'_0 = y - y_0, \qquad z' - z'_0 = z - z_0$$

$$t' - t'_0 = \frac{t - t_0 - \frac{v}{c^2}(x - x_0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

12.1.34　设 S' 系相对于 S 系的速度 $\boldsymbol{V}$ 并不平行于 x 轴，$t=t'=0$ 时，x 与 x' 轴，y 与 y' 轴、z 与 z' 轴两两重合. 试导出这种情况下的洛伦兹变换公式.

提示：把 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$ 分解为平行于 $\boldsymbol{V}$ 的分量 $\boldsymbol{r}_{/\!/}=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{v^2}\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{r}'_{/\!/}=\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{v^2}\boldsymbol{V}$ 和垂直于 $\boldsymbol{V}$ 的分量 $\boldsymbol{r}_\perp=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{/\!/}$，$\boldsymbol{r}'_\perp=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'_{/\!/}$.

解

$$\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{V} = \frac{\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V} - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

或

$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} - V^2 t}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{r}' - \frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V}$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{t - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

12.1.35　考虑图 12.7 所示的三个坐标系 S、S' 和 S'' 之间的洛伦兹变换，这里 x、x'、x'' 是互相平行的，S'、S'' 沿 x 轴向正向运动，S' 相对于 S 的速度为 v_1，S'' 相对于 S' 的速度为 v_2. 证明：洛伦兹变换的逆变换是洛伦兹变换，两个洛伦兹变换的结果是另一个洛伦兹变换.

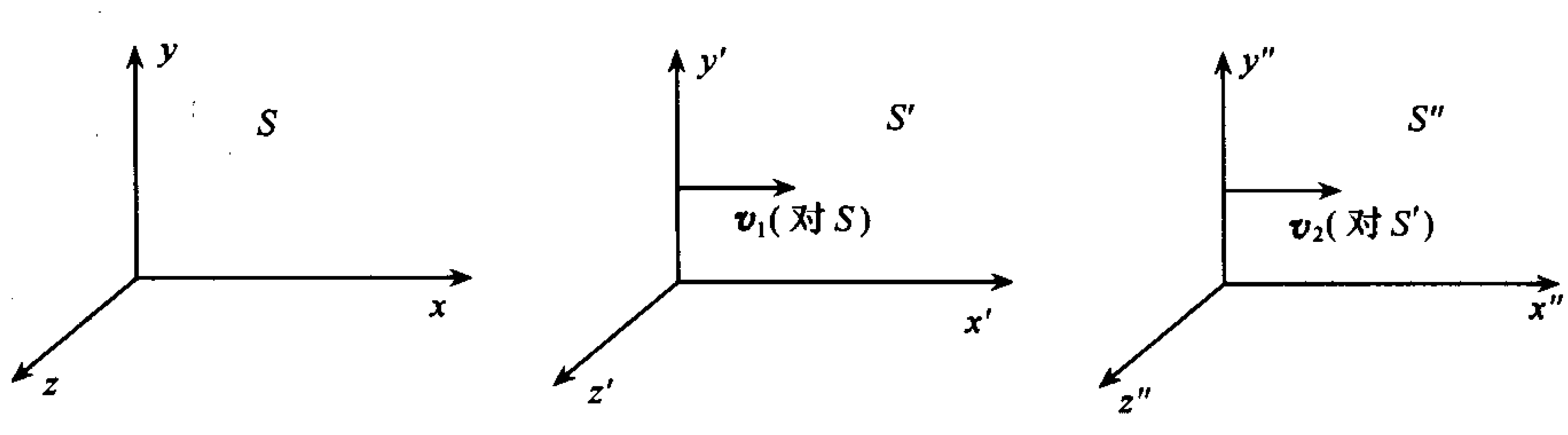


图 12.7

证明　S、S'两坐标系之间的洛伦兹变换为(从 S 变为 S')

$$x'=\frac{x-v_1t}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-\frac{v_1}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}$$

由上述四式可反解出 x、y、z、t 与 x'、y'、z'、t' 间的变换关系为

$$x'\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}=x-v_1t$$

$$t'\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}=t-\frac{v_1}{c^2}x,\quad t=\frac{v_1}{c^2}x+t'\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}$$

$$x'\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}=x-v_1\left[\frac{v_1}{c^2}x+t'\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}\right]=x\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)-v_1t'\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}$$

两边除以$\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}$,即得

$$x=\frac{x'+v_1t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}$$

$$t=\frac{v_1}{c^2}\cdot\frac{x'+v_1t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}+t'\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}=\frac{t'+\frac{v_1}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}$$

加上 $y=y'$,$z=z'$,给出了从 S'变回 S 的变换关系是洛伦兹变换,S 系以 $-\boldsymbol{v}$ 的速度相对于 S' 系运动.

下面来证明两个洛伦兹变换的结果也是一个洛伦兹变换. 从 S 变到 S',再从 S'变到 S'',结果是从 S 变到 S'',证明 x''、y''、z''、t''与 x、y、z、t 间的变换关系是洛伦兹变换关系.

$$x''=\frac{x'-v_2t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}},\quad t''=\frac{t'-\frac{v_2}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}$$

为书写简便起见,令 $\beta_1=\frac{v_1}{c}$,$\beta_2=\frac{v_2}{c}$,将

$$x'=\frac{x-c\beta_1t}{\sqrt{1-\beta_1^2}},\quad t'=\frac{t-\frac{\beta_1x}{c}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$$

代入上述两式,

$$x''=\frac{x-c\beta_1t-c\beta_2\left(t-\frac{\beta_1}{c}x\right)}{\sqrt{1-\beta_2^2}\cdot\sqrt{1-\beta_1^2}}=\frac{x(1+\beta_1\beta_2)-c(\beta_1+\beta_2)t}{\sqrt{1-\beta_1^2}\cdot\sqrt{1-\beta_2^2}}=\frac{\left[x-c\,\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}t\right]}{\sqrt{\frac{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}{(1+\beta_1\beta_2)^2}}}$$

$$t''=\frac{\left[t-\frac{\beta_1+\beta_2}{(1+\beta_1\beta_2)c}x\right]}{\sqrt{\frac{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}{(1+\beta_1\beta_2)^2}}}$$

下面证明

$$\frac{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}{(1+\beta_1\beta_2)^2}=1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2$$

$$\text{左边}=\frac{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)+\beta_1^2\beta_2}{(1+\beta_1\beta_2)^2}$$

$$=\frac{1+2\beta_1\beta_2+\beta_1^2\beta_2^2-(\beta_1^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2)}{(1+\beta_1\beta_2)^2}=1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2$$

令 $\beta=\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$,

$$x''=\frac{x-c\beta t}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad t''=\frac{t-\frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

或

$$x''=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad t''=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

其中

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

加上

$$y''=y'=y,\qquad z''=z'=z$$

可以看出,S''与 S 之间的变换是洛伦兹变换,S''系对 S 系的速度为$\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}c$.

12.2　狭义相对论的运动学

12.2.1　S'系以 V 的恒定速度沿 S 系的 x 轴向正向运动,若质点在 S'系的 $x'y'$平面内运动,速度$\boldsymbol{v}'$与 x'轴的夹角为 θ'. 试证明,在 S 系中,质点的速度 v 与 x 轴的夹角 θ 满足关系:

$$\tan\theta=\frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{V+v'\cos\theta'}$$

证明　用速度变换公式:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'_y\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{v'_x + V} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{v'\cos\theta' + V}$$

12.2.2　两根静止长度均为 l_0 的杆成一直线放置，并以相对于一个参考系以相同的速率 v 匀速相向运动. 试问在固连于一个杆的参考系内的观察者测得的另一根杆的长度是多少？

解　先求出在固连于一根杆的参考系 S' 中另一根杆的速度. S' 系对原参考系的速度为 v，另一根杆在 S 系中的速度为 $v_x=-v, v_y=v_z=0$.

在 S' 系中，另一根杆的速度由速度变换公式可得

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}v_x} = \frac{-v-v}{1 - \frac{v}{c^2}(-v)} = -\frac{2vc^2}{c^2 + v^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c^2}v_x} = 0$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c^2}v_x} = 0$$

在 S' 系中看另一根杆的长度为

$$l' = l_0\sqrt{1 - \left(\frac{v'_x}{c}\right)^2} = l_0\sqrt{1 - \frac{4v^2c^4}{(c^2+v^2)c^2}} = l_0\frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} \text{ 或 } l_0\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

12.2.3　两根静止长度均为 l_0 的尺在某一参考系中分别如图 12.8(a)、(b)那样以相同的速率 v、互成 90°角运动，在与一根尺固连的参考系中测得的另一根尺的长度是多少？

解　取图 12.8(a)、(b)图中处于下方的那根尺为参考系 S'. 取 x、x' 轴正向与这根杆

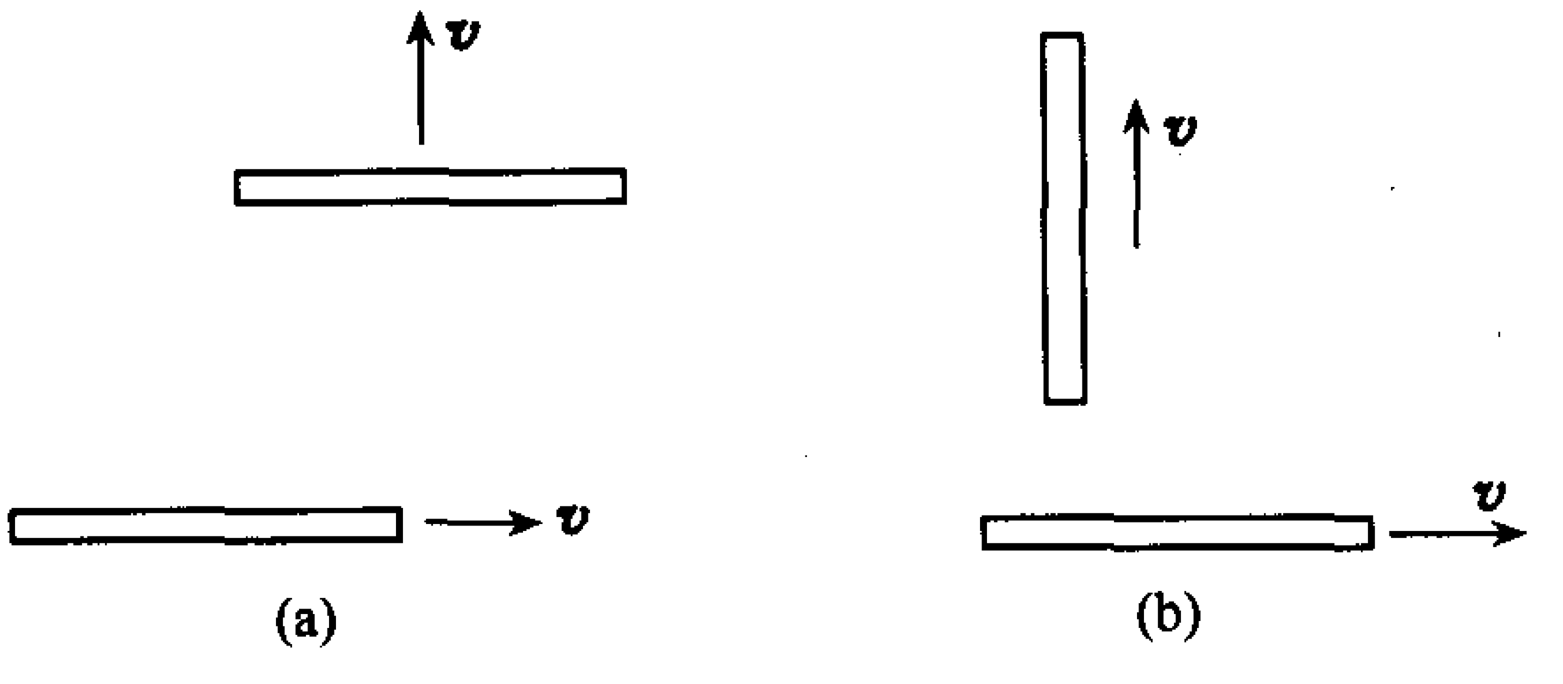


图 12.8

在 S 系中的速度一致，用速度变换公式，

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}v_x}, \quad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c^2}v_x}$$

另一根杆在 S 系中的速度，对于图 12.8(a)、(b)两种情况，均有 $v_x=0, v_y=v$.
在 S' 系中，另一根杆的速度，两种情况均有

$$v_x' = -v, \quad v_y' = v\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

(a) 方法一：在 S' 系中，杆在其速度方向有收缩，而在与其速度垂直的方向将保持其长度不变.

$$\boldsymbol{v}' = v_x'\boldsymbol{i}' + v_y'\boldsymbol{j}' = -v\boldsymbol{i}' + v\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\boldsymbol{j}'$$

$$v' = \sqrt{(-v)^2 + v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{2-\frac{v^2}{c^2}}\,v$$

在 S 系中，杆在 $\boldsymbol{v}'$ 方向和垂直于 $\boldsymbol{v}'$ 方向的投影分别为

$$l_{/\!/} = l_0\left|\frac{v_x'}{v'}\right| = l_0\frac{1}{\sqrt{2-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l_{\perp} = l_0\frac{v_y'}{v'} = l_0\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{2-\frac{v^2}{c^2}}}$$

在 S' 系中，在平行于 $\boldsymbol{v}'$ 方向有洛伦兹收缩，垂直于 $\boldsymbol{v}'$ 方向保持长度不变.

$$l_{/\!/}' = l_{/\!/}\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{2-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\left(2-\frac{v^2}{c^2}\right)} = l_0\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{2-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l_{\perp}' = l_{\perp} = l_0\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{2-\frac{v^2}{c^2}}}$$

所以在 S' 系中，另一根尺的长度为

$$l' = (l_{/\!/}'^2 + l_{\perp}'^2)^{1/2} = \frac{l_0}{\left(2-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{l_0}{\left(2-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(2-\frac{3v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}} = l_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

方法二：可以导出一个简便的计算方法. 设另一根尺在 S' 系中的速度 $\boldsymbol{v}'$ 与动杆的夹角为 θ，则这根尺在 $\boldsymbol{v}'$ 方向的静长分量为 $l_0\cos\theta$，在与 $\boldsymbol{v}'$ 垂直方向的静长分量为 $l_0\sin\theta$，在 S' 系中测得长度的平方为

$$\left(l_0\cos\theta\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\right)^2+(l_0\sin\theta)^2=l_0^2\cos^2\theta\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)+l_0^2\sin^2\theta$$

$$=l_0^2-l_0^2\cos^2\theta\cdot\frac{v'^2}{c^2}=l_0^2\left(1-\frac{v_{/\!/}^2}{c^2}\right)$$

$$l'=l_0\sqrt{1-\frac{v'^2_{/\!/}}{c^2}}$$

今 $v'_{/\!/}=v'_x$，

$$l'=l_0\sqrt{1-\frac{v'^2_x}{c^2}}=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(b) 显然上述方法二很简便，这里就只采用方法二，$v'_{/\!/}=v'_y$，

$$l'=l_0\sqrt{1-\frac{v'^2_y}{c^2}}=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}}$$

12.2.4　在某一参考系中，两条飞船 A、B 分别以 $0.8c$ 及 $0.6c$ 的速率相向而行，找出一个参考系 S'，使两条飞船分别以相同的速率 v' 相向而行. 求：

(1) S' 系对 S 系的速度 $\boldsymbol{v}$

(2) v' 有多大？

解　设 S' 以 v 的速率、方向与 A 船的运动方向相同对 S 系运动. 在 S' 系中，

$$v'_A=\frac{v_A-v}{1-\dfrac{v}{c^2}v_A},\quad v'_B=\frac{v_B-v}{1-\dfrac{v}{c^2}v_B}$$

今 $v_A=0.8c$，$v_B=-0.6c$，$v'_A=v'$，$v'_B=-v'$.

$$\frac{0.8c-v}{1-\dfrac{v}{c^2}\cdot0.8c}=-\frac{(-0.6c)-v}{1-\dfrac{v}{c^2}(-0.6c)}=\frac{0.6c+v}{1+0.6\dfrac{v}{c}}$$

从上式可得

$$v^2-5.2cv+c^2=0$$

$$v=\frac{5.2c-\sqrt{(5.2c)^2-4c^2}}{2}=0.2c$$

（另一个根 $v=5c>c$ 是不可能的.）

$$v'=\frac{v_A-v}{1-\dfrac{v}{c^2}v_A}=\frac{0.8c-0.2c}{1-\dfrac{0.2c}{c^2}\cdot0.8c}=0.714c$$

12.2.5　在某一参考系中，物体 A 以匀速率 $v_A=0.8c$ 沿 x 轴向正向运动，物体 B 以匀速率 $v_B=0.6c$ 沿 x 轴向负向运动. 在 A 看来，B 的速度 v'_B 如何？

解　A 为 S' 系，它对 S 系的速度 $v=v_A=0.8c$，今 $v_B=-0.6c$，所以

$$v'_B = \frac{v_B - v}{1 - \frac{v}{c^2}v_B} = \frac{-0.6c - 0.8c}{1 - \frac{0.8c}{c^2}(-0.6c)} = -0.95c$$

在 A 看来,B 以 $0.95c$ 的速率向着 A 运动.

12.2.6 利用速度变换公式,求出 12.1.2 题所述的菲佐实验中,顺水速和逆水速两种情况下的光速,与用以太假设解释菲佐实验引入的拖曳系数 k 后的光速相比较,从而导出 k 与折射率的关系.

解 取固连于水的参考系为 S' 系,静系为 S 系,S' 系对 S 系的速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$,用速度变换公式

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}v'_x}$$

顺水速情况,$v'_x = \frac{c}{n}$,在 S 系中,光速为

$$v_1 = v_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{c}{n}} \approx \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc}\right) = \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2} - \frac{v^2}{nc} \approx \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

逆水速情况,仍取 x、x' 轴沿水速方向,仍有 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$,但 $v'_x = -\frac{c}{n}$,光速 $v_2 = -v_x$,则

$$-v_2 = v_x = \frac{-\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\left(-\frac{c}{n}\right)} \approx -\frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$v_2 = \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

与用以太假设引入的拖曳系数 k 计算的顺水速、逆水速两种情况的光速相比,均可得

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}$$

12.2.7 一束光通过折射率为 n 的玻璃块,如果玻璃块以恒定速度 v 沿入射光方向运动.试求在玻璃块中光相对于实验室参考系的速度.

解 取 S 系为实验室参考系,S' 系为固连于玻璃块的参考系,x、x' 轴的正向均与光束的入射方向一致.设 u、u' 分别是光在 S、S' 系中的速度,$u' = \frac{c}{n}$,所以

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{c}{n}} = \frac{c(c + nv)}{nc + v}$$

12.2.8 火箭 A 相对于地球以 $0.8c$ 向 $+y$ 方向飞行,火箭 B 以 $0.6c$ 向 $-x$ 方向飞行,由火箭 B 测得的火箭 A 的速度是多少?

解 取地球为 S 系,火箭 B 为 S' 系,$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{u}'$ 分别是火箭 A 相对于地球和火箭 B 的速度.S' 系相对于 S 系的速度为 $\boldsymbol{v} = -0.6c\boldsymbol{i}$,今已知 $u_x = 0$,$u_y = 0.8c$,所以

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{0 - (-0.6c)}{1 - 0} = 0.6c$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{vu_x}{c^2}} = \frac{0.8c\sqrt{1-(-0.6)^2}}{1-0} = 0.64c$$

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2} = 0.88c$$

$\boldsymbol{u}'$与 x'轴夹角

$$\varphi = \arctan\left(\frac{u'_y}{u'_x}\right) = \arctan\left(\frac{0.64c}{0.6c}\right) = 46.8°$$

12.2.9　一个处于静止状态的 K°介子衰变成一个 π^+介子和一个 π^-介子，各自都具有 0.827c 的速率，如果 K°介子在以 0.6c 的速度飞行时衰变，其中一个 π 介子可能有的最大速率多大？

解　其中一个 π 介子可能有的最大速率是在原运动系看的 K°介子在 S'系中衰变产生的与 K°介子的运动方向相同的那个 π 介子所具有的. 令 S'系对 S 系的速度 $v=0.6c$，沿 x 轴正向，设具有最大速率的那个 π 介子相对于 S、S'系的速度为 u 和 u'，均沿 x、x'轴方向，$u'=0.827c$，

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'} = \frac{0.827c+0.6c}{1+\frac{0.6c\cdot 0.827c}{c^2}} = 0.954c$$

12.2.10　证明 $v=\dfrac{\sqrt{(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V})^2-(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{V})^2/c^2}}{1+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}/c^2}$，其中$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}'$分别是粒子在 S 系和 S'系中的速度，$\boldsymbol{V}$ 是 S'系相对于 S 系的速度.

证明

$$v_x = \frac{v'_x+V}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}},\quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}},\quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}$$

$$v^2 = v_x^2+v_y^2+v_z^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2}\left[v'^2_x+2v'_xV+V^2+(v'^2_y+v'^2_z)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)^2}\left[(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V})^2-(v_y^2+v'^2_z)\frac{V^2}{c^2}\right]$$

这里用了$\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}=v'_xV$

$$\frac{\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{V}}{c} = \frac{1}{c}(v'_x\boldsymbol{i}+v'_y\boldsymbol{j}+v'_z\boldsymbol{k})\times V\boldsymbol{i} = \frac{V}{c}(v'_z\boldsymbol{j}-v'_y\boldsymbol{k})$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{V}}{c}\right)^2 = \frac{V^2}{c^2}(v'^2_y+v'^2_z)$$

所以

$$v^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)^2}\left[(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V})^2-\left(\frac{\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{V}}{c}\right)^2\right]$$

$$v=\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}\left[(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V})^2-\left(\frac{\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{V}}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

12.2.11 当 S' 系相对于 S 系的速度 $\boldsymbol{v}$ 有任意方向时,试导出速度变换公式,并表示成矢量形式.

解 用12.1.34题的结果,

$$\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{V}=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{V}}{V}-Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}'-\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V} \tag{2}$$

$$t'=\frac{t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \tag{3}$$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{V}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{V}}{V}-V\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \tag{4}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}'-\frac{\Delta\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V}=\Delta\boldsymbol{r}-\frac{\Delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V} \tag{5}$$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{\Delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \tag{6}$$

(4)式和(6)式等号两边分别相除,取极限 $\Delta t'\to0,\Delta t\to0$,由 $\boldsymbol{v}'=\lim\limits_{\Delta t'\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}'}{\Delta t'},\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$,可得

$$\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{V}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{V}}{V}-V}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}$$

为写成速度变换的矢量形式,上式两边乘 $\frac{\boldsymbol{V}}{V}$,表示沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向的速度变换关系

$$\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{V}}{V}-V}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}\frac{\boldsymbol{V}}{V}=\frac{\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{V}}{V}\right)\frac{\boldsymbol{V}}{V}-\boldsymbol{V}}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}} \tag{7}$$

同样(5)式和(6)式等号两边分别相除,取极限 $\Delta t'\to0,\Delta t\to0$,可得

$$\boldsymbol{v}'-\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V}=\frac{\left(\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V}\right)\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}} \tag{8}$$

(7)式+(8)式,得

$$\boldsymbol{v}'=\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}}\left\{\boldsymbol{v}\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}-\boldsymbol{V}+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}\right]\boldsymbol{V}\right\}$$

12.2.12 一光源在其静止的坐标系中向各方向均匀地辐射,当它以接近于光速 c 的速率 v 在参考系 S 中运动时,在 S 系中,它的辐射将在它的前进方向上有强烈的辐射(这种现象称为前灯效应).要使发射出的辐射有一半在半顶角 $\theta=10^{-3}\mathrm{rad}$ 的圆锥状立体角内,v 应多大?

提示:可利用 12.2.1 题结果.

解 12.2.1 题已证明,

$$\tan\theta=\frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{v'\cos\theta'+V}$$

把光源取为 S' 系,只要向 $\theta'=90°$的辐射,在 S 系中变为向 $\theta=10^{-3}\mathrm{rad}$ 方向辐射,则 $\theta'<90°$的辐射(辐射的一半)都在 $\theta=10^{-3}\mathrm{rad}$ 为半顶角的圆锥状立体角内,式中 $v'=c$.

$$\tan10^{-3}=\frac{c\sin90°\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{c\cos90°+V}$$

$\tan10^{-3}\approx10^{-3}$,代入上式,得

$$10^{-3}V=c\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}=\sqrt{c^2-V^2}$$

解出

$$V=\sqrt{\frac{1}{1+10^{-6}}}c=\left(1-\frac{1}{2}10^{-6}\right)c=(1-5\times10^{-7})c$$

12.2.13 证明光线与 x 轴的夹角 θ 的变换公式为

$$\tan\theta=\frac{c\sin\theta'\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{c\cos\theta'+V}$$

或

$$\cos\theta=\frac{c\cos\theta'+V}{c+V\cos\theta'}$$

证明 12.2.1 题中将质点在 S' 系中的速率 v' 改为光速 c,即得要证明的第一个式子.这里为得出第二个式子.重新证明如下:

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+\frac{V}{c^2}v'_x}=\frac{c\cos\theta'+V}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}$$

$$v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1+\frac{V}{c^2}v'_x}=\frac{c\sin\theta'\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{c\sin\theta'\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{c\cos\theta' + V}$$

或

$$\cos\theta = \frac{v_x}{c} = \frac{c\cos\theta' + V}{c + V\cos\theta'}$$

12.2.14　一光束在某一参考系内构成一立体角 $\mathrm{d}\Omega$,试问当变换到另一个惯性参考系时,其立体角如何变化?

解　在 S 系内在立体角 $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 内的光束,在 S' 系内光束出现在立体角 $\mathrm{d}\Omega'=\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'$ 内,$\varphi=\varphi'$,$\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\varphi'$.

由上题证明的式子

$$\cos\theta = \frac{c\cos\theta' + V}{c + V\cos\theta'}$$

其逆变换为

$$\cos\theta' = \frac{c\cos\theta - V}{c - V\cos\theta}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega' &= \sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi' = -\mathrm{d}\cos\theta'\mathrm{d}\varphi' \\ &= \frac{1}{(c-V\cos\theta)^2}(c^2-V^2)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{c^2-V^2}{(c-V\cos\theta)^2}\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

12.2.15　相对于有限的恒星系静止的观察者 A,看到恒星系有各向同性的星体分布,若 A 能看到的全部星体数为 N,则在立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 中看到的星体数为

$$\mathrm{d}N(\theta,\varphi) = \frac{N}{4\pi}\mathrm{d}\Omega(\theta,\varphi)$$

其中 $\mathrm{d}\Omega(\theta,\varphi)=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 是 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta,\varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 所张的立体角.

另一个在沿 z 轴以速度 v 运动的参考系中的观察者 B 如能看到观察者 A 看到的每一个星体.求:

(1) 观察者 B 在 θ'、φ' 的单位立体角内看到的星体数 $N(\theta',\varphi')$;

(2) 当 $v\to c$ 时,观察者 B 在 $\theta'=0$ 和 $\theta'=\pi$ 处的单位立体角内看到的星体数 $N(0,\varphi')$、$N(\pi,\varphi')$.

解　(1) 用上题得到的结果

$$\mathrm{d}\Omega' = \frac{c^2-V^2}{(c-V\cos\theta)^2}\mathrm{d}\Omega$$

改写为

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{c^2-(-V)^2}{[c-(-V)\cos\theta']^2}\mathrm{d}\Omega' = \frac{c^2-V^2}{(c+V\cos\theta')^2}\mathrm{d}\Omega'$$

观察者 A 在 $\mathrm{d}\Omega(\theta,\varphi)$ 内看到的星体数也是观察者 B 在 $\mathrm{d}\Omega'(\theta',\varphi')$ 内看到的星体数.故

$$\mathrm{d}N(\theta',\varphi') = \mathrm{d}N(\theta,\varphi) = \frac{N}{4\pi}\frac{c^2-V^2}{(c+V\cos\theta')^2}\mathrm{d}\Omega'(\theta',\varphi')$$

观察者 B 在 θ'、φ' 的单位立体角内看到的星体数为

$$N(\theta',\varphi') = \frac{\mathrm{d}N(\theta',\varphi')}{\mathrm{d}\Omega'(\theta',\varphi')} = \frac{N}{4\pi}\frac{c^2 - V^2}{(c + V\cos\theta')^2}$$

在上题中用了 $\varphi'=\varphi$，$\mathrm{d}\varphi'=\mathrm{d}\varphi$，未加证明，这里补充证明如下：

$$u_x' = \frac{u_x\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-\frac{V}{c^2}u_z},\quad u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-\frac{V}{c^2}u_z}$$

$$\frac{u_y'}{u_x'} = \frac{u_y}{u_x},\quad \text{即 } \tan\varphi' = \tan\varphi$$

所以 $\varphi'=\varphi$，$\mathrm{d}\varphi'=\mathrm{d}\varphi$.

(2) 当 $V\to c$ 时，

在 $\theta'=0$ 时，　$\frac{c^2-V^2}{(c+V\cos 0)^2}\to 0$，　$N(0,\varphi')\to 0$

在 $\theta'=\pi$ 时，　$\frac{c^2-V^2}{(c+V\cos\pi)^2}\to \infty$，　$N(\pi,\varphi')\to\infty$

在观察者 B 看来，在他相对于恒星系运动的方向上看不到星体，而在相反方向能看到全部星体. 这与 12.2.12 题所述的前灯效应并不矛盾，而且是一致的.

12.2.16　宇宙飞船以 $v=0.8c$ 的速率飞离地球，当在地球参考系中测得距地球 $6.66\times10^8\mathrm{km}$ 时，一无线电信号由地球上的观察者向飞船发出.

(1) 在飞船参考系中测量多长时间到达飞船?

(2) 在地球参考系中测量多长时间到达飞船?

(3) 在地球参考系中测量飞船收到信号时的位置.

解　取地球为 S 系，飞船为 S' 系，$t=t'=0$ 时，$x=x'=0$，S' 系以 $v=0.8c$ 的速度沿 x 轴正方向运动.

(1) 地球发出信号时，$x=0$，

$$t = \frac{6.66\times10^8\times10^3}{0.8\times3\times10^8} = 2.775\times10^3(\mathrm{s})$$

由洛伦兹变换可算出发信号时，

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{0-0.8\times3\times10^8\times2.775\times10^3}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = -1.11\times10^{12}(\mathrm{m})$$

飞船收到信号时 $x'=0$，在飞船参考系中测出从发信号到收到信号需时

$$\Delta t' = \frac{0-(-1.11\times10^{-12})}{3\times10^8} = 3.7\times10^3(\mathrm{s})$$

(2) 方法一：设 Δt 为从发信号到收到信号地球参考系中测得的所需时间，

$$0.8c\cdot\Delta t + 6.66\times10^8\times10^3 = c\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{6.66\times10^8\times10^3}{(1-0.8)\times3\times10^8} = 1.11\times10^4(\mathrm{s})$$

方法二：也可用洛伦兹变换从 $\Delta t'$ 求出 Δt，

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}=\frac{3.7\times10^3+\frac{0.8}{3\times10^8}[0-(-1.11\times10^{12})]}{\sqrt{1-(0.8)^2}}=1.11\times10^4(\mathrm{s})$$

(3) 在地球参考系中测量，飞船收到信号时飞船的位置为

$$x=c\Delta t=3\times10^8\times1.11\times10^4=3.33\times10^{12}(\mathrm{m})$$

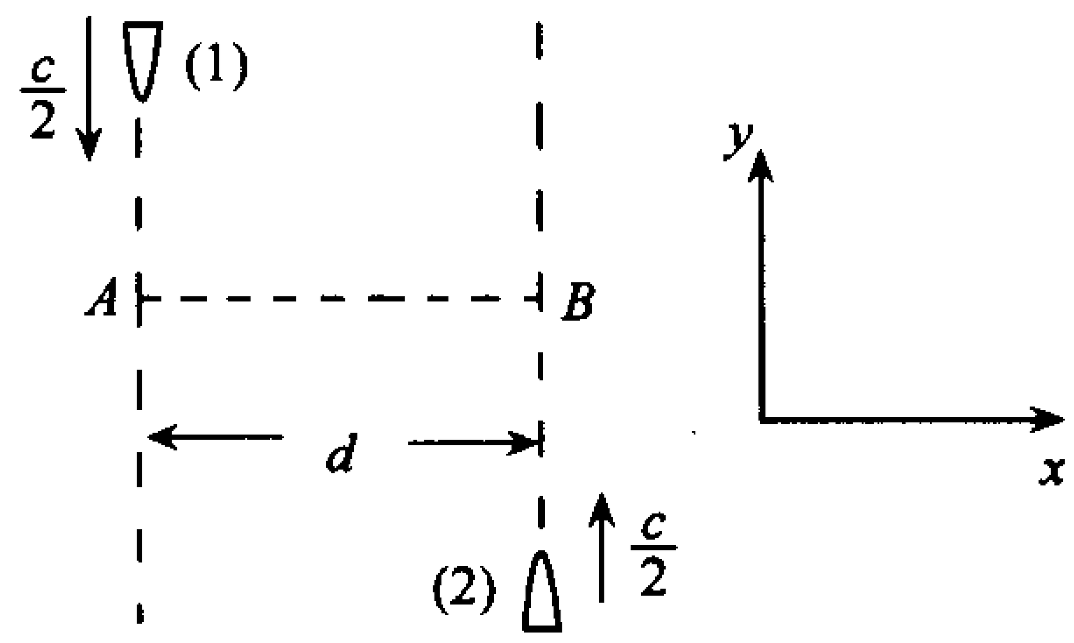


图 12.9

12.2.17 在一惯性系 S 中观察到两宇宙飞船沿两直线相向平行飞行，轨道间距为 d，如图 12.9 所示. 每条飞船的速率均为 $\frac{c}{2}$，c 为真空中的光速.

(1) 在 S 系中看，当两飞船抵达最近点(图中虚线表示的 A、B 两点)时，飞船(1)以 $\frac{3}{4}c$ 的速率投出一小包裹. 从飞船(1)上的观察者来看，为使包裹能被飞船(2)收到，必须以什么样的角度投出?

(2) 从飞船(1)的观察者来看，包裹的速率多大?

解 (1) 在 S 系中，取图 12.9 中给出的 x、y 坐标，飞船运动方向平行于 y 轴. 显然，包裹必须有 $v_y=\frac{c}{2}$，才能在飞行过程中始终有与飞船(2)相同的 y 坐标，才能当它飞过 $\Delta x=d$ 的距离后抵达飞船(2)，因此在 S 系中，

$$v_x=\sqrt{v^2-v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}c\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}c$$

飞船(1)参考系 S' 以 $\frac{1}{2}c$ 的速率沿 $-y$ 方向运动，$\boldsymbol{V}=-\frac{1}{2}c\boldsymbol{j}$，$S'$、$S$ 两系中的速度变换关系为

$$v_x'=\frac{v_x\sqrt{1-\left(\frac{-V}{c}\right)^2}}{1-\frac{(-V)v_y}{c^2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}v_x}{1+\frac{v_y}{2c}}$$

$$v_y'=\frac{v_y-(-V)}{1-\frac{(-V)v_y}{c^2}}=\frac{v_y+\frac{1}{2}c}{1+\frac{v_y}{2c}}$$

包裹在 S 系中的速度为

$$v_x=\frac{\sqrt{5}}{4}c,\quad v_y=\frac{1}{2}c$$

包裹在 S' 系中的速度为

$$v_x'=\frac{\sqrt{15}}{10}c,\quad v_y'=\frac{4}{5}c$$

包裹相对于 x' 轴的角度

$$\alpha=\arctan\frac{v_y'}{v_x'}=\arctan\left(\frac{8}{\sqrt{15}}\right)=64°10'$$

（2）在 S' 系中看包裹的速率为

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{1}{10}\sqrt{79}c$$

12. 2. 18　观察者 1 看到粒子以速度 v 在与他的 z 轴成 φ 角的直线轨道上运动，观察者 2 以速度 V 相对于观察者 1 沿 z 方向运动，求观察者 2 测得的粒子运动的速度，并考虑 $v\to c$ 的极限情况，检验你得到的结果.

解　设观察者 1 和 2 各自在其中静止的参考系为 S 和 S' 系，坐标互相平行，x、x' 轴在 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 所决定的平面内，φ 和 φ' 分别是粒子在 S、S' 系中的速度 $\boldsymbol{v}$ 、$\boldsymbol{v}'$ 与 z、z' 轴夹角.

由速度变换公式，

$$v'_z = \frac{v_z - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_z} = \frac{v\cos\varphi - V}{1 - \frac{Vv\cos\varphi}{c^2}}$$

$$v'_x = \frac{v_x\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_z} = \frac{v\sin\varphi\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv\cos\varphi}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_z} = 0$$

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z} = \frac{1}{1 - Vv\cos\frac{\varphi}{c^2}}\left(v^2 + V^2 - 2vV\cos\varphi - \frac{v^2V^2}{c^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}$$

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{v'_x}{v'_z}\right) = \arctan\left[\frac{v\sin\varphi\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{v\cos\varphi - V}\right]$$

当 $v\to c$ 时，

$$v' \to \frac{(c^2 + V^2 - 2cV\cos\varphi - V^2\sin^2\varphi)^{1/2}}{1 - \frac{V}{c}\cos\varphi} = c$$

在任何惯性参考系中，在任何方向，真空中的光速都是 c，这正是狭义相对论的一条基本假设. 能得到预期的结果. 可见答案是正确的.

12. 2. 19　一枚火箭相对于固连于自己的参考系以匀加速度 a_0 做直线运动，按照地球的钟，从静止出发，经过多长时间（假定时钟的运行与其加速度无关），火箭加速到 $V=0.8c$？按照火箭内的时钟，加速到这一速度需用多长时间？

解　用 12.2.11 题导出的速度变换公式的逆变换，为书写简便起见，令 $\beta=\frac{V}{c}$，

$$\boldsymbol{v} = \left[\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'\sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}')\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)\boldsymbol{V}\right]\left(1 + \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}'}{c^2}\right)^{-1}$$

对上式作微分，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\left[\sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}'+\frac{1}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}')\right]\left(1+\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}'}{c^2}\right)^{-1}$$
$$-\left(1+\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}'}{c^2}\right)^{-2}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}'}{c^2}\left[\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}'\sqrt{1-\beta^2}+\frac{1}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}')\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\boldsymbol{V}\right]$$

$$\mathrm{d}t=\mathrm{d}t'\frac{1+\dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

上述两式等号两边分别相除,化简后得

$$\boldsymbol{a}=\frac{1-\beta^2}{\left(1+\dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}'}{c^2}\right)^2}\boldsymbol{a}'-\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}'}{c^2}\left[\boldsymbol{v}'+\frac{c^2}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\boldsymbol{V}\right]\frac{1-\beta^2}{\left(1+\dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}'}{c^2}\right)^3}$$

将$\boldsymbol{v}'=0,\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}_0$ 代入上式,火箭相对于地球的加速度为

$$a=(1-\beta^2)a_0-\frac{Va_0}{c^2}\cdot\frac{c^2}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)V(1-\beta^2)=(1-\beta^2)^{3/2}a_0$$

注意:V 是火箭的速度,是变量,故 β 也是变量,$a=\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$,$t$ 是用地球时钟计时的,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}a_0$$

$$\int_0^{0.8c}\frac{\mathrm{d}V}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^t a_0\mathrm{d}t=a_0t$$

按照地球的钟,加速到 0.8c,需时

$$t=\frac{c}{a_0}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{V}{c}\right)}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{c}{a_0}\frac{\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}\Bigg|_{V=0}^{V=0.8C}=\frac{4c}{3a_0}$$

$$\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

将 $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a_0}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}V$ 代入上式,

$$\mathrm{d}t'=\frac{1}{a_0}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}\mathrm{d}V$$

按照火箭内的时钟,加速到 0.8c(地球上测得),需时

$$t'=\frac{1}{a_0}\int_0^{0.8c}\frac{\mathrm{d}V}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}=\frac{1}{2a_0}\left[\int_0^{0.8c}\frac{\mathrm{d}V}{1+\dfrac{V}{c}}+\int_0^{0.8c}\frac{\mathrm{d}V}{1-\dfrac{V}{c}}\right]=\frac{c}{a_0}\ln 3$$

12.2.20　静止的氢原子发出一条光谱线 H_δ 的波长 $\lambda=0.4101\times10^{-6}$m.当氢原子以 $v=5\times10^5$m/s 向着观察者飞行时,观察者看到的波长有多大的改变?

解　取静止参考系为 S 系,固连于氢原子的参考系为 S'系,今有 $\lambda'=0.4101\times10^{-6}$ m,

用多普勒效应公式，

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

$$c = \lambda\nu, \quad c = \lambda'\nu'$$

$$\lambda\nu = \lambda'\nu', \quad \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

$$\lambda = \lambda' = \left(\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} - 1\right)\lambda' = \left(\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} - 1\right)\lambda'$$

$$= \left[\left(1-\frac{v}{2c}\right)\left(1-\frac{v}{2c}\right) - 1\right]\lambda' = -\frac{v}{c}\lambda' = -6.8\times10^{-10}\mathrm{m}$$

12.2.21　当一光源以速率 V_1 向地球靠近时，地球上静止的人甲看到光源发出的是波长 $\lambda_1=5000\,\text{Å}$ 的绿光，而相对地球以速率 V_2 运动（与光源的运动沿同一直线）的人乙看到的光是波长 $\lambda_2=6000\,\text{Å}$ 的红光. 当光源以相同的速率 V_1 远离地球时，甲也看到波长 λ_2 的红光.

(1) 求光谱发出的光的波长 λ_0；

(2) 求 V_1、V_2 的值；

(3) 当光源以 V_1 远离地球时，乙看到的光的波长多大？

解　(1) 设地球为 S 系，光源为 S' 系，观察者乙为 S'' 系，

$$\nu = \nu'\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}, \quad \lambda' = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\lambda$$

今光源发出的光的波长 $\lambda'=\lambda_0$，光源以 V_1 的速率靠近观察者甲，$V=V_1$，$\lambda=\lambda_1$，

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{c+V_1}{c-V_1}}\lambda_1 \tag{1}$$

光源以 V_1 的速率远离甲，$V=-V_1$，$\lambda=\lambda_2$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{c-V_1}{c+V_1}}\lambda_2 \tag{2}$$

(1)、(2)两式相乘，

$$\lambda_0^2 = \lambda_1\lambda_2, \quad \lambda_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = 5477\,\text{Å}$$

(2) 用上述(1)式解出 V_1，作如下计算：

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2} = \frac{c+V_1}{c-V_1}, \quad \frac{\lambda_0^2-\lambda_1^2}{\lambda_0^2+\lambda_1^2} = \frac{2V_1}{2c} = \frac{V_1}{c}$$

$$V_1 = \frac{\lambda_0^2-\lambda_1^2}{\lambda_0^2+\lambda_1^2}c = 0.091c$$

设光源以 V''_2 的速率靠近观察者乙时，乙看到的波长为 λ_2，用上面导出的公式，

$$V''_2 = \frac{\lambda_0^2-\lambda_2^2}{\lambda_0^2+\lambda_2^2}c = -0.091c$$

为负值，说明光源与观察者乙是相互远离的，因此 V''_2 也是 S''系对 S' 系的速度.

可用速度变换公式求 S''系对 S 系，也即观察者乙相对于地球的速度 V_2. 在 S' 系与 S 系中作速度变换

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}$$

今知乙对 S' 系的速度沿 x' 轴方向，$v'_x = 0.091c$，S' 系对 S 系的速度沿 x 轴方向，$V = V_1 = 0.091c$，要求乙对地球的速度 v_x 即 V_2，

$$V_2 = \frac{0.091c + 0.091c}{1 + \frac{0.091c \cdot 0.091c}{c^2}} = 0.18c$$

(3) 当光源以 V_1 远离地球时，用速度变换公式时，S 系对 S' 系沿 x 正向运动，$V = V_1$，乙在 S 系中的速度为 $u_x = V_2$，则乙在 S' 中的速度为

$$V'_2 = \frac{V_2 + V_1}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} = \frac{0.18c + 0.091c}{1 + 0.18 \cdot 0.091} = 0.267c$$

注意：$V'_2 > 0$，说明观察者乙与光源是相互远离的，代入多普勒效应公式时，

$$V = -0.267c$$

此时，乙看到光的波长为

$$\lambda'' = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}\lambda_0 = \sqrt{\frac{c - (-0.267c)}{c + (-0.267c)}}5477 = 7.2 \times 10^3 \text{Å}$$

12.2.22 一辆汽车以每小时 120km 的速度接近一个汽车速度监视雷达站，如果雷达站的工作频率 $\nu_0 = 2 \times 10^{10}$Hz，雷达站上的警察测到的频移有多大？

解 由多普勒效应公式，汽车收到雷达站发来的信号的频率为

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \approx \nu_0 \sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \nu_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

雷达站收到由汽车反射返回的信号频率为

$$\nu'' \approx \nu'\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \nu_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \approx \nu_0\left(1 + \frac{2v}{c}\right)$$

频移为

$$\nu'' - \nu_0 = \frac{2v}{c}\nu_0 = \frac{2 \times 120 \times 10^3/3600}{3 \times 10^8} \times 2 \times 10^{10} = 4.44 \times 10^3(\text{Hz})$$

12.2.23 假定眼睛可以看到的最大波长是 6500Å，要使火箭发出的绿光(5000Å)，对于地球上的观测者成为不可见的，该火箭必须以多大速度运动？

解 要使频率向减小方向移动，火箭需远离地球运动. 设远离地球的速率为 v，

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}, \quad \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$$

$$\frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2} = \frac{1+\frac{v}{c}-\left(1-\frac{v}{c}\right)}{1+\frac{v}{c}+\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \frac{v}{c}$$

所以

$$v = \frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2}c = \frac{(6500)^2-(5000)^2}{(6500)^2+(5000)^2}c = 0.2565c$$

12.2.24　氢原子光谱中的一条谱线 H_α，波长为 6.561×10^{-7}m，在地球上测得来自太阳赤道上相对两端辐射 H_α 线的波长差为 9×10^{-12}m. 假定此效应是由于太阳自转引起的，求太阳的自转周期 T，已知太阳直径 $D=1.4\times10^9$m.

解　设太阳由于自转赤道上一点的速率为 v，则在地球上观察到太阳赤道两端辐射的 H_α 线的波长差为

$$\Delta\lambda = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\lambda_0 - \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\lambda_0 = \frac{2v}{\sqrt{c^2-v^2}}\lambda_0$$

$$\frac{(\Delta\lambda)^2}{4\lambda_0^2} = \frac{v^2}{c^2-v^2}, \quad \frac{(\Delta\lambda)^2}{4\lambda_0^2+(\Delta\lambda)^2} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$v = \frac{c\Delta\lambda}{\sqrt{4\lambda_0^2+(\Delta\lambda)^2}}$$

太阳自转周期为

$$T = \frac{\pi D}{v} = \frac{\pi D\sqrt{4\lambda_0^2+(\Delta\lambda)^2}}{c\Delta\lambda} = 2.14\times10^6\text{s} \approx 25\text{天}$$

12.2.25　每个双生子的心脏一秒钟跳一次，每人每次心跳时发出一个无线电脉冲，留在家里的一位在其惯性系中保持静止，另一位旅行者在零时刻由静止出发，极快地加速到速度 v(在比一次心跳更短的时间内，且不扰乱他的心脏)，旅行者用他的钟记录自己旅行了时间 t_1，同时一直发出脉冲，也一直接收从家里发来的脉冲. 在时刻 t_1，他突然改变速度方向，并于时刻 $2t_1$ 回到家中，他共计发出多少脉冲？在去途中他收到多少脉冲？归途中收到多少脉冲？总计收到和发出的脉冲之比为何值？家里的那位从时刻零到 t_2(用他的钟计时)收到多普勒降频脉冲，从时刻 t_2 开始收到多普勒升频脉冲，设 t_3 是从时刻 t_2 直至旅行结束的时间间隔，他在时间间隔 t_2 内收到多少脉冲？在 t_3 内又收到多少？两者之比为何值？发出和接收的脉冲总数之比又为何值？

解　用甲、乙分别表示留在家中和外出旅行的双生兄弟，时间单位以秒计，则乙在整个旅行中共发出脉冲 $2t_1$ 个.

在去途中，乙收到甲发来的降频脉冲的频率为

$$\nu_1=\nu_0\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

在去途中,乙共收到$t_1\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$个脉冲.

在归途中,乙收到甲发来的升频脉冲的频率为$\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$,归途中共收到$t_1\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$个脉冲.

在整个旅行期间,乙总计收到脉冲数为

$$t_1\left(\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}+\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\right)=\frac{2t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

收到的与发出的脉冲数之比为$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

下面考虑甲接收与发出脉冲情况.

先计算t_2、t_3与t_1的关系,用洛伦兹变换算出乙的钟为t_1时,甲的钟的示数t_1'.

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{(-v)}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

这里取乙为S系,甲为S'系,S'系对S系的速度为$-v\boldsymbol{i}$.

在t_1'时刻,甲测得乙离他的距离为vt_1',从那里脉冲传到甲处需时$\frac{vt_1'}{c}$,故在$t_2=t_1'+\frac{v}{c}t_1'$期间甲都收到乙发来的降频脉冲.

$$t_2=\left(1+\frac{v}{c}\right)t_1'=\left(1+\frac{v}{c}\right)\frac{t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}t_1$$

同样可以考虑t_3与t_1的关系,

$$t_3=\frac{2t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-t_2=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}t_1$$

在甲的钟 $0\sim t_2$ 时间内，收到降频脉冲频率为 $\sqrt{\dfrac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$，共收到乙发来的脉冲数为

$$\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\cdot t_2=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}t_1=t_1$$

在甲的钟 $t_2\sim t_2+t_3$ 期间，收到升频脉冲频率为 $\sqrt{\dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$，共收到乙发来的脉冲数为

$$\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}t_3=\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}t_1=t_1$$

在整个乙旅行期间，甲收到乙的降频脉冲和升频脉冲之比为 $\frac{t_1}{t_1}=1$. 收到的脉冲总数为 $2t_1$.

甲在乙旅行期间发出的脉冲总数为

$$t_2+t_3=\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}t_1+\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}t_1=\frac{2t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

甲发出的与接收到的脉冲总数之比为 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

可以看到，在乙旅行期间，甲发出的脉冲总数等于乙接收到的脉冲总数，乙发出的脉冲总数等于甲接收到的脉冲总数. 这个结果是合理的，因为双方发出的第一个脉冲和最后一个脉冲对方都能收到.

12.2.26　一宇宙飞船以速度 $0.6c$ 离开地球飞向离地球 3 光年的宇航站（地球参考系测出的距离），然后再返回地球. 起飞时地球的钟为 $t=0$，飞船的钟为 $t'=0$. 地球上每隔 1 年向飞船发一光脉冲，飞船上的人也每隔 1 年向地球发一光脉冲，试问：

(1) 旅行过程中，地球上的人和飞船上的人各发了几个脉冲？

(2) 飞船上的人在哪些时刻收到脉冲？

(3) 地球上的人在哪些时刻收到脉冲？

解　(1) 按在地球参考系（S 系）中测量，宇航站离地球的距离为 $L=3c$（时间以年为单位）.

飞船从地球到宇航站需时 $t_1=\dfrac{L}{0.6c}=5$（年），从宇航站返回地球需时 $t_2=\dfrac{L}{0.6c}=5$（年）. 整个旅行过程，需时 $t_1+t_2=10$ 年. 地球上的人向飞船共发了 9 个脉冲（回到地球就

不再互发脉冲).

对飞船到达宇航站这个事件用洛伦兹变换公式,求飞船的钟的示数,

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

今 $v=0.6c, x'=0, t=t_1=5$ 年.

$$t'=t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=4\text{ 年}$$

按飞船的钟计,从宇航站返回地球又需 4 年,因此旅行期间,飞船上的人向地球共发了 7 个脉冲.

(2) 方法一:按地球上的人测量,地球上一年后发第一个脉冲,飞船上的人收到时刻为 t_1(以年计).

$$c(t_1-1)=0.6ct_1$$

$$t_1=2.5(\text{年})$$

用洛伦兹变换公式,可算出,飞船上的人收到第一个脉冲的时刻为

$$t_1'=t_1\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=2(\text{年})$$

飞船上的人收到来自地球上的人发来的第二个脉冲的时刻 t_2(用 S 系)和 t_2'(用 S' 系)计算如下:

$$c(t_2-2)=0.6ct_2,\quad t_2=5\text{ 年}$$

$$t_2'=t_2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=4\text{ 年}$$

飞船收到第三个光脉冲是在归程中收到的.飞船收到时已走过的距离加上第三个脉冲走过的距离等于往返的整个路程.(按 S 系测出)

$$0.6c\cdot t_3+c(t_3-3)=2\times 3c$$

飞船上的人收到第三个脉冲时刻(S' 系测得)

$$t_3'=t_3\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\frac{9}{1.6}\times 0.8=4.5(\text{年})$$

飞船上的人收到第 n 个($n\geqslant 3$)脉冲,

$$c(t_n-n)+0.6ct_n=2\times 3c$$

$$1.6ct_n=(n+6)c$$

$$t_n'=t_n\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\frac{n+6}{1.6}\times 0.8=\frac{1}{2}(n+6)(\text{年})\qquad (3\leqslant n\leqslant 9)$$

飞船上的人收到地球发来的 9 个脉冲的时刻(飞船的钟)为 $t'=2,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7$ 和 7.5 年.

(3) 方法一:飞船上发第 1 个脉冲时 $t_{10}'=1$ 年,此时地球上的钟

$$t_{10}=\frac{t'_{10}+\frac{v}{c^2}x'_{10}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{1}{0.8}=1.25(\text{年})$$

地球上收到第 1 个脉冲，地球上的钟示数为 t_1，

$$c(t_1-t_{10})=vt_{10}$$

$$t_1=t_{10}\left(1+\frac{v}{c}\right)=2(\text{年})$$

同样考虑在飞船返回以前发的第 n 个脉冲被地球收到的时刻 t_n，

$$c(t_n-t_{n0})=vt_{n0}$$

$$t_n=\left(1+\frac{v}{c}\right)t_{n0}=\left(1+\frac{v}{c}\right)\frac{t'_{n0}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\cdot n=2n$$

其中用了 $t'_{n0}=n,n=1,2,3,4$.

飞船上发第 5 个脉冲时，$t'_{50}=5$ 年，此时地球上的钟为

$$t_{50}=\frac{t'_{50}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

地球上的人收到第 5 个脉冲的时刻 t_5

$$c(t_5-t_{50})+vt_{50}=6c$$

$$t_5=t_{50}\left(1-\frac{v}{c}\right)+6=t'_{50}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}+6=8.5(\text{年})$$

同样可得

$$t_n=\frac{1}{2}n+6(\text{年})\qquad n=5,6,7$$

地球上的人收到 7 个脉冲的时间分别为

$$t=2,4,6,8,8.5,9,9.5(\text{年})$$

方法二：用多普勒效应来回答(2)、(3)问.

设地球发射脉冲的频率为 ν，则当飞船远离地球时，飞船收到脉冲的频率 ν' 为

$$\nu'=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\nu$$

发射的周期和接收的周期分别用 T 和 T' 表示，$T=1$ 年，则

$$T'=\frac{1}{\nu'}=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\frac{1}{\nu}=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}T=2\text{ 年}$$

飞船收到第 1 个脉冲时，$t'_1=2$ 年，收到第 2 个脉冲时，$t'_2=4$ 年. 此时，由(1)问的解答知，飞船开始返航.

当飞船返航接近地球时，

$$T' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}T = 0.5T = 0.5\text{ 年}$$

因此，飞船收到第 3、4、…、9 个脉冲的时刻分别为 $t'_3=4.5$ 年，$t'_4=5$ 年，…，$t'_9=7.5$ 年.

同样考虑飞船发的脉冲周期为 1 年，当飞船远离地球时，地球上接收到的脉冲周期为 2 年，远离时飞船共发了 4 个脉冲，地球上收到这 4 个脉冲的时间分别为 2 年、4 年、6 年、8 年. 飞船返回期间发的脉冲，地球上接收到的周期为 0.5 年，因此地球上收到第 5、6、7 三个脉冲的时间分别为 8.5 年、9 年、9.5 年(均以地球的钟计时).

12.2.27　证明光的多普勒效应公式：

(1) 当光源和观察者相趋近时，观察者测得的频率 $\nu=\nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$，其中 $\beta=\frac{v}{c}$，v 是相趋近时的相对速率. ν_0 是光的固有频率，即在光源为静止的参考系中测得的光的频率；

(2) 当光源和观察者相远离时，$\nu=\nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$；

(3) 当光源和观察者间的相对运动不在两者的连线上时，观察者测得的频率为

$$\nu = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,\frac{c}{c-v\cos\theta}\nu_0$$

其中 θ 是在光源对观察者的速度 $\boldsymbol{v}$ 与光源、观察者连线的夹角.

证明　(1) 设固连于光源的参考系为 S' 系，固连于观察者的参考系为 S 系.

考虑 S' 系为静系(光源不动)，观察者以 v 的速率向光源运动. 如图 12.10 所示. 在 S' 系中，光波相对于观察者的速度为 $c+v$，光的波长为 λ_0，频率为 $\nu=\nu_0$，波速为 c.

$$c = \lambda_0\nu_0$$

单位时间内观察者接收到的波数为

$$\frac{(c+v)\cdot 1}{\lambda_0} = \frac{c+v}{c}\nu_0$$

观察者测到的频率即 S 系测得的频率 ν. 是 S 系的单位时间接收到的波数，观察者的钟是动钟，根据动钟变慢效应，

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

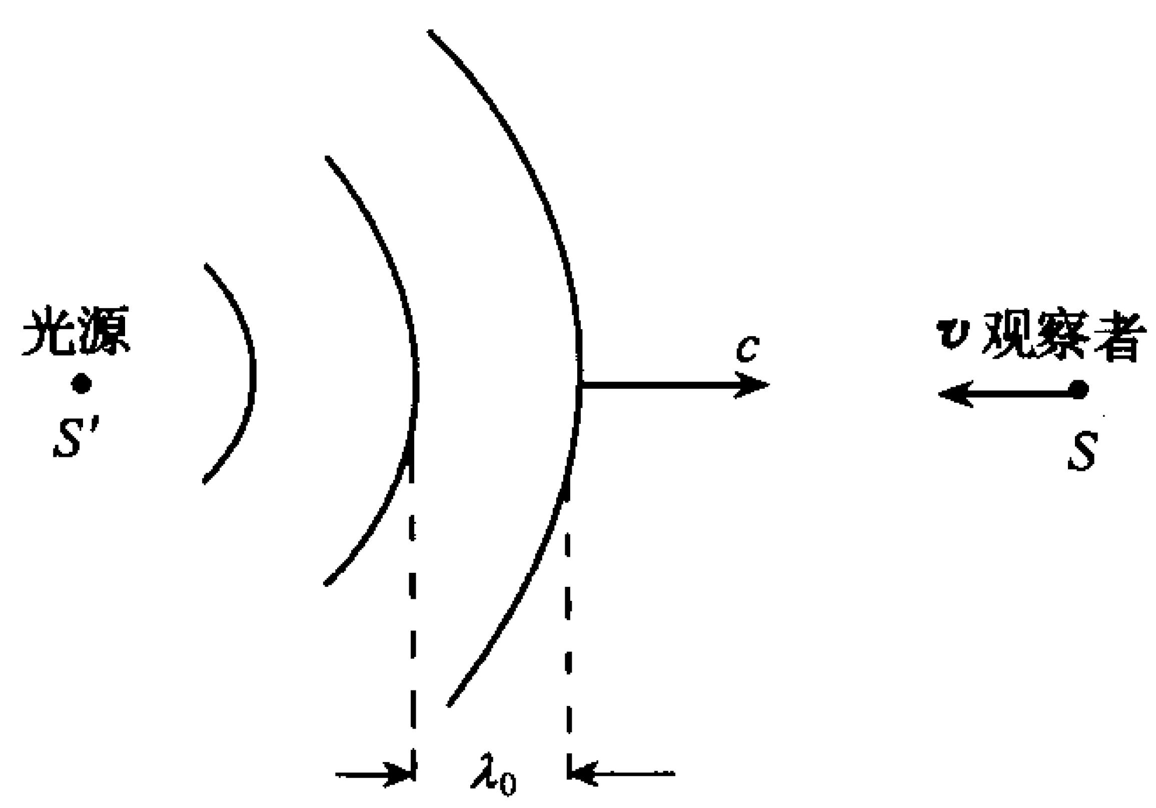


图 12.10

即 $\Delta t'=1\text{s}$ 时，$\Delta t=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$(s). 可见在 S 系中，测到的频率(单位时间内观察者收到的波数)为

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{c+v}{c}\nu_0=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu_0=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_0$$

再考虑 S 系为静系，即观察者是静止的，光源(S'系)向着观察者以 v 的速率运动，如图 12.11 所示. 图中画的两个波面是光源 S'分别于 $t'=0$ 位于 A 点、$t'=T'$(光波的周期)位于 B 点发出的波在 t'时刻传到的位置(t'、T'都是按 S'系计时的)，$\nu_0=\frac{1}{T'}$. 图中 λ 是观察者(S 系)测得的波长

$$\lambda=ct'-c(t'-T')-vT'=(c-v)T'=(c-v)\frac{1}{\nu_0}$$

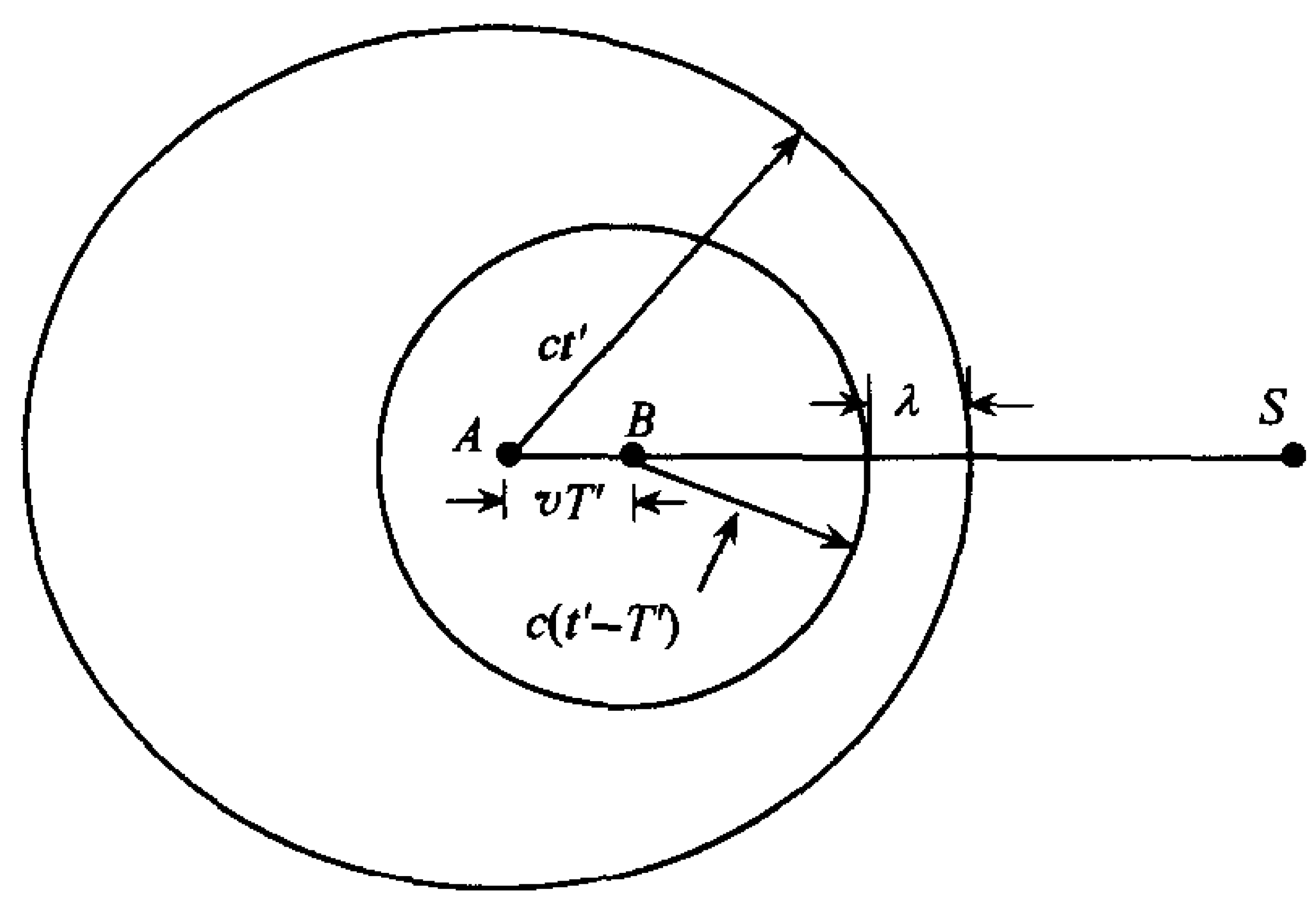


图 12.11

S'系中的单位时间内通过观察者的波数为

$$\frac{c\cdot 1}{\lambda}=\frac{c}{c-v}\nu_0$$

现在 S'系为动系，由钟慢效应，静系 S 中经历 1s，动系经历$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$s，$S$ 系(观察者)测得的频率是 S'系中$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$s 内通过观察者的波数.

$$\nu=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot\frac{c}{c-v}\nu_0=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_0$$

可见，观察者测得的光的频率只与观察者与光源的相对运动有关.

(2) 从上述的证明可见，如果光源与观察者的相对运动是沿连线以速率 v 相互远离，公式仍然成立，只要取其负值即可. 可见如令沿连线以速率 v 相互远离，则等于规定 v 的正负号与前相反，可用(1)中的式子，将 v 改为 $-v$ 即可，所以

$$\nu=\nu_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}=\nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

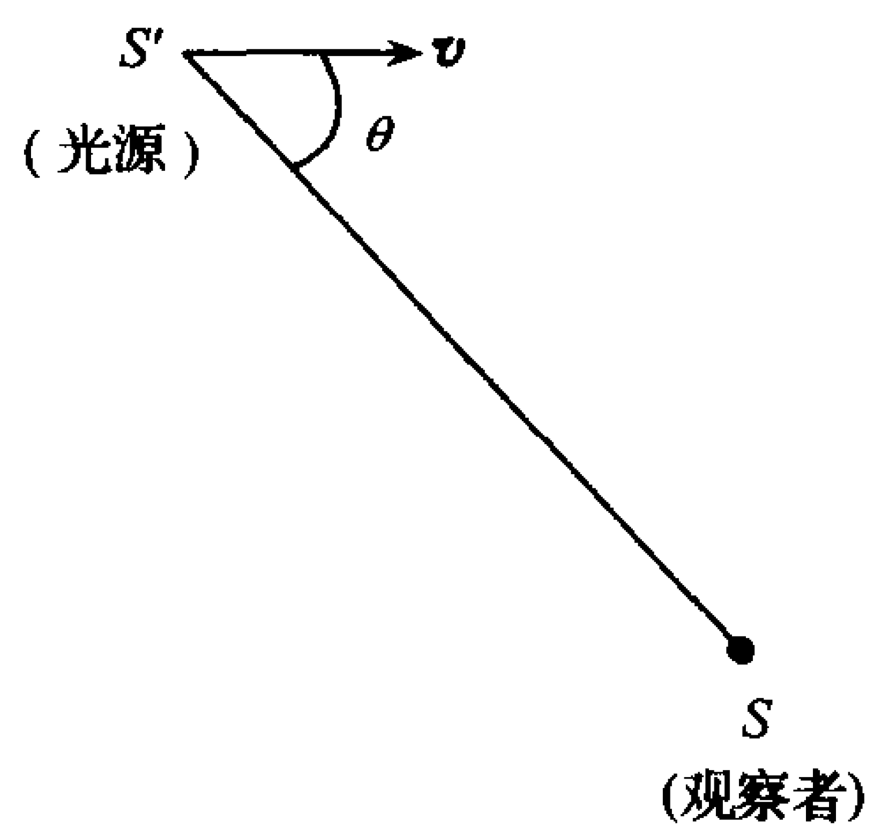


图 12.12

(3) 光源和观察者的相对运动不在它们的连线上,如在 S 系(观察者)中测得光源的速度$\boldsymbol{v}$ 与连线的夹角 θ 如图 12.12 所示,这时,光源相对于观察者在两者连线上相互靠近的速度分量为 $v\cos\theta$,可用图 12.11 所用的

$$\nu=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\frac{c}{c-v}\nu_0$$

中$\frac{c}{c-v}$改成$\frac{c}{c-v\cos\theta}$即可. 注意:钟慢效应中的 v 不能改为 $v\cos\theta$,

所以

$$\nu=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\frac{c}{c-v\cos\theta}\nu_0$$

(1)、(2)的式子是纵向多普勒效应公式,(3)的式子是横向多普勒效应公式.

12.2.28 一个光源静止在参考系 S 的原点 $x=0$,发射出两个光脉冲 P_1 和 P_2,分别于 $t=0$ 和 $t=\tau$ 发射,参考系 S' 以 $v\boldsymbol{i}$ 相对于 S 系运动,S' 系中的观察者在 $x'=0$、$t'=0$ 收到 P_1.

(1) 求在 $x'=0$ 点收到 P_2 的时间 τ';

(2) 若 λ、λ' 分别是在 S 和 S' 系中测量的光在真空中的波长,求 λ' 与 λ、v 的关系;

(3) 计算 H_β 辐射($\lambda=4861.33$Å)的$\frac{v}{c}$的一级和二级多普勒频移. 这频移是质子通过 20kV 的电势差加速后辐射与平衡质子的辐射的频率差、假设加速后质子以保持不变的速度离去,光谱计的光轴与质子的运动方向共线.

解 (1) 方法一:在 S 系中发射 P_2 时 $x=0,t=\tau$,此事件 1 在 S' 系中发生的地点和时间分别为

$$x_1'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=-\frac{v\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t_1'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

光脉冲 P_2 到达 $x'=x_2'=0$ 时为事件 2,

$$x_2'-x_1'=c(t_2'-t_1')$$

$$\tau'=t_2'=t_1'-\frac{x_1'}{c}=\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}+\frac{v}{c}\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\tau$$

其中 $\beta=\frac{v}{c}$.

方法二:τ 和 τ' 分别是 S 系和 S' 系测得的两个脉冲发射的时间间隔,$x=0$ 是光源,S' 系中的观察者相对于光源沿其连线运动,可用纵向多普勒效应公式求 τ'. τ、τ' 为辐射周期

$\nu=\frac{1}{\tau}$，$\nu'=\frac{1}{\tau'}$，ν、ν'为辐射频率，今v是相互远离的速度，

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},\quad \tau'=\tau\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

（2）$\lambda=\frac{c}{\nu}$，$\lambda'=\frac{c}{\nu'}$，在S、S'系中光速均为c，$\lambda=c\tau$，$\lambda'=c\tau'$.

$$\lambda'=\lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

（3）质子在电势差$\Delta V=20\text{kV}$的电场中加速获得的能量为

$$E=20\text{keV}=20\times10^3\times1.60\times10^{-19}=3.2\times10^{-15}\text{J}$$

较之质子的静能$1.67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2=1.50\times10^{-10}\text{J}$小得多，质子获得的速度可用非相对论计算，

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{2E}{m}}=\frac{1}{3\times10^8}\sqrt{\frac{2\times3.2\times10^{-15}}{1.67\times10^{-27}}}=6.53\times10^{-3}$$

质子的运动速度在质子与光谱计的光轴在一条直线上，且质子远离光谱计，用离去的纵向多普勒效应公式，

$$\lambda'=\lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}=\lambda\left(1+\beta+\frac{1}{2}\beta^2+\cdots\right)$$

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\lambda\beta+\frac{1}{2}\lambda\beta^2+\cdots$$

H_β辐射的一级频移为

$$\lambda\beta=4861.33\times6.53\times10^{-3}=31.7\text{Å}$$

H_β辐射的二级频移为

$$\frac{1}{2}\lambda\beta^2=\frac{1}{2}\times4861.33\times(6.53\times10^{-3})^2=0.104(\text{Å})$$

12.2.29　如图12.13，一频率为ν的单色横波在波源参考系S中沿与x方向成60°角传播，该波源以速度$v=0.8c$在x方向向着在S'系（它的x'轴平行于x轴）中静止的观察者运动．求：

（1）观察者测得的波的频率ν'；

（2）在S'系中观测光的传播方向与x'轴的夹角θ'.

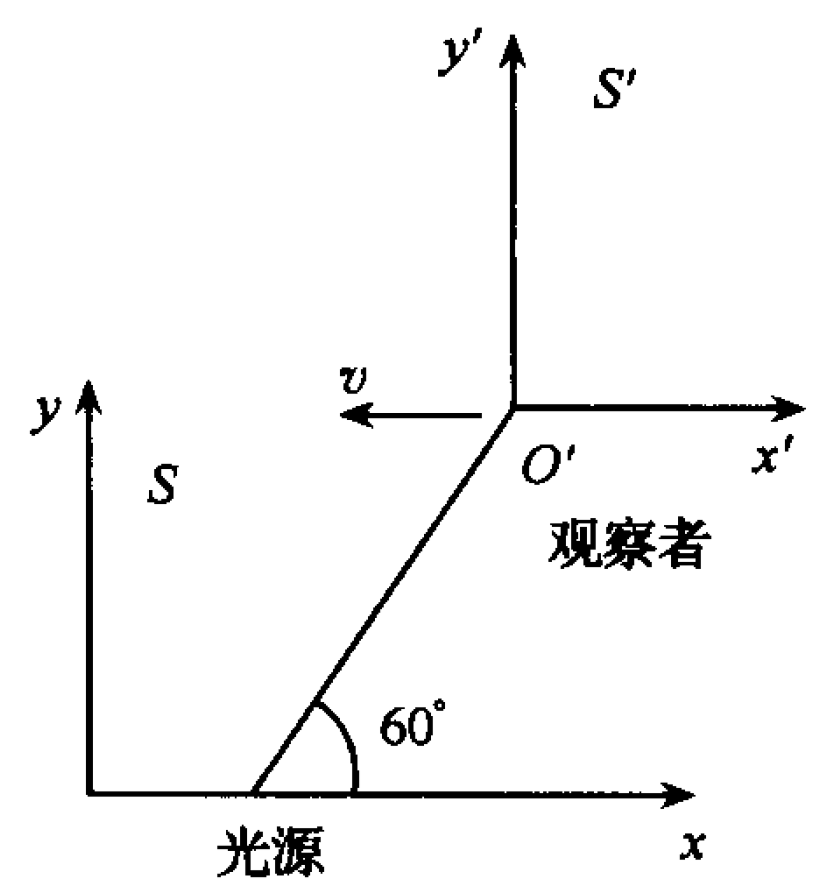


图12.13

解　（1）用横向多普勒效应公式，已知波的传播方向在S系中与x轴的夹角$\theta=60°$，需把动静关系改变一下，把S系看做不动，观察者静止的S'系沿x轴负向以速率$v=0.8c$运动．观察者看到光波在S系中与x轴夹角$\theta=60°$方向．相对速度在光源、观察者连线方向的分量为$v\cos\theta$（S系中测得）用把光源作为静止的横向多普勒效应公式，S'系（观察者）看到的光波频率ν'为

$$\nu' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{c+v\cos\theta}{c}\nu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(0.8)^2}} \frac{c+0.8c\times 0.5}{c}\nu = \frac{7}{3}\nu$$

(2) 方法一:用观察者作为静止的横向多普勒效应公式,

$$\nu' = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\frac{c}{c-v\cos\theta'}\nu$$

$$\cos\theta' = \frac{1}{v}\left[c - c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot\frac{\nu}{\nu'}\right] = \frac{1}{0.8c}\left[c - c\sqrt{1-(0.8)^2}\times\frac{3}{7}\right] = 0.9286$$

$$\theta' = \arccos(0.9286) = 21°47'$$

方法二:用速度变换公式,

$$v'_x = \frac{v_x+v}{1+\frac{v}{c^2}v_x},\quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{v}{c^2}v_x}$$

两式相除,得

$$\tan\theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v_x+v}$$

今 $v=c, v_x=c\cos\theta, v_y=c\sin\theta$,

$$\tan\theta' = \frac{c\sin\theta\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c\cos\theta+v}$$

代入 $\theta=60°, v=0.8c$,可得

$$\theta' = \arctan(0.3997) = 21°47'$$

说明:从题意看,此单色波是定向传播的,若没有尘埃等(严格的真空),观察者只能在图示时刻看到它.如果光源向各个方向传播,即使是严格的真空,在其他时刻也能看到,但 $\theta\neq 60°$,看到的 ν'、θ' 都将随 θ 而变.

12.2.30 一单色点光源发出频率为 ν 的辐射,一观察者以匀速率 v 沿一离光源最近距离为 d 的直线运动,如图 12.14 所示:

(1) 导出被观察到的频率的表达式,将频率 ν' 表示成图中 x 的函数;

(2) 若 $\frac{v}{c}=0.8$,画出(1)问的解答的近似图.

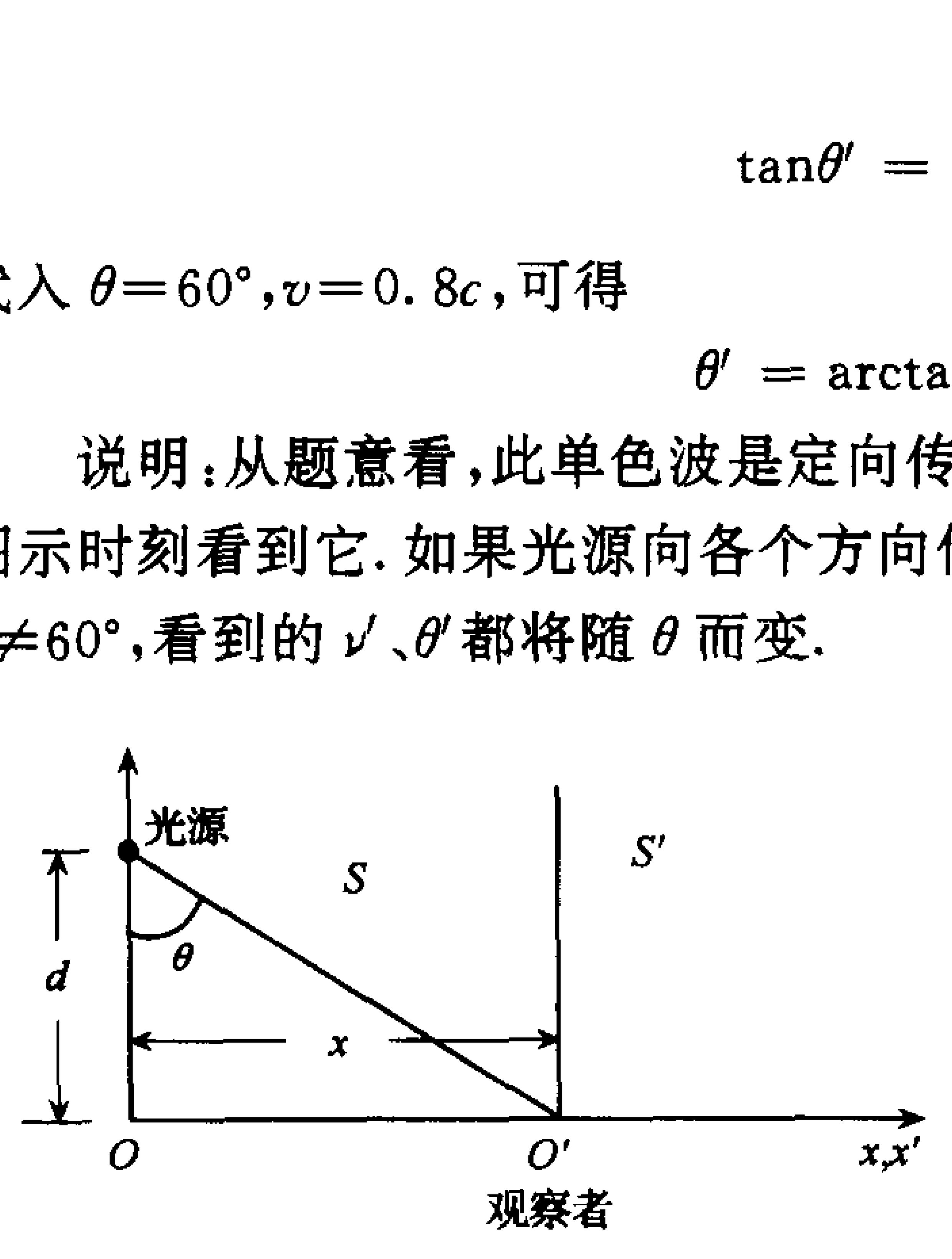


图 12.14

解 (1) 用把光源(S 系)看作静止的横向多普勒效应公式.注意,观察者的速度在他和光源连线方向的分量为 $-v\sin\theta$,

$$\nu' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{c - v\sin\theta}{c}\nu$$

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

所以

$$\nu' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(1 - \frac{\frac{v}{c}x}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)\nu$$

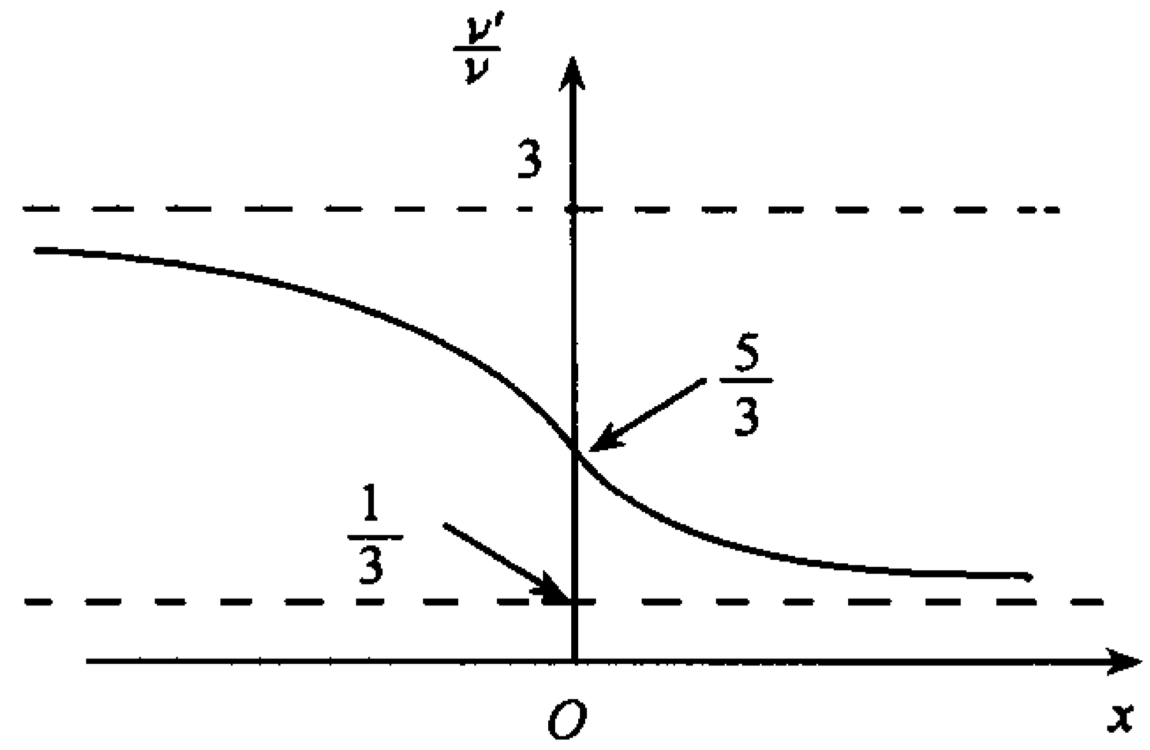


图 12.15

（2）当$\frac{v}{c}=0.8$时，

$$\nu' = \frac{1}{0.6}\left(1 - 0.8\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)\nu$$

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{3}\left(5 - \frac{4x}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)$$

$x\to-\infty$时，$\frac{\nu'}{\nu}\to 3$，$x=0$ 时，$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{5}{3}$，$x\to\infty$时，$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{1}{3}$.

12.2.31　宇宙飞船上有一个发射器和一个接收器，它以恒定速度远离地球期间向地球发出一信号脉冲，飞船上的钟 40s 后收到被地球反射回来的信号，接收到的频率是发射频率的一半：

（1）脉冲从地球反射时，在飞船上测量地球位于何处？

（2）飞船相对于地球的速度为何值？

（3）脉冲被飞船接收时，在地球上测量飞船位于何处？

解　（1）脉冲的速率恒为c，在飞船参考系中，飞船是固定的，脉冲从飞船发射到地球反射再回到飞船两段距离是相等的. 因此从脉冲发射到地球反射用时$\frac{40}{2}=20\text{s}$. 在此期间，脉冲传播的距离，就是飞船参考系中测得的地球反射时离飞船的距离，距离为

$$l = 20\cdot c = 20\times 3\times 10^8 = 6\times 10^9\text{m}$$

（2）用纵向多普勒效应公式，设飞船发射时频率为ν_0，地球收到和反射的频率为ν_1，飞船收到反射回来的频率为ν_2.

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \nu_0 \cdot \frac{c-v}{c+v}$$

因为
$$\nu_2 = \frac{1}{2}\nu_0, \qquad \frac{c-v}{c+v} = \frac{1}{2}, \qquad v = \frac{1}{3}c$$

因此飞船以 $v=\frac{1}{3}c$ 的速率远离地球.

(3) 取飞船参考系为 S 系,地球参考系为 S' 系,$t=t'=0$ 时,x 与 x',y 与 y',z 与 z' 轴分别重合,S' 系对 S 系的速度为 $\frac{1}{3}c$,沿 x 或 x' 轴正向.

设飞船发射脉冲时为事件 A. 地球收到并反射脉冲时为事件 B,飞船收到反射回来的脉冲为事件 C.

已知:$x_A=0, x'_B=0, x_C=0, t_B-t_A=20\text{s}, t_C-t_B=20\text{s}$.

因为

$$x_B - x_A = c(t_B - t_A)$$

所以 $x_B=20c$,

$$x'_B = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x'_C = \frac{x_C - vt_C}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$x'_C = x'_C - x'_B = \frac{x_C - x_B - v(t_C - t_B)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{-20c - \frac{1}{3}c \cdot 20}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = -\frac{80 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{8}} = -8.5 \times 10^9 (\text{m})$$

12.2.32 在一惯性系中的观察者 O 观察到,频率为 ν 的光子以入射角 θ_i 入射到相对于 O 以速度 v 在 x 方向运动的平面镜上,求光子的反射角 θ_r 和反射光子的频率 ν_r 与 θ_i、ν 的关系. 如果平面镜以速度 v 在 y 方向运动,结果又将如何(图 12.16)?

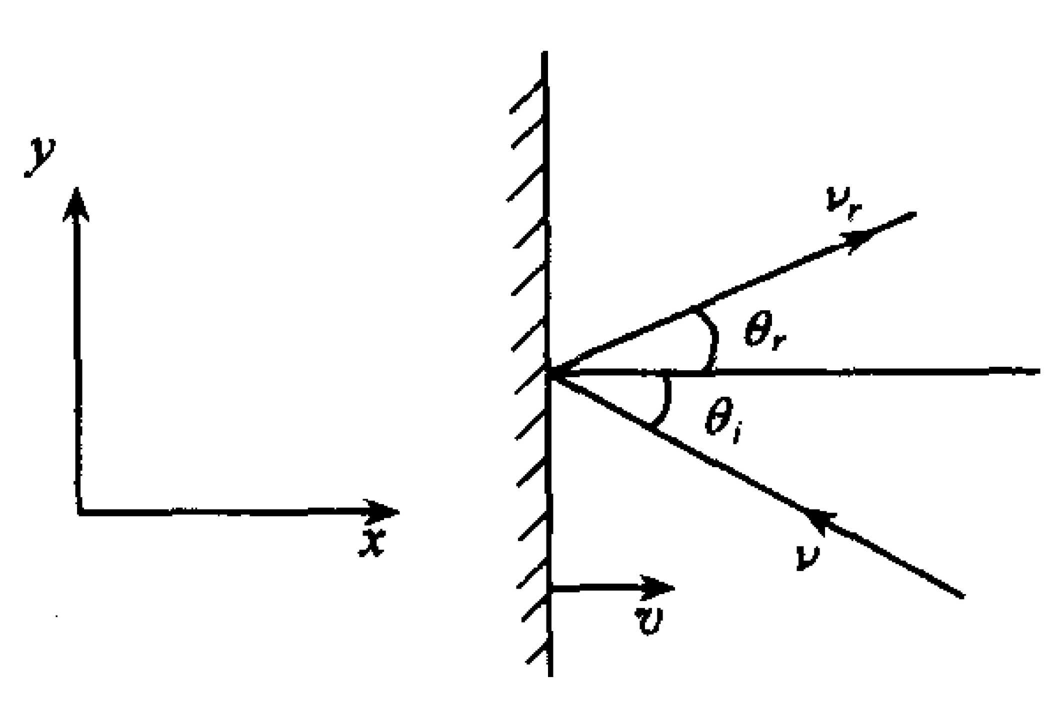


图 12.16

解 先考虑平面镜以速率 v 向 x 正方向运动. 取 S、S' 系分别为与实验室和镜子固连的参考系,θ_i、θ'_i 分别是 S、S' 系中的入射角.

入射时,镜子是观察者,光源与观察者在连线方向的相对速度分量分别为 $v\cos\theta_i$(S 系)和 $v\cos\theta'_i$(S' 系),(均规定相互靠近为正.)

用横向的多普勒效应公式,

$$\nu_i' = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\frac{c}{c - v\cos\theta_i'}\nu_i$$

$$\nu_i' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{c + v\cos\theta_i}{c}\nu_i, \quad \nu_i = \nu$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\frac{c}{c - v\cos\theta_i'} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{c + v\cos\theta_i}{c}$$

$$c - v\cos\theta_i' = \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]\frac{c^2}{c + v\cos\theta_i}$$

$$v\cos\theta_i' = c - \frac{c^2 - v^2}{c + v\cos\theta_i}$$

对于 S' 参考系，反射时，频率不变，$\nu_r' = \nu_i'$，反射角等于入射角，$\theta_r' = \theta_i'$.

反射时，镜子是光源. 光源与观察者在连线方向的相对速度分量分别为 $v\cos\theta_r$（S 系）和 $v\cos\theta_r' = v\cos\theta_i'$（$S'$ 系），

$$\nu_r = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{c + v\cos\theta_r'}{c}\nu_r' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{c + v\cos\theta_i'}{c}\nu_i'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{c + v\cos\theta_i'}{c}\cdot\frac{c + v\cos\theta_i}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\nu$$

$$= \frac{1}{(c^2 - v^2)}(c + v\cos\theta_i)\left[c + c - \frac{c^2 - v^2}{c + v\cos\theta_i}\right]\nu$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}(1 + \beta^2 + 2\beta\cos\theta_i)\nu$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$. 由

$$\nu_r = \sqrt{1-\beta^2}\frac{1}{1 - \beta\cos\theta_r}\nu_i'$$

$$\nu_r = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1 + \beta\cos\theta_i')\nu_i'$$

$$\beta\cos\theta_i' = 1 - \frac{1-\beta^2}{1 + \beta\cos\theta_i}$$

三式可解出

$$\cos\theta_r = \frac{(1+\beta^2)\cos\theta_i + 2\beta}{1 + \beta^2 + 2\beta\cos\theta_i}$$

再考虑平面镜以速率 v 向 y 正方向运动的情形.

入射时，镜子是观察者，光源与观察者在连线方向的相对速度分量为 $-v\sin\theta_i$（S 系）和 $-v\sin\theta_i'$（S' 系），

$$\nu_i' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\sin\theta_i'}\nu$$

$$\nu_i' = \frac{1-\beta\sin\theta_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\nu$$

可得

$$-\beta\sin\theta_i' = 1 - \frac{1-\beta^2}{1-\beta\sin\theta_i}$$

$$\sin\theta_i' = \frac{\sin\theta_i - \beta}{1-\beta\sin\theta_i}$$

反射时,仍有 $\nu_r'=\nu_i'$,$\theta_r'=\theta_i'$. 镜子是光源,光源与观察者在连线方向的相对速度分量为 $v\sin\theta_r$(S 系)和 $v\sin\theta_r'$(S' 系),

$$\nu_r = \frac{1+\beta\sin\theta_r'}{\sqrt{1-\beta^2}}\nu_i' = \frac{1+\beta\sin\theta_i'}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1-\beta\sin\theta_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\nu$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}(1-\beta\sin\theta_i)\left[1+\frac{\beta(\sin\theta_i-\beta)}{1-\beta\sin\theta_i}\right]\nu = \nu$$

由

$$\nu_r = \frac{1+\beta\sin\theta_i'}{\sqrt{1-\beta^2}}\nu_i'$$

$$\nu_r = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\sin\theta_r}\nu_i'$$

$$\sin\theta_i' = \frac{\sin\theta_i-\beta}{1-\beta\sin\theta_i}$$

三式可解出 $\theta_r=\theta_i$.

结论是平面镜以速率 v 向 y 正方向运动与平面镜保持静止没有什么区别,反射光子的频率与入射光子的频率一样,反射角等于入射角.

12.2.33 一面镜子在真空中以速度 v 沿 $+x$ 方向运动,一束频率为 ν 的光从 $x=+\infty$ 处垂直入射到镜面上,求:

(1) 反射光的频率;

(2) 每个反射光子的能量;

(3) 若入射光的平均能流密度为 I_i($\mathrm{W/m^2}$),求反射光的平均能流密度.

解 (1) 取实验室参考系为 S 系,固连于镜子的参考系为 S' 系,用纵向多普勒效应公式:

入射时,镜子是观察者,

$$\nu_i' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu_i = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu$$

反射时,镜子是光源,$\nu_r'=\nu_i'$,

$$\nu_r = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu_r' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu_i' = \frac{c+v}{c-v}\nu$$

(2) 每个反射光子的能量为

$$h\nu_r = \frac{c+v}{c-v}h\nu$$

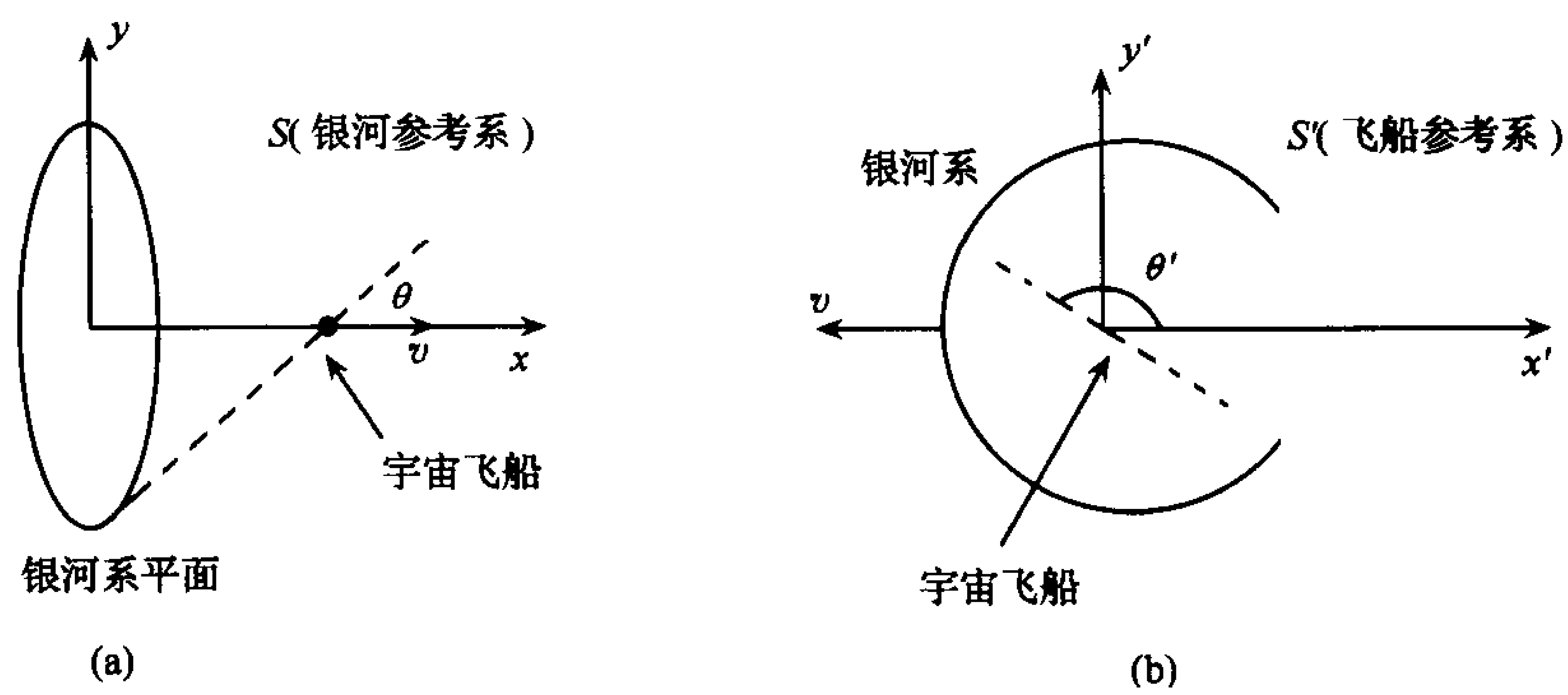
(3) 设单位体积光束内的光子数为 n，入射光平均能流密度为

$$I_i = nch\nu$$

反射光平均能流密度为

$$I_r = nch\nu_r = nch\frac{c+v}{c-v}\nu = \frac{c+v}{c-v}I_i$$

12.2.34 在弗雷德·霍尔的一本小说的末尾的简化了的说法中，一个英雄以高的洛伦兹因子在与银河系平面成直角的方位飞行时，他说他似乎在一个蓝边红体的"金鱼缸"内部朝着缸口飞行.费曼打赌说，来自银河系的光看来不会是那样.你看谁正确？取 $\beta=0.99$ 和在银河参考系中观测边缘的角 θ 为 45°，如图 12.17(a)所示.



(a)　　(b)

图 12.17

(1) 导出或直接写出相对论性的光行差表达式，并用它计算图 12.17(b)中的 θ'，即计算在宇宙飞船中看来自银河边缘的光的方向；

(2) 导出或直接写出相对论的多普勒效应公式，并用它计算来自边缘的光的频率比 $\frac{\nu'}{\nu}$；

(3) 取足够多的角 θ 计算 θ' 和 $\frac{\nu'}{\nu}$，判定谁赌赢了.

解 (1) 用速度变换公式

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$$

考虑银河系平面上各处发的光的方向在 S、S' 系中的关系，

$$u_x = c\cos\theta,\quad u'_x = c\cos\theta'$$

$$c\cos\theta' = \frac{c\cos\theta - v}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$$

这就是相对论性的光行差表达式，它也可用涉及 θ、θ' 的两个横向多普勒效应表达式获得(参看 12.2.32 题).

代入 $\theta=45°$，$\frac{v}{c}=0.99$，得 $\cos\theta'=-0.9431$，$\theta'=160.6°$.

(2) 12.2.27 题已导出了横向多普勒效应公式

$$\nu'=\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\nu$$

代入 $\theta=45°$，$\frac{v}{c}=0.99$，

$$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{1-0.99\times\cos45°}{\sqrt{1-(0.99)^2}}=2.13$$

(3) 上述 $\frac{\nu'}{\nu}>1$ 表明：在飞船上看，来自银河系边缘的光发生蓝移.

飞船上收到来自银河系中心的光，$\theta=0$，

$$\cos\theta'=\frac{1-0.99}{1-0.99\times1}=1,\quad \theta'=0$$

$$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{1-0.99\times1}{\sqrt{1-(0.99)^2}}=0.071<1$$

可见，来自银河系中心的光在飞船上看发生红移.

下面求临界角 θ_c 和 θ'_c，它是在飞船上看没有发生红移和蓝移的角度，即 $\frac{\nu'}{\nu}=1$.

$$1=\frac{1-0.99\cos\theta_c}{\sqrt{1-(0.99)^2}}$$

$$\cos\theta_c=0.8676,\quad \theta_c=29.8°$$

$$\cos\theta'_c=\frac{\cos\theta_c-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_c}=\frac{0.8676-0.99}{1-0.99\times0.8676}=-0.8676$$

$$\theta'_c=150.2°$$

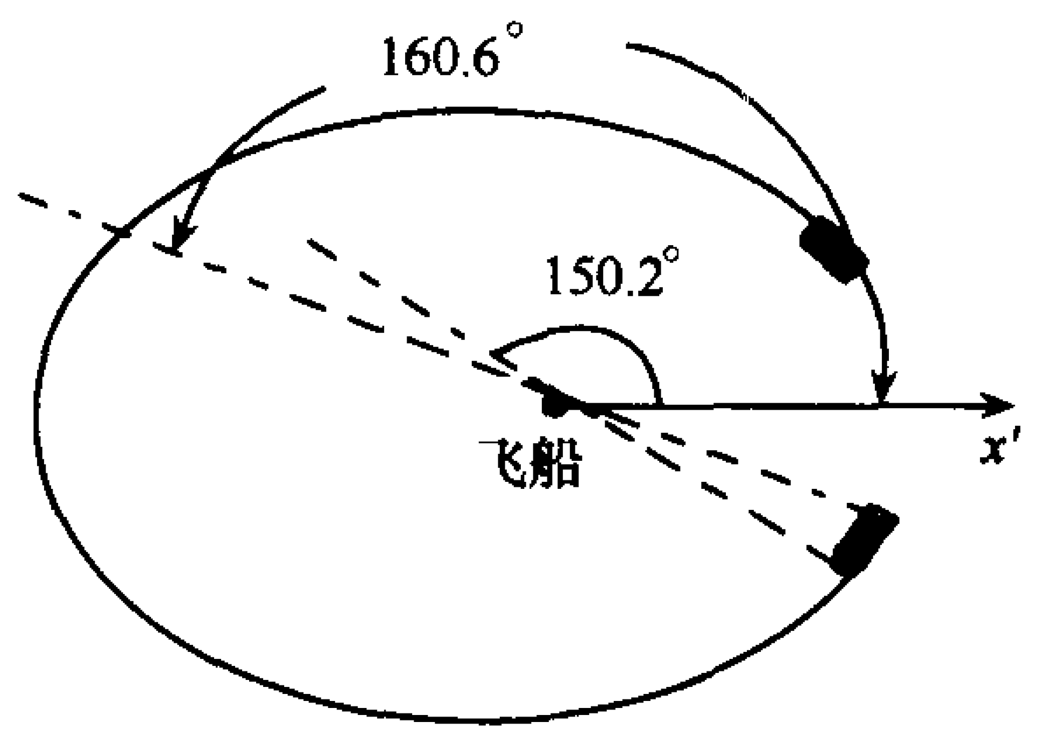


图 12.18

从以上计算可见，在飞船位于图 12.18 所示位置(银河系边缘的光的方向为 $\theta=45°$)时，那个英雄的描述是对的，在飞船上看到的情况大致如图 12.18 所示. $150.2°<\theta'<160.6°$部分(图中"金鱼缸"画有粗线的边缘部分)发生蓝移，$\theta'<150.2°$处发生红移. 确似一个蓝边红体的"金鱼缸". 在早些时候，飞船上看到的蓝边更宽，在晚些时候，蓝边将消失.

12.3 狭义相对论的动力学

12.3.1 两个静质量均为 m 的粒子沿同一方向运动，分别具有动量 $5mc$ 和 $10mc$. 问

从较慢的粒子看，较快的粒子的速度多大？反之呢？

解　设实验室参考系为 S 系，固连于较慢粒子的参考系为 S' 系. 在 S 系中，设较慢粒子的速度为 v_1，较快粒子的速度为 v_2.

$$5mc=\frac{mv_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}$$

$$10mc=\frac{mv_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}$$

解出

$$v_1=\sqrt{\frac{25}{26}}c,\quad v_2=\sqrt{\frac{100}{101}}c$$

用速度变换关系，在 S' 系中，较快粒子的速度为

$$v_2'=\frac{v_2-v_1}{1-\frac{v_1v_2}{c^2}}=0.593c$$

设固连于较快粒子的参考系为 S'' 系，在 S'' 系中，较慢粒子的速度为

$$v''_1=\frac{v_1-v_2}{1-\frac{v_2v_1}{c^2}}=-0.593c$$

负号表示与在 S 系中的运动方向(此方向规定为正方向)相反.

12.3.2　一静止质量为 m、荷电为 e 的静止带电粒子被场强为 E 的均匀电场加速了一段时间 t，获得了可与真空中光速相比的速度. 问：

(1) 加速结束时，粒子的动量和速度多大？

(2) 若此粒子不稳定，在其静止参考系中以平均寿命 τ 衰变. 当此粒子以上述速度匀速运动时，一个静止的观察者测到的粒子平均寿命多大？

解　(1)

$$p=eEt$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=eEt,\quad v=\frac{eEct}{\sqrt{m^2c^2+(eEt)^2}}$$

(2) 设 S'、S 系分别为实验室参考系和固连于高速运动的粒子的参考系，在 S' 系中的观察者测得的平均寿命为

$$\tau'=\Delta t'=\frac{\Delta t+\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\tau\sqrt{1+\left(\frac{eEt}{mc}\right)^2}$$

12.3.3　(1) 一宇宙线质子与一静止质子碰撞形成一个高速运动 $\left(\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=1000\right)$ 的激发系统. 在此系统中，介子以速率 $\beta'c\left(\beta'=\frac{v'}{c}\right)$ 被射出. 如在

动参考系中,介子射出方向与$\boldsymbol{v}$的夹角为θ',求在实验室参考系中观察,θ多大?

(2) 把(1)问中得到的结果应用于在动系中,以动量 0.5GeV/c 被射出的介子(静能为 140MeV),若$\theta'=90°$,θ多大?在实验室中观察到的$\theta_{\max}$多大?

解 (1) 设S、S'系分别为实验室参考系和沿S系的x轴高速运动($\gamma=1000$)的参考系.

在S'系中,介子的速率为$\beta' c$,与x'轴的夹角为θ',即$v'_x=\beta' c\cos\theta'$,$v'_y=\beta' c\sin\theta'$,用速度变换关系,

$$v_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}v'_x}=\frac{(\beta'\cos\theta'+\beta)c}{1+\beta'\beta\cos\theta'}$$

其中$\beta=\frac{v}{c}$.

$$v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{v}{c^2}v'_x}=\frac{\beta' c\sin\theta'}{\gamma(1+\beta'\beta\cos\theta')}$$

$$v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{v}{c^2}v'_x}=0$$

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\beta'\sin\theta'}{\gamma(\beta'\cos\theta'+\beta)}$$

$$\theta=\arctan\left[\frac{\beta'\sin\theta'}{\gamma(\beta'\cos\theta'+\beta)}\right]$$

其中$\gamma=1000$,$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\approx1-\frac{1}{2\gamma^2}=0.9999995$.

(2) 令$\theta'=90°$,

$$\tan\theta=\frac{\beta'}{\gamma\beta}=\frac{\beta'}{\sqrt{\gamma^2-1}}$$

由已知的p'、E_0(静能)求β'. 设静质量为m,$E_0=mc^2$,

$$p'=\frac{m}{\sqrt{1-\beta'^2}}c\beta'=\frac{E_0\beta'}{c\sqrt{1-\beta'^2}}$$

$$\beta'=\frac{cp'}{\sqrt{E_0^2+c^2p'^2}}$$

$$=\frac{0.5\times10^9\times1.60\times10^{-19}}{[(140\times10^6\times1.60\times10^{-19})^2+(0.5\times10^9\times1.60\times10^{-19})^2]^{\frac{1}{2}}}=0.963$$

$$\tan\theta=\frac{0.963}{\sqrt{10^6-1}}=9.63\times10^{-4}$$

$$\theta=0.0552°=3.31'$$

下面求$\theta_{\max}$,与之相应的θ'满足

(0.963)

$$r=\frac{m_0V}{qB\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

r 为常量,粒子做速率为 V 的半径为 $\dfrac{m_0V}{qB\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$ 的匀速率圆周运动.

12.3.6　静止质量 m、荷电 e 的粒子以相对论速率 v 在半径为 R 的圆轨道上运动,轨道平面垂直于均匀静磁场 $\boldsymbol{B}$,如图 12.19(a)所示,以恒定速率 v 沿 $-y$ 轴运动中的观察者 O' 看到的轨道如图 12.19(b)所示,在两图中 a、b、c、d、e 诸点是相应的.图中 $\boldsymbol{B}$ 的画法,表明 $\boldsymbol{B}$ 沿 $+z$ 方向.

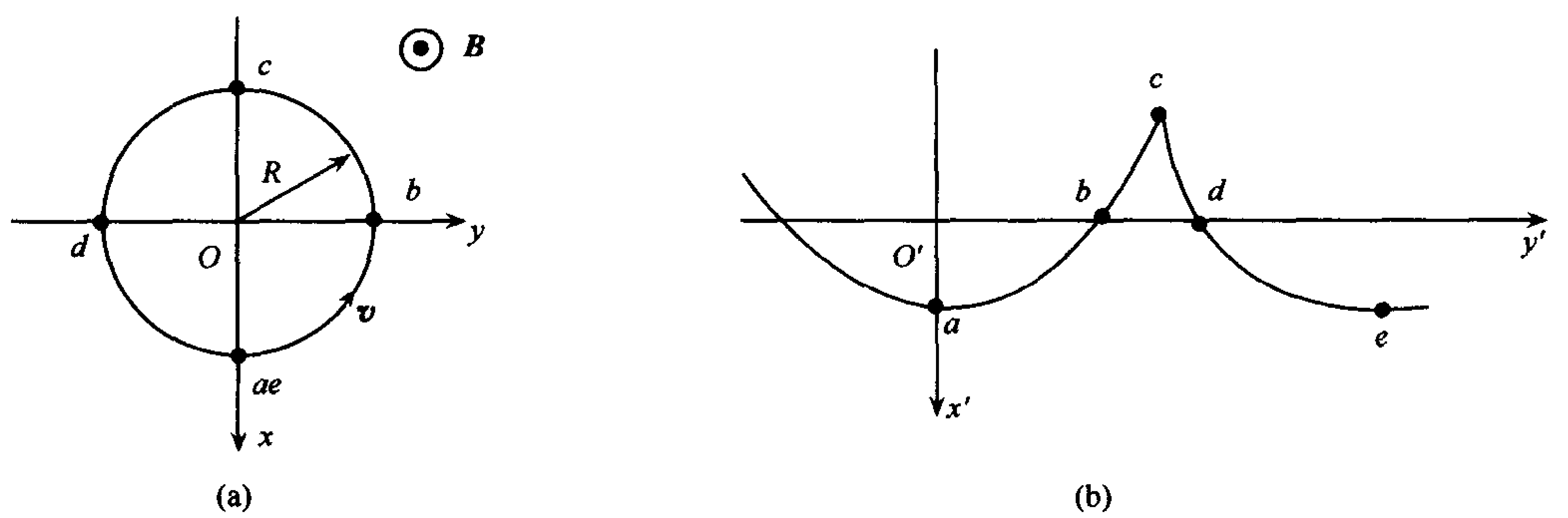


图 12.19

(1) 由 O' 测得距离 $y'_d-y'_b$ 多大?

(2) 证明 c 点是 S' 系中的静止点,在此点,$\dfrac{d^2x'}{dt'^2}$、$\dfrac{d^2y'}{dt'^2}$ 多大?

(3) 由 O' 看来,是什么引起在 c 点处的加速度的?

解　(1) 由上题的结果,

$$R=-\frac{mv}{eB\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

为书写简便起见,取 $t=t'=0$ 时,S、S' 系的 x、x',y、y',z、z' 两两重合,

$$y_d-y_b=-2R,\quad t_d-t_b=\frac{\pi R}{v}$$

$$y'_d-y'_b=\frac{y_d-y_b-(-v)(t_d-t_b)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{-2R+\pi R}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=-\frac{(\pi-2)mv}{eB\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

注意:(i) 这里用上题结果时加了一个负号,是从图(a)中看出,向心力必须指向圆心,由此判断 $e<0$.

(ii) $y'_d-y'_b$ 与 $|y_d-y_b|$ 的大小关系,取决于 $\dfrac{v}{c}$ 的大小,如 $\dfrac{\pi-2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}>2$,则 $y'_d-y'_b>$

$|y_d-y_b|$.

（2）在 c 点，$v_x=0$，$v_y=-v$，$v_z=0$，$a_x=\dfrac{v^2}{R}=-v^2\cdot\dfrac{eB\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{mv}$

$=-\dfrac{eBv}{m}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}$，$a_y=a_z=0$.

用速度变换公式，

$$v'_x=\frac{v_x\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{(-v)}{c^2}v_y},\quad v'_y=\frac{v_y-(-v)}{1-\frac{(-v)}{c^2}v_y},\quad v'_z=\frac{v_z\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{(-v)}{c^2}v_y}$$

代入 c 点的 v_x、v_y 和 v_z，可得 $v'_x=v'_y=v'_z=0$，这就证明了 c 点是 S' 系中的静止点.

用加速度变换公式：

$$a'_x=\frac{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1-\frac{(-v)}{c^2}v_y\right]^2}a_x+\frac{\frac{(-v)}{c^2}v_x\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]}{\left[1-\frac{(-v)}{c^2}v_y\right]^3}a_y$$

$$a'_y=\frac{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[1-\frac{(-v)}{c^2}v_y\right]^2}a_y$$

$$a'_z=\frac{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1-\frac{(-v)}{c^2}v_y\right]^2}a_z+\frac{\frac{(-v)}{c^2}v_z\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]}{\left[1-\frac{(-v)}{c^2}v_y\right]^3}a_y$$

代入 c 点的 a_x、a_y、a_z、v_x、v_y、v_z，可得

$$a'_x=-\frac{eBv}{m\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad a'_y=0,\quad a'_z=0$$

(3) 方法一：在 S 系中只存在磁场，在 S' 系中既有磁场又有电场，由相对论电动力学，S'、S 系的电磁场有下列变换关系：

$$E'_{/\!/}=E_{/\!/},\qquad \boldsymbol{E}'_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})_{\perp}$$

$$B'_{/\!/}=B_{/\!/},\qquad \boldsymbol{B}'_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\left(\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}\right)_{\perp}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 是 S' 系对 S 系的速度，$/\!/$、$\perp$ 都是指与 $\boldsymbol{V}$ 平行、垂直.

今 $E_x=E_y=E_z=0$，$B_x=B_y=0$，$B_z=B$，$\boldsymbol{V}=-v\boldsymbol{j}$：

$$E'_{/\!/}=E'_y=E_y=0$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(-v\boldsymbol{j}\times B\boldsymbol{k})=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}vB\boldsymbol{i}$$

即

$$E'_x=-\frac{vB}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad E'_z=0$$

$$B'_{/\!/}=B'_y=B_y=0$$

$$\boldsymbol{B}'_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(B\boldsymbol{k})$$

即

$$B'_x=0,\quad B'_z=\frac{B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

在 S' 系中，粒子受电磁场的作用力为

$$\boldsymbol{F}'=e(\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')$$

在 c 点，$\boldsymbol{v}'=0$，$\boldsymbol{F}'=e\boldsymbol{E}'=-\dfrac{evB}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\boldsymbol{i}$，又因在 c 点，$\boldsymbol{v}'=0$，粒子的质量为静止质量 m，

$$\boldsymbol{F}'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(m\boldsymbol{v}')=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'}+\boldsymbol{v}'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t'}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'}$$

$$\boldsymbol{a}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\boldsymbol{F}'}{m}=-\frac{evB}{m\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\boldsymbol{i}$$

在 O' 看来，在 c 点，加速度是由电场引起的.

方法二：用力的变换公式. 该方法的优点是不需要相对论电动力学给出的电磁场变换关系，缺点是对于 S' 系中的电磁场情况不清楚.

力的变换公式为

$$F'_x=F_x\frac{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-\frac{V}{c^2}v_y}$$

$$F'_y=\frac{F_y-\frac{V}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{1-\frac{V}{c^2}v_y}$$

$$F'_z=F_z\frac{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-\frac{V}{c^2}v_y}$$

直接考虑 c 点处受力 $\boldsymbol{F}'$，令 $V=-v, v_x=0, v_y=-v, v_z=0, F_x=-evB, F_y=0, F_z=0$，可得 $F'_x=-\dfrac{evB}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}, F'_y=0, F'_z=0$. 与方法一得到相同的结果，以下略.

12.3.7　试计算相对论粒子的"纵向质量"和"横向质量"."纵向质量"是指作用力与运动方向平行时力与粒子的加速度之比，"横向质量"是指力与运动方向垂直时力与加速度之比.

解

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

其中 $\beta=\dfrac{v}{c}$，m 为粒子的静止质量.

$$\boldsymbol{F}=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{m\boldsymbol{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

当力与运动方向平行时，$\boldsymbol{v}\,/\!/\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$，

$$\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot v\mathrm{d}v=v^2\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{F}=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{mv^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$m_l=\frac{\boldsymbol{F}}{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}}=\frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

当力与运动方向垂直时，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，

$$\boldsymbol{F}=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$m_t=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

注意：在相对论中，力与加速度的方向一般并不一致，在上题中，在 S 系中粒子受的力与运动方向始终垂直，始终有 $m_t=\dfrac{m}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$，在 S' 系中，在 c 点，那里 $\boldsymbol{v}'=0, m_l=m_t=m$.

12.3.8　一静止质量为 m 的粒子最初沿 x 轴运动，速度为 v_0，$t=0$ 后受到一个沿 y 方向的恒力 F 作用，求它在任意时刻 t 的速度，并证明 $t\to\infty$ 时，$|\boldsymbol{v}|\to c$.

解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=\boldsymbol{F}$$

考虑到受力情况和初始条件，运动轨道在 xy 平面上，分量方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=F$$

$t=0$ 时,$\dot{x}=v_0$,$\dot{y}=0$. 积分上述两式

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{mv_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},\qquad \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=Ft$$

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{v_0^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+\left(\frac{Ft}{m}\right)^2$$

因为 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=v^2$,上式可改写为

$$v^2=\left[\frac{v_0^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+\left(\frac{Ft}{m}\right)^2\right]\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$v^2=\frac{\frac{v_0^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+\left(\frac{Ft}{m}\right)^2}{1+\frac{1}{c^2}\left[\frac{v_0^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+\left(\frac{Ft}{m}\right)^2\right]}$$

令

$$k=\frac{v_0^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+\left(\frac{Ft}{m}\right)^2$$

则

$$v^2=\frac{k}{1+\frac{k}{c^2}},\quad 1-\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{k}{c^2+k}=\frac{c^2}{c^2+k}$$

$$\dot{x}=\frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}\sqrt{\frac{c^2}{c^2+k}}$$

$$\dot{y}=\frac{Ft}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{Ft}{m}\sqrt{\frac{c^2}{c^2+k}}$$

其中

$$k=\frac{v_0^2}{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}+\left(\frac{Ft}{m}\right)^2$$

$t\to\infty$时,$\lim\limits_{t\to\infty}v^2=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{k}{1+\frac{k}{c^2}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{1+\frac{k}{c^2}}=c^2$. 所以当 $t\to\infty$时,$v\to c$.

12.3.9　一静止质量为 m、荷电为 e 的电子在与均匀磁场垂直的平面内运动，如果忽略辐射，电子的轨道为半径为 R 的圆. 设电子能量 $E\gg mc^2$，求磁感应强度 B 的表达式. 如 $R=30\text{m}$，$E=2.5\times10^9\text{eV}$. 求出 B 的数值.

解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}\right)=e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

做半径为 R 的圆周运动，$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{v^2}{R}$，$v$ 不变，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}\right)=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|=-evB\qquad(\text{注意电子带负电},e<0)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v^2}{R}=-evB$$

$$B=-\frac{mv}{eR\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{p}{eR}\qquad(p\text{ 为电子动量})$$

$$E^2=c^2p^2+m^2c^4$$

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-m^2c^4}\approx\frac{E}{c}\qquad(\text{因为 }E\gg mc^2)$$

$$B=-\frac{E}{eRc}$$

代入 $E=2.5\times10^9\text{eV}$，$R=30\text{m}$，得 $B=0.28\text{T}$.

12.3.10　(1) 静止的 μ 子平均寿命 T_0 为 10^{-6}s，静止质量为 $100\text{MeV}/c^2$，大气中高度 h 约为 10^4m 处的 μ 子要到达地面，它需要带有多大能量 E?

(2) 假定地球具有 $1\times10^{-4}\text{T}$ 的磁场，方向沿地轴方向，延伸范围在地面以上 10^2m 范围内，问在赤道上空垂直入射能量为(1)中算出的 E 值的 μ 子被磁场偏转的大小和方向(可不计万有引力作用).

解　(1) 在地球参考系中，以速率 v 运动的 μ 子的平均寿命为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

设 μ 子的静止质量为 m_0，

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\tau = \tau_0 \frac{E}{m_0c^2}$$

要使 μ 子能到达地面,须 $\tau=\frac{h}{v}$,即

$$\tau_0 \frac{E}{m_0c^2} = \frac{h}{v}, \quad E = \frac{m_0c^2}{\tau_0}\cdot\frac{h}{v}$$

从 $E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$中解出 $v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2}$,

$$E = \frac{m_0c^2}{\tau_0}\frac{h}{c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2}} = \frac{m_0ch}{\tau_0\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2}}$$

解出

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2+\left(\frac{m_0ch}{\tau_0}\right)^2} \approx \frac{m_0ch}{\tau_0}$$

代入 $m_0=100\text{MeV}/c^2$,$h=10^4\text{m}$,$\tau_0=10^{-6}\text{s}$,得

$$E = 3.3\times10^3\text{MeV}$$

(2) 取 z 轴沿地轴也是沿 $\boldsymbol{B}$ 的方向,地球表面为坐标系原点,μ 子在进入磁场前的运动方向为 y 轴正向.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

其中 e 为 μ 子所带电荷,$e<0$,与电子所带电量相同.

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{E}{c^2}\boldsymbol{v}$$

由于只受磁场作用,磁场力不做功,速率不变,故 E 不变.

$$\frac{E}{c^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

写成分量方程,

$$\frac{E}{c^2}\ddot{x} = eB\dot{y}$$

$$\frac{E}{c^2}\ddot{y} = -eB\dot{x}$$

$$\frac{E}{c^2}\ddot{z} = 0$$

初始条件为 $t=0$ 时,$x=0$,$y=-h$,$z=0$,$\dot{x}=0$,$\dot{y}=v$,$\dot{z}=0$,其中 $h=10^2\text{m}$ 是进入磁场时的高度,

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2} \approx c$$

$$E \approx 3.3 \times 10^3 \mathrm{MeV}, B = 1 \times 10^{-4} T$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{eBc^2}{E}\right)^2 \dot{y} = 0$$

$$\dot{y} = A\cos\left(\frac{eBc^2}{E}t + \alpha\right)$$

$$y = y_0 + \frac{E}{eBc^2} A\sin\left(\frac{eBc^2}{E}t + \alpha\right)$$

由初始条件定出，$\alpha=0, y_0=-h, A=c$，

$$y = -h + \frac{E}{eBc}\sin\left(\frac{eBc^2}{E}t\right)$$

$$\dot{x} = -\frac{E}{eBc^2}\ddot{y} = c\sin\left(\frac{eBc^2}{E}t\right)$$

考虑到 $t=0$ 时 $x=0$，积分上式得

$$x = \frac{E}{eBc}\left[1 - \cos\left(\frac{eBc^2}{E}t\right)\right]$$

到达地面时，$y=0$，

$$t = \frac{E}{eBc^2}\arcsin\left(\frac{eBch}{E}\right)$$

$$x = \frac{E}{eBc}\left\{1 - \cos\left[\arcsin\left(\frac{eBch}{E}\right)\right]\right\} = \frac{E}{eBc}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{eBch}{E}\right)^2}\right]$$

因为

$$\left(\frac{eBch}{E}\right)^2 = \left(\frac{-10^{-4} \times 3 \times 10^8 \times 10^2}{3.3 \times 10^3 \times 10^6}\right)^2 \sim 10^{-6} \ll 1$$

$$x \approx \frac{E}{eBc}\left\{1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{eBch}{E}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{eBch^2}{2E} = \frac{-10^{-4} \times 3 \times 10^8 \times (10^2)^2}{2 \times 3.3 \times 10^3 \times 10^6} = -0.045(\mathrm{m})$$

$$z = 0$$

μ 子落地时往西偏 0.045m.

12.3.11　导出自由的相对论粒子的哈密顿函数和拉格朗日函数.

解

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\dot{x}, \quad p_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\dot{y}, \quad p_z = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\dot{z}$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m_0^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v^2 = \frac{c^2 p^2}{m_0^2 c^2 + p^2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{m_0^2c^2}{m_0^2c^2+p^2}=\frac{m_0^2c^2}{m_0^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2}$$

哈密顿函数

$$H=E=m_0c^2\cdot\sqrt{\frac{m_0^2c^2+p_{x+}^2p_y^2+p_z^2}{m_0^2c^2}}=c\sqrt{m_0^2c^2+p_{x+}^2p_y^2+p_z^2}$$

因为

$$H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L$$

$$L=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-H$$

写拉格朗日函数，需将上式中的正则变量写成拉格朗日变量的函数，

$$p_x=\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}$$

同样可写出 p_y、p_z 的式子.

$$p^2=\frac{m_0^2c^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{m_0(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}-c\sqrt{m_0^2c^2+\frac{m_0^2c^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}$$

$$=-m_0c\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}$$

12.3.12　导出具有动量 $\boldsymbol{p}=\dfrac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$的粒子处在电磁场

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

中时的哈密顿函数.

解　用上题导出的自由相对论粒子的拉格朗日函数，拉格朗日函数可写为

$$L=-m_0c\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}-q\phi+q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

(参看 11.1.20 题)

$$L=-m_0c\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}-q\phi+q(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z)$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=-\frac{m_0c(-2\dot{x})}{2\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}+qA_x=\frac{m_0c\dot{x}}{\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}+qA_x$$

$$p_y=\frac{m_0c\dot{y}}{\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}+qA_y$$

$$p_z=\frac{m_0c\dot{z}}{\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}+qA_z$$

p_x、p_y、p_z 均为广义动量，不要与题目中的 $\boldsymbol{p}$ 发生混淆，

$$\boldsymbol{p}=\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+q\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2=\frac{m_0^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{m_0^2c^2+(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}$$

$$\begin{aligned}H&=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L\\&=\frac{m_0(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}+q(A_x\dot{x}+A_y\dot{y}+A_z\dot{z})\\&\quad+m_0c\sqrt{c^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}+q\phi-q(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z)\\&=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left\{\frac{v^2}{c^2}+\left[\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]^2\right\}+q\phi\\&=c\sqrt{m_0^2c^2+(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}+q\phi\end{aligned}$$

12.3.13　一个静止质量为 m、荷电为 e、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的相对论粒子，在一个矢势为 $\boldsymbol{A}$ 的电磁场中运动，其拉格朗日函数为

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$$

对于位于原点的、沿 z 轴的磁矩为 M_0 的磁偶极子产生的磁场可用矢势 $\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M_0\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\varphi$ 描写，其中 r、θ、φ 为球坐标.

(1) 求 p_φ，并证明它是一个运动常数；

(2) 如果上述矢势被 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi(r,\theta,\varphi)$ 代替，χ 为一任意标量函数，p_φ 将如何变化，是否还是运动常数？

解　(1)　$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{M_0\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{v}=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM_0}{r}\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

其中 $v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$，

$$\begin{aligned}p_\varphi&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial}{\partial v^2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\frac{\partial v^2}{\partial\dot{\varphi}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM_0}{r}\sin^2\theta\\&=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM_0}{r}\sin^2\theta\end{aligned}$$

因为 $\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$，所以 $p_\varphi=$ 常量(φ 为循环坐标).

(2) 矢势改为 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi(r,\theta,\varphi)$. 拉格朗日函数为

$$
\begin{aligned}
L' &= -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM_0}{r}\sin^2\theta+e\nabla\chi\cdot\boldsymbol{v}\\
&= -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM_0}{r}\sin^2\theta\\
&\quad +e\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\dot{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}r\dot{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\cdot r\sin\theta\dot{\varphi}\right)\\
&= -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM_0}{r}\sin^2\theta+e\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

$$
p'_\varphi=\frac{\partial L'}{\partial\dot{\varphi}}=p_\varphi+e\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}
$$

因为$\dfrac{\partial L'}{\partial\varphi}\neq 0$($\chi$ 为 r、θ、φ 的任意函数,$\dfrac{\partial\chi}{\partial r}$、$\dfrac{\partial\chi}{\partial\theta}$、$\dfrac{\partial\chi}{\partial\varphi}$中均可显含 φ),所以 φ 不再是循环坐标,p'_φ 不再是运动常数.

12.3.14　证明:如果恒定磁场是平面场:$A_x=0,A_y=0,A_z=A_z(x,y)$,则带电粒子在该场中运动时,

$$
\frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}}+qA_z=\text{常量}
$$

证明

$$
L=-mc^2\sqrt{1-\beta^2}+q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}=-mc^2\sqrt{1-\beta^2}+qA_z(x,y)\dot{z}
$$

因为

$$
\frac{\partial L}{\partial z}=0
$$

$$
p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=-\frac{mc^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{(-2\dot{z})}{c^2}+qA_z=\text{常量}
$$

即

$$
\frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}}+qA_z=\text{常量}
$$

12.3.15　证明:如果恒定磁场具有轴对称性,即 $A_r=A_z=0,A_\varphi=A_\varphi(r,z)$,则带电粒子在该场中运动时.

$$
\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2}}+qrA_\varphi=\text{常量}
$$

证明　$\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+A_z\boldsymbol{k}=A_\varphi(r,z)\boldsymbol{e}_\varphi$

$$
\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\dot{z}\,\boldsymbol{k}
$$

$$
v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2
$$

$$
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}=A_\varphi(r,z)r\dot{\varphi}
$$

$$
L=-mc^2\sqrt{1-\beta^2}+q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}=-mc^2\sqrt{1-\beta^2}+qr\dot{\varphi}A_\varphi(r,z)
$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0,\quad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\text{常量}$$

$$-\frac{mc^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{c^2}(-2r^2\dot{\varphi})+qrA_\varphi=\text{常量}$$

即

$$\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2}}+qrA_\varphi=\text{常量}$$

12.3.16　众所周知，行星都围绕太阳在椭圆轨道上运动，但如果仅考虑狭义相对论的效应，轨道是进动的椭圆.

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\{1+\varepsilon\cos[\alpha(\varphi-\varphi_0)]\}$$

$\alpha\neq1$($\alpha=1$ 相应于无进动的经典的结果).

(1) 导出这一方程，用轨道的基本常数(如能量、角动量等)表示 α 和 r_0;

(2) 已知水星的轨道的平均半径为 58×10^6km，轨道周期为 88 天，计算每 100 年水星轨道进动的角度(当然，这个效应不能说明水星总的进动速率).

解　(1)

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}+\frac{GMm}{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \frac{\partial L}{\partial r}=\frac{mr\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

其中 $v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)-\left(\frac{mr\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{GMm}{r^2}\right)=0\tag{1}$$

$$\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=J(\text{常量})\tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{J\dot{r}}{r^2\dot{\varphi}}\right)-\frac{J\dot{\varphi}}{r}+\frac{GMm}{r^2}=0\tag{3}$$

令 $u=\dfrac{1}{r}$, $r=\dfrac{1}{u}$, $\dot{r}=-\dfrac{1}{u^2}\dot{u}$, $\dfrac{\dot{r}}{r^2}=-\dot{u}$,

$$\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$$

式(3)可化成

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{GMm}{J\dot{\varphi}}u^2 \tag{4}$$

因为$\frac{\partial L}{\partial t}=0$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = E(\text{常量})$$

$$\frac{m\dot{r}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{GMm}{r} = E$$

可得

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{GMm}{r} = E$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E + GMmu \tag{5}$$

由式(2),

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}u^2 \tag{6}$$

用式(5)、(6),式(4)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left[1 - \left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2\right]u = \frac{GMmE}{J^2c^2} \tag{7}$$

令

$$u' = u - \frac{\frac{GMmE}{J^2c^2}}{1-\left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2} = u - \frac{GMmE}{(Jc)^2 - (GMm)^2}$$

式(7)化成

$$\frac{\mathrm{d}^2 u'}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left[1 - \left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2\right]u' = 0$$

$$u' = A\cos[\alpha(\varphi - \varphi_0)]$$

其中

$$\alpha = \left[1 - \left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

A、φ_0 为常量.

$$u = \frac{GMmE}{(Jc)^2 - (GMm)^2} + A\cos[\alpha(\varphi - \varphi_0)]$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}+A\cos[\alpha(\varphi-\varphi_0)]$$

其中

$$r_0=\frac{(Jc)^2-(GMm)^2}{GMmE}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\{1+\varepsilon\cos[\alpha(\varphi-\varphi_0)]\}$$

其中 $\varepsilon=Ar_0$.

(2) 设在 $\varphi=\varphi_1$, r 取极大值，相邻的下一个 r 取极大值在 $\varphi=\varphi_2$ 处，则

$$\alpha(\varphi_2-\varphi_0)-\alpha(\varphi_1-\varphi_0)=2\pi$$

在一个转动周期内向前进动的角度为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi=2\pi\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)$$

如 $\alpha=1$，则 $\Delta\varphi=0$，无进动. 现进动是缓慢的，α 很接近于 1，可取一级近似，

$$\alpha=\left[1-\left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2$$

$$\Delta\varphi\approx 2\pi\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2-1\right]=\pi\left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2$$

考虑水星以平均半径 $\bar{r}$ 做圆轨道运动.

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\bar{r}\dot{\varphi}^2=\frac{GMm}{\bar{r}^2}$$

因为

$$J=\frac{m\bar{r}^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \dot{\varphi}=\frac{2\pi}{\tau}$$

所以

$$\frac{GMm}{Jc}=\frac{\bar{r}\dot{\varphi}}{c}=\frac{2\pi\bar{r}}{c\tau}$$

水星围绕太阳一周，进动角

$$\Delta\varphi=\pi\left(\frac{GMm}{Jc}\right)^2=\pi\left(\frac{2\pi\bar{r}}{c\tau}\right)^2$$

一百年间，水星绕太阳转的圈数为 n，

$$n=\frac{100\times 365}{\tau}=\frac{100\times 365}{88}=414.8$$

每一百年，水星进动的角度为

$$n\Delta\varphi=n\pi\left(\frac{2\pi\bar{r}}{c\tau}\right)^2=414.8\times 4\pi^3\left(\frac{58\times 10^9}{3.10^8\times 88\times 24\times 3600}\right)^2$$
$$=3.33\times 10^{-5}\text{rad}=6.87''$$

实际测得每一百年水星进动的角度为 1°33′20″，差得很远，原因主要是没有考虑其他行星的引力. 考虑其他行星的作用，并采用广义相对论，可以满意地解释水星的进动.

12.3.17 试求在静止原子核 Ze 的库仑场中,静止质量为 m、带电 $-e$ 的电子的椭圆轨道的相对论修正.

解
$$L=-mc^2\sqrt{1-\beta^2}+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

其中

$$\beta^2=\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

因为
$$\frac{\partial L}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi}-L=\text{常量}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=-mc^2\frac{1}{2\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\frac{1}{c^2}2\dot{r}\right)=\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=-mc^2\frac{1}{2\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\frac{1}{c^2}2r^2\dot{\varphi}\right)=\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi}-L&=\frac{m\dot{r}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+mc^2\sqrt{1-\beta^2}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\\&=\frac{mc^2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{mc^2(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=E \tag{1}$$

因为
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mh\text{(常量)}$$

$$\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2}}=mh$$

$$\dot{\varphi}=\frac{h}{r^2}\sqrt{1-\beta^2} \tag{2}$$

由式(1)得

$$\frac{1}{1-\beta^2}=\left[\frac{1}{mc^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right]^2$$

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2}=\frac{1}{1-\beta^2}-1=\left[\frac{1}{mc^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right]^2-1$$

$$v^2=c^2\beta^2=c^2\frac{\beta^2}{1-\beta^2}(1-\beta^2)=c^2\left[\left(\frac{E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}{mc^2}\right)^2-1\right](1-\beta^2)$$

由式(2)和 $\dot{r}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + r^2\right]\dot{\varphi}^2 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + r^2\right]\frac{h^2}{r^4}(1-\beta^2)$$

比较两个 v^2 的式子，可得

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{c^2}{h^2}\left[\left(\frac{E + \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}{mc^2}\right)^2 - 1\right]$$

令 $u=\dfrac{1}{r}$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$，上式可改写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{h^2}\left[\left(\frac{E + \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}u}{mc^2}\right)^2 - 1\right]$$

两边对 φ 求导，

$$2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{2c^2}{h^2}\left(\frac{E + \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}u}{m^2c^4}\right)\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left(1 - \frac{Z^2e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2m^2c^2h^2}\right)u = \frac{Ze^2E}{4\pi\varepsilon_0m^2c^2h^2}$$

当 $c\to\infty$ 时，上式简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0mh^2}$$

这是非相对论的轨道微分方程，其解是椭圆轨道，

$$u = A(1 + e\cos\varphi)$$

注意：上式中的 e 是偏心率，不是电子带电量 $-e$ 中的 e.

令 $\dfrac{Z^2e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2m^2c^2h^2}$ 为小量，令 $\alpha=\dfrac{Z^2e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2m^2c^2h^2}$，并令 $u'=u-\dfrac{Ze^2e}{4\pi\varepsilon_0m^2c^2h^2(1-\alpha)}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\varphi^2} + (1-\alpha)u' = 0$$

$$u = \frac{Ze^2E}{4\pi\varepsilon_0m^2c^2h^2(1-\alpha)} + A\cos\left(\sqrt{1-\alpha}\varphi - \varphi_0\right)$$

因为 α 是小量，$\sqrt{1-\alpha}\approx1-\dfrac{1}{2}\alpha$，

$$u = \frac{Ze^2E}{4\pi\varepsilon_0m^2c^2h^2(1-\alpha)} + A\cos\left[\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\varphi - \varphi_0\right]$$

和上题一样，设 φ_1，φ_2 是相继两个 u 取极小值的角度. 则

$$\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\varphi_2 - \varphi_0 - \left[\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\varphi_1 - \varphi_0\right] = 2\pi$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi$$

每转一周，或更准确些说 u 从一个极小到下一个极小，进动的角度为

$$\varphi_2-\varphi_1-2\pi=\frac{2\pi}{1-\frac{1}{2}\alpha}-2\pi\approx 2\pi\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)-2\pi=\pi\alpha=\frac{Z^2e^4}{16\pi\varepsilon_0^2m^2c^2h^2}$$

12. 3. 18　某个质量等于太阳质量($M=2\times10^{33}$g)的星体的半径和密度多大,光才不能从星体逃逸?

解　方法一:根据能量和质量的等效关系,具有能量 E 的光子具有质量 $m=\frac{E}{c^2}$,光子在半径为 R、质量为 M 的星体表面,引力势能为 $-\frac{GMm}{R}$,其中 G 为万有引力常数,只有光子的总能量

$$mc^2-\frac{GMm}{R}>0$$

时才能逃逸出去,反之当

$$mc^2-\frac{GMm}{R}<0$$

时,光子不能逃逸出去,由此不能逃逸要求

$$R<\frac{GM}{c^2}=\frac{6.67\times10^{-11}\cdot2\times10^{30}}{(3\times10^8)^2}=1.48\times10^3(\text{m})$$

密度为

$$\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{2\times10^{30}}{\frac{4}{3}\pi(1.48\times10^3)^3}=1.47\times10^{20}(\text{kg})$$

要求半径不大于 1.48×10^3m,密度不小于 1.47×10^{20}kg.

方法二:用广义相对论给出的引力红移公式,具有频率为 ν 的光子离开星体表面到无穷远处时的频率为

$$\nu'=\nu\left[1-\left(\frac{GM}{Rc^2}-0\right)\right]=\nu\left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right)$$

不能逃逸,意味着 $\nu'<0$,也得到

$$1-\frac{GM}{Rc^2}<0,\quad R<\frac{GM}{c^2}$$

结果相同.

12. 3. 19　若一粒子的动能等于它的静能,它的速度多大?

解

$$T=mc^2-m_0c^2=m_0c^2$$

$$m=2m_0,\quad \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=2m_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=2,\quad v=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}c=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

12. 3. 20　试用相对论粒子的动能 T 表示它的动量的大小 p,用相对论粒子的动量 $\boldsymbol{p}$ 表示它的速度 $\boldsymbol{v}$.

解

$$p=mv=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0cv}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$\frac{p^2}{m_0^2c^2}=\frac{v^2}{c^2-v^2},\quad \frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2}=\frac{v^2}{c^2}$$

$$T=mc^2-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2$$

$$=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2}}}-m_0c^2=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}-m_0c^2$$

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{(T+m_0c^2)^2-m_0^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{T(T+2m_0c^2)}$$

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}=\frac{\boldsymbol{p}}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\boldsymbol{p}}{m_0}\sqrt{1-\frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2}}=\frac{c\boldsymbol{p}}{\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}$$

12.3.21　一个静止质量为 m_0 的相对论粒子具有能量 E，求该粒子的速率 v，讨论非相对论和极相对论两种极限情况.

解

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v=c\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E^2}}=\frac{c}{E}\sqrt{E^2-m_0^2c^4}$$

非相对论极限：$v\ll c$，

$$E=m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx m_0c^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

$$\frac{1}{2}m_0v^2=E-m_0c^2=T$$

$$v=\sqrt{\frac{2T}{m_0}}$$

极相对论极限：$E\gg m_0c^2$，

$$v=c\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E^2}}\approx c\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2\right]$$

12.3.22　(1) 计算与具有动量 $400\text{GeV}/c$ 的质子同样速度的 π 介子的动量. 在费米实验室，动量为 $400\text{GeV}/c$ 的质子打击靶时，是产生 π 介子的最可几动量，π 介子的静止质量为 $0.14\text{GeV}/c^2$，质子的静止质量为 $0.94\text{GeV}/c^2$；

(2) π 介子通过 400m 长的衰变管时，一些 π 介子衰变产生中微子束，中微子探测器位于 1km 以外，如图 12.20 所示. π 介子的固有的平均寿命为 2.6×10^{-8}s，在 400m 长的距离上，π 介子发生衰变占多大分数？

(3) 在 π 介子静止参考系中的观察者测量，衰变管的长度是多少？

(4) π 介子衰变成一个 μ 子和一个中微子 ν(静止质量为零). 用相对论的能量动量关

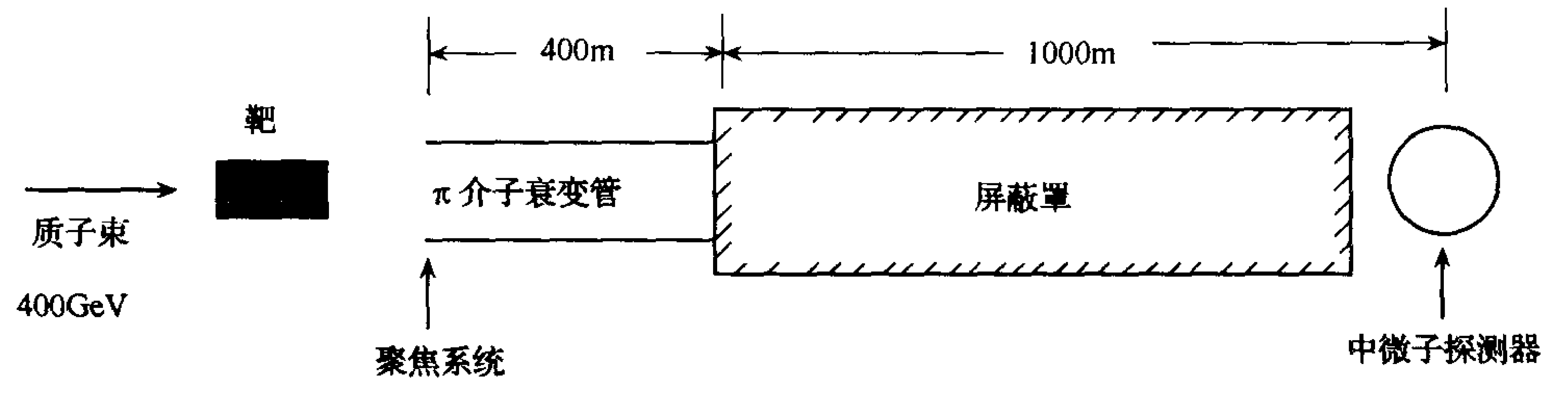


图 12.20

系证明,在 π 介子静止的参考系中,衰变产物的动量的大小 q 由下式确定:

$$\frac{q}{c}=\frac{M^2-m^2}{2M}$$

其中 M 是 π 介子静止质量,m 是 μ 子的静止质量;

(5) 平均来讲,中微子探测器离 π 介子衰变点约 1.2km,为了在 π 介子静止参考系中前半球中产生的所有中微子都被探测到,探测器的横截面的半径应多大?

解 (1) 设 M 和 m_{p} 分别是 π 介子和质子的静止质量,p_π 和 p_{p} 分别是 π 介子和质子的动量,v 是 π 介子和质子的速度,

$$p_\pi=\frac{Mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad p_{\mathrm{p}}=\frac{m_{\mathrm{p}}v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

两式相除,可得

$$p_\pi=\frac{M}{m_{\mathrm{p}}}p_{\mathrm{p}}=\frac{0.14}{0.94}\times 400=60\mathrm{GeV}/c$$

(2) 用 S、S' 系分别表示实验室参考系和 π 介子静止参考系,Δt、$\Delta t'$ 分别是在 S、S' 系 π 介子通过衰变管所需时间,

$$\Delta t=\frac{\Delta t'-\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Delta t'=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\Delta t$$

其中 v 是 S' 系对 S 系的速度.

$$\Delta t=\frac{l}{v},\quad l=400\mathrm{m}$$

由 12.3.20 题导出的速度与动量的关系,

$$v=\frac{cp_\pi}{\sqrt{p_\pi^2+M^2c^2}}\text{或}\frac{cp_{\mathrm{p}}}{\sqrt{p_{\mathrm{p}}^2+m_{\mathrm{p}}^2c^2}}$$

在 π 介子通过衰变管期间,衰变了的 π 介子占 π 介子的分数为

$$1-\mathrm{e}^{-\frac{\Delta t'}{\tau}}=1-\exp\left[-\frac{1}{\tau}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot\frac{l}{v}\right]$$

$$=1-\exp\left(-\frac{m_{\mathrm{p}}l}{p_{\mathrm{p}}\tau}\right)=1-\exp\left(-\frac{0.94\times400}{400\times3\times10^8\times2.6\times10^{-8}}\right)$$

$$=0.1135 \text{ 或 } 11.35\%$$

(3) 在 S' 系中衰变管的长度 $l'=x_2'-x_1'$,x_2' 和 x_1' 是在同一时刻 t' 测衰变管两端的坐标.

$$l=x_2-x_1=\frac{x_2'-x_1'+v(t'-t')}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{l'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$l'=l\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=l\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}^2c^2}{p_{\mathrm{p}}^2+m_{\mathrm{p}}^2c^2}}=400\sqrt{\frac{(0.94)^2/c^2}{(400)^2/c^2+(0.94)^2/c^2}}=0.94\mathrm{m}$$

(4) 在 π 介子静止参考系中,π 介子的能量为静能 Mc^2,动量为零,

$$\pi\rightarrow\mu+\nu$$

衰变成 μ 子和中微子,考虑动量守恒,中微子的动量为 q,则 μ 子的动量为 $-q$.

由相对论的能量动量关系,μ 子和中微子的能量分别为

$$\sqrt{c^2(-q)^2+m^2c^4} \text{ 和 } cq$$

(考虑到中微子的静止质量为零).

衰变时,能量守恒

$$Mc^2=\sqrt{c^2q^2+m^2c^4}+cq$$

解出

$$\frac{q}{c}=\frac{M^2-m^2}{2M}$$

(5) 可利用 12.2.12 题导出的前灯效应的公式

$$\tan\theta=\frac{c\sin\theta'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c\cos\theta'+v}$$

今 $\theta'=90°$,$\tan\theta=\frac{R}{1200}$,其中 R 就是待求的探测器横截面的半径,

$$\frac{R}{1200}=\frac{c}{v}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{v}\right)^2-1}$$

前已求得

$$v=\frac{cp_{\mathrm{p}}}{\sqrt{p_{\mathrm{p}}^2+m_{\mathrm{p}}^2c^2}}$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)^2=\frac{p_{\mathrm{p}}^2+m_{\mathrm{p}}^2c^2}{p_{\mathrm{p}}^2},\quad \left(\frac{c}{v}\right)^2-1=\left(\frac{m_{\mathrm{p}}c}{p_{\mathrm{p}}}\right)^2$$

$$R=1200\cdot\frac{m_{\mathrm{p}}c}{p_{\mathrm{p}}}=1200\times\frac{0.94}{400}=2.82\mathrm{m}$$

12.3.23 如果将 100kg 铜的温度升高 100℃,它的质量增加了多少?(铜的比热容 $c=93\text{cal}/(\text{kg}\cdot\text{K})$)

解 由于温度升高,能量增量为

$$\Delta E = mc\Delta T = 100\times 93\times 4.184\times 100 = 3.9\times 10^6(\text{J})$$

用质能关系 $E=mc^2$,质量增量为

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{3.9\times 10^6}{(3\times 10^8)^2} = 4.3\times 10^{-11}(\text{kg})$$

这个增量非常小,根本无法测出来.

12.3.24 在海拔 100km 的地球大气层中产生了一个静能为 140MeV 的 π^+ 介子,这个 π^+ 介子的总能量 $E=1.5\times 10^5\text{MeV}$,竖直向下运动,按它自身参考系中测定,它在产生后 $2\times 10^{-8}\text{s}$ 衰变,问它在海平面以上多大高度处发生衰变的?

解

$$E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4 = c^2p^2 + E_0^2 = \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)^2 c^2 + E_0^2$$

$$= E_0^2\frac{\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} + E_0^2 = \frac{E_0^2}{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E}{E_0},\quad v = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\,c$$

在 π^+ 参考系中经历的时间为 $\Delta t' = 2\times 10^{-8}\text{s}$,在地球参考系中经历的时间为 Δt,

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \dfrac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E}{E_0}\Delta t'$$

衰变前在地球参考系竖直向下经过的距离为

$$d = v\Delta t = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\,c\cdot\frac{E}{E_0}\Delta t' \approx \frac{cE}{E_0}\Delta t'$$

发生衰变处的海拔为

$$h = 100\times 10^3 - \frac{cE}{E_0}\Delta t'$$

$$= 100\times 10^3 - \frac{3\times 10^8\times 1.5\times 10^5}{140}\cdot 2\times 10^{-8} = 9.36\times 10^4(\text{m}) = 93.6(\text{km})$$

12.3.25 一个假想的手电筒能将它的相当一部分静止质量转变成光,发射相当准直的光束,如果手电筒开始处于静止,静止质量为 m_0. 接通开关并允许它沿一直线自由地运动. 求当它相对于原静参考系具有速度 v 时的静止质量 m(不假定 $c\gg v$).

解　设当手电筒速度为 v 时，已发射的全部光子的总能量为 E，全部光子的总动量为 $\frac{E}{c}$，方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反.

根据能量守恒和动量守恒，

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+E=m_0c^2 \tag{1}$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{E}{c}=0 \tag{2}$$

式(2)$+\frac{1}{c}$式(1)，

$$\frac{m(c+v)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m_0c$$

$$m=m_0\frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c+v}=m_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

12.3.26　一个能量为 E_i 的光子被一个静止质量为 m_e 的静止电子所散射，设散射后光子的能量为 E_f，入射光子与散射光子之间的夹角为 θ，找出 E_i、E_f 和 θ 之间的关系.

解　由能量守恒，设散射后电子具有能量为 E_e，

$$E_i+m_ec^2=E_f+E_e \tag{1}$$

由动量守恒，设散射后电子具有动量 $\boldsymbol{p}_e$，

$$\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{p}_e \tag{2}$$

电子的能量和动量有下列关系：

$$E_e^2=m_e^2c^4+p_e^2c^2 \tag{3}$$

用式(1)、(3)，

$$(E_i+m_ec^2-E_f)^2=m_e^2c^4+p_e^2c^2 \tag{4}$$

由式(2)，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_e^2&=\boldsymbol{p}_e\cdot\boldsymbol{p}_e=(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f)\cdot(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f)\\&=p_i^2+p_f^2-2\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_f\end{aligned} \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)，

$$(E_i+m_ec^2-E_f)^2=m_e^2c^4+(p_i^2+p_f^2-2\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_f)c^2 \tag{6}$$

用 $p_i=\frac{E_i}{c}$，$p_f=\frac{E_f}{c}$，$\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_f=\frac{E_iE_f}{c^2}\cos\theta$ 代入式(6)，化简后得

$$E_iE_f(1-\cos\theta)=m_ec^2(E_i-E_f)$$

$$1-\cos\theta=m_ec^2\left(\frac{1}{E_f}-\frac{1}{E_i}\right)$$

12.3.27　一个静止的 π^+ 介子衰变为 μ^+ 子和中微子，三者的静止质量分别为 $m_{\pi0}$、$m_{\mu0}$ 和零，求 μ^+ 子和中微子的动能 T_μ、T_ν.

解　由能量守恒和动量守恒

$$m_{\pi 0}c^2 = \frac{m_{\mu 0}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + E_\nu$$

$$0 = \frac{m_{\mu 0}\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{E_\nu}{c}$$

这里 $\beta=\frac{v}{c}$,规定沿中微子运动的方向 $v>0$. 消去 E_ν,得

$$m_{\pi 0} = m_{\mu 0}\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_{\mu 0}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\frac{m_{\mu 0}^2}{m_{\pi 0}^2} = \frac{1+\beta}{1-\beta},\quad \frac{m_{\mu 0}^2 - m_{\pi 0}^2}{m_{\mu 0}^2 + m_{\pi 0}^2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$$

$$T_\mu = \frac{m_{\mu 0}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_{\mu 0}c^2 = \frac{m_{\mu 0}c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{m_{\mu 0}^2 - m_{\pi 0}^2}{m_{\mu 0}^2 + m_{\pi 0}^2}\right)^2}} - m_{\mu 0}c^2$$

$$= \frac{(m_{\mu 0} - m_{\pi 0})^2}{2m_{\pi 0}}c^2$$

$$T_\nu = E_\nu = m_{\pi 0}c^2 - \frac{m_{\mu 0}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_{\pi 0}^2 - m_{\mu 0}^2}{2m_{\pi 0}}c^2$$

12.3.28　静止质量均为 9.11×10^{-31}kg 的一个电子和一个正电子相碰撞,两粒子消失产生电磁辐射,若湮没前均静止,求辐射出的能量.

解　由能量守恒,辐射出的能量

$$E = 2m_e c^2 = 2\times 9.11\times 10^{-31}\times(3\times 10^8)^2 = 1.64\times 10^{-13}\text{J}$$

12.3.29　两个静止质量均为 m_0 的粒子,一个处于静止状态,另一个动能为其静能的 6 倍,两粒子做完全非弹性碰撞,求复合粒子的静止质量和速度.

解　由能量守恒,复合粒子的能量 E 等于两粒子碰撞前的能量之和,

$$E = m_0c^2 + (m_0c^2 + 6m_0c^2) = 8m_0c^2$$

由动量守恒,复合粒子的动量等于两粒子碰撞前的动量之和,其中一个静止,动量为零. 复合粒子的动量等于碰撞前动能不为零的粒子的动量.

对碰撞前动能不为零的粒子用能量和动量的关系:

$$(m_0c^2 + 6m_0c^2)^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2$$

$$p = \sqrt{48}m_0c$$

对复合粒子写能量和动量的关系:

$$m^2c^4 + c^2p^2 = E^2 \qquad (m\text{ 是静止质量})$$

代入 $E=8m_0c^2$, $p^2=48m_0^2c^2$,得 $m=4m_0$.

设复合粒子的速度为 v,

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{p^2}{m^2c^2} = \frac{v^2}{c^2-v^2},\quad \frac{p^2}{p^2+m^2c^2} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$v=\frac{cp}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

12.3.30　一个静止质量为 m_0、速率为 0.8c 沿 x 轴向正方向运动的粒子，衰变成两个静止质量均为 m_0 的粒子，其中一个以 0.6c 的速率沿 y 轴向负方向运动. 求：

(1) 另一个粒子的速率和运动方向；

(2) m_0/M_0.

解　设另一个粒子的速率为 v，($\beta=\frac{v}{c}$)，速度与 x 轴的夹角为 θ.

由衰变过程能量和动量守恒.

$$\frac{M_0c^2}{\sqrt{1-(0.8)^2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(0.6)^2}}+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1}$$

$$\frac{M_0\times 0.8c}{\sqrt{1-(0.8)^2}}=\frac{m_0c\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2}$$

$$0=\frac{m_0(-0.6c)}{\sqrt{1-(0.6)^2}}+\frac{m_0c\beta\sin\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3}$$

由式(2)、(3)，可得

$$\frac{m_0^2\beta^2}{1-\beta^2}=\frac{16}{9}M_0^2+\frac{9}{16}m_0^2=\frac{256M_0^2+81m_0^2}{144}$$

$$\beta^2=\frac{256M_0^2+81m_0^2}{256M_0^2+225m_0^2}$$

$$1-\beta^2=\frac{144m_0^2}{256M_0^2+225m_0^2} \tag{4}$$

由式(1)可得

$$1-\beta^2=\frac{m_0^2}{\left(\frac{5}{3}M_0-\frac{5}{4}m_0\right)^2}=\frac{144m_0^2}{400M_0^2-600M_0m_0+225m_0^2}$$

与式(4)比较可得

$$400M_0^2-600M_0m_0+225m_0^2=256M_0^2+225m_0^2$$

$$\frac{m_0}{M_0}=\frac{144}{600}=0.24$$

$$\beta^2=\frac{256+81(0.24)^2}{256+225\times(0.24)^2}=0.9693$$

$$v=\beta c=0.985c$$

由式(3)，

$$\sin\theta=\frac{3}{4}c\cdot\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{v}=0.1334$$

$$\theta=0.134\text{rad 或 } 7°40'$$

12.3.31　一总能量为 E_0、静止质量为 m_0 的粒子，与一个具有相同静止质量的静止粒子发生完全弹性碰撞，散射后两粒子动能相等. 求散射后两粒子速度的夹角，并讨论非相对论和极相对论两种极限情况.

解　静止质量相同的粒子动能相等,则总能相等,速率相同.设散射后每个粒子的总能量为 E_1,速率为 v_1,散射前总能量为 E_0 的粒子的速率为 v_0.

由能量守恒.

$$E_0 + m_0c^2 = 2E_1 \tag{1}$$

因为

$$E = mc^2, \quad p = mv$$

考虑到碰撞后两粒子动能相等,碰撞前后,两粒子的速度,必有图 12.21 所示的情况.

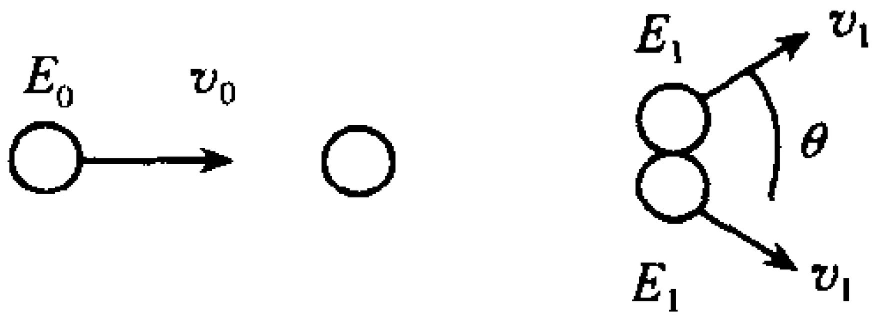


图 12.21

由动量守恒,

$$\frac{E_0}{c^2}v_0 = \frac{2E_1}{c^2}v_1\cos\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

由

$$E_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \quad E_1 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}$$

解出

$$v_0 = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E_0}\right)^2}, \quad v_1 = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E_1}\right)^2}$$

将 v_0、v_1 代入式(2),并用式(1),

$$E_0\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E_0}\right)^2} = 2E_1\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E_1}\right)^2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= (E_0+m_0c^2)\sqrt{1-\frac{4m_0^2c^4}{(E_0+m_0c^2)^2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{E_0^2-m_0^2c^4} = \sqrt{E_0^2+2E_0m_0c^2-3m_0^2c^4}\cos\frac{\theta}{2}$$

约去等号两边的共同因子$\sqrt{E_0^2-m_0^2c^4}$,即得

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{E_0+m_0c^2}{E_0+3m_0c^2}}$$

$$\theta = 2\arccos\sqrt{\frac{E_0+m_0c^2}{E_0+3m_0c^2}}$$

非相对论极限.

$$E = m_0c^2 + \frac{1}{2}mv^2, \qquad \frac{1}{2}mv^2 \ll E_0$$

$$E_0 \approx m_0c^2$$

$$\theta \approx 2\arccos\sqrt{\frac{1}{2}} = 90°$$

极相对论极限.

$$E \gg m_0c^2, \qquad E_0 \gg m_0c^2$$

$$\theta = 2\arccos 1 = 0$$

12.3.32　一个能量为 E_0 的反质子与一处于静止的质子相互作用，产生两静止质量均为 m_x 的粒子，其中一个在实验室中在与入射方向成 90°角的方向上被探测到，求这个粒子的总能量 E_s，并证明它与 m_x、E_0 均无关.

解　质子和反质子具有相同的静止质量 m_p. 设反质子的动量为 p_0，与质子相互作用产生的两粒子的动量分别为 p_1、p_2，相互作用情况如图 12.22 所示.

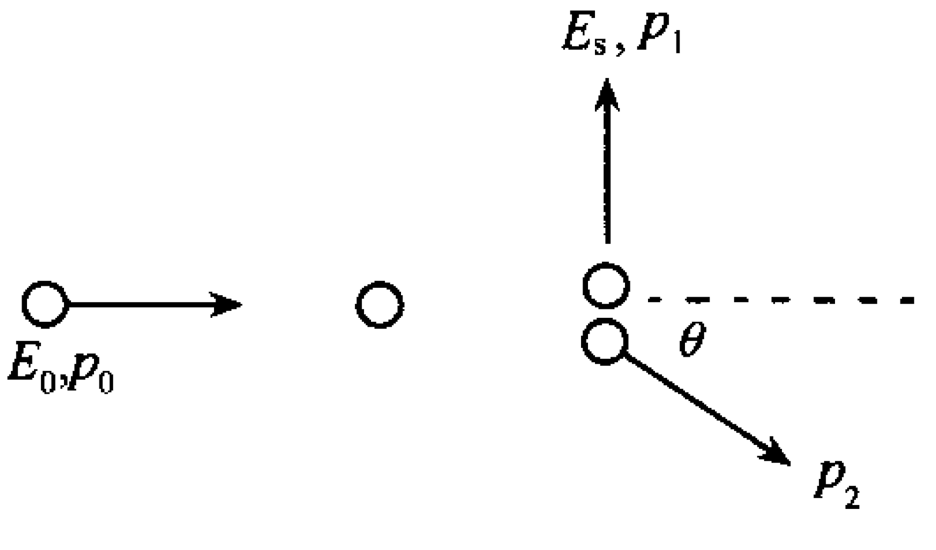


图 12.22

由动量守恒.

$$p_0 = p_2\cos\theta, p_1 = p_2\sin\theta$$

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2$$

由能量守恒，

$$E_0 + m_pc^2 = E_s + \sqrt{c^2p_2^2 + m_x^2c^4}$$

从后两式消去 p_2，可得

$$(E_0 + m_pc^2)^2 + E_s^2 - 2(E_0 + m_pc^2)E_s = c^2(p_0^2 + p_1^2) + m_x^2c^4$$

用 $E_0^2 = c^2p_0^2 + m_p^2c^4$，$E_s^2 = c^2p_1^2 + m_x^2c^4$，上式可化为

$$m_p^2c^4 + E_0m_pc^2 = E_s(E_0 + m_pc^2)$$

所以

$$E_s = m_pc^2$$

E_s 仅与质子(或反质子)的静止质量有关，与 E_0、m_x 均无关.

12.3.33　宇航员开亮一个普通的手电筒，将它扔入太空(电筒围绕它的轴稳定地自转)，问两小时后电池用完之时，这个"光子火箭"获得多大的附加速度？

解　假定电筒的小灯泡位于抛射面的焦点，使发出的光子几乎都平行于电筒的轴线. 设电筒的功率为 N(W)，开亮后经时间 t(以 s 为单位)，发出的光子的总能量为 $E=Nt$，如靠电筒稳定自转，保持电筒的取向不变. 当电池用完时，发出的光子的总动量为

$$p = \frac{E}{c} = \frac{Nt}{c} = \frac{N \times 2 \times 3600}{3 \times 10^8} = 2.4 \times 10^{-5}\text{N}$$

由动量守恒，手电筒将附加相反方向的动量，"光子火箭"获得相反的附加速度，其大小为

$$\Delta v = \frac{Nt}{mc}$$

对宇航员来说，这 Δv 是"光子火箭"获得的相反的速度的大小，m 是手电筒的质量，由于 Δv 很小，近似为静止质量.

若 $N=1\text{W}$，$m=0.3\text{kg}$，$t=2\text{h}$(小时)，

$$\Delta v = \frac{1.2 \times 3600}{0.3 \times 3 \times 10^8} = 8 \times 10^{-5}\text{m/s}$$

12.3.34　等效原理断言引力质量和惯性质量相等. 光子有不等于零的引力质量吗？设光子朝着地球落下距离 10m，计算对光子频率的影响. 用什么实验技术可以测出这个频率变化？

解　光子的引力质量不等于零,根据等效原理,光子的引力质量等于其惯性质量,光子的静止质量等于零,但惯性质量不等于零,

$$m=\frac{E}{c^2}=\frac{h\nu}{c^2}$$

当光子在地球引力场中落下距离 l 时,它的能量增加,因此频率也增大,

$$h\nu'=h\nu+mgl=h\nu\left(1+\frac{gl}{c^2}\right)$$

$\left(这里用了\ m=\frac{h\nu}{c^2}\right)$,

$$\Delta\nu=\nu-\nu=\frac{gl}{c^2}\nu,\quad \frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{gl}{c^2}$$

当 $l=10\text{m}$ 时,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{9.8\times 10}{(3\times 10^8)^2}=1.1\times 10^{-15}$$

这微小的频率变化可用穆斯堡尔效应作实验探测到.

12.3.35　考虑一个能量非常高的散射实验,参与散射的两个粒子具有相同的静止质量 m_0,其中一个原来处于静止,另一个以动量 p 入射:

(1) 求质心的速度 v^*;

(2) 在极相对论极限 $pc\gg m_0c^2$ 下,求此系统在质心平动参考系中的总能量 E^*.

解　(1)设在实验室参考系中具有动量 p 的粒子速度为 u_1,在质心平动参考系中速度为 v_1,

$$v_1=\frac{u_1-v^*}{1-\frac{v^*}{c^2}u_1}$$

另一粒子在质心平动参考系中的速度为 v_2,

$$v_2=\frac{0-v^*}{1-\frac{v^*}{c^2}\cdot 0}=-v^*$$

在质心平动参考系中,系统的总动量为零.

$$\frac{m_0v_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}+\frac{m_0(-v^*)}{\sqrt{1-\left(\frac{v^*}{c}\right)^2}}=0$$

可得

$$\frac{(v_1/c)^2}{1-(v_1/c)^2}=\frac{(v^*/c)^2}{1-(v^*/c)^2},\qquad v_1=v^*$$

$$\frac{u_1-v^*}{1-\frac{v^*}{c_2}u_1}=v^*$$

$$u_1v^{*2}-2c^2v^*+u_1c^2=0$$

$$v^*=\frac{c^2-\sqrt{c^4-u_1^2c^2}}{u_1}\tag{1}$$

另一个 $v^*>c$ 的根已舍去.

在实验室参考系中,

$$p=\frac{m_0u_1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_1}{c}\right)^2}}$$

解出

$$u_1=\frac{pc}{\sqrt{p^2+m_0^2c^2}} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),经计算可得

$$v^*=\frac{c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}-m_0c^2}{p}$$

可以检验应有的关系 $v^*<u_1$ 成立.

(2) 用极相对论极限:$p\gg m_0c$,

$$v_1=v^*\approx c\left(1-\frac{m_0c}{p}\right)$$

$$E_1^*=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}\approx\frac{m_0c^2}{\sqrt{2m_0c/p}}=\frac{1}{2}\sqrt{2m_0pc^3}$$

$$E_2^*=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{-v^*}{c}\right)^2}}=E_1^*$$

所以

$$E^*=E_1^*+E_2^*=\sqrt{2m_0pc^3}$$

12.3.36 (1) 静止质量 $m_1=1\text{g}$ 以 0.9 倍光速运动的粒子,与静止质量 $m_2=10\text{g}$ 的静止粒子发生正碰,并嵌入其中,产生的复合粒子的静止质量和速度多大?

(2) 假定 m_1 静止,m_2 应以多大的速度运动,才能产生与(1)有相同静止质量的复合粒子?

(3) 若 m_1 静止,m_2 应以多大的速度运动,才能产生与(1)有相同速度的复合粒子.

解 (1)设复合粒子的静止质量为 M,速度为 V(或 βc). 由碰撞过程动量和能量守恒,

$$\frac{m_1\beta_1c}{\sqrt{1-\beta_1^2}}=\frac{M\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+m_2c^2=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

可解出

$$V=\beta c=\frac{m_1\beta_1c}{m_1+m_2\sqrt{1-\beta_1^2}}$$

$$M=\left(m_1^2+m_2^2+\frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\right)^{1/2}$$

代入 $m_1=1\times10^{-3}\text{kg},\beta_1=0.9,m_2=10\times10^{-3}\text{kg}$,得

$V=0.168c,M=12.1\times10^{-3}\text{kg}$ 或 12.1g.

(2) 若 m_1 静止,m_2 以 β_2c 的速度与 m_1 正碰,产生的复合粒子质量 M 为

$$M=\left(m_1^2+m_2^2+\frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\right)^{1/2}$$

与(1)中 M 的表达式比较,M、m_1、m_2 的数值均相同,必有 $\beta_2=\beta_1$,即 m_2 应以 0.9 倍光速运动.

(3) 若 m_1 静止,m_2 以 β_2c 的速度运动,复合粒子的速度为

$$V=\frac{m_2\beta_2c}{m_2+m_1\sqrt{1-\beta_2^2}}$$

要复合粒子的速度与(1)中的相同.

$$\frac{m_2\beta_2c}{m_2+m_1\sqrt{1-\beta_2^2}}=0.168c$$

代入 m_1、m_2 的数据,可得

$$10\beta_2=1.68+0.168\sqrt{1-\beta_2^2}$$

可解出
$$\beta_2=0.186\text{ 或 }0.150$$

显然只能取 $\beta_2=0.186$. 因为动量守恒要求:

$$\frac{m_2\beta_2c}{\sqrt{1-\beta_2^2}}=\frac{M\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$M>m_2$,必有 $\frac{\beta_2^2}{1-\beta_2^2}>\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$,$\beta_2>\beta$. 因此,$\beta_2=0.150<\beta(=0.168)$是不可能的,结论是 m_2 应以 $0.186c$ 的速度运动.

12.3.37 静能为494MeV 的 K 介子衰变成静能为106MeV 的 μ 子和静能为零的中微子,求由静止的 K 介子衰变成的 μ 子和中微子的动能.

解 根据能量守恒

$$m_\text{K}c^2=E_\mu+E_\nu=\sqrt{p_\mu^2c^2+m_\mu^2c^4}+p_\nu c$$

由动量守恒,

$$\boldsymbol{p}_\nu=-\boldsymbol{p}_\mu,\quad p_\mu=p_\nu$$

代入上式,解出 p_μ,

$$p_\mu=\frac{(m_\text{K}^2-m_\mu^2)c}{2m_\text{K}}$$

$$E_\mu=\sqrt{p_\mu^2c^2+m_\mu^2c^4}=\frac{(m_\text{K}^2+m_\mu^2)^2c^2}{2m_\text{K}}$$

$$=\frac{[(494/c^2)^2+(106/c^2)^2]c^2}{2.494/c^2}=258\text{MeV}$$

$$T_\mu=E_\mu-m_\mu c^2=258-106=152\text{MeV}$$

$$E_\nu = p_\nu c = p_\mu c = \frac{(m_K^2 - m_\mu^2)c^2}{2m_K} = 236\text{MeV}$$

$$T_\nu = E_\nu - m_\nu c^2 = E_\nu = 236\text{MeV}$$

T_μ、T_ν 分别是在实验室参考系中 μ 子和中微子的动能.

12.3.38　可以通过辐射 γ 量子的方法使被激励的原子核返回基态.设基态的质量即原子核的静止质量为 m_0，激发能（处于该激发态时原子核的能量减去处于基态时的能量）为 ΔE，求辐射出的 γ 量子的频率.

解　根据能量守恒和动量守恒，

$$m_0c^2 + \Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + h\nu \tag{1}$$

$$\frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{h\nu}{c} \tag{2}$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$.

关于第一个式子作些说明.原来处于激发态的原子核是静止的，辐射 γ 量子回到基态的原子核不可能是静止的，因为要遵从动量守恒定律，γ 量子的动量不为零，处于基态的原子核必具有与 γ 量子等值异号的动量.

由式(2)可求 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{(h\nu)^2}{(m_0c^2)^2},\quad \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{(h\nu)^2 + (m_0c^2)^2}{(m_0c^2)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{m_0c^2}\sqrt{(h\nu)^2 + (m_0c^2)^2}$$

代入式(1)，

$$m_0c^2 + \Delta E = \sqrt{(h\nu)^2 + (m_0c^2)^2} + h\nu$$

解出

$$h\nu = \Delta E\,\frac{\Delta E + 2m_0c^2}{2(\Delta E + m_0c^2)} = \Delta E\left[1 - \frac{\Delta E}{2(\Delta E + m_0c^2)}\right]$$

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}\left[1 - \frac{\Delta E}{2(\Delta E + m_0c^2)}\right]$$

12.3.39　一个静止质量为 M_0 的静止粒子裂变为静止质量分别为 m_{10} 和 m_{20} 的两粒子，裂变能 $M_0c^2 - (m_{10}+m_{20})c^2$ 在这两个粒子间如何分配？

解　由能量守恒.

$$M_0c^2 = m_{10}c^2 + T_1 + m_{20}c^2 + T_2 \tag{1}$$

由 12.3.20 题得动量和动能有下列关系：

$$p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{T_1(T_1 + 2m_{10}c^2)}$$

$$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{T_2(T_2 + 2m_{20}c^2)}$$

由动量守恒，

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=0,\qquad p_1=p_2$$

所以
$$T_1(T_1+2m_{10}c^2)=T_2(T_2+2m_{20}c^2)\tag{2}$$

用式(1)消去式(2)中的 T_2,

$$T_1(T_1+2m_{10}c^2)=[(M_0-m_{10}-m_{20})c^2-T_1][(M_0-m_{10}-m_{20})c^2-T_1+2m_{20}c^2]$$

经计算,解出

$$T_1=\frac{1}{2M_0}[(M_0-m_{10})^2-m_{20}^2]c^2$$

$$T_2=(M_0-m_{10}-m_{20})c^2-\frac{1}{2M_0}[(M_0-m_{10})^2-m_{20}^2]c^2$$

$$=\frac{1}{2M_0}[(M_0-m_{20})^2-m_{10}^2]c^2$$

由于(1)、(2)两式中,脚标1、2对调,两方程不变,因此得到 T_1 的式子后,可将式中1与2对调,立即写出 T_2 的式子.现两式确有这种情况,可作为计算无误的一种检验.

12.3.40 静止的电子偶湮没时产生两个光子,如果其中一个光子再与另一个静止电子发生碰撞,它能给予这个电子的最大速度多大?

解 由能量守恒,

$$2m_0c^2=2h\nu$$

$$h\nu=m_0c^2\tag{1}$$

写上述能量关系时,已考虑了动量守恒,静止的电子偶动量为零,产生的两个光子也必须总动量为零,必然有两个光子的频率相同,运动方向相反.

一个光子与静止电子发生碰撞,由能量关系,

$$h\nu+m_0c^2=mc^2+h\nu'\tag{2}$$

静止电子获得速度,

$$mc^2>m_0c^2,\ 故\ \nu'<\nu$$

考虑一般情况如图12.23所示,

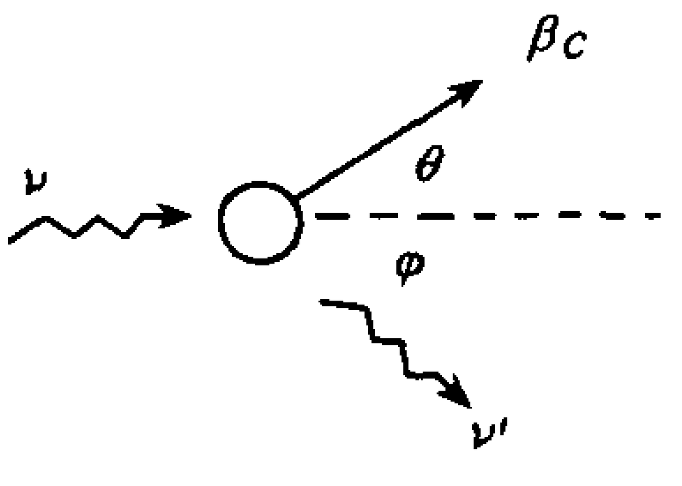


图 12.23

写动量守恒关系:

$$\frac{h\nu}{c}=\frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\theta+\frac{h\nu'}{c}\cos\varphi\tag{3}$$

$$\frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\theta=\frac{h\nu'}{c}\sin\varphi\tag{4}$$

从式(3)、(4)消去 φ,得

$$(h\nu)^2-\frac{2h\nu\cdot m_0\beta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\theta+\frac{(m_0\beta c^2)^2}{1-\beta^2}=(h\nu')^2\tag{5}$$

由(2)、(5)两式,消去 $h\nu'$,可得

$$(m_0c^2)^2+\frac{(m_0c^2)^2}{1-\beta^2}-\frac{2h\nu m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{2(m_0c^2)^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+2h\nu m_0c^2$$

$$=-\frac{2h\nu m_0\beta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\theta+\frac{(m_0\beta c^2)^2}{1-\beta^2}\tag{6}$$

用式(1),式(6)可化为

$$2\sqrt{1-\beta^2}=(2-\beta\cos\theta)$$

两边平方,可解出

$$\beta=\frac{4\cos\theta}{4+\cos^2\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\cos\theta}=\frac{4(4-\cos^2\theta)}{(4+\cos^2\theta)^2}>0$$

(注意$-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$).

β 是 $\cos\theta$ 的单调递增函数,

$$\beta_{\max}=\frac{4(\cos\theta)_{\max}}{4+(\cos^2\theta)_{\max}}=\frac{4}{5}$$

故与静止电子发生碰撞的光子能给予这个电子的最大速度是 $v_{\max}=\frac{4}{5}c$.

12.3.41 在气泡室中经常能观察到由光子产生电子-正电子对的反应.试证明除非有其他粒子的介入,比如一个核子,则这样的转化是不可能的.

解

$$\gamma\rightarrow e^-+e^+$$

这样的反应可以不违背能量守恒定律,但一定违背动量守恒定律.

假定发生上述反应,在任何惯性参考系中,动量守恒均应成立.我们可取 e^-、e^+ 系统的质心平动参考系,在此参考系中,系统的动量为零.可反应前光子的动量不为零,因为不可能找到一个参考系,在其中光子是静止的.这个设想的反应既然违背了它应遵从的定律,这个反应就不可能发生.

假如有其他粒子例如核子参与反应,能量和动量守恒均能满足.

设核子的静止质量为 M,原来是静止的,产生的正电子、电子对也静止,需要光子具有的能量为 E、能量守恒关系为

$$E+Mc^2=M\gamma c^2+2m_ec^2 \tag{1}$$

其中 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta=\frac{v}{c}$, v 是反应后核子具有的速度.

动量守恒关系为

$$\frac{E}{c}=M\gamma\beta c$$

因为

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}},\quad \gamma\beta=\sqrt{\gamma^2-1}$$

$$\gamma^2=1+(\gamma\beta)^2=1+\left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2 \tag{2}$$

用(2)式消去(1)式中的 γ,

$$(E+Mc^2-2m_ec^2)^2=E^2+M^2c^4$$

$$E=2\left(\frac{M-m_e}{M-2m_e}\right)m_ec^2$$

因 $M\gg m_e$,光子所需的能量稍大于电子-正电子对的静能 $2m_ec^2$ 即可.

12.3.42　一电子束被固定的散射靶散射，如图 12.24 所示，散射是弹性的，每个电子具有能量 $E=\frac{5}{3}m_0c^2$（m_0 为电子的静止质量），电子束流量为每秒钟流过 Q 个电子. 求：

(1) 入射电子的速度；

(2) 电子作用在散射靶上的力的大小和方向.

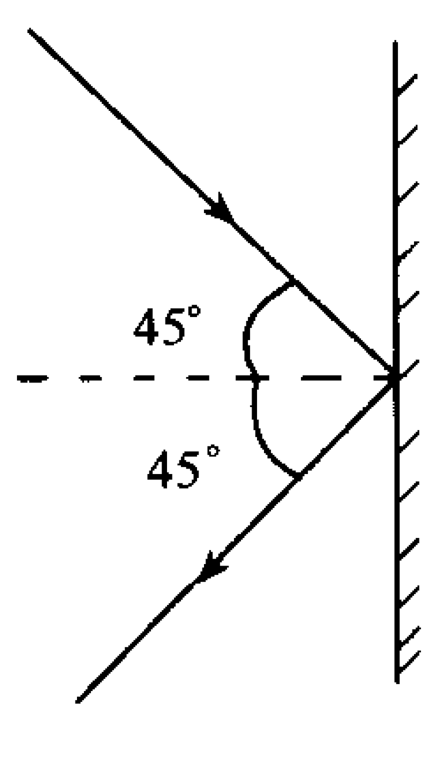


图 12.24

解　(1)

$$E=mc^2$$

$$\frac{5}{3}m_0c^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}c^2,\qquad m=\frac{5}{3}m_0$$

所以

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\frac{3}{5},\qquad v=\frac{4}{5}c$$

(2) 因为是弹性碰撞，所以碰撞前后电子速率不变，且电子束的入射角等于反射角，电子的速度的切向分量不变，法向分量反号，入射电子的法向分量为

$$p_n=mv_n=\frac{5}{3}m_0\cdot\frac{4}{5}c\cdot\cos45°=\frac{2\sqrt{2}}{3}m_0c$$

每个电子散射时动量的改变量为

$$\Delta p=2p_n=\frac{4\sqrt{2}}{3}m_0c$$

电子束给予靶的作用力等于一秒钟内电子束给予靶的冲量，其大小也等于靶给予一秒钟内入射电子的作用力之和，等于一秒钟内被散射电子的动量的改变量之和.

$$F=Q\Delta p=\frac{4\sqrt{2}}{3}Qm_0c$$

其方向沿入射电子速度的法向分量的方向.

12.3.43　一个静止质量为 m、能量为 E 的粒子，跟另一个静止质量为 M 的静止粒子发生弹性碰撞，求碰撞后这个粒子的能量 E_1 与散射角 θ 的关系，讨论 $m=0$ 的情况（康普顿效应）.

解　用 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}_1$ 表示静止质量为 m 的粒子碰撞前后的动量，E_2 和 $\boldsymbol{p}_2$ 表示静止质量为 M 的粒子碰撞后的能量和动量（图 12.25）.

由能量和动量守恒，

$$E+Mc^2=E_1+E_2\tag{1}$$

$$p=p_1\cos\theta+p_2\cos\varphi\tag{2}$$

$$p_1\sin\theta=p_2\sin\varphi\tag{3}$$

用 $E^2=c^2p^2+m^2c^4$，式(2)、(3)可改写为

$$\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2}-\sqrt{\frac{E_1^2}{c^2}-m^2c^2}\cos\theta=\sqrt{\frac{E_2^2}{c^2}-M^2c^2}\cos\varphi$$

$$\sqrt{\frac{E_1^2}{c^2}-m^2c^2}\sin\theta=\sqrt{\frac{E_2^2}{c^2}-M^2c^2}\sin\varphi$$

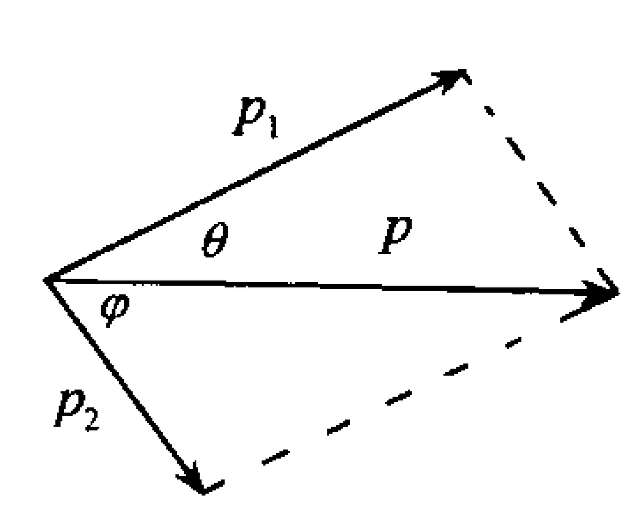


图 12.25

两式平方相加，得

$$\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2+\frac{E_1^2}{c^2}-m^2c^2-2\sqrt{\left(\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2\right)\left(\frac{E_1^2}{c^2}-m^2c^2\right)}\cos\theta=\frac{E_2^2}{c^2}-M^2c^2$$

用式(1)消去上式中的 E_2，即得 E_1 与 θ 的关系

$$(E-E_1)Mc^2-EE_1+\sqrt{(E^2-m^2c^4)(E_1-m^2c^4)}\cos\theta+m^2c^4=0$$

当 $m=0$ 时，$E=h\nu$，光子打在静止的自由电子上产生康普顿散射

$$(h\nu-h\nu_1)Mc^2-h^2\nu\nu_1+h^2\nu\nu_1\cos\theta=0$$

$$\frac{1}{\nu_1}-\frac{1}{\nu}=\frac{h}{Mc^2}(1-\cos\theta)$$

12.3.44　以速度 v 运动、静止质量为 m 的 π^0 介子裂变成两个 γ 量子，设在 π^0 介子静止的参考系内，γ 量子按飞散方向的分布是各向同性的，试确定相对于实验室参考系的下列各量：

(1) 其中一个 γ 量子按与 π^0 介子运动方向成 θ 角飞散的概率；

(2) 一个 γ 量子以 θ 角飞散，另一个 γ 量子飞散的方向；

(3) 按(2)飞散的两个 γ 量子的能量.

解　(1) 设 S、S' 系分别为实验室参考系和 π^0 介子在其中静止的参考系.

在 S' 系中，一个 γ 量子飞散方向是各向同性的，在 $\theta'\sim\theta'+\mathrm{d}\theta'$ 内飞散的概率为

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=\frac{1}{2}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'$$

由 12.2.13 题证明的在 S'、S 系内光线与 x'、x 轴的夹角 θ'、θ 间的关系.

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta},\quad \left(\beta=\frac{v}{c}\right)$$

$$-\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=-\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^2}(1-\beta^2)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

在实验室参考系 S 内飞散到 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$ 内的概率为

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{2}\,\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

(2) 在 S' 系中，一个 γ 量子的飞散角为 θ'，则另一个 γ 量子的飞散角 $\theta_1'=\pi+\theta'$，在 S 系中飞散角为 θ_1，

$$\cos\theta_1=\frac{\cos(\pi+\theta')+\beta}{1+\beta\cos(\pi+\theta_1')}=\frac{\beta-\cos\theta'}{1-\beta\cos\theta'}$$

将 $\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$ 代入上式，经计算可得

$$\cos\theta_1=\frac{2\beta-(1+\beta^2)\cos\theta}{1+\beta^2-2\beta\cos\theta}$$

(3) 方法一：在 S' 系内，两个 γ 量子的能量均为

$$E'=E_1'=\frac{1}{2}mc^2\quad 或\quad h\nu'=h\nu_1'=\frac{1}{2}mc^2$$

用横向多普勒效应公式

$$\nu=\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1}{1-\beta\cos\theta}\nu'$$

一个 γ 量子在 S 系中的能量为

$$E = h\nu = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}h\nu' = \frac{1}{2}mc^2\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$$

另一个 γ 量子在 S 系中的能量为

$$E_1 = h\nu_1 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_1}h\nu' = \frac{1}{2}mc^2\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\,\dfrac{2\beta-(1+\beta^2)\cos\theta}{1+\beta^2-2\beta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}mc^2\,\frac{1+\beta^2-2\beta\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)\sqrt{1-\beta^2}}$$

可以验证

$$E + E_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

方法二：用能量变换关系，

$$E = \frac{E' + vp'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

今

$$E' = \frac{1}{2}mc^2,\qquad p'_x = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta' = \frac{1}{2}mc\,\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$E'_1 = \frac{1}{2}mc^2,\qquad p'_{1x} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta'_1 = \frac{1}{2}mc\,\frac{\beta-\cos\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

代入上述变换关系，立即得到 E 和 E_1 的上述表达式.

12.3.45　一个能量为 E_ν 的光子与一个能量为 $E \gg m_0c^2$（m_0 为静止质量）的电子发生碰撞.

(1) 若在实验室参考系中光子运动方向与电子运动方向的夹角为 θ，碰撞前光子在电子参考系中的能量 E'_ν 等于多少？

(2) 若 $E'_\nu \ll m_0c^2$，电子的反冲可以略去，光子在电子参考系中的能量不会因为碰撞而改变，问碰撞后光子在实验室参考系中能量的最小值和最大值各是多少？

解　(1) 取电子运动方向为 x 轴，则在实验室参考系（S 系）中光子的动量在 x 方向的分量为

$$p_x = \frac{E_\nu}{c}\cos\theta$$

根据能量变换关系，在电子参考系（S' 系）中光子的能量 E'_ν 为

$$E'_\nu = \frac{E_\nu - vp_x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_\nu\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \tag{1}$$

其中 v 是在实验室参考系（S 系）中电子的速度，也即 S' 系对 S 系的速度（沿 x 方向），

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E}{m_0c^2} \tag{2}$$

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E^2}}\approx 1-\frac{m_0^2c^4}{2E^2} \tag{3}$$

(这里用了 $E\gg m_0c^2$).

将式(2)、(3)代入式(1)，得

$$E'_\nu=\left[\frac{E}{m_0c^2}(1-\cos\theta)+\frac{m_0c^2}{2E}\cos\theta\right]E_\nu$$

(2) $E'_\nu\ll m_0c^2$，光子与电子发生碰撞时，可以不计电子的反冲，在电子参考系(S'系)中，碰撞时光子的能量不变，碰撞后仍为

$$E'_\nu=\left[\frac{E}{m_0c^2}(1-\cos\theta)+\frac{m_0c^2}{2E}\cos\theta\right]E_\nu$$

能量的最小值和最大值的 θ 值由

$$\frac{\mathrm{d}E'_\nu}{\mathrm{d}\theta}=0$$

求出，

$$\frac{\mathrm{d}E'_\nu}{\mathrm{d}\theta}=\left(\frac{E}{m_0c^2}\sin\theta-\frac{m_0c^2}{2E}\sin\theta\right)E_\nu=0$$

$$\sin\theta=0,\qquad \theta=0,\pi.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E'_\nu}{\mathrm{d}\theta^2}=\left(\frac{E}{m_0c^2}-\frac{m_0c^2}{2E}\right)E_\nu\cos\theta$$

因为　$E\gg m_0c^2,\quad \frac{E}{m_0c^2}-\frac{m_0c^2}{2E}>0$

可见，　$\theta=0$ 时，　$\frac{\mathrm{d}^2E'_\nu}{\mathrm{d}\theta^2}>0$，　E'_ν 最小，

$\theta=\pi$ 时，　$\frac{\mathrm{d}^2E'_\nu}{\mathrm{d}\theta^2}<0$，　E'_ν 最大.

$$E'_{\nu\min}=\left[\frac{E}{m_0c^2}(1-\cos 0)+\frac{m_0c^2}{2E}\cos 0\right]E_\nu=\frac{m_0c^2}{2E}E_\nu$$

$$E'_{\nu\max}=\left[\frac{E}{m_0c^2}(1-\cos\pi)+\frac{m_0c^2}{2E}\cos\pi\right]E_\nu=\left(\frac{2E}{m_0c^2}-\frac{m_0c^2}{2E}\right)E_\nu\approx\frac{2E}{m_0c^2}E_\nu$$

再用能量变换关系

$$E_\nu=\frac{E'_\nu+vp'_{\nu x}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$E_{\nu\min}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{m_0c^2}{2E}-v\frac{m_0c}{2E}\right)E_\nu=\frac{m_0c^2}{2E}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}E_\nu,$$

$$E_{\nu\max}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{2E}{m_0c^2}+v\frac{2E}{m_0c^3}\right)E_\nu=\frac{2E}{m_0c^2}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}E_\nu$$

代入$\frac{v}{c}\approx 1-\frac{m_0^2c^4}{2E^2}$，经计算可得

$$E_{\nu\min}\approx\left(\frac{m_0c^2}{2E}\right)^2E_\nu$$

$$E_{\nu\max}\approx\left(\frac{2E}{m_0c^2}\right)^2E_\nu$$

注意：在计算$E_{\nu\min}$时，碰撞前p'_x沿x'轴正向$(\theta=0)$，碰撞后反向，沿x'轴负向，故代入$p'_{\nu x}=-\frac{m_0c^2}{2E}\cdot\frac{E_\nu}{c}$，而在计算$E_{\nu\max}$时，碰撞前$p'_x$沿$x'$轴负向$(\theta=\pi)$，碰撞后反向，沿$x'$轴正向，故代入$p'_{\nu x}=\frac{2E}{m_0c^2}\cdot\frac{E_\nu}{c}$. 计算$p'_\nu$时用了$p'_\nu=\frac{E'_\nu}{c}$.

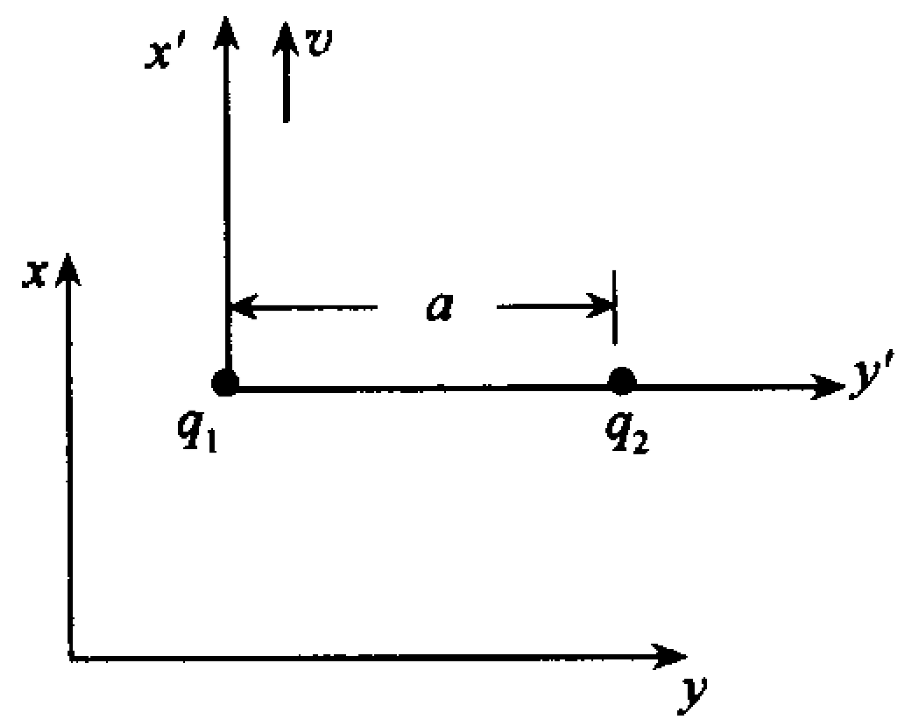


图 12.26

12.3.46 相距为a的两个点电荷q_1和q_2，在垂直于它们的连线的方向上以匀速度v运动，试确定它们的相互作用力.

解 方法一：取S、S'系分别为实验室参考系和固连于两个点电荷的参考系，取x、x'轴沿点电荷在S系中的运动方向，S'系对S系以速度v沿x轴正向运动，x、y、x'、y'轴如图12.26所示.

在S'系中，点电荷q_2受点电荷q_1的作用力为静电场产生的库仑力，

$$\boldsymbol{F}'=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0a^2}\boldsymbol{j}$$

即

$$F'_x=0,\quad F'_y=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0a^2},\quad F'_z=0$$

由力的变换公式，

$$F_x=\frac{F'_x+\frac{V}{c}\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{v}'}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}},\qquad F_y=F'_y\frac{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}$$

$$F_z=F'_z\frac{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}$$

令$V=v$，$\boldsymbol{v}'=0$，代入上述F'_x、F'_y、F'_z，得

$$F_x=0,\qquad F_y=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0a^2}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2},\quad F_z=0$$

方法二：用相对论电动力学关于电磁场的变换公式，

$$E'_{/\!/}=E_{/\!/},\quad \boldsymbol{E}'_\perp=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})_\perp$$

$$B'_{/\!/}=B_{/\!/},\boldsymbol{B}'_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^{2}}}(\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^{2}}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E})_{\perp}$$

今把与 S'、S 系相对运动方向垂直的两个关系改为

$$\boldsymbol{E}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^{2}}}(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}')_{\perp}$$

$$\boldsymbol{B}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^{2}}}(\boldsymbol{B}'+\frac{1}{c^{2}}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}')_{\perp}$$

令
$$E'_{/\!/}=0,\boldsymbol{E}'_{\perp}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{j},\boldsymbol{B}'=0,\boldsymbol{V}=v\boldsymbol{i}$$

代入电磁场的变换公式,得

$$E_{/\!/}=0\quad 即\quad E_x=0$$

$$\boldsymbol{E}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{j}-0\right)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\boldsymbol{j}$$

即
$$E_y=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}},\quad E_z=0$$

$$B_{/\!/}=0,即\ B_x=0.$$

$$\boldsymbol{B}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\left(0+\frac{1}{c^2}v\boldsymbol{i}\times\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{j}\right)=\frac{\frac{v}{c^2}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\boldsymbol{k}$$

即
$$B_y=0,\quad B_z=\frac{\frac{v}{c^2}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}$$

点电荷 q_2 受到力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=q_2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\\&=q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\boldsymbol{j}+v\boldsymbol{i}\times\frac{\frac{v}{c^2}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\boldsymbol{k}\right)\\&=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

与方法一的结果完全相同.

12.4 四维矢量

12.4.1 (1) 已知$(\boldsymbol{r},ct)$是一个相对论性四维矢量,证明$(\boldsymbol{k},\omega)$是相对论性四维矢量.

(2) 已知一原子在静止时放射出角频率为ω_0的光,且这原子以速率v朝向或离开一观察者运动,利用洛伦兹变换就两种情况(朝向或离开)导出观察者观察到的角频率公式.

解 (1) 考虑在惯性系S中一平面电磁波

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

在另一个惯性系S'中,S'相对于S沿x轴以$\boldsymbol{V}$的速度运动.$\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{B}'$与$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$有下列关系:

$$E'_{/\!/}=E_{/\!/},\qquad B'_{/\!/}=B_{/\!/}$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}(\boldsymbol{E}_{\perp}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}_{\perp})$$

$$\boldsymbol{B}'_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\left(\boldsymbol{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}_{\perp}\right)$$

这些关系要求$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{B}'$的指数函数是不变量,即

$$\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-\omega't'=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t \tag{1}$$

已知$(\boldsymbol{r},ct)$是相对论性四维矢量,

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad ct'=\frac{ct-\frac{V}{c}x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

设

$$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,k_3),\quad \boldsymbol{k}'=(k'_1,k'_2,k'_3)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-\omega't'&=k'_1\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}+k'_2y+k'_3z-\omega'\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\\&=\frac{k'_1+\frac{V}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}x+k'_2y+k'_3z-\frac{\omega'+Vk'_1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}t\\&=k_1x+k_2y+k_3z-\omega t\end{aligned} \tag{2}$$

上述推导中用了$(\boldsymbol{r},ct)$与$(\boldsymbol{r}',ct')$间的洛伦兹变换关系以及式(1).

比较式(2)两边x、y、z、t的系数,得

$$k_1=\frac{k'_1+\frac{V}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},\quad k_2=k'_2,\quad k_3=k'_3$$

$$\omega = \frac{\omega' + Vk_1'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

其逆变换

$$k_1' = \frac{k_1 - \frac{V}{c}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},\quad k_2' = k_2,\quad k_3' = k_3,\quad \frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}k_1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

与

$$x' = \frac{x - \frac{V}{c}\cdot ct}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},\quad y' = y,\quad z' = z,\quad ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

有完全相同的变换关系，因此，$(\boldsymbol{r}, ct)$是相对论性四维矢量，$\left(\boldsymbol{k}, \frac{\omega}{c}\right)$或$(c\boldsymbol{k}, \omega)$也是相对论性四维矢量.

(2) 取观察者静止的参考系为 S 系，原子处于静止的参考系为 S' 系，x、x' 轴的正向与 S' 系对 S 系的速度方向一致.

原子朝向观察者运动时，$\omega' = \omega_0$，$k_1' = \frac{\omega_0}{c}$，

$$\omega = \frac{\omega' + Vk_1'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{\omega_0 + V\frac{\omega_0}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \omega_0\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}$$

原子离开观察者运动时，$\omega' = \omega_0$，$k_1' = -\frac{\omega_0}{c}$，

$$\omega = \frac{\omega_0 + V\left(-\frac{\omega_0}{c}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \omega_0\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}}$$

12.4.2 写出四维位置矢量的洛伦兹变换，导出四维动量矢量的洛伦兹变换.

解 四维位置矢量的洛伦兹变换为

$$x' = \gamma(x - \beta ct),\quad y' = y,\quad z' = z,\quad ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 &= \gamma^2[x^2 - 2\beta ctx + (\beta ct)^2] + y^2 + z^2 \\ &\quad - \gamma^2[(ct)^2 - 2\beta ctx + (\beta x)^2] \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2(1-\beta^2)(ct)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \end{aligned}$$

上述式子说明四维位置矢量具有下列性质：

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \text{ 为不变量}$$

由相对论粒子的能量动量关系

$$E^2 = E_0^2 + c^2 p^2$$

其中 E_0 是静能,

$$p^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = -\left(\frac{E_0}{c}\right)^2 = \text{常量}$$

可见,粒子的动量,能量或四维动量矢量$(\boldsymbol{p}, \frac{E}{c})$具有类似于$(\boldsymbol{r}, ct)$的不变量,即

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 \text{ 为不变量}$$

p_x 与 x,p_y 与 y、p_z 与 z、$\frac{E}{c}$与 ct 间均有一一对应关系,因此,把动量、能量写成上述四维动量,也有与四维位置矢量相同的洛伦兹变换,即对于 S' 系对 S 系的速度为 $v\boldsymbol{i}$ 时,有

$$p_x' = \gamma(p_x - \beta\frac{E}{c}),\quad p_y' = p_y,\quad p_z' = p_z,\quad \frac{E'}{c} = \gamma(\frac{E}{c} - \beta p_x)$$

把$(\boldsymbol{r}, ct)$和$(\boldsymbol{p}, \frac{E}{c})$的变换写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \\ \frac{E'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

12.4.3　试证对于两个粒子的系统,若 $\boldsymbol{p}$、E 分别为系统的总动量和总能量,则

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2$$

为洛伦兹变换下的不变量.

证明　设在 S 系中两个粒子的动量分别为 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$,能量分别为 E_1、E_2;在 S' 系中,两个粒子的动量分别为 $\boldsymbol{p}_1'$、$\boldsymbol{p}_2'$,能量分别为 E_1'、E_2'. S' 系相对于 S 系以 v 的速率沿 x 正向运动.

无疑每个粒子分别有下列洛伦兹变换不变性:

$$p_{1x}'^2 + p_{1y}'^2 + p_{1z}'^2 - \left(\frac{E_1'}{c}\right)^2 = p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2 - \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 \tag{1}$$

$$p_{2x}'^2 + p_{2y}'^2 + p_{2z}'^2 - \left(\frac{E_2'}{c}\right)^2 = p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2 - \left(\frac{E_2}{c}\right)^2 \tag{2}$$

要证明

$$(p_{1x}' + p_{2x}')^2 + (p_{1y}' + p_{2y}')^2 + (p_{1z}' + p_{2z}')^2 - \left(\frac{E_1' + E_2'}{c}\right)^2$$

$$=(p_{1x}+p_{2x})^2+(p_{1y}+p_{2y})^2+(p_{1z}+p_{2z})^2-\left(\frac{E_1+E_2}{c}\right)^2$$

显然，将上式展开减去前两式，约去两边的公因子 2，应有

$$p'_{1x}p'_{2x}+p'_{1y}p'_{2y}+p'_{1z}p'_{2z}-\frac{E'_1E'_2}{c^2}=p_{1x}p_{2x}+p_{1y}p_{2y}+p_{1z}p_{2z}-\frac{E_1E_2}{c}$$

对$\left(\boldsymbol{p}_1,\frac{E_1}{c}\right)$，$\left(\boldsymbol{p}_2,\frac{E_2}{c}\right)$分别写出洛伦兹变换式：

$$p'_{1x}=\gamma\left(p_{1x}-\beta\frac{E_1}{c}\right),\qquad p'_{1y}=p_{1y},\qquad p'_{1z}=p_{1z},\qquad \frac{E'_1}{c}=\gamma\left(\frac{E_1}{c}-\beta p_{1x}\right)$$

$$p'_{2x}=\gamma\left(p_{2x}-\beta\frac{E_2}{c}\right),\qquad p'_{2y}=p_{2y},\qquad p'_{2z}=p_{2z},\qquad \frac{E'_2}{c}=\gamma\left(\frac{E_2}{c}-\beta p_{2x}\right)$$

$$\begin{aligned}&p'_{1x}p'_{2x}+p'_{1y}p'_{2y}+p'_{1z}p'_{2z}-\frac{E'_1E'_2}{c^2}\\&=\gamma\left(p_{1x}-\beta\frac{E_1}{c}\right)\cdot\gamma\left(p_{2x}-\beta\frac{E_2}{c}\right)+p_{1y}p_{2y}+p_{1z}p_{2z}+\gamma\left(\frac{E_1}{c}-\beta p_{1x}\right)\cdot\gamma\left(\frac{E_2}{c}-\beta p_{2x}\right)\\&=\gamma^2(1-\beta^2)p_{1x}p_{2x}+p_{1y}p_{2y}+p_{1z}p_{2z}-\gamma^2(1-\beta^2)\frac{E_1E_2}{c^2}\\&=p_{1x}p_{2x}+p_{1y}p_{2y}+p_{1z}p_{2z}-\frac{E_1E_2}{c^2}\end{aligned}\tag{3}$$

这正是我们期待的关系，式(1)、式(2)和式(3)的两倍相加，即得 $p_x^2+p_y^2+p_z^2-\left(\frac{E}{c}\right)^2$ 为不变量.

显然，对于 n 个粒子的系统，由于任何两个粒子间均有式(3)那样的式子成立，对于整个系统，$p^2-\left(\frac{E}{c}\right)^2$ 也是不变量. 对于一个反应，因反应前后动量守恒，能量也守恒；对于孤立系统，不仅反应前后这个不变量也成立，而且是守恒的.

12.4.4　问两束动能均为 T 的质子迎头碰撞的反应与多大动能的单束质子跟静止的质子碰撞时的反应相同.

解　考虑迎头碰撞的两个粒子组成的系统，$E^2-c^2p^2$ 是洛伦兹变换下的不变量.

对于实验室参考系，$E=2(m_0c^2+T)$，$p=0$. 其中 m_0 为粒子的静止质量.

考虑其中一个质子为静止的参考系，这个粒子的能量为 m_0c^2，动量为零，另一个粒子能量为 E'、动量为 p'，系统能量为 $E'+m_0c^2$，动量为 p'.

所述不变量给出关系：

$$(E'+m_0c^2)^2-c^2p'^2=[2(m_0c^2+T)]^2$$

由粒子的能量、动量间的关系，

$$E'^2=c^2p'^2+m_0^2c^4$$

两式消去 p'，可解出

$$E'=\frac{2T^2+4Tm_0c^2+m_0^2c^4}{m_0c^2}$$

这个运动的粒子的动能应为

$$T' = E' - m_0c^2 = \frac{2T^2 + 4Tm_0c^2}{m_0c^2} = 4T + \frac{2T^2}{m_0c^2}$$

12.4.5　一个动量为 p 的光子与一个静止质量为 m 的静止粒子发生碰撞.

(1) 在动量中心参考系中,光子和粒子的总能量多大?

(2) 在动量中心系中,粒子动量的量值多大?

(3) 如果光子向后弹性散射,末态光子在实验室参考系中的动量多大?

解　(1) 方法一:在动量中心系中,设光子粒子系统的总能量为 E',总动量为零.在实验室参考系中,光子能量为 cp,动量为 p,静止粒子能量为 mc^2,动量为零.

因为　$E^2-c^2p^2$ 为洛伦兹变换下的不变量,

$$E'^2 = (cp + mc^2)^2 - c^2p^2 = 2mpc^3 + m^2c^4$$

$$E' = c\sqrt{mc(2p + mc)}$$

方法二:设 S' 系是动量中心系,对 S 系(实验室参考系)的速度为 $\boldsymbol{v}$,沿 x 轴,也是光子运动的方向,则在 S' 系中,粒子的动量为 $-\dfrac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$,光子的动量为

$$p' = \frac{p - \frac{v}{c^2}E}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = p\frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

系统在 S' 系中的总动量为零,

$$p\frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 0$$

解出

$$v = \frac{cp}{p + mc}$$

$$E' = cp' + \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}c^2$$

经计算可得

$$E' = c\sqrt{mc(2p + mc)}$$

(2) 方法一:在 S' 系中,粒子的动量,用(1)中的方法二,立即可得

$$p'_m = -\frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -\frac{mcp}{p + mc}\Bigg/\sqrt{1 - \left(\frac{p}{p + mc}\right)^2} = -\frac{mcp}{\sqrt{2mcp + m^2c^2}}$$

方法二:在 S、S' 系间对光子粒子系统用四维动量的洛伦兹变换关系,

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ \dfrac{E'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix}$$

已知，$p'_x = p'_y = p'_z = 0, p_x = p, p_y = p_z = 0$

由
$$p'_x = \gamma(p_x - \frac{\beta E}{c})$$

可得
$$\beta = \frac{cp}{E}$$

在 S 系中，系统的能量

$$E = cp + mc^2$$

$$\beta = \frac{p}{p + mc}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{p + mc}{\sqrt{mc(2p + mc)}}$$

$$p'_m = -\gamma mc\beta = -\frac{mcp}{\sqrt{mc(2p + mc)}}$$

粒子动量的量值为$\dfrac{mcp}{\sqrt{mc(2p+mc)}}$.

(3) 如光子向后弹性散射，光子和粒子散射后的动量分别为$-p_1$和p_2，由散射过程能量和动量守恒，

$$p_1c + \sqrt{p_2^2c^2 + m^2c^4} = pc + mc^2$$

$$-p_1 + p_2 = p$$

消去p_2，可得

$$(p - p_1)^2 + 2(p - p_1)mc = (p + p_1)^2$$

$$p_1 = \frac{mcp}{2p + mc}$$

这是在实验室参考系中光子向后散射的动量的量值.

12.4.6　一光子与静止的靶质子发生碰撞产生如下的反应.

$$\gamma + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \psi'$$

近似用ψ'粒子的静止质量为$4M_{\mathrm{p}}$，M_{p}是质子的静止质量，求在实验室参考系中：

(1) 产生上述反应的光子所必须具有的最小能量E_0(可以$M_{\mathrm{p}}c^2$为单位)；

(2) 当光子能量E恰是上述阈能E_0时产生的ψ'粒子的速度.

解　(1) 在光子能量恰为阈能E_0时，其动量$p=\dfrac{E_0}{c}$，与静止质子发生碰撞产生ψ'粒子的反应时，在动量中心参考系中，质子和ψ'粒子都是静止的(在实验室参考系中，由于要遵从动量守恒定律不可能都静止).

由$E^2-c^2p^2$是洛伦兹变换下的不变量以及孤立系统的守恒量，反应前考虑实验室参

考系,这个守恒量为$(E_0+M_pc^2)^2-c^2p^2=(E_0+M_pc^2)^2-E_0^2$(用了系统的动量 p 等于光子的动量$\frac{E_0}{c}$).

反应后考虑动量中心系,这个守恒量为$(4M_pc^2+M_pc^2)^2=25(M_pc^2)^2$

$$(E_0+M_pc^2)^2-E_0^2=25(M_pc^2)^2$$

解出

$$E_0=12M_pc^2$$

说明:在动量中心系中,系统的动量为零,如果两粒子不是静止的,显然在质心系中,上述守恒量将大于 $25(M_pc^2)^2$,入射光子的能量 E 将大于 E_0,故 E_0 确是阈能.

(2) 入射光子具有阈能 E_0 时,产生的 ψ' 粒子在动量中心系中速度为零,用速度变换公式可知,在实验室参考系中,它的速度就是动量中心参考系的速度.

在动量中心系中,系统的动量 $p'=0$,在实验室参考系中,系统的动量为碰撞前光子的动量 $p=\frac{E_0}{c}$,由四维动量的洛伦兹变换

$$0=p'=\gamma\left(p-\frac{\beta E}{c}\right)$$

$$\beta=\frac{pc}{E}=\frac{E_0}{E_0+M_pc^2}=\frac{12M_pc^2}{13M_pc^2}=\frac{12}{13}$$

$$v=\beta c=\frac{12}{13}c$$

12.4.7 一个静止质量为 m 的粒子与一个静止质量为 m_1 的静止粒子碰撞,发生有很多粒子产生的反应,这些粒子的总静止质量为 M. 如果 $m+m_1<M$,那么,当入射粒子的动能不够大时,反应便不能进行. 试求出反应的阈动能 T_0,即反应刚能发生入射粒子应具有的动能.

解 设反应前入射粒子具有阈能 E_0,则反应后产生的粒子在动量中心参考系中是静止的.

由反应前后 $E^2-c^2p^2$ 对任何参考系是不变量,有

$$(E_0+m_1c^2)^2-c^2p_0^2=(Mc^2)^2$$

其中 p_0 是入射粒子具有阈能时具有的阈动量,

$$E_0^2=c^2p_0^2+m^2c^4,\quad c^2p_0^2=E_0^2-m^2c^4$$

代入上式,可得

$$2E_0m_1c^2+m_1^2c^4+m^2c^4=M^2c^4$$

将 $E_0=T_0+mc^2$ 代入上式,解出 T_0 得

$$T_0=\frac{1}{2m_1}(M+m_1+m)(M-m_1-m)c^2$$

12.4.8 一个入射核子与另一个静止的核子碰撞产生 π 介子,反应为

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}+\mathrm{N}+\pi$$

求此反应的阈动能 T_0.

解 反应前入射粒子的阈动能为 T_0,相应的阈动量为 p_0,反应后在质心参考系中是静止的,由 $E^2-c^2p^2$ 这个不变量用于反应前的实验室参考系和反应后的动量中心参考系,

$$(T_0 + 2m_{\mathrm{N}}c^2)^2 - c^2p_0^2 = (2m_{\mathrm{N}}c^2 + m_\pi c^2)^2$$

对入射粒子写能量动量关系，

$$(T_0 + m_{\mathrm{N}}c^2)^2 = c^2p_0^2 + m_{\mathrm{N}}^2c^4$$

用后式消去前式中的 p_0，解出 T_0，得

$$T_0 = \frac{1}{2m_{\mathrm{N}}}(4m_{\mathrm{N}} + m_\pi)m_\pi$$

12.4.9　试证明：只有当静止质量 $m_1 \neq 0$ 的粒子参加反应（尽管粒子在反应后仍然存在）时，一个 γ 量子才有可能转化为一个电子和正电子偶，试求这反应能发生的阈能 E_0，这个粒子在反应前后没发生任何变化吗？

解　反应方程为

$$\gamma + \text{粒子} \rightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ + \text{粒子}$$

阈能 E_0 显然与参加反应的那个粒子具有多大动能有关，现求反应前那个粒子是静止的，即动能为零时的阈能 E_0.

设电子和正电子的静止质量为 m，光子具有阈能 E_0 时，反应后在动量中心参考系中粒子、电子和正电子都是静止的，用 $E^2 - c^2p^2$ 这个洛伦兹变换下的不变量，

$$(E_0 + m_1c^2)^2 - c^2p_0^2 = (2mc^2 + m_1c^2)^2$$

其中 p_0 是光子的阈动量，

$$p_0 = \frac{E_0}{c}$$

可得

$$E_0 = \frac{2m(m + m_1)}{m_1}c^2$$

如果没有静止质量为 m_1 的粒子参加反应，上述洛伦兹变换不变量变成 $0 = 4m^2c^4$，这是不可能的，说明能量守恒和动量守恒不能同时满足，从 12.3.41 题的回答看，是动量守恒一定不能满足.

在 12.3.41 题计算的光子所需能量不是粒子在反应前处于静止时的阈能. 计算阈能必须考虑反应后的所有粒子在动量中心系中均为静止的情况.

静止质量为 m_1 的粒子反应前在实验室参考系中是静止的，反应后在 γ 量子具有阈能 E_0 时，它在动量中心系中是静止的，在实验室参考系中具有动量中心参考系的速度，因此不能说没发生任何变化.

如果反应前参加反应的那个粒子不是静止的，无论从数学上计算还是物理上考虑，阈能 E_0 将随着它的动能的增大而减小.

12.4.10　在高能质子-质子碰撞中，一个或两个质子可以分解成一个质子和几个带电 π 介子，其反应为：

(a) $\mathrm{p}+\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + (\mathrm{p} + n\pi)$；

(b) $\mathrm{p}+\mathrm{p} \rightarrow (\mathrm{p} + n\pi) + (\mathrm{p} + m\pi)$.

这里 n 和 m 是产生 π 介子的数目.

在实验室参考系中，一个总能量为 E 的入射质子（下文称“入射粒子”）打击一个静止的质子（下文称“靶”），求下列各情形入射粒子所需的最小能量.

(1) 发生反应(a),靶分解为一个质子和 4 个 π 介子;

(2) 发生反应(a),入射粒子分解为一个质子和 4 个 π 介子;

(3) 发生反应(b),两个质子都分解成一个质子和 4 个 π 介子.

$$m_\pi c^2 = 0.140\text{GeV}, \quad m_\text{p}c^2 = 0.938\text{GeV}$$

解　对于孤立系统,反应前后,对于不同的参考系,$E^2-c^2p^2$ 是不变量. 等号左边写反应前的,用实验室参考系,等号右边都写反应后的,用动量中心参考系,所有末态粒子均处于静止.

(1) 反应:

$$\text{p}+\text{p}\rightarrow\text{p}+(\text{p}+4\pi)$$

$$(E_0+m_\text{p}c^2)^2-c^2p_0^2=(2m_\text{p}c^2+4m_\pi c^2)^2$$

其中 p_0 是阈动量.

$$E_0^2=c^2p_0^2+m_\text{p}^2c^4$$

所以

$$E_0=\frac{(m_\text{p}^2+8m_\text{p}m_\pi+8m_\pi^2)c^2}{m_\text{p}}=2.225\text{GeV}$$

(2) 因初态和终态均与(1)的情况相同,故入射粒子所需最小能量也相同,

$$E_0=2.225\text{GeV}$$

(3) 反应:

$$\text{p}+\text{p}\rightarrow(\text{p}+4\pi)+(\text{p}+4\pi)$$

$$(E_0+m_\text{p}c^2)^2-c^2p_0^2=(2m_\text{p}c^2+8m_\pi c^2)^2$$

$$E_0^2=c^2p_0^2+m_\text{p}^2c^4$$

可得

$$E_0=\frac{1}{m_\text{p}}(m_\text{p}^2+16m_\text{p}m_\pi+32m_\pi^2)c^2=3.847\text{GeV}$$

12.4.11　考虑 π 介子的光致反应

$$\gamma+\text{p}\rightarrow\text{p}+\pi^0$$

质子的静能为 938MeV,π^0 介子的静能为 135MeV.

(1) 如果初始质子相对实验室静止,求出此反应要能进行 γ 射线在实验室参考系中的阈能;

(2) 各向同性的 3K 宇宙黑体辐射的平均光子能量约为 10^{-3}eV. 考虑一个质子和一个能量为 10^{-3}eV 的光子间的正碰,求出此 π 介子光致反应能进行的最小质子能量.

解　(1) 对于孤立系统,在反应前后,对于不同的惯性参考系,$E^2-c^2p^2$ 是不变量,γ 射线具有阈能时,反应后的质子和 π^0 介子在动量中心参考系中处于静止状态,

$$(E_\gamma+m_\text{p}c^2)^2-c^2\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2=(m_\text{p}c^2+m_\pi c^2)^2$$

其中 E_γ 是 γ 射线的阈能,$\frac{E_\gamma}{c}$是光子也是系统的动量(用实验室参考系).

$$E_\gamma=\frac{(m_\pi^2+2m_\text{p}m_\pi)c^4}{2m_\text{p}c^2}=144.7\text{MeV}$$

(2) 方法一:当两个粒子(光子与质子)动量方向相反时,所需的质子能量可以小些,

$$(E_\gamma+m_\text{p}\gamma c^2)^2-c^2\left(\frac{E_\gamma}{c}-m_\text{p}\gamma\beta c\right)^2=(m_\text{p}c^2+m_\pi c^2)^2$$

其中 βc 是能发生所述反应质子具有最小能量时的速度，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，从上式可解出

$$\gamma(1+\beta)=\frac{(m_\pi^2+2m_\pi m_p)c^4}{2\cdot E_\gamma\cdot m_pc^2}$$

$$=\frac{(135)^2+2\times 938\times 135}{2\times 10^{-3}\times 10^{-6}\times 938}=1.447\times 10^{11}$$

即
$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}=1.447\times 10^{11},\beta\approx 1$$

$$\gamma=\frac{1.447\times 10^{11}}{1+\beta}\approx\frac{1}{2}\times 1.447\times 10^{11}=7.235\times 10^{10}$$

所需质子最小能量为

$$E_p=\gamma m_pc^2=7.235\times 10^{10}\times 938=6.79\times 10^{13}\text{MeV}$$

方法二：为了利用(1)的结果，找出 S' 系，使在实验室参考系(S 系)中具有 10^{-3}eV 的光子在 S' 系中具有(1)中的阈能 144.7MeV，则在 S' 系中质子可处于静止状态. 由洛伦兹变换，算出此质子在 S 系中的能量就是我们要求的它的最小能量.

对于光子的能量在 S、S' 系间写洛伦兹变换关系. 设 S' 系对 S 系的速度为 βc，沿光子在 S 系中的运动方向，

$$\frac{E'_\gamma}{c}=\gamma\left(\frac{E_\gamma}{c}-\beta p_x\right)=\gamma\left(\frac{E_\gamma}{c}-\beta\frac{E_\gamma}{c}\right)$$

$$E'_\gamma=E_\gamma\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=E_\gamma\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

可得
$$\beta=\left[\left(\frac{E_\gamma}{E'_\gamma}\right)^2-1\right]\Big/\left[\left(\frac{E_\gamma}{E'_\gamma}\right)^2+1\right]$$

$$1-\beta^2\approx 4\left(\frac{E_\gamma}{E'_\gamma}\right)^2,\quad \gamma\approx\frac{1}{2}\left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma}\right)$$

代入 $E_\gamma=10^{-3}$eV，　$E'_\gamma=144.7$MeV，　可得

$$\beta\approx -1,\quad \gamma=7.235\times 10^{10}$$

再对质子的能量写 S 和 S' 系间的洛伦兹变换关系. 在 S' 系中 $E'_p=m_pc^2$，　$p'=0$，

$$\frac{E_p}{c}=\beta\gamma p'+\gamma\frac{E'_p}{c}$$

$$E_p=\gamma m_pc^2=7.235\times 10^{10}\times 938=6.79\times 10^{13}\text{MeV}$$

12.4.12　一动量为 $5m_\pi c$ 的 π 介子与开始处于静止的质子($m_p=7m_\pi$)发生弹性碰撞，求：

(1) 动量中心参考系的速度；

(2) 在动量中心系中 π 介子和质子的总能量；

(3) 在动量中心系中入射 π 介子的动量.

解　(1) 设 S、S' 系分别为实验室参考系和动量中心参考系，x、x' 轴均沿 π 介子在 S 系中的运动方向，S' 系对 S 系沿 x 轴正向运动，速度为 βc.

在 S 系中，系统的总动量和总能量分别为

$$p_x = p_\pi = 5m_\pi c,\quad p_y = p_z = 0$$

$$E = \sqrt{c^2p_\pi^2 + m_\pi^2c^4} + m_p c^2 = (\sqrt{26} + 7)m_\pi c^2$$

在 S' 系中，系统的动量 $\boldsymbol{p}' = 0$.

用四维动量的洛伦兹变换关系的第一个分量式，

$$0 = p'_x = \gamma\left(p_x - \beta\frac{E}{c}\right) = \gamma\left(p_x - \frac{VE}{c^2}\right)$$

动量中心系相对于实验室参考系的速度

$$V = \frac{p_x c^2}{E} = \frac{5m_\pi c\cdot c^2}{(\sqrt{26}+7)m_\pi c^2} = \frac{5c}{\sqrt{26}+7} = 0.41c$$

沿 π 介子的运动方向.

(2) 考虑 $E^2 - c^2p^2$ 为洛伦兹变换不变量，在 S' 系中 $p' = 0$，

$$E'^2 = E^2 - c^2p^2 = [(\sqrt{26}+7)m_\pi c^2]^2 - c^2(5m_\pi c)^2$$
$$= (50 + 14\sqrt{26})m_\pi^2c^4$$

$$E' = \sqrt{50 + 14\sqrt{26}}\,m_\pi c^2 = 11.02m_\pi c^2$$

(3)对入射的 π 介子用动量的洛伦兹变换关系，

$$p'_\pi = \gamma\left(p_\pi - \beta\frac{E_\pi}{c}\right)$$

前已算出
$$\beta = \frac{5}{\sqrt{26}+7}$$

可得
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\sqrt{26}+7}{\sqrt{50+14\sqrt{26}}}$$

今
$$p_\pi = 5m_\pi c,\qquad E_\pi = \sqrt{26}m_\pi c^2$$

所以
$$p'_\pi = \frac{35m_\pi c}{\sqrt{50+14\sqrt{26}}} = 3.176m_\pi c$$

12.4.13　粒子物理中特别令人感兴趣的是高能情况下的弱相互作用，让 π 介子和 K 介子在飞行中衰变产生中微子束. 假定一个动量为 200GeV/c 的 π 介子通过衰变 $\pi\to\mu+\nu$ 产生中微子，π 介子在 π 介子静止参考系中的寿命为 $\tau_{\pi\pm} = 2.60\times10^{-8}$s，其静能为 139.6MeV，$\mu$ 子的静能为 105.7MeV，中微子是无静止质量的.

(1) 计算 π 介子衰变前在实验室中行走的平均距离；

(2) 计算 μ 子在实验室中的最大角度(相对于 π 介子的运动方向)；

(3) 计算中微子在实验室参考系中能够具有的最小和最大动量.

解　(1) 设 m_π 是 π 介子的静止质量，

$$m_\pi\gamma\beta c = 200\text{GeV}/c$$

其中
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma\beta = \gamma\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\gamma^2-1} = \frac{200\times10^3}{m_\pi c^2} = \frac{200\times10^3}{139.6} = 1433$$

$$\gamma=\sqrt{(1433)^2+1}=1433,\quad \beta\approx 1$$

在实验室参考系中，π 介子的寿命为

$$\tau=\gamma\tau_\pi=1433\times 2.60\times 10^{-8}=3.73\times 10^{-5}\mathrm{s}$$

在实验室参考系中，π 介子衰变前行走的平均距离为

$$\tau c\beta=3.73\times 10^{-5}\times 3\times 10^{8}\times 1=1.12\times 10^{4}\mathrm{m}$$

(2) 设 S' 系为 π 介子静止参考系，也是 μ 子和中微子系统的动量中心平动参考系，在此参考系中，系统的总能量为 π 介子的静能 139.6MeV，μ 子和中微子的动量设为 $\boldsymbol{p}'_\mu$ 和 $\boldsymbol{p}'_\nu$，总动量为零，

$$\boldsymbol{p}'_\mu+\boldsymbol{p}'_\nu=0,\qquad \boldsymbol{p}'_\nu=-\boldsymbol{p}'_\mu,\qquad p'_\nu=p'_\mu$$

$$E'_\mu=\sqrt{c^2p'^2_\mu+m_\mu^2c^4},E'_\nu=cp'_\nu=cp'_\mu$$

$$E'_\mu+E'_\nu=m_\pi c^2=\sqrt{c^2p'^2_\mu+(105.7)^2}+c^2p'^2_\mu=139.6$$

解得

$$p'_\mu=29.78\mathrm{MeV}/c$$

$$E'_\mu=\sqrt{(29.78)^2+(105.7)^2}=109.8\mathrm{MeV}$$

取 π 介子在实验室参考系(S 系)中的运动方向为 x、x' 轴正向.

设 θ、θ' 分别是 μ 子在 S、S' 系中的运动方向与 x、x' 轴的夹角.

在 S、S' 系间写 μ 子的四维动量矢量的变换关系的第一、第二两个分量式，

$$p_\mu\cos\theta=\gamma\left(p'_\mu\cos\theta'+\beta\frac{E'_\mu}{c}\right)$$

$$p_\mu\sin\theta=p'_\mu\sin\theta'$$

两式相除得

$$\tan\theta=\frac{p'_\mu\sin\theta'}{\gamma(p'_\mu\cos\theta'+\beta E'_\mu/c)}$$

由极值条件 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta'}=0$　或　$\dfrac{\mathrm{d}\tan\theta}{\mathrm{d}\theta'}=0$，得

$$\cos\theta'=-\frac{p'_\mu c}{\beta E'_\mu}=-\frac{29.78}{109.8}=-0.2712$$

$$\theta'=105.7^\circ$$

再由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\tan\theta}{\mathrm{d}\theta'^2}\right|_{\theta'=105.7^\circ}<0$，可见 $\theta'=105.7^\circ$ 对应于 $\theta_{\max}$，所以

$$\tan\theta_{\max}=\frac{29.78/c\cdot\sin 105.7^\circ}{1433[(29.78/c)\cos 105.7^\circ+1\times 109.8/c]}=1.97\times 10^{-4}$$

$$\theta_{\max}=0.0113^\circ$$

(3) 在 S、S' 系中写中微子的四维动量矢量的变换关系的第一、第二两个分量式

$$p_\nu\cos\theta=\gamma\left(p'_\nu\cos\theta'+\frac{\beta E'_\nu}{c}\right)=\gamma p'_\nu(\cos\theta'+\beta)$$

$$p_\nu\sin\theta=p'_\nu\sin\theta'$$

$$p_\nu^2=\gamma^2p'^2_\nu(\cos\theta'+\beta)^2+p'^2_\nu\sin^2\theta'$$

由 $$\frac{\mathrm{d}p_\mu^2}{\mathrm{d}\theta'}=0$$

得 $$\sin\theta'[\cos\theta'-\gamma^2(\beta+\cos\theta')]=0$$

由 $$\sin\theta'=0$$

得 $$\theta'=0,\pi$$

由 $$\cos\theta'-\gamma^2(\beta+\cos\theta')=0$$

得 $$\cos\theta'=-\frac{\gamma^2\beta}{\gamma^2-1}\approx-\beta\approx-1,\quad \theta'=\pi$$

由 $$\tan\theta=\frac{p'_\nu\sin\theta'}{\gamma(p'_\nu\cos\theta'+\beta p'_\nu)}$$

可知: $\theta'=0$ 时, $\theta=0$; $\theta'=\pi$ 时, $\theta=\pi$.

所以
$$\begin{aligned}p_{\nu\max}&=\gamma p'_\nu(\cos 0+\beta)=2\gamma p'_\nu=2\gamma p'_\mu\\&=2\times1433\times29.78=8.53\times10^4\mathrm{MeV}/c\\-p_{\nu\min}&=\gamma(\cos\pi+\beta)p'_\nu=\gamma(\beta-1)p'_\mu\end{aligned}$$

因
$$\begin{aligned}\gamma(\beta-1)&=\gamma\beta-\gamma=\sqrt{\gamma^2-1}-\gamma\\&=\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\gamma\approx\gamma\left(1-\frac{1}{2\gamma^2}\right)-\gamma=-\frac{1}{2\gamma}\end{aligned}$$

$$p_{\nu\min}=-\frac{1}{2\gamma}(-p'_\mu)=\frac{1}{2\gamma}p'_\mu=\frac{1}{2\times1433}\times29.78=0.0104\mathrm{MeV}/c$$

注意:这里写的 $p_{\nu\min}$是它的量值,它的方向沿 x 轴负向($\theta=\pi$).

12.4.14 粒子物理中,粒子间的相互作用被设想为如图 12.27 所示,经一个粒子的交换而引起的,证明这样交换粒子不是真实的,而是虚构的.

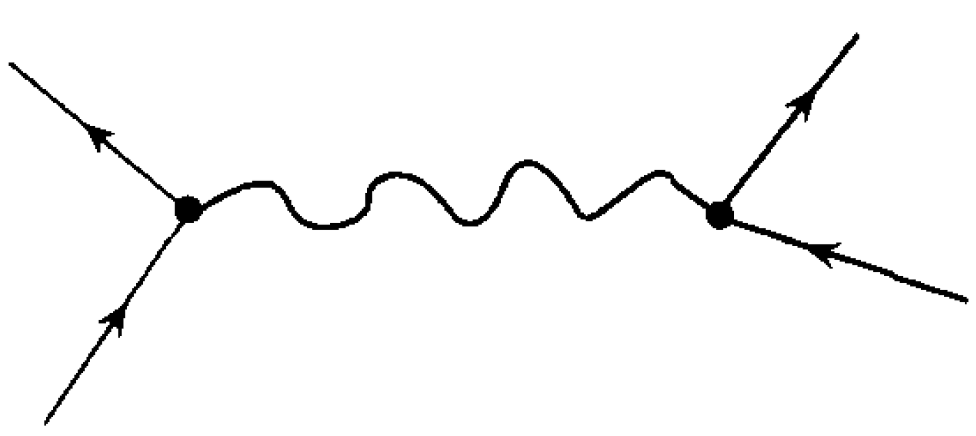


图 12.27

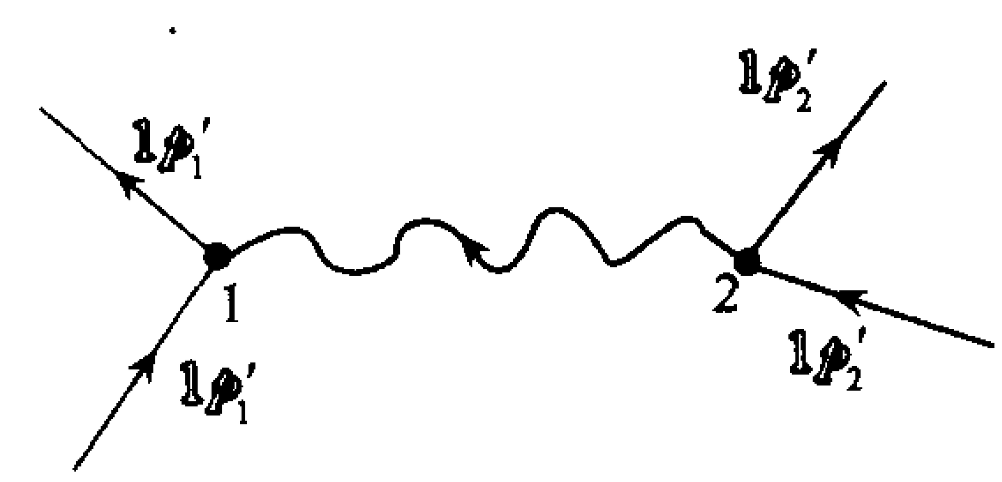


图 12.28

证明 设粒子 1、2 在相互作用前的四维动量分别为$\mathbb{p}_1$ 和$\mathbb{p}_2$,相互作用后分别变为$\mathbb{p}'_1$ 和$\mathbb{p}'_2$,相互作用是通过交换一个四维动量为$\mathbb{q}$ 的粒子而发生的,即粒子 2 从初态变为终态时放出一个粒子,粒子 1 从初态吸收了一个粒子后变为终态,如图 12.28 所示.

由四维动量矢量守恒,

$$\mathbb{p}'_1=\mathbb{p}_1+\mathbb{q},\qquad \mathbb{p}'_2=\mathbb{p}_2-\mathbb{q}$$

四维动量守恒给出三维动量守恒和能量守恒分别为

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'_1-\boldsymbol{p}_1 \tag{1}$$

$$m\gamma c^2=m_1\gamma'_1c^2-m_1\gamma_1c^2 \tag{2}$$

其中 m 和 m_1 分别为四维动量为$\mathbb{q}$ 和$\mathbb{p}_1$ 的粒子的静止质量.

由式(1),可得

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{p}'_1-\boldsymbol{p}_1)\cdot(\boldsymbol{p}'_1-\boldsymbol{p}_1)$$

$$q^2 = p_1'^2 + p_1^2 - 2\boldsymbol{p}_1' \cdot \boldsymbol{p}_1$$

$$m\gamma^2\beta^2 = m_1^2\gamma_1'^2\beta_1'^2 + m_1^2\gamma_1^2\beta_1^2 - 2m_1\gamma_1\gamma_1'\beta_1\beta_1'\cos\theta \tag{3}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_1'$ 间的夹角.

由式(2),可得

$$m^2\gamma^2 = m_1^2\gamma_1'^2 + m_1^2\gamma_1^2 - 2m_1^2\gamma_1\gamma_1' \tag{4}$$

式(4)减式(3),并用 $\gamma^2\beta^2=\gamma^2-1$,得

$$m^2 = 2m_1^2(1 - \gamma_1\gamma_1' + \gamma_1\gamma_1'\beta_1\beta_1'\cos\theta)$$

如能证明 $m^2<0$,就证明了两个粒子通过放出和吸收一个粒子而发生相互作用不是真实的,要证明 $m^2<0$,只要证明

$$\gamma_1\beta_1\gamma_1'\beta_1'\cos\theta < \gamma_1\gamma_1' - 1$$

$$\gamma_1\beta_1\gamma_1'\beta_1' < \gamma_1\gamma_1' - 1$$

再用 $\gamma^2\beta^2=\gamma^2-1$,要证

$$(\gamma_1^2 - 1)(\gamma_1'^2 - 1) < (\gamma_1\gamma_1' - 1)^2$$

即

$$-(\gamma_1^2 + \gamma_1'^2) < -2\gamma_1\gamma_1'$$

立即

$$-(\gamma_1 - \gamma_1')^2 < 0$$

上述不等式显然是成立的,可见 $m^2<0$,可见两粒子的相互作用不可能是交换一个粒子的那种机制.

12.4.15　在一个相对论性的核-核碰撞的简化模型中,一个静止质量为 m_1、速率为 $\beta_1 c$ 的核与一个静止质量为 m_2 的静止的靶核做正碰,这个系统的动量中心参考系的速度为 $\beta_0 c$,在此参考系中系统的能量为 E_0.

(1) 用相对论导出 β_0 和 E_0 的表达式;

(2) 就一个^{40}Ar 核以 $\beta_1=0.8$ 与一个静止的^{238}U 核碰撞,计算 β_0 和 E_0(以 MeV 为单位);

(3) 在 Ar+U 系统动量中心参考系中,一质子以 $\beta_c=0.2$,向与前进方向的夹角 $\theta_c=60°$的方向发射,求在实验室参考系中的速率 $\beta_l c$ 和方向 θ_l,不超过几个百分点,可作非相对论近似.

解　(1) 对此系统用 $E^2-c^2p^2$ 在洛伦兹变换下是不变量,考虑动量中心系和实验室参考系,

$$\begin{aligned} E_0^2 &= (m_1\gamma_1c^2 + m_2c^2)^2 - c^2(m_1\gamma_1\beta_1c)^2 \\ &= m_1^2\gamma_1^2(1 - \beta_1^2)c^4 + 2m_1m_2\gamma_1c^4 + m_2^2c^4 \\ &= (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1)c^4 \end{aligned}$$

$$E_0 = c^2\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}}$$

对系统在动量中心系和实验室参考系中写四维动量的第一个分量的变换关系式,m_1 运动方向为 x、x' 轴正向,

$$0 = \gamma_0\left(p - \frac{\beta_0 E}{c}\right)$$

其中 p 和 E 分别是系统在实验室参考系中的总动量的总能量，

$$\beta_0 = \frac{pc}{E} = \frac{m_1\gamma_1\beta_1 c^2}{m_1\gamma_1 c^2 + m_2 c^2} = \frac{m_1\beta_1}{m_1 + m_2\sqrt{1-\beta_1^2}}$$

(2) 一个原子质量单位质量的静能为

$$1.66\times10^{-27}\times(3.00\times10^8)^2 = 1.494\times10^{-10}\text{J}$$

$$= \frac{1.494\times10^{-10}}{1.60\times10^{-19}\times10^6} = 934(\text{MeV})$$

$$m_1c^2 = 40\times934 = 3.74\times10^4(\text{MeV})$$

$$m_2c^2 = 238\times934 = 2.22\times10^5(\text{MeV})$$

今 $\beta_1=0.8$，

$$E_0 = \sqrt{(3.74\times10^4)^2 + (2.22\times10^5)^2 + \frac{2\times3.74\times10^4\times2.22\times10^5}{\sqrt{1-(0.8)^2}}}$$

$$=2.80\times10^5(\text{MeV})$$

$$\beta_0 = \frac{3.74\times10^4\times0.8}{3.74\times10^4 + 2.22\times10^5\sqrt{1-(0.8)^2}} = 0.175$$

(3) 在系统的动量中心系和实验室参考系间用速度变换关系：

$$\beta_{lx} = \frac{\beta'_{cx}+\beta_0}{1+\beta'_{cx}\beta_0} = \frac{0.2\cos60^\circ + 0.175}{1+0.2\cos60^\circ\times0.175} = 0.27$$

$$\beta_{ly} = \frac{\beta'_{cy}\sqrt{1-\beta_0^2}}{1+\beta'_{cx}\beta_0} = \frac{0.2\sin60^\circ\sqrt{1-(0.175)^2}}{1+0.2\cos60^\circ\times0.175} = 0.168$$

$$\beta_l c = \sqrt{\beta_{lx}^2+\beta_{ly}^2}c = \sqrt{(0.27)^2+(0.168)^2}c = 0.318c$$

$$\theta_l = \arctan\left(\frac{\beta_{ly}}{\beta_{lx}}\right) = \arctan\left(\frac{0.168}{0.27}\right) = 31.9^\circ$$

因为

$$\frac{1}{1+\beta'_{cx}\beta_0} = \frac{1}{1+0.2\cos60^\circ\times0.175} = 0.983$$

$$\frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1+\beta'_{cx}\beta_0} = 0.983\times\sqrt{1-(0.175)^2} = 0.968$$

均与1相差不超过4%，可作非相对论近似，

$$\beta_{lx}\approx\beta'_{cx}+\beta_0 = 0.275$$

$$\beta_{ly}\approx\beta'_{cy} = 0.2\times\sin60^\circ = 0.173$$

$$\theta_l\approx\arctan\left(\frac{0.173}{0.275}\right) = 32.2^\circ$$

12.4.16 费米实验室中的高能中微子束，是由先形成一束单能的 π^+(或 K^+)介子束，而后让 π 介子衰变：$\pi^+\to\mu^++\nu$ 而产生的，已知 π 介子的静止质量为 $140\text{MeV}/c^2$，μ 子的静止质量为 $106\text{MeV}/c^2$，求：

(1) 在 π^+ 静止参考系中衰变得到的中微子的能量；

(2) 在实验室参考系中，中微子的能量与衰变角 θ(见图 12.29)有关，若每个 π^+ 介子

有 200GeV 能量，求产生在正前方($\theta=0$)的一个中微子的能量；

(3) 中微子能量降到最大值一半的衰变角 θ.

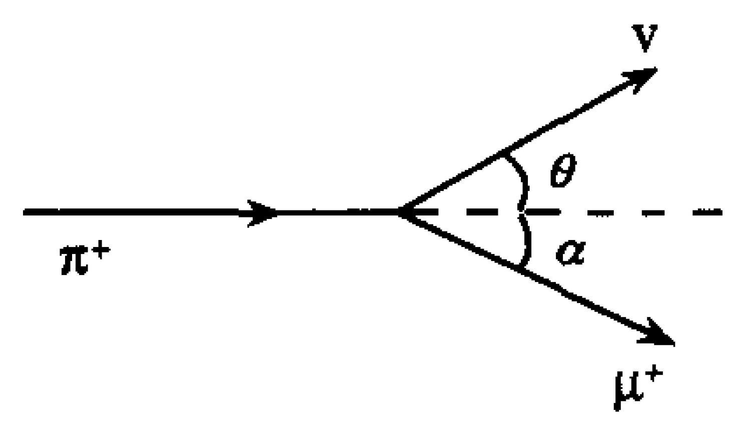


图 12.29

解 (1) 对于孤立系统，$E^2-c^2p^2$ 对于各惯性参考系，衰变前后均是不变量，今衰变前后均用 π^+ 静止参考系亦即质心参考系.

$$m_\pi^2c^4=(E'_\mu+E'_\nu)^2-c^2(\boldsymbol{p}'_\mu+\boldsymbol{p}'_\nu)^2$$
$$=\left(\sqrt{c^2p'^2_\mu+m_\mu^2c^4}+cp'_\nu\right)^2$$
$$=2c^2p'^2_\nu+m_\mu^2c^4+2cp'_\nu\sqrt{c^2p'^2_\nu+m_\mu^2c^4}$$

作上述计算时用了

$$\boldsymbol{p}'_\mu=-\boldsymbol{p}'_\nu,\quad p'_\mu=p'_\nu,\quad E'_\nu=cp'_\nu$$

由上式可解出

$$p'_\nu=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)c}{2m_\pi}$$

$$E'_\nu=cp'_\nu=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}=\frac{(m_\pi c^2)^2-(m_\mu c^2)^2}{2m_\pi c^2}=\frac{(140)^2-(106)^2}{2\times140}=29.9(\text{MeV})$$

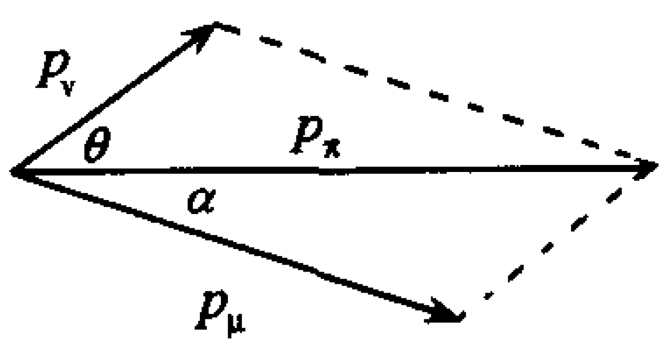


图 12.30

(2) 由图 12.30 所示的在实验室参考系中的动量守恒关系，可得

$$p_\mu^2=p_\pi^2+p_\nu^2-2p_\pi p_\nu\cos\theta$$

由能量守恒，

$$E_\pi=E_\nu+E_\mu$$

因为 $$E_\nu=cp_\nu,\quad E_\mu^2=c^2p_\mu^2+m_\mu^2c^4$$

所以 $$E_\pi=cp_\nu+\sqrt{c^2(p_\pi^2+p_\nu^2-2p_\pi p_\nu\cos\theta)+m_\mu^2c^4}$$

解出

$$p_\nu=\frac{E_\pi^2-c^2p_\pi^2-m_\mu^2c^4}{2(E_\pi-cp_\pi\cos\theta)c}$$

用 $E_\pi^2=c^2p_\pi^2+m_\pi^2c^4$，上式可改写为

$$p_\nu=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)c^3}{2(E_\pi-cp_\pi\cos\theta)}$$

因要产生高能中微子，π^+ 介子当然是高能的，所以 $E_\pi\gg m_\pi c^2$，

$$c^2p_\pi^2=E_\pi^2-m_\pi^2c^4=E_\pi^2\left(1-\frac{m_\pi^2c^4}{E_\pi^2}\right)$$

$$cp_\pi=E_\pi\left(1-\frac{m_\pi^2c^4}{E_\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx E_\pi\left(1-\frac{m_\pi^2c^4}{2E_\pi^2}\right)$$

$$p_\nu\approx\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)E_\pi c^3}{2E_\pi^2(1-\cos\theta)+m_\pi^2c^4\cos\theta}$$

$$E_\nu=cp_\nu=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)E_\pi c^4}{2E_\pi^2(1-\cos\theta)+m_\pi^2c^4\cos\theta}$$

产生在正前方($\theta=0$)的一个中微子的能量为

$$E_\nu(0)=\left[1-\left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\right]E_\pi=85.3\text{GeV}$$

(3) E_ν 的表达式可改写为

$$E_\nu=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)E_\pi c^4}{2E_\pi^2-(2E_\pi^2-m_\pi^2c^4)\cos\theta}$$

显然,$\theta=0$ 时的 E_ν 即 $E_\nu(0)$ 为 E_ν 的极大值,

$$E_\nu(\theta)=\frac{1}{2}E_\nu(0)$$

$$\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)E_\pi c^4}{2E_\pi^2-(2E_\pi^2-m_\pi^2c^4)\cos\theta}=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)E_\pi}{2m_\pi^2}$$

所以

$$\cos\theta=\frac{2(E_\pi^2-m_\pi^2c^4)}{2E_\pi^2-m_\pi^2c^4}\approx1-\frac{m_\pi^2c^4}{2E_\pi^2}$$

$$1-\frac{1}{2}\theta^2\approx1-\frac{m_\pi^2c^4}{2E_\pi^2}$$

$$\theta\approx\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}=7\times10^{-4}\text{rad}=2.4'$$

在衰变角 $\theta=2.4'$ 处射出的中微子的能量为能量最大值的一半.

12.4.17　如 12.4.15 题中的靶核是固定不动的,β_0c 是弹回后系统的动量中心系的速率. E_0 是弹回后系统在动量中心参考系中的能量(设没有新粒子产生),12.4.15 的结果还能用吗?

解　还能用. 因为 $E^2-c^2p^2$ 对正碰前后仍是不变量,虽然系统不是孤立系统,靶核固定,碰撞时有外力作用,但不做功,能量仍然是守恒的,外力作用影响系统的动量,但动量中心系的速度不改变大小只改变方向(反向). 因此,虽然动量不守恒,$E^2-c^2p^2$ 是不变量不受影响.

求 β_0 所用的四维动量的变换关系,当然不能用于碰撞前和碰撞后之间的变换,可用在碰撞前两参考系间,也可用在碰撞后两参考系间.

因此,(1)、(2)、(3)问的解所写的式子和计算都有效.

12.4.18　以速度 v 运动的 π^0 介子(静止质量为 m)裂变为两个相同的 γ 量子,试确定 γ 量子的飞散角.

解　方法一:设 $\boldsymbol{p}$ 为 π^0 介子的动量,$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 分别为两个 γ 量子的动量,裂变过程如图 12.31 所示. 用 $E^2-c^2p^2$ 在裂变前后对任何惯性参考系均为不变量.

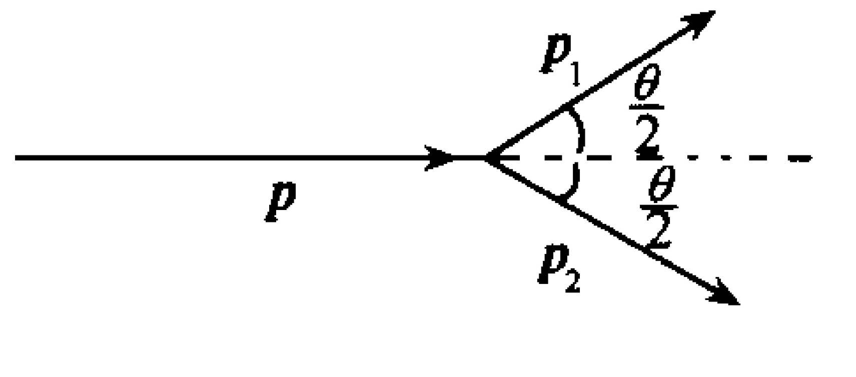


图 12.31

裂变前用 π^0 介子静止参考系,裂变后用实验室参考系.

设光子即 γ 量子的能量为 E,则 $p_1=p_2=\dfrac{E}{c}$,

$$\begin{aligned}(mc^2)^2&=(2E)^2-c^2(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\\&=4E^2-c^2(p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\theta)\\&=2E^2(1-\cos\theta)=4E^2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}\tag{1}$$

由能量守恒，每个光子的能量等于 π^0 介子的能量的一半，

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，即得

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\theta=2\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

方法二：由能量和动量守恒，

$$E=\frac{1}{2}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{3}$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=(p_1+p_2)\cos\frac{\theta}{2} \tag{4}$$

$$p_1\sin\frac{\theta}{2}=p_2\sin\frac{\theta}{2}$$

写上述关系时，已考虑产生的两个 γ 量子是相同的，能量均为 E，动量大小相同.

将 $p_1=p_2=\frac{E}{c}$ 代入式(4). 并用式(1)消去 E，得

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{mc}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

所以

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{v}{c},\qquad \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\theta=2\arccos\left(\frac{v}{c}\right)\quad 或\quad 2\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

12.4.19　用真空中电磁波的相位是洛伦兹变换下的不变量，导出多普勒效应的下列两个式子：

$$\nu=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\frac{c}{c-v\cos\theta}\nu'$$

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{c+v\cos\theta'}{c}\nu'$$

解　本题写的四维矢量与以前各题的写法有所不同：

四维位置矢量写为 $(x,y,z,\mathrm{i}ct)$；

四维动量矢量写为 $\left(p_x,p_y,p_z,\mathrm{i}\frac{E}{c}\right)$；

四维波矢量写为$(k_x,k_y,k_z,\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c})$.

这样写的好处是四维矢量的长度是不变量,例如$x^2+y^2+z^2+(\mathrm{i}ct)^2=x^2+y^2+z^2-(ct)^2$,$p_x^2+p_y^2+p_z^2-\left(\frac{E}{c}\right)^2$即$c^2p^2-E^2$或$E^2-c^2p^2$为不变量,$k_x^2+k_y^2+k_z^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2=k^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2=0$为不变量,而且两个四维矢量的标积也是不变量,例如

$$k_xx+k_yy+k_zz+(\mathrm{i}ct)(\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c})$$

$$=k_xx+k_yy+k_zz-\omega t=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$$

为不变量,因此真空中电磁波的相位是洛伦兹变换下的不变量.

现考虑在S系中有一电磁波在xy平面内从原点沿与x轴夹角为θ的方向传播,设在O点时,电磁波的初相位为零.则在t时刻位于P点,相位为$\omega t-kr$,其中r是P点离原点的距离.P点的坐标x、y为

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

$$r=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=x\cos\theta+y\sin\theta$$

由相位是洛伦兹变换下的不变量,

$$\omega t-kr=\omega't'-k'r'$$

因

$$\omega=2\pi\nu,k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi\nu}{c}$$

$$2\pi\nu(t-\frac{1}{c}x\cos\theta-\frac{1}{c}y\sin\theta)$$

$$=2\pi\nu'(t'-\frac{1}{c}x'\cos\theta'-\frac{1}{c}y'\sin\theta')$$

将洛伦兹变换

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad y'=y,\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

代入上式等号右边,得

$$2\pi\nu'\left[\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-\frac{1}{c}\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\cos\theta'-\frac{1}{c}y\sin\theta'\right]$$

与等号左边比较,两边t、x、y的系数应分别相等,得

$$\nu=\nu'\frac{1+\frac{v}{c}\cos\theta'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\tag{1}$$

$$\nu\cos\theta=\nu'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(\frac{v}{c}+\cos\theta')\tag{2}$$

$$\nu\sin\theta = \nu'\sin\theta' \tag{3}$$

式(1)就是要证明的第二个式子.

将式(1)代入式(2)、(3),可得 12.2.13 题要证明的两个式子.

将洛伦兹变换

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad y = y', \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

代入相位是不变量式子的左边,再与右边比较 t' 的系数,可得要证明的第一个式子.

12.4.20 以 $\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 运动的、每秒钟流量 10^6 的 K_l^0 介子束与铅块相互作用,反应为

$$K_l^0 + \text{铅块} \rightarrow K_s^0 + \text{铅块}$$

反应前后铅块的内部状态是相同的,入射的 K_l^0 与出射的 K_s^0 的运动方向也是一样的.用

$$m(K_l) = 5 \times 10^8 \text{eV}/c^2$$

$$m(K_l) - m(K_s) = 3.5 \times 10^{-6} \text{eV}/c^2$$

求出因为这一过程作用在铅块上的平均力的大小和方向(以达因或牛顿为单位).

解　分别用 m_l、m_s 表示 $m(K_l)$、$m(K_s)$,一个入射的 K_l 介子的能量和动量分别为

$$E_l = m_l\gamma c^2 = \frac{m_l c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\, m_l c^2$$

$$p_l = m_l\gamma\beta c = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} m_l c = m_l c$$

因反应前后铅块的内部状态相同,铅块的质量比介子束大得多,可以认为铅块不动,介子在反应前后能量应是相同的,

$$E_s = E_l$$

$$\begin{aligned} p_s^2 c^2 &= E_s^2 - m_s^2 c^4 = E_l^2 - m_s^2 c^4 \\ &= c^2 p_l^2 + m_l^2 c^4 - m_s^2 c^4 = 2m_l^2 c^4 - m_s^2 c^4 \\ &\approx m_l^2 c^4 + 2m_l(m_l - m_s)c^4 \end{aligned}$$

$$p_s c = m_l c^2\left[1 + \frac{2(m_l - m_s)}{m_l}\right]^{\frac{1}{2}} \approx m_l c^2 + (m_l - m_s)c^2$$

$$p_s - p_l = (m_l - m_s)c$$

由于相互作用,介子束每秒钟动量的增量为

$$\begin{aligned} (p_s - p_l) \times 10^6 &= (m_l - m_s)c \times 10^6 \\ &= \frac{3.5 \times 10^{-6} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8 \times 10^6}{(3 \times 10^8)^2} = 1.87 \times 10^{-27}(\text{N}) \end{aligned}$$

这是铅块作用于介子束上的平均力,沿介子运动方向,可见介子作用于铅块的力,大小为 1.87×10^{-27}N,方向与介子束运动方向相反.

12.4.21 一个静止质量为 m、荷电 q 的粒子,在一均匀磁场 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$ 中以半径 R 在 xy 平面中做圆周运动.

(1) 求 B 与 q、R、m 及角频率 ω 的关系;

(2) 因为磁场 $\boldsymbol{B}$ 对粒子不做功,粒子的速率为常数,但另一以匀速 $V\boldsymbol{i}$ 运动的观察者却看到粒子的速率不是常数,这个观察者测得的 u_4'[粒子四维速度的第四分量(粒子的四维速度矢量定义为 $\gamma_u\boldsymbol{u},\gamma_u c$)]是什么样的?

(3) 计算 $\dfrac{\mathrm{d}u_4'}{\mathrm{d}\tau}$、$\dfrac{\mathrm{d}p_4'}{\mathrm{d}\tau}$,在观察者看来,粒子的能量怎样改变?

解 (1) 在实验室参考系(S 系)中,动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$$

因 $\boldsymbol{p}/\!/\dot{\boldsymbol{u}}$,

$$\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}t}=(q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{p}=0$$

p 的大小不变,因而 u 的大小不变,

$$\gamma_u=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}$$

为常量.因 $\boldsymbol{p}=m\gamma_u\boldsymbol{u}$,动力学方程可改写为

$$\gamma_u m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$$

代入 $\boldsymbol{u}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$,

$$\gamma_u m\ddot{x}=qB\dot{y}\tag{1}$$

$$\gamma_u m\ddot{y}=-qB\dot{x}\tag{2}$$

式(1)加式(2)乘 i,并令 $\xi=\dot{x}+\mathrm{i}\dot{y}$,得

$$\dot{\xi}=-\mathrm{i}\frac{qB}{m\gamma_u}\xi$$

$$\xi=\xi_0\exp\left(-\mathrm{i}\frac{qB}{m\gamma_u}t\right)$$

ξ 和 ξ_0 均为复数,设 $\xi_0=|\xi_0|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$,则

$$\dot{x}=\mathrm{Re}\xi=|\xi_0|\cos\left(\frac{qB}{m\gamma_u}t+\alpha\right)$$

$$\dot{y}=\mathrm{Im}\xi=-|\xi_0|\sin\left(\frac{qB}{m\gamma_u}t+\alpha\right)$$

$$x=x_0+|\xi_0|\frac{m\gamma_u}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m\gamma_u}t+\alpha\right)=x_0+R\sin(\omega t+\alpha)$$

$$y=y_0+|\xi_0|\frac{m\gamma_u}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m\gamma_u}t+\alpha\right)=y_0+R\cos(\omega t+\alpha)$$

其中

$$\omega=\frac{qB}{m\gamma_u},\quad R=|\xi_0|\frac{m\gamma_u}{qB},\quad |\xi_0|=R\omega$$

$$B=\frac{1}{q}m\gamma_u\omega=\frac{1}{q}m\omega\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

因为
$$u=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=|\xi_0|=R\omega$$

所以
$$B=\frac{m\omega}{q\sqrt{1-\left(\frac{R\omega}{c}\right)^2}}$$

(2) 四维速度矢量定义为

$$u_\mu=(\gamma_u u_x,\gamma_u u_y,\gamma_u u_z,\gamma_u c)$$

设 S、S' 系分别为实验室参考系和随观察者运动的参考系，由洛伦兹变换关系.

$$u_4'=\gamma u_4-\gamma\frac{v}{c}u_1$$

其中
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

即
$$\begin{aligned}\gamma_u'c&=\gamma\left(\gamma_u c-\frac{v}{c}u_1\right)\\&=\gamma\left(\gamma_u c-\frac{v}{c}\gamma_u\dot{x}\right)\\&=\gamma\gamma_u\left[c-\frac{v}{c}R\omega\cos(\omega t+\alpha)\right]\end{aligned}$$

将 t 换成固有时 $t=\gamma_u\tau$（τ 为固有时），则

$$u_4'=\gamma_u'c=\gamma\gamma_u\left[c-\frac{v}{c}R\omega\cos(\omega\gamma_u\tau+\alpha)\right]$$

还需将 γ_u 也写成已知量 m、q、R、B 的函数，

$$u^2=(R\omega)^2=R^2\left(\frac{qB}{m}\right)^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$u^2=\frac{(RqBC)^2}{(mc)^2+(RqB)^2}$$

$$\gamma_u=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{mc}\sqrt{(mc)^2+(RqB)^2}$$

$$u_4'=\frac{\gamma}{m}\left[\sqrt{(mc)^2+(RqB)^2}-\frac{v}{c}RqB\cos\left(\frac{qB}{m}\tau+\alpha\right)\right]$$

其中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

(3)
$$\frac{\mathrm{d}u_4'}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\gamma v}{c}R\left(\frac{qB}{m}\right)^2\sin\left(\frac{qB}{m}\tau+\alpha\right)$$

因为
$$p_4'=\frac{E'}{c}=\frac{m\gamma_u'c^2}{c}=mu_4'$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}p_4'}{\mathrm{d}\tau}=m\frac{\mathrm{d}u_4'}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\gamma vR}{mc}(qB)^2\sin\left(\frac{qB}{m}\tau+\alpha\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}\tau}=c\frac{\mathrm{d}p_4'}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\gamma vR}{m}(qB)^2\sin\left(\frac{qB}{m}\tau+\alpha\right)$$

在 S 系中只有磁场,没有电场,因而粒子的能量守恒,在 S' 系中既有磁场,又有电场,因而粒子的能量不守恒.

12.4.22　一个静止质量为 m、荷电 e 的粒子在恒定的电磁场中运动,在某一惯性参考系中,$\boldsymbol{E}=a\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{B}=b\boldsymbol{k}$. 阐明粒子的四维速度作为固有时的函数的微分方程,证明方程的解是指数函数的叠加,确定这些指数,在什么条件下(关于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$)四维速度的所有分量沿其轨道是有界的.

解　在三维空间的运动微分方程为
$$\frac{\mathrm{d}(m\gamma\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\tag{1}$$

两边点乘 $m\gamma c^2\boldsymbol{v}$,

因为
$$\boldsymbol{p}=m\gamma\boldsymbol{v}$$
所以
$$\frac{1}{2}c^2\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}t}=m\gamma c^2\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$
因为
$$E^2=c^2p^2+m^2c^4$$
所以
$$\frac{\mathrm{d}E^2}{\mathrm{d}t}=2E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=c^2\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}t}$$
又有
$$E=m\gamma c^2$$
$$E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}c^2\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}t}=m\gamma c^2\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=E\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$
即
$$\frac{\mathrm{d}(m\gamma c^2)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\tag{2}$$

用 $\mathbb{u}$、$\mathbb{F}$ 分别表示四维速度矢量和四维力矢量,
$$\mathbb{u}=(\gamma\boldsymbol{v},\gamma c),\quad \mathbb{F}=\left(\gamma\boldsymbol{F},\gamma\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)$$

采用固有时,$\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau$,式(1)可改写为
$$\frac{\mathrm{d}(m\gamma\boldsymbol{v})}{\gamma\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{F},\qquad m\frac{\mathrm{d}(\gamma\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\boldsymbol{F}$$

式(2)可改写为
$$\frac{\mathrm{d}(m\gamma c^2)}{\gamma\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v},\qquad m\frac{\mathrm{d}(\gamma c)}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}}{c}$$

改写后的式(1)、(2)可合写为四维速度关于固有时的微分方程
$$m\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{u}}{\mathrm{d}\tau}=\mathbb{F}\tag{3}$$

今
$$\boldsymbol{F}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=e(a+bv_y)\boldsymbol{i}-ebv_x\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}=eav_x$$

$$\mathbb{F} = (\gamma \boldsymbol{F}, \gamma \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{c})$$

$$= (\gamma e(a + bv_y),\ -\gamma ebv_x, 0, \gamma \frac{ea}{c} v_x)$$

$$= (\frac{ea}{c} u_4 + ebu_2,\ -ebu_1, 0, \frac{ea}{c} u_1)$$

将上述$\mathbb{F}$代入式(3)，写成分量方程，

$$m \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{ea}{c} u_4 + ebu_2$$

$$m \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\tau} = -ebu_1$$

$$m \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

$$m \frac{\mathrm{d}u_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{ea}{c} u_1$$

u_3 是常量. 令 $u_j = A_j e^{\lambda\tau}$，$(j=1,2,4)$，代入微分方程组，得

$$m\lambda A_1 - ebA_2 - \frac{ea}{c} A_4 = 0$$

$$ebA_1 + m\lambda A_2 = 0$$

$$-\frac{ea}{c} A_1 + m\lambda A_4 = 0$$

A_1、A_2、A_4 不全为零，必须其系数行列式为零.

$$\begin{vmatrix} m\lambda & -eb & -\frac{ea}{c} \\ eb & m\lambda & 0 \\ -\frac{ea}{c} & 0 & m\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$m\lambda\left(m^2\lambda^2 + e^2b^2 - \frac{e^2a^2}{c^2}\right) = 0$$

解出

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{e}{mc}\sqrt{a^2 - c^2b^2}, \quad \lambda_3 = -\frac{e}{mc}\sqrt{a^2 - c^2b^2}$$

四维速度各分量除 u_3 为常量外，均是以 λ_1、λ_2、λ_3 为指数函数的线性叠加，所有分量作为固有时的函数均有界要求 λ_1、λ_2、λ_3 为虚数或零，由此要求：

$$|a| \leqslant |cb| \qquad 即 \qquad |\boldsymbol{E}| \leqslant c|\boldsymbol{B}|$$

12.4.23 考虑图 12.32 所示的反应，其中静止质量为 m_1 和 m_2 的粒子是入射粒子，而静止质量为 m_3 和 m_4 的粒子是出射粒子，$\mathbb{k}$、$\mathbb{p}$ 是它们的四维动量，$\mathbb{k}$ 的定义为$\mathbb{k} = \left(\boldsymbol{k}, \mathrm{i}\frac{E}{c}\right)$，下面给出的变量常用来描述这种类型的反应.

$$s = -(\mathbb{k}_1 + \mathbb{p}_1)^2, t = -(\mathbb{k}_1 - \mathbb{k}_2)^2, u = -(\mathbb{k}_1 - \mathbb{p}_2)^2$$

$(\mathbb{k}_1 + \mathbb{p}_1)^2$ 是 $(\mathbb{k}_1 + \mathbb{p}_1) \cdot (\mathbb{k}_1 + \mathbb{p}_1)$ 的缩写.

(1) 证明：$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2 c^2$；

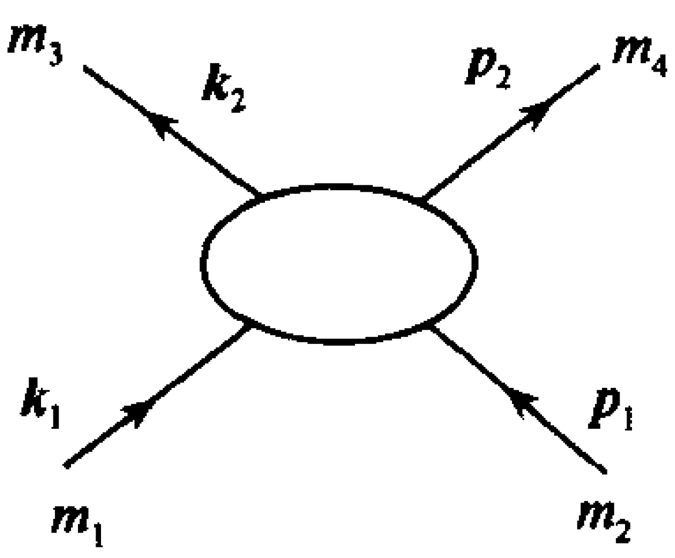


图 12.32

(2) 假设反应是弹性散射，并令 $m_1=m_3=\mu, m_2=m_4=m$，在动量中心参考系中，令静止质量为 μ 的粒子的入射和出射的三维动量分别为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$，尽可能简单地用 $\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}'$ 将 s、t、u 表示出来，说明 s、t、u 的物理意义；

(3) 假定在实验室参考系中，(2)向中所述静止质量为 m 的粒子初态是静止的，将静止质量为 μ 的粒子在实验室参考系中的初能量、末能量及散射角用 s、t、u 表示出来.

解　(1) $\mathbb{k}^2$、$\mathbb{p}^2$ 均是洛伦兹不变量，等于在其静止参考系中的值，即

$$\mathbb{k}_1^2=-m_1c^2,\ \mathbb{k}_2^2=-m_3c^2,\ \mathbb{p}_1^2=-m_2c^2,\ \mathbb{p}_2^2=-m_4c^2$$

$$\begin{aligned}s+t+u&=-(\mathbb{k}_1+\mathbb{p}_1)^2-(\mathbb{k}_1-\mathbb{k}_2)^2-(\mathbb{k}_1-\mathbb{p}_2)^2\\&=-\mathbb{k}_1^2-\mathbb{p}_1^2-2\mathbb{k}_1\cdot\mathbb{p}_1-\mathbb{k}_1^2-\mathbb{k}_2^2\\&\quad+2\mathbb{k}_1\cdot\mathbb{k}_2-\mathbb{k}_1^2-\mathbb{p}_2^2+2\mathbb{k}_1\cdot\mathbb{p}_2\\&=-(\mathbb{k}_1^2+\mathbb{k}_2^2+\mathbb{p}_1^2+\mathbb{p}_2^2)-2\mathbb{k}_1\cdot(\mathbb{k}_1-\mathbb{k}_2+\mathbb{p}_1-\mathbb{p}_2)\\&=m_1^2c^2+m_3^2c^2+m_2^2c^2+m_4^2c^4-2\mathbb{k}_1\cdot(\mathbb{k}_1+\mathbb{p}_1-\mathbb{k}_2-\mathbb{p}_2)\end{aligned}$$

因为四维动量在反应中守恒，

$$\mathbb{k}_1+\mathbb{p}_1=\mathbb{k}_2+\mathbb{p}_2$$

所以

$$s+t+u=\sum_{i=1}^{4}m_i^2c^2$$

(2) 静止质量为 μ 和 m 的两粒子发生弹性散射，散射前后四维动量分别为$\mathbb{k}$、$\mathbb{p}$ 和 $\mathbb{k}'$、$\mathbb{p}'$.

在动量中心参考系中，在散射前后三维动量不仅守恒，且系统动量均为零，得

$$\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{p}'=0$$

$$\mathbb{k}=\left(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\sqrt{k^2+\mu^2c^2}\right),\quad \mathbb{p}=\left(-\boldsymbol{k},\mathrm{i}\sqrt{k^2+m^2c^2}\right)$$

$$\mathbb{k}'=\left(\boldsymbol{k}',\mathrm{i}\sqrt{k'^2+\mu^2c^2}\right),\quad \mathbb{p}'=\left(-\boldsymbol{k}',\mathrm{i}\sqrt{k'^2+m^2c^2}\right)$$

$$\begin{aligned}s&=-(\mathbb{k}+\mathbb{p})^2=-(\mathbb{k}^2+\mathbb{p}^2+2\mathbb{k}\cdot\mathbb{p})\\&=-[k^2-(k^2+\mu^2c^2)]-[k^2-(k^2+m^2c^2)]\\&\quad-2\left[-k^2-\sqrt{(k^2+\mu^2c^2)(k^2+m^2c^2)}\right]\\&=\mu^2c^2+m^2c^2+2k^2+\sqrt{(k^2+\mu^2c^2)(k^2+m^2c^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t&=-(\mathbb{k}-\mathbb{k}')^2=-(\mathbb{k}^2+\mathbb{k}'^2-2\mathbb{k}\cdot\mathbb{k}')\\&=-[k^2-(k^2+\mu^2c^2)]-[k'^2-(k'^2+\mu^2c^2)]\\&\quad+2\left[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'-\sqrt{(k^2+\mu^2c^2)(k'^2+\mu^2c^2)}\right]\\&=2\mu^2c^2+2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'-2\sqrt{(k^2+\mu^2c^2)(k'^2+\mu^2c^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u&=-(\mathbb{k}-\mathbb{p}')^2=-(\mathbb{k}^2+\mathbb{p}'^2-2\mathbb{k}\cdot\mathbb{p}')\\&=-[k^2-(k^2+\mu^2c^2)]-[k'^2-(k'^2+m^2c^2)]\end{aligned}$$

$$+2\left[-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'-\sqrt{(k^2+\mu^2c^2)(k'^2+m^2c^2)}\right]$$

$$=\mu^2c^2+m^2c^2-2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'-2\sqrt{(k^2+\mu^2c^2)(k'^2+m^2c^2)}$$

为了阐明 s、t 和 u 的物理意义，改写为

$$s=\left(\sqrt{k^2+\mu^2c^2}+\sqrt{k^2+m^2c^2}\right)^2=\frac{1}{c^2}\left(\sqrt{k^2c^2+\mu^2c^4}+\sqrt{k^2c^2+m^2c^4}\right)^2$$

可见，c^2s 是在动量中心参考系中做弹性散射的两粒子系统的总能量的平方.

$$t=-(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})^2+\left(\sqrt{k'^2+\mu^2c^2}-\sqrt{k^2+\mu^2c^2}\right)^2$$

t 是在两粒子弹性散射时，静止质量为 μ 的粒子在弹性散射过程中四维动量的增量的平方的负值.

$$u=-(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k})^2+\left(\sqrt{k'^2+m^2c^2}-\sqrt{k^2+\mu^2c^2}\right)^2$$

$$=-(-\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})^2+\left(\sqrt{k'^2+m^2c^2}-\sqrt{k^2+\mu^2c^2}\right)^2$$

u 是静止质量不同的两粒子在弹性散射前后四维动量的改变量的平方的负值.

其实，从定义式即能说明 t、u 这样的物理意义.

s、t、u 是粒子物理中处理两粒子弹性碰撞常用的具有洛伦兹不变性的量，称为孟德斯坦变量.

(3) 两粒子发生弹性散射，$\boldsymbol{p}=0$，

$$\mathbb{k}=\left(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\sqrt{k^2+\mu^2c^2}\right),\quad \mathbb{p}=(\boldsymbol{0},\mathrm{i}mc)$$

$$\mathbb{k}'=\left(\boldsymbol{k}',\mathrm{i}\sqrt{k'^2+\mu^2c^2}\right)$$

由四维动量守恒，

$$\mathbb{k}+\mathbb{p}=\mathbb{k}'+\mathbb{p}',\qquad \mathbb{k}-\mathbb{p}'=\mathbb{k}'-\mathbb{p}$$

$$s=-(\mathbb{k}+\mathbb{p})^2=-\mathbb{k}^2-\mathbb{p}^2-2\,\mathbb{k}\cdot\mathbb{p}$$

$$=-[k^2-(k^2+\mu^2c^2)]-(-m^2c^2)-2mc\sqrt{k^2+\mu^2c^2}$$

$$=\mu^2c^2+m^2c^2-2mE_\mu$$

所以
$$E_\mu=\frac{(\mu^2+m^2)c^2-s}{2m}$$

$$u=-(\mathbb{k}-\mathbb{p}')^2=-(\mathbb{k}'-\mathbb{p})^2=-\mathbb{k}'^2-\mathbb{p}^2+2\,\mathbb{k}'\cdot\mathbb{p}$$

$$=-[k'^2-(k'^2+\mu^2c^2)]-(-m^2c^2)+2\left(-mc\sqrt{k'^2+\mu^2c^2}\right)$$

$$=\mu^2c^2+m^2c^2-2mE'_\mu$$

所以
$$E'_\mu=\frac{(\mu^2+m^2)c^2-u}{2m}$$

$$t=-(\mathbb{k}-\mathbb{k}')^2=-\mathbb{k}^2-\mathbb{k}'^2+2\,\mathbb{k}\cdot\mathbb{k}'$$

$$=2\mu^2c^2+2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'-2\sqrt{k^2+\mu^2c^2}\cdot\sqrt{k'^2+\mu^2c^2}$$

$$=2\mu^2c^2+2kk'\cos\theta-\frac{2}{c^2}E_\mu E'_\mu$$

$$E_k^2 = c^2k^2 + \mu^2c^4, \quad k = \frac{1}{c}\sqrt{E_\mu^2 - \mu^2c^2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2kk'}\left(t - 2\mu^2c^2 + \frac{2}{c^2}E_\mu E'_\mu\right)$$

$$= \frac{c^2t - 2\mu^2c^4 + 2E_\mu E'_\mu}{2\sqrt{(E_\mu^2 - \mu^2c^4)(E'_\mu - \mu^2c^4)}}$$

将 E_μ 与 s 的关系,E'_μ 与 u 的关系代入上式,即得 $\cos\theta$ 与 s、t、u 的关系,经计算可得

$$\cos\theta = \frac{2m^2c^2t - 4m^2\mu^2c^4 + [(\mu^2+m^2)c^2 - s][(\mu^2+m^2)c^2 - u]}{\sqrt{[(\mu+m)^2c^2 - s][(\mu-m)^2c^2 - s][(\mu+m)^2c^2 - u][(\mu-m)^2c^2 - u]}}$$



物理学大题典

20年磨一剑　30位资深教授合作的结晶

150位高才生的灵性显现

《物理学大题典》是中国科学技术大学30位资深教授长期鼎力合作的成果。这套大型大学物理题解丛书的前身是在中国物理学界久负盛名的《美国物理试题与解答》丛书。《美国物理试题与解答》是CUSPEA项目的成果，内容主要是美国名牌大学研究生院的入学试题解答。本次修订工作历时近2年，丛书除继续涵盖力、热、光、电、近代物理到四大力学全部基础物理学内容之外，还包括了原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学和量子信息物理等内容，大体涵盖了当前综合性大学全部本科物理课程的内容。本次修订补充了近年美国的考题、中国的考题和俄罗斯等国的考题，也有一些题目源自编委们的科研工作成果。

《物理学大题典》以先进的教育理念为指导，注重物理、注重学科交叉、注重与科研结合，富于"当代感"，是物理系师生的必备工具书。

力学 下册 ①

①《力学》　②《电磁学与电动力学》　③《光学》
④《原子亚原子与相对论物理学》　⑤《热学　热力学　统计物理》
⑥《量子力学》　⑦《固体物理及物理量测量》



O-2243.0101

ISBN 7-03-015494-0

9 787030 154941 >

ISBN 7-03-015494-0
定　价：98.00 元
（上、下册）

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝力学　　（下册）
作者＝请自己补充
页数＝请自己补充
ＳＳ号＝１１４９７６８４
出版日期＝请自己补充
出版社＝请自己补充